Lógica de primeira ordem

A lógica proposicional é de uso simples, mas revela os seguintes problemas:

- Temos que definir e manipular uma grande quantidade de proposições.
- E difícil tratar ações e mudança de estado.
- O poder de representação é fraco. É difícil representar de uma maneira eficiente e legível as relações entre os objetos do mundo.

Por exemplo, com a lógica proposicional, não podemos provar que o fato *O professor de IA é orgulhoso* é uma consquência lógica dos seguintes fatos:

Todos os homens são orgulhosos.
O professor de Lógica é um homem.

Na lógica proposicional, usaríamos três proposições:

P:	Todos os homens são orgulhosos
Q:	O professor de Lógica é um homem
R:	O professor de Lógica é orgulhoso.

Se fizermos as tabelas de verdade, podemos ver que o enunciado R não é necessariamente verdadeiro cada vez que os enunciados P e Q são. O problema é que a lógica proposicional não detalha bastante o conteúdo de cada proposiçao. É por isso que precisamos da lógica de primeira ordem.

A logica de primeira ordem supõe que o mundo é constituído de objetos, coisas com uma identidade individual, e propriedades, que permitem distinguir os objetos entre eles. Entre esses objetos existem relações e um objeto pode ser designados em função de outros objetos.

1 Sintaxe

Todo conhecimento representado em lógica de primeira ordem usa os mesmos conectores que a lógica proposicional. Além disso se usa:

Quantificadores: Um quantificador universal, representado pelo símbolo $\forall$, para indicar um fato verdadeiro para todo mundo, eu um quantificador existencial, representado pelo símbolo $\exists$, para representar um fato verdadeiro para no mínimo uma entidade.

Pontuação: Os símbolos '(', ')' e ','.

Variáveis: Normalmente representadas pelos símbolos $x, y, z, \ldots$.

Cada representação de conhecimento usa uma linguagem específica. Mais formalmente, uma *linguagem de primeira ordem* é um tupola $L(R, F, C)$, onde:

- R é um conjunto finito ou numerável de *predicados* (ou relacional). Cada um tem uma *aridade* que especifica o número de entidades que são relacionadas pelo predicado. Um predicado de aridade 1 representa uma propriedade. Um predicado de aridade n representa uma relação entre n entidades.
- F é um conjunto finito ou numerável de *síimbolos funcionais*. Cada um tem uma *aridade* que especifica o número de argumentos que ele exige. Informalmente, podemos dizer que uma função é uma maneira indireta de designar um objeto en funćão de outros objetos.
- C é um conjunto finito ou numerável de constantes. Como veremos na apresentação da semântica, uma constante permite designar diretamente uma entidade.

Já podemos ver que a lógica de primeira ordem permite representar objeto e propriedades e relações sobre esses objetos. Uma expressão que representa um objeto é um *termo*. As várias forma de termos que podemos escrever nessa lógica reflete as várias maneiras de referir-se a um objeto.

Seja uma linguagem de primeira ordem $L(R, F, C)$, os termos dessa linguagem e o menor conjunto que respeita as seguintes condições:

1. Toda variável é um termo de $L(R, F, C)$.

2. Toda constante $c \in C$ é um termo de $L(R,F,C)$. Usaremos aqui maiúsculas para designar constantes.

3. Se $f \in F$ é um símbolo funcional de aridade n e $t_1, t_2, \ldots t_n$ são termos de $L(R,F,C)$, então $f(t_1, t_2, \ldots t_n)$ também é um termo de $L(R,F,C)$.

Exemplo 1 Eis alguns exemplos de termos: x, salário(Michel), salário(x), impost(x,y), imposto(salário(irmão(Michel)),1000). O segundo e o terceiro termo representam, respectivamente, o salario de Michel e o salário de uma pessoa não especificada. O quarto termo usa uma função que retorna o maior de imposto pago, onde o primeiro argumento é o salário e o segundo, o valor isento de imposto. Finalmente, o último termo usa uma estrutura funcional mais complexa para expressar o imposto pago sobre o salário do irmão de Michel, supondo um valor de 1000.

Um termo que não contém nenhuma variável é um *termo fechado*.

