Provas com Resolução

Jomi Fred Hübner
jomi@inf.furb.br

FURB / BCC

Lógica **Proposicional**

- **Linguagem** para falar de proposições
  - ⋆ Sintaxe
  - ⋆ Semântica
- **Cálculo** para fazer deduções sobre as proposições
  - ⋆ Sistemas de prova
    - ∗ Dedução Natural
    - ∗ **Resolução**
    - ∗ ...

Motivação para Resolução

- Problemas com o sistema de prova Dedução Natural
  - ⋆ Dado um argumento, não existe um algoritmo baseado em Dedução Natural que diga se um argumento é válido.
  - ⋆ Exemplo: provas com raciocínio hipotético: o que supor?
- Propriedades do sistema de provas **Resolução**
  - ⋆ Correto e Completo
  - ⋆ Tem uma única regra de inferência!
  - ⋆ Não é muito "natural", as fórmulas precisam estar em um formato apropriado.

Forma normal conjuntiva (**FNC**)

Uma fórmula está na FNC sss está na forma

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$$

e cada α_i, chamado de **cláusula**, está na forma

$$\beta_1 \vee \beta_2 \vee \ldots \vee \beta_m$$

e β_i é um **literal** (símbolo proposicional ou sua negação).

Exemplos:

- P, $\neg P$, $\neg P \vee Q$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (R \vee T)$
- $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R \vee T) \wedge (T \vee S)$

Para toda fórmula existe uma FNC equivalente, que pode ser obtida assim:

1. Eliminação das implicações
   $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$
   $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
2. Distribuição da negação:
   $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
3. Distribuição da disjunção:
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Resolução

A prova por resolução utiliza uma **única** regra de inferência:

$$\frac{\alpha \vee \Phi \qquad \neg\alpha \vee \Psi}{\Phi \vee \Psi}\; R$$

Exemplos:

1	$P \vee Q$	
2	$\neg P \vee R$	
3	$Q \vee R$	R($\alpha = P$), 1, 2

1	$P \vee Q$	
2	$\neg P \vee Q$	
3	Q	R($\alpha = P$), 1, 2

1	P	
2	$\neg P$	
3	$\emptyset$ ou $false$	R($\alpha = P$), 1, 2

A cláusula vazia representa uma contradição ($false$)!

Exercício: quais as cláusulas derivadas de $\{P, \neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R\}$ por resolução?

Refutação por Resolução

Dado um conjunto de cláusulas Γ, para verificar se $\Gamma \vdash \alpha$ utilizando refutação deve-se

- utilizar a regra de resolução sobre o conjunto $\Gamma \cup \neg\alpha$ procurando gerar uma contradição.
- Se for gerada uma contradição, é porque $\neg\alpha$ não pode ser verdade, logo α é verdade.
- Se não for gerada uma contradição, nada se pode dizer.

Exemplo: $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \vdash R$

1	$P \vee Q$	primeira premissa
2	$\neg P \vee R$	FNC da segunda premissa
3	$\neg Q \vee R$	FNC da terceira premissa
4	$\quad \neg R$	negação da conclusão
5	$\quad \neg P$	R, 4, 2
6	$\quad Q$	R, 5, 1
7	$\quad R$	R, 6, 3
8	$\quad false$	R, 7, 4
9	R	refutação

Exemplo: **Socrátes e Platão**

Premissas

- Sócrates está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Platão (S), só **se** Platão estivesse disposto a visitá-lo (P);
  $P \rightarrow S$
- Platão está em tal situação que ele **não** estaria disposto a visitar Sócrates, **se** Sócrates estivesse disposto a visitá-lo; $S \rightarrow \neg P$
- Platão está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Sócrates, **se** Sócrates **não** estivesse disposto a visitá-lo. $\neg S \rightarrow P$

Conclusão:

- Pergunta-se: Sócrates está disposto a visitar Platão ou não?
  $(P \rightarrow S), (S \rightarrow \neg P), (\neg S \rightarrow P) \models S$

Transformação de $(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P) \wedge (\neg S \rightarrow P)$ em forma clausal:

