Capítulo 2

Lógica Proposicional

Em vez de partir diretamente para uma apresentação de como formalizar conhecimento em lógica proposicional, é feita inicialmente uma introdução à natureza da "realidade" que se pode formalizar, assim como dos conceitos abstraídos a partir dessa realidade.

2.1 A realidade sob a ótica da lógica proposicional

Que tipo de realidade pode ser formalizada através da lógica proposicional? Informalmente, a realidade é vista como composta de *proposições* e *argumentos* que envolvem tais proposições. Uma proposição é um enunciado susceptível de ser *verdadeiro* ou *falso*. Dois princípios importantes assumidos na lógica matemática clássica são:

- princípio da *não contradição*: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo;
- princípio do *terceiro excluído*: toda proposição é verdadeira ou falsa.

Existem dois tipos de proposições: as *simples* e as *compostas*. Qualquer enunciado susceptível de ser verdadeiro ou falso pode ser considerado como uma proposição simples na atividade de modelagem; basta que ela possa ser considerada como *indivisível*, ou seja, não constituída de proposições mais simples. Observe que um mesmo enunciado pode ser considerado simples em uma aplicação e composto em outra. A escolha dos enunciados a serem considerados simples é uma das tarefas da (arte da) modelagem conceitual.

Exemplo 1 Podem ser consideradas proposições simples:

- *Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais.*
- *Graciliano Ramos escreveu "Memórias do Cárcere".*
- $2 + 2 = 5$.
- *2 é um número primo.*

- *Elvis não morreu.*

Já expressões do tipo "a capital de Minas Gerais" ou "2+2" não podem ser consideradas proposições (nem simples, nem compostas), visto que não são susceptíveis de serem verdadeiras ou falsas. □

Uma proposição composta é um enunciado visto como constituído de outras proposições mais simples de forma a expressar uma:

- *Negação.* A proposição afirma que certa proposição não é verdadeira. Exemplo: *a lua não está visível hoje* é a negação de *a lua está visível hoje*.

- *Conjunção.* Afirma que duas proposições são verdadeiras. Exemplo: *o dia está lindo, embora esteja nublado* é a conjunção de *o dia está lindo* e *está nublado*.

- *Disjunção.* Afirma que pelo menos uma dentre duas proposições é verdadeira. Exemplo: *Godofredo estuda muito ou é inteligente* diz que *Godofredo estuda muito* ou *Godofredo é inteligente* ou *Godofredo estuda muito e é inteligente*.

- *Condicional.* Afirma que caso uma certa proposição seja verdadeira, uma outra também é, ou seja, não é o caso que a primeira possa ser verdadeira e a outra falsa. Exemplo: *se chover hoje, não vou ao cinema* diz que se a proposição *hoje vai chover* for verdadeira, então a proposição *hoje não vou ao cinema* é verdadeira.

- *Bicondicional.* Afirma que uma certa proposição é verdadeira exatamente nos casos em que uma outra também é. Exemplo: *o número é par se, e somente se, seu quadrado é par* diz que as proposições *o número é par* e *o quadrado do número é par* são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

Em português, existem muitas formas de expressar esses tipos de composições. Por outro lado, uma sentença em português normalmente apresenta um conteúdo que não pode ser totalmente expresso utilizando apenas tais tipos de composições. Às vezes a "aproximação" obtida ao se expressar o que é possível expressar via lógica proposicional é bastante crua... Mas, se ela for suficiente para os propósitos de uma aplicação específica, por que não? Economia conceitual pode levar a economia formal, que pode levar a maior eficiência (de processamento, do entendimento do cerne de uma questão etc.).

Exemplo 2 Seguem mais exemplos de proposições que podem ser vistas como compostas:

- *O número 5 não é negativo.* É a negação da proposição *o número 5 é negativo*.

- *O número 1 é ímpar e o 2 é par.* É a conjunção de duas proposições: *o número 1 é ímpar* e *o número 2 é par*.

- *Mário é arquiteto ou engenheiro.* É a disjunção de duas proposições: *Mário é arquiteto* e *Mário é engenheiro*.

- *Se José é engenheiro, então ele sabe matemática.* É uma proposição condicional: é verdade que *José sabe matemática*, se for verdade que *José é engenheiro*. Em outras palavras: não é possível (é falso) que *José sabe matemática* seja verdadeira e *José é engenheiro* seja falsa.

- *Se o Sr. Silva está feliz, então a Sra. Silva não está feliz, e se o Sr. Silva não está feliz, então a Sra. Silva está feliz.* É a conjunção de duas proposições condicionais: (1) *se o Sr. Silva está feliz, então a Sra. Silva não está feliz* e (2) *se o Sr. Silva não está feliz, então a Sra. Silva está feliz.* A proposição condicional (1) diz que a negação de *a Sra. Silva está feliz* é verdadeira caso *o Sr. Silva está feliz* seja verdadeira. E a proposição condicional (2) diz que a proposição *a Sra. Silva está feliz* é verdadeira caso a negação de *o Sr. Silva está feliz* seja verdadeira.

Observe que qualquer uma dessas proposições pode ser considerada uma proposição simples. Por exemplo, se a primeira proposição acima for considerada simples (na etapa de modelagem), não mais será possível distinguir que ela é a *negação* da proposição *o número 5 é negativo.* □

Um argumento, tipicamente, diz que uma certa proposição (a *conclusão*) é verdadeira caso as proposições de um certo conjunto (as *premissas*) sejam verdadeiras. Segue um exemplo.

Exemplo 3 Segue um argumento do tipo que pode ser modelado e formalizado mediante a lógica proposicional.