É interessante ter a possibilidade de referir-se a entidade, mais é preciso também indicar propriedade e relações entre essas entidades. Por isso, usaremos fórmulas escritas em uma linguagem $L(R,F,C)$. Para definir o que é uma fórmula em lógica de primeira ordem, definimos primeiro o conceito de *fórmula atómica*:

> Um *fórmula atómica* é uma forma $p(t_1, \ldots, t_n)$, onde $p \in R$ é um predicado de aridade n e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de $L(R,F,C)$. Também $\perp$ e $\top$ são fórmulas atómica.

Agora podemos dizer o que é uma fórmula em lógica de primeira ordem. As fórmula de uma linguagem $L(R,F,C)$ é o menor conjunto respeitando as seguintes condições:

1. Toda fórmula atómica de $L(R,F,C)$ é uma fórmula de $L(R,F,C)$.

2. Se A é uma fórmula de $L(R,F,C)$, a fórmula $\neg A$ também é.

3. Para qualquer conector binário $\circ$, se A e B são fórmulas de $L(R,F,C)$, a fórmula $A \circ B$ também é.

4. Se A é uma fórmula de $L(R,F,C)$ e x é uma variável, então $(\forall x)A$ e $(\exists x)A$ também são fórmulas de $L(R,F,C)$.

Em uma fórmula da lógica de primeira ordem, podemos distinguir dois tipos de variáveis: as *variáveis livre*, que são as variáveis que respeitam a definição a seguir, e as outras, que serão ditas *variáveis ligadas*.

A definição de uma variável livre é a seguinte:

- Todas as variáveis de uma fórmula atómica são livres.
- As variáveis livres de uma fórmula $\neg A$ são as mesmas que as da fórmula A.
- As variáveis livres de uma fórmula $A \circ B$ (onde $\circ$ é qualquer conector binário) são as variáveis livres de A juntas com as variáveis livres de B.
- As variáveis livres de $(\forall x)A$ e $(\exists x)A$ são as variáveis livres de A exceto as ocorrência de x.

Mais simplesmente, uma variável livre é uma variáveis que não está no escopo de um quantificador. Por exemplo, na fórmula $(\forall x)(R(x,y) \supset R(x,C))$ as duas occorências de x são variáveis livres. Na fórmula $(\forall x)R(x,y) \supset R(x,C)$, a primeira occorência de x é uma variável livre, enquanto a segunda não é. Na verdade, nesse último caso uma não tem nada a ver com a outra e poderiamos usar nomes de variáveis diferentes: $(\forall x)R(x,y) \supset R(y,C)$.

Uma fórmula de $L(R,F,C)$ que não contém nenhuma variável livre é dita *fechada*. Normalmente, em uma representação de conhecimento, usa-se somente fórmulas fechadas.

Exemplo 2 Vamos agora escrever uma fórmula usando um dos termos apresentadono exemplo 1, para representar o fato que se o salário de Michel é alto, ele é feliz:

$$\mathsf{alto(salario(Michel))} \supset \mathsf{feliz(Michel)}$$

Generalizando um pouco, eis uma maneira de representar o fato que toda pessoa que tem um salário maior que o salário de uma outra pessoa é mais feliz:

$$(\forall x)(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x,y)]$$

Isso termina a descrição da sintaxe da lógica de primeira ordem. Vamos agora ver a semântica.

2 Semântica

A semântica da lógica de primeira ordem é mais complicado que a semântica da lógica proposicional. Na lógica proposicional, é só determinar, para cada proposição, se ela é verdadeira ou falsa. Na lógica de primeira ordem, tudo depende da interpretação dadas aos prédicados, símbolos funcionais e constantes. Além disso, devemos interpretar os quantificadores e as variáveis.

A idéia, basicamente, é supor a existência de um mundo constituido de entidades e relações entre esse entidade. Os elementos da nossa linguagem $L(R, F, C)$ serão *mapeados* nesse mundo.

Mais formalmente, devemos identifica um modelo $M = \langle D, I \rangle$ da linguagem $L(R, F, C)$, onde

- D é um conjunto não vazio cujos elementos constituem o domínio, isto é, as entidades que existem no mundo que queremos representar.
- I é um mapeamento, chamado *interpretação*, que relaciona as constantes $c \in C$ com um elemento de D, os símbolos funcionaiscom uma função e os predicados com uma relação:
  - $I(c) \in D$ se $c \in C$;
  - $I(f) : D^n \to D$ se $f \in F$ e de aridade n;
  - $I(P) \subseteq D^n$ se $P \in R$.