- $P \rightarrow S$
  $\equiv \neg P \vee S$
- $S \rightarrow \neg P$
  $\equiv \neg S \vee \neg P$
- $\neg S \rightarrow P$
  $\equiv \neg\neg S \vee P$
  $\equiv S \vee P$

Prova do exemplo Socrátes e Platão

1	$\neg P \vee S$	
2	$\neg S \vee \neg P$	
3	$S \vee P$	
4	$\quad \neg S$	negação da conclusão
5	$\quad P$	R, 4, 3
6	$\quad \neg P$	R, 4, 1
7	$\quad false$	R, 5, 6

Exemplo: **Ana***

Premissas:

- **Se** Anelise **não** for cantora (P) **ou** Anamélia for pianista (Q), então Anaís será professora (R). $(\neg P \lor Q) \to R$
- **Se** Ana for atleta (S), então Anamélia será pianista (Q). $S \to Q$
- **Se** Anelise for cantora (P), então Ana será atleta (S). $P \to S$
- Anamélia **não** será pianista (Q). $\neg Q$

Conclusão:

- É possível concluir que Anaís é professora (R)? $(\neg P \lor Q) \to R, S \to Q, P \to S, \neg Q \models R$

Transformação de $(\neg P \lor Q) \to R, S \to Q, P \to S, \neg Q$ em forma clausal:

- $(\neg P \lor Q) \to R$
  $\equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor R$
  $\equiv (\neg\neg P \land \neg Q) \lor R$
  $\equiv (P \land \neg Q) \lor R$
  $\equiv (P \lor R) \land (\neg Q \lor R)$
- $S \to Q$
  $\equiv \neg S \lor Q$
- $P \to S$
  $\equiv \neg P \lor S$

Prova do exemplo **Ana***

1	$P \lor R$	
2	$\neg S \lor Q$	
3	$\neg P \lor S$	
4	$\neg Q$	
5	$\neg R$	negação da conclusão
6	P	R, 5, 1
7	S	R, 6, 3
8	Q	R, 7, 2
9	$false$	R, 8, 4

Exemplo: **Detetives**

Premissas:

- **Se não** há sangue na cena do crime (S), o matador é um profissional (P). $\neg S \to P$
- **Ou** houve poucos ruídos no momento do crime (R) **ou** o matador **não** é um profissional. $\neg(R \leftrightarrow \neg P)$
- **Não** há sangue na cena do crime. $\neg S$

Conclusões:

- É possível concluir que o **matador é profissional**? $((\neg S \to P), (\neg(R \leftrightarrow \neg P)), (\neg S) \models P)$
- É possível concluir que **houve poucos ruídos**? $((\neg S \to P), (\neg(R \leftrightarrow \neg P)), (\neg S) \models R)$

Transformação de $(\neg S \rightarrow P) \wedge (\neg(R \leftrightarrow \neg P)) \wedge (\neg S)$ em forma clausal:

- $(\neg S \rightarrow P)$
  $\equiv S \vee P$
- $(\neg(R \leftrightarrow \neg P))$
  $\equiv (\neg((\neg R \vee \neg P) \wedge (R \vee P)))$
  $\equiv \neg(\neg R \vee \neg P) \vee \neg(R \vee P)$
  $\equiv (R \wedge P) \vee (\neg R \wedge \neg P)$
  $\equiv ((R \wedge P) \vee \neg R) \wedge ((R \wedge P) \vee \neg P)$
  $\equiv (R \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (R \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg P)$
  Cláusulas que são tautologia podem ser removidas.
- $(\neg S)$

Prova para o exemplo dos **Detetives**

1	$S \vee P$	
2	$\neg R \vee P$	
3	$R \vee \neg P$	
4	$\neg S$	
5	$\neg P$	negação da conclusão
6	S	R, 5, 1
7	$false$	R, 6, 4

1	$S \vee P$	
2	$\neg R \vee P$	
3	$R \vee \neg P$	
4	$\neg S$	
5	$\neg R$	negação da conclusão
6	$\neg P$	R, 5, 3
7	S	R, 6, 1
8	$false$	R, 7, 4