Supondo que:

- *Mário é arquiteto ou engenheiro;*
- *se Mário é engenheiro então ele sabe matemática; e*
- *Mário não sabe matemática;*

pode-se concluir que *Mário é arquiteto.*

Deve-se notar que dificilmente esse argumento fará sentido se alguma das três primeiras proposições for considerada uma proposição simples. Se a primeira for considerada uma disjunção, a segunda uma condicional e a terceira uma negação, aí sim, é o que basta para alguém se convencer que o argumento é "correto" (tente!). □

No nível formal, uma proposição será representada por meio de uma *fórmula*, sendo que para cada tipo de composição de proposições será utilizado um *conectivo lógico*.

Os conceitos correspondentes a "verdadeiro" e "falso" serão aqui referidos por V e F. Assim, V será usado no nível conceitual para denotar que uma certa proposição é *verdadeira* e F será usado para denotar que ela é *falsa*. Como já ressaltado anteriomente, esta associação entre V e verdadeiro e entre F e falso só existe em nossa mente. Uma função de "valoração lógica", que fará a ponte entre os níveis formal e conceitual, será definida adiante de tal maneira que, dada uma fórmula, ela associará à mesma um dos dois valores, V ou F. O uso de uma função é condizente com o princípio já referido da *não contradição*: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo; ou seja, a valoração deve ter realmente a propriedade de *unicidade* inerente a uma função. Além disso, coerente com o princípio do *terceiro excluído* (toda proposição é verdadeira ou falsa), a imagem da função de valoração deve ser o conjunto $\{V, F\}$.

Além de V e F, os valores passíveis de serem atribuídos como significado de uma fórmula pela função de valoração lógica, o nível conceitual conterá os elementos necessários para a definição dessa função de valoração: as *interpretações* de cada um dos conectivos lógicos.

Definida a função de valoração, que dará então a semântica das fórmulas (que representam proposições), será possível também definir em que condições um argumento é correto, como será visto mais adiante.

Após essa descrição bastante sucinta do que se espera modelar e formalizar (proposições e argumentos) e da estrutura matemática a ser utilizada na modelagem (basicamente, os dois valores, V e F) na próxima seção sobe-se diretamente para o nível formal, apresentando-se a linguagem proposicional. Em seguida, é apresentada a semântica da linguagem proposicional, descendo-se, portanto, para o nível conceitual esboçado anteriormente. Na seção seguinte, mas ainda no nível conceitual, é apresentada a noção de conseqüência lógica. Finalmente, sobe-se de novo para o nível formal apresentando-se a noção de dedução.

Exercícios

1. Identifique as proposições simples que compõem os as proposicões a seguir, assim como os tipos de composição. Procure identificar o máximo possível de proposições simples, isto é, considere uma proposição como simples somente se não for possível considerá-la composta. Há certos aspectos que não são representáveis em lógica proposicional; ignore-os.

a) João é político mas é honesto.

b) João é honesto, mas seu irmão não é.

c) Virão à festa João ou sua irmã, além da mãe.

d) A estrela do espetáculo não canta, dança, nem representa.

e) Sempre que o trem apita, João sai correndo.

f) Caso João não perca o dinheiro no jogo, ele vai à feira.

g) João vai ser multado, a menos que diminua a velocidade ou a rodovia não tenha radar.

h) Uma condição suficiente para que n seja ímpar, é que seja primo.

i) João vai ao teatro somente se estiver em cartaz uma comédia.

j) Se você for brasileiro, gosta de futebol, desde que não torça para o Tabajara.

k) A propina será paga exatamente nas situações em que o deputado votar como instruído pelo João.

l) Se João testemunhar e disser a verdade, ele será absolvido, mas se João não testemunhar, ele não será absolvido.

m) Se, mas somente se, João não peder o dinheiro no jogo, ele irá pagar o que lhe deve.

n) Se João for ao circo ou ao futebol hoje, ele estará sem dinheiro amanhã.

2. Considere o seguinte conjunto de proposições:

> O mordomo é inocente ou culpado. Se o mordomo é inocente, então a testemunha mentiu. Se o mordomo tem um cúmplice, então a testemunha não mentiu. A testemunha tendo mentido ou não, o mordomo tem um cúmplice.

Supondo que tais proposições sejam verdadeiras, responda: o mordomo é culpado ou é inocente? Explique sua resposta de uma forma coloquial, sem apelar para os conceitos e formalismos lógicos que porventura conheça.

2.2 A linguagem proposicional

O alfabeto da linguagem consta de três tipos de símbolos:

- *Variáveis proposicionais*: símbolos usados para representar proposições simples. Serão usados p, q, r e s, com ou sem índices (0, 1, 2, ...), além dos dois símbolos $\top$ e $\bot$.
- *Conectivos lógicos*: símbolos usados para representar os tipos de composição. São eles: $\neg$ (negação), $\land$ (conjunção), $\lor$ (disjunção), $\rightarrow$ (condicional) e $\leftrightarrow$ (bicondicional).
- *Símbolos auxiliares*: abre e fecha parênteses.

A linguagem nada mais é do que um conjunto de seqüências de símbolos, denominadas *fórmulas* (ou fórmulas bem formadas ou sentenças), que pode ser assim definido recursivamente:

a) toda variável proposicional é uma fórmula (denominada *fórmula atômica* ou *átomo*);

b) se α é uma fórmula, então $(\neg\alpha)$ é uma fórmula;

c) se α e β são fórmulas, então $(\alpha \land \beta)$, $(\alpha \lor \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas;

d) só são fórmulas as palavras que podem ser obtidas como mostrado em a, b e c.

O conjunto das variáveis proposicionais será denotado por $\mathcal{V}$ e o conjunto de todas as fórmulas por $\mathcal{F}$.

Exemplo 