A partir de agora utilizaremos a notação y^I para representar o mapeamento $I(y)$. O conjunto de tuplas que representa a intepretação de um predicado P é chamado *extensão* de P.

Se uma fórmula contém variáveis livres, o significado dela depende do valor que será atribuído a essas variáveis. Nesse caso, o valor é arbitrário e pode ser qualquer elemento do domínio D. Definiremos então uma função de atribuiça $A : V \to D$, onde V é o conjunto de variáveis.

Portanto, para interpretar um termo, é preciso utilizar no mesmo tempo os mapeamentos I e A. Seja um termo t, a interpretação desse termo sera escrita $t^{I,A}$. Eis a definição de interpretação de um termo da linguagem $L(R, F, C)$:

1. Para $c \in C$, $c^{I,A} = c^I$
2. Para uma variável v, $v^{I,A} = c^A$
3. Para um símbolo funcional $f \in F$ de aridade n, $[f(t_1, \ldots, t_n)]^{I,A} = f^I(t_1^{I,A}, \ldots, t_n^{I,A})$

Exemplo 3 Considere o termo salario(Michel). Para interpretar esse termo, supohnamos um modelo cujo domínio $D = \{J, P, A, M, 500, 1000, 2000, 3000\}$. Os quatro primeiros elementos do domínio representam pessoas. Suponhamos agora a seguinte interpretação:

$$\mathsf{Michel}^I = M$$
$$\mathsf{salario}^I = \{\langle J, 500\rangle, \langle P, 500\rangle, \langle A, 1000\rangle, \langle M, 2000\rangle\}$$

Podemos agora identificar a entidade representada pelo termo salario(Michel) (não importa a função de atribuição A, visto que não tem variáveis no termo):

$$[\mathsf{salario}(\mathsf{Michel})]^{I,A} =$$
$$\mathsf{salario}^I(\mathsf{Michel}^{I,A}) =$$
$$\mathsf{salario}^I(\mathsf{Michel}^I) =$$
$$\mathsf{salario}^I(M) =$$
$$2000$$

Agora sabemos como interpretar os termos de uma linguagem de primeira ordem, isto é, sabemos identificar qual é o objeto do mundo referido pelo termo. Resta ver o significado de uma fórmula. Já sabemos que uma fórmula é composto de expressões predicativas combinados com conectores lógicos. Basicamente, uma fórmula recebe um valor de verdade que depende de cada fórmula atómica que ela contém.

Para descrever a semântica das fórmulas usaremos a notação $u[x]v$, onde u e v são funções de atribuiçãeo tais que v é igual a u com a exceção do valor atribuído a x, que pode ser diferente. Eis a semântica para as fórmulas da lógica de primeira ordem:

- Fórmulas atómicas: $[P(t_1, \ldots, t_n)]^{I,A} =$ **True** se e somente se $\langle t_1^{I,A}, \ldots, t_n^{I,A}\rangle \in P^I$. A interpretação das fórmulas $\perp$ e $\top$ é, respectivamente, $\perp^{I,A} =$ **False** e $\top^{I,A} =$ **True**.
- $[\neg X]^{I,A} =$ **True** se $X^{I,A} =$ **False**, **False** senão.
- $[X \circ Y]^{I,A} = X^{I,A} \circ Y^{I,A}$, onde $\circ$ é um conector lógico.
- $[(\forall x)\phi]^{I,A} =$ **True** se $\phi^{I,B} =$ **True** para toda função de atribuição B tal que $A[x]B$.

- $[(\exists x)\phi]^{I,A}$ = **True** se $\phi^{I,B}$ = **True** para no mínimo uma função de atribuição B tal que $A[x]B$.

Exemplo 4 Suponhamos o seguinte modelo:

$$D = \{a, b\}$$
$$p^I = \{a\}$$

Com esse modelo, a fórmula $(\exists x)\mathsf{p}(x)$ é verdadeira. Como essa fórmula não contém nenhuma variável livre, a função de atribuição inicial A utilizada para interpretá-la não importa. Segunda a definição da semântica, a fórmula é verdadeira se existe uma função de atribuição B, diferente de A somente pelo valor de x, tal que $[\mathsf{p}(x)]^{I,B}$ é verdadeira. Existe tal função: a que atribui o valor a para x. Nesse caso, é fácil ver que $[\mathsf{p}(x)]^{I,x=a}$ é verdadeiro, pois o elemento a faz parte da extensão do predicado 'p'.

Entretanto, a fórmula $(\forall x)\mathsf{p}(x)$ é falsa com esse modelo. Isso porque a fórmula $[\mathsf{p}(x)]^{I,B}$ deve ser verdadeira para qualquer B que difere de A somente pelo valor de x, o que evidentemente não é o caso. Se B atribui o valor b para x, a fórmula é falsa, pois não se encontra b na extensão do predicado 'p'. Un contra-exemplo é suficiente para tornar falsa a fórmula.

Exemplo 5 Suponhamos o seguinte modelo:

$$D = \{a, b\}$$
$$p^I = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$$

Com esse modelo, a fórmula $(\forall x)(\exists y)\mathsf{p}(x, y)$ é verdadeira. Seja A a função de atribuição usada inicialmente para interpretar essa fórmula. A seguinte fórmula deve ser verdadeira para qualquer função B que difere de A somente pelo valor de x: $[(\exists y)\mathsf{p}(x, y)]^{I,B}$. Como o domínio contém dois elementos, devemos conferir as seguintes fórmulas:

$$[(\exists y)\mathsf{p}(x, y)]^{I,x=a}$$
$$[(\exists y)\mathsf{p}(x, y)]^{I,x=b}$$

Para interpretar a primeira, devemos achar uma nova função de atribuição igual a B (isso significa que $x^C = x^B = a$ com a possível exceção de y. Se C associa y com a, a fòrmula é verdadeira, pois o tupla $\langle a, a\angle$ pertence à extensão do predicado 'p'. A segunda fórmula também é verdadeira, pois o tupla $\langle b, b\angle$ pertence à extensão do predicado 'p'.

Note que com o modelo dado acima, a fórmula $(\forall x)(\forall y)\mathsf{p}(x, y)$ é falsa. Note também que a ordem dos quantifica

---

Exemplo 6 Suponhamos o seguinte modelo:

$D = \{J, P, M, 500, 1000\}$.
$\mathsf{Michel}^I = M$
$\mathsf{salario}^I = \{\langle J, 500\rangle, \langle P, 500\rangle, \langle M, 1000\rangle\}$
$\mathsf{maior}^I = \{\langle 1000, 500\rangle\}$
$\mathsf{mais\_feliz}^I = \{\langle J, P\rangle, \langle M, J\rangle, \langle M, P\rangle\}$

Podemos conferir que com esse modelo, a seguinte fórmula é verdadeira: $(\forall x)(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]$. Essa fórmula não contém nenhuma variável livre. Então, a função de atribuição inicial A utilizada para interpretá-la não importa. Para ser verdadeira, a fórmula $(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,B}$ deve ser verdadeira para qualquer B que difere de A somente pelo valor atribuido a x. Como existe seis elementos em D, isso significa que essas cinco fórmulas devem ser verdadeiras:

$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=J}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=P}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=M}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=500}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=1000}$

Vamos considerar o primeira caso, onde a função de atribuição B atribui o valor J para x. Como temos de novo um quanficador universal, vamos ter de novo cinco fórmulas a interpretar, cada uma usando uma função de atribuição C que difere de B somente pelo valor de y:

$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=J,y=J}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=J,y=P}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=J,y=M}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=J,y=500}$
$(\forall y)[\mathsf{maior}(\mathsf{salario}(x), \mathsf{salario}(y)) \supset \mathsf{mais\_feliz}(x, y)]^{I,x=J,y=1000}$

Na primeira dessas fórmulas, devemos verificar que $\mathsf{maior}^I(\mathsf{salario}^I(J), \mathsf{salario}^I(J)) \supset \mathsf{mais\_feliz}^I(J, J)$. Na interpretação, podemos ver que $\mathsf{salario}^I(J) = 500$. Agora, o que devemos verificar é o seguinte: $\mathsf{maior}^I(500, 500) \supset \mathsf{mais\_feliz}^I(J, J)$.

Como o tupla $\langle 500, 500\langle$ não se encontra na extensão do predicado 'maior', o antecedente da implicação é falso, o que torna verdadeira a fórmula. Podemos verificar que as outras formulas também são verdadeiras. Repetindo isso para as outros valores de x, teremos 25 fòrmulas a verificar, e todas devex ser verdadeira. É fácil verificar que isso é o caso aqui.

Exemplo 7 Vamos ver agora um exemplo com uma variável livre: $(\forall x)\mathsf{p}(x, y)$, supondo o seguinte modelo:

$$D = \{a, b\}$$
$$p^I = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\ \langle b, b\rangle\}$$

Aqui o valor de verdade vai depender da função de atribuição usada para interpretar a fórmula. Suponhamos primeiro $y^A = a$. Nesse caso, para toda função B que difere de A somente pelo valor de x, a fórmula deve ser verdadeira. Isso significa que os tuplas $\langle a, a\rangle$ e $\langle b, a\rangle$ devem pertencer à extensão do predicado 'p'. Como o primeiro não pertence ao conjunto, a fórmula é falsa. Se a função A é tal que $y^A = b$, á fórmula é verdadeira, pois os dois tuplas $\langle b, a\rangle$ e $\langle b, b\rangle$ pertencem à extensão do predicado.

Agora que conhecemos a semântica da lógica de primeira ordem, vamos ver algumas definições importantes. Seja um modelo $M = (D, I)$.

- Uma fórmula phi é *verdadeira* no modelo M se $\phi^{I,A} = \mathbf{True}$ para toda função de atribuição A.
- Uma fórmula é *válida* (também digamos que ela é uma *tautologia*) se ela é verdadeira em todos os modelos da linguagem.
- Um conjunto de fórmulas S é satisfatível em um modelo M se existe um função de atribuição A tal que $phi^{I,A} = \mathbf{True}$ para todo $\phi in S$.
- Um conjunto de fórmulas S é satisfatível se ele é satisfatível em um modelo.

3 Comentário sobre os quantificadores

O quantificador universal serve para exprimir fatos que devem ser verdadeiros para todo mundo, como "todo homem é mortal":

$(\forall x)[\text{homem}(x) \supset \text{mortal}(x)]$

Esse enunciado é verdadeiro somente se no modelo toda entidade que pertence à extensão de *homem* também pertence à extensão de *mortal.*

EEis um modelo que torna verdadeira a fórmula acima:

homem^I = {**Paulo, Roberto, Clara**}
mortal^I = {**Paulo, Roberto, Clara, Conrad**}

Eis um modelo que torna falsa a fórmula acima:

homem^I = {**Paulo, Roberto, Clara, Matusalem**}
mortal^I = {**Paulo, Roberto, Clara, Conrad**}

Seria um erro tentar utilizar a seguinte fórmula para representa o fato que todo homem é mortal:

$(\forall x)[\text{homem}(x) \wedge \text{mortal}(x)]$

Nesse caso, para statisfazer essa fórmila, é preciso que todo objeto do mundo seja um homem e mortal, o que não é o que queremos.

O quantificador existencial serve para exprimir fatos como "há um homem que é presidente":
$(\exists x)[\text{homem}(x) \wedge \text{presidente}(x)]$

Essa fórmula é verdadeira somente se no modelo existe uma entidade que faz parte do conjunto associada a homem e também faz parte do conjunto associado a mortal.
Eis um modelo que torna verdadeira a fórmula acima:

homem^I = {**Paulo, Roberto, FHC**}
presidente^I = { **FHC** }

Isso também um modelo que torna falsa a fórmula acima:

homem^I = {**Paulo, Roberto, FHC, BillClinton**}
presidente^I = { **FHC, BillClinton** }

Mas isso é um modelo que torna falsa a fórmula:

$\text{homem}^I = \{$**Paulo, Roberto** $\}$
$\text{presidente}^I = \{$ **FHC, BillClinton** $\}$

Seria um erro utilzar a seguinte fórmula para representar o fato que há um homem que é presidente:

$$(\exists x)[\text{homem}(x) \supset \text{presidente}(x)]$$

Com essa representação, a última interpretação, que identifica presidentes que não são homens, seria um modelo no qual a fórmula é verdadeira, o que contraditaria o fato que queremos representar. Isso por causa da semântica do conector $\supset$: se o antecedente é falso, o enunciado é verdadeiro, sem consideração do consequente.

Eis um exemplo de fato cuja representação requer uma combinação de quantificadores:

Todo cidadão de um país vota.
$(\forall x)(\forall y)[\text{cidadao}(x, y) \wedge \text{pais}(y) \supset \text{vota}(x)]$

Nota: A frase é ambígua. Uma outra interpretação possível seria que existe um país onde todo cidadão vota. Contrariamente ao enunciado precedente, pode existir, en certos países, cidadões que não têm direito a votar:

$$(\exists y)(\forall x)[\text{pais}(y) \wedge (\text{cidadao}(x, y) \supset \text{vota}(x))]$$

Numa combinação de quantificadores existenciais e universais, a ordem dos quantificadores é importante:

Todo mundo ama alguém.
$\forall x \exists y \ \text{ama}(x, y)$
$\exists y \forall x \ \text{ama}(x, y)$

Nesse exemplo, a semântica da primeira fórmula é que para toda pessoa existe outra pessoa que ela ama. A segunda fórmula representa o fato que existe uma pessoa que todo mundo ama.

4 Exemplos de representação em lógica de primeira ordem

A tradução de um fato em forma lógica não é sempre fácil. Vamos ver alguns exemplos:

Fatos:
(1) Marcos era um homem.
(2) Marcos nasceu em Pompéia.
(3) Todos os que nasceram em Pompéia eram romanos.
(4) César era um soberano.
(5) Todos os romanos eram leais a César ou então odiavam-no.
(6) Todo mundo é leal a alguém.
(7) As pessoas só tentam assassinar soberanos aos quais não são leais.
(8) Marcos tentou assassinar César.

As formas lógicas:
(1) homem(Marcos)
(2) nascer(Marcos, Pompéia)
(3) $(\forall x)[\text{nascer}(x, \text{Pompéia}) \supset \text{romano}(x)]$
(4) soberano(César)
(5) $(\forall x)[\text{romano}(x) \supset (\text{leal}(x, \text{César}) \vee \text{odeia}(x, \text{César}))]$
(6) $(\forall x)(\exists y)\text{leal}(x, y)$
(7) $(\forall x)(\forall y)[(\text{tentar-assassinar}(x, y) \wedge \text{soberano}(y)) \supset \neg\text{leal}(x, y)]$
(8) tentar-assassinar(Marcos, César)

Para ser sistemático, é melhor substituir nascer(x,Pompéia) por pompeano(x):
(1) homem(Marcos)
(2) pompeano(Marcos)
(3) $\forall x\ [\text{pompeano}(x) \supset \text{romano}(x)]$
(4) soberano(César)
(5) $\forall x\ [\text{romano}(x) \supset (\text{leal}(x, \text{César}) \vee \text{odeia}(x, \text{César}))]$
(6) $\forall x \exists y\ \text{leal}(x, y)$
(7) $\forall x \forall y[(\text{tentar-assassinar}(x, y) \wedge \text{soberano}(y)) \supset \neg\text{leal}(x, y)]$
(8) tentar-assassinar(Marcos, César)

Outros exemplos
a) *Nem todos os alunos seguem ambos cursos de história e biologia.*
A tradução literal do fato é a seguinte:

$$\neg\forall x\ [\text{segue}(x, \text{Historia}) \wedge \text{segue}(x, \text{Biologia})]$$

b) *Apenas um aluno foi reprovado em história.*
O problema aqui é que queremos especificar que exatamente um aluno foi reprovado. O quantificador existencial não tem essa semântica. Então, para representar esse fato, precisamos de uma forma complexa:

$$\exists x\ [\text{reprovado}(x, \text{Historia}) \wedge \forall y\ (\text{reprovado}(y, \text{Historia}) \supset x = y)]$$

Essa fórmula tem duas partes. Uma primeira para exprimir que existe um aluno reprovado em história e uma segunda para que esse aluno reprovado seja único.

c) *Toda pessoa gosta de quem gosta do seu pai.*

Essa frase é ambígua. Vamos supor o significado mais natural. Eis uma primeira tentativa:

$$\forall x \forall y \forall z\ [\text{gosta}(x, y) \wedge \text{pai\_de}(y, z) \supset \text{gosta}(z, x)]$$

É possível melhorar essa representação. Considerando o fato que cada um tem um pai só, podemos usar uma função ao invés de um predicado, resultanto em uma fórmula mais concisa e que tem menos quantificadores:

$$\forall x \forall y\ [\text{gosta}(x, \text{pai\_de}(y)) \supset \text{gosta}(y, x)]$$

d) *Toda pessoa que despreza todos os políticos é inteligente.*

Primeira exemplo de tradução errada:
$$\forall x \forall y\ [\text{despreza}(x, y) \wedge \text{politico}(y) \supset \text{inteligente}(x)]$$

O sentido dessa fórmula é a seguinte: cada vez que achamos uma pessoa que despreza um político, temos que concluir que essa pessoa é inteligente. Isso não é o que queremos representar, isto é, uma pessoa é inteligente só se para cada político que encontramos, podemos verificar que ela o despreza.

Podemos entender isso com a seguinte interpretação, onde a única pessoa inteligente despreza todos os políticos:

D = { **Paulo, Clara, Edmundo, Maria** }
despreza^I = { <**Paulo**, **Clara**>,<**Paulo**, **Edmundo**>,< **Maria**, **Edmundo**> }
politico^I = { **Clara, Edmundo** }
inteligente^I = { **Paulo** }

Então, essa interpretação deveria ser um modelo. É fácil ver que não é o caso, pois a formula é falsa com a seguinte instanciação: x = **Maria**, y = **Edmundo**.

Segundo exemplo de tradução errada:
$\forall x[\forall y[\text{despreza}(x, y) \land \text{politico}(y)] \supset \text{inteligente}(x)]$

O problema com essa representação é que ela admite um modelo que não é aceitável:

D = { **Paulo, Edmundo** }
despreza^I = { <**Paulo**,**Edmundo**>}
politico^I = { **Edmundo** }
inteligente^I = { **Edmundo** }

Nessa interpretação, Paulo despreza todos os políticos e não é inteligente, o que não respeita o significado da frase. Essa interpretação é um modelo porque o antecedente da implicação é falsa para qualquer valor de x. Se x = **Paulo**, o antecedente é falso, pois o Paulo não é político. Isso é suficiente para torná-lo falso, mas note que também é falso no caso y = **Edmundo**, que não despreza ninguém. Se x = **Edmundo**, o antecedente é falso, pois Edmundo não despreza ninguém.

A representação certa é a seguinte:
$\forall x\ [\forall y\ (\text{politico}(y) \supset \text{despreza}(x, y)) \supset \text{inteligente}(x)]$

O sentido literal dessa fórmula é o seguinte: Para cada pessoa, se todos os políticos são desprezados por ela, então ela é inteligente. Isso corresponde à semântica do fato a representar, e é fácil mostrar que a interpretação é um modelo dessa fórmula, como esperado.

e) *Paulo é um barbeiro que barbeia todos aqueles que não se barbeiam eles mesmos.*

barbeiro(Paulo)
$\forall x\ [\neg\text{barbeia}(x, x) \supset \text{barbeia}(\text{Paulo}, x)]$

Nota: Para uma interpretação ser um modelo dessa representação, necessariamente Paulo tem que aparecer na relação associada ao predicado *barbeia*, porque no caso contrário o antecedente da implicação seria verdadeiro, o que exigiria que o consequente seja também verdadeiro. E isso seria impossível.

Consideramos, por exemplo, a seguinte interpretação:

barbeiro^I = {**Paulo**}
barbea ^{I} = { <**Paulo, João**>, <**Eduardo, Eduardo**>, <**Paulo, Robe**rto> }

Não dá pela razão seguinte. **Paulo** não se barbeia ele mesmo, pois <**Paulo, Paulo**> não está na extensão de barbeia. Então, a conseqüência do segundo enunciado deveria ser verdadeira, o que exige a existência de <**Paulo, Paulo**> na extensão.

É interessante notar também que se queremos representar que Paulo barbeia todos e somente aqueles que não se barbeiam eles mesmos, a base de conhecimento seria inconsistente. Nesse caso, a representação seria ligeiramente diferente:

barbeiro(Paulo)
$\forall x\ [\neg \text{barbeia}(x, x) \Leftrightarrow \text{barbiea}(\text{Paulo}, x)]$

Não é possível achar um modelo para esses fatos. Se <**Paulo, Paulo**> não existe na extensão do predicado *barbeia* então a segunda fórmula implica que ele deve existir, e vice versa.

f) *Ninguém gosta de um político inteligente.*

Essa frase é ambígua. Ela pode significar que não existe uma pessoa que gosta de um político inteligente, ou que existe um político inteligente que ninguém gosta. As representações são as seguintes:

Não existe uma pessoa que gosta de um político inteligente:

$$\neg\exists x \exists y[\text{gosta}(x, y) \wedge \text{politico}(y) \wedge \text{inteligente}(y)]$$

Existe um político inteligente que niguém gosta:

$$\exists y \forall x[\text{politico}(y) \wedge \text{inteligente}(y) \wedge \neg\text{gosta}(x, y)]$$

Exercício 1 Traduza as seguintes frases em fórmulas da lógica de predicados:

a) Todo programa em Prolog é compacto.
b) Todo aluno é estudioso.
c) Alguns feriados sao chuvosos.
d) Quem sabe faz e quem nao sabe ensina.
e) Tem uma mulher que gosta de todos os homens que não são vegetarianos.
f) Os políticos podem enganar algumas pessoas toda hora, e podem enganar todo mundo de vez em quando, mas não podem enganar todo mundo toda hora.
g) Todos os Brasileiros falam a mesma língua.

---

5 Transformação em forma normal

Em lógica de primeira ordem, a transformação em forma normal utiliza as mesmas regras que as usadas em lógica proposicional. Só acrescentamos algumas regras para processar as fórmulas que contém quantificadores. Em lógica de primeira ordem, uma cláusula é um disjunção de fórmulas atómicas que contém somente variáveis livres. Implicitamente, todas as varáveis serão consideradas como se fosse universalmente quantificadas. Por isso, precisamos de regras para eliminar os quantificadores. Eis as duas regras que serão utilizadas, além das outras que já temos:

- Se a fórmula é da forma $(\forall x)\phi$ ou $\neg(\exists x)\phi$, ela é substituída por uma formula ϕ' ou $\neg\phi'$, respectivamente, onde ϕ' é igual a ϕ, mas com a variável x trocada por uma nova variável v_i.
- Se a fórmula é da forma $(\exists x)\phi$ ou $\neg(\forall x)\phi$, ela é substituída por uma formula ϕ' ou $\neg\phi'$, respectivamente, onde ϕ' é igual a ϕ, mas com a variável x trocada por um termo $f(x_1, \ldots, x_n)$. A função f deve ser uma nova função que não existe aínda e as variáveis $x_1, \ldots, x_n$ são todas as variáveis livres da fórmula.

Eis alguns exemplos de transformação em forma normal:

$$\langle[(\forall x)(\forall y)((\mathrm{p}(x,y) \wedge \mathrm{q}(y)) \supset \neg\mathrm{r}(x,y))]\rangle$$
$$\langle[(\forall y)((\mathrm{p}(v_1,y) \wedge \mathrm{q}(y)) \supset \neg\mathrm{r}(v_1,y))]\rangle$$
$$\langle[((\mathrm{p}(v_1,v_2) \wedge \mathrm{q}(v_2)) \supset \neg\mathrm{r}(v_1,v_2))]\rangle$$
$$\langle[\neg(\mathrm{p}(v_1,v_2) \wedge \mathrm{q}(v_2)), \neg\mathrm{r}(v_1,v_2))]\rangle$$
$$\langle[\neg\mathrm{p}(v_1,v_2), \neg\mathrm{r}(v_1,v_2))], [\neg\mathrm{q}(v_2), \neg\mathrm{r}(v_1,v_2))]\rangle$$

$$\langle[\neg((\exists x)(\forall y)\mathrm{r}(x,y,f(x,y)) \supset (\exists x)(\forall y)(\exists z)\mathrm{r}(x,y,z))]\rangle$$
$$\langle[(\exists x)(\forall y)\mathrm{r}(x,y,f(x,y))],[\neg(\exists x)(\forall y)(\exists z)\mathrm{r}(x,y,z))]\rangle$$
$$\langle[(\forall y)\mathrm{r}(A,y,f(A,y))],[\neg(\exists x)(\forall y)(\exists z)\mathrm{r}(x,y,z))]\rangle$$
$$\langle[\mathrm{r}(A,v_1,f(A,v_1))],[\neg(\exists x)(\forall y)(\exists z)\mathrm{r}(x,y,z))]\rangle$$
$$\langle[\mathrm{r}(A,v_1,f(A,v_1))],[\neg(\forall y)(\exists z)\mathrm{r}(v_2,y,z))]\rangle$$
$$\langle[\mathrm{r}(A,v_1,f(A,v_1))],[\neg(\exists z)\mathrm{r}(v_2,k(v_2),z))]\rangle$$
$$\langle[\mathrm{r}(A,v_1,f(A,v_1))],[\neg\mathrm{r}(v_2,k(v_2),v_3))]\rangle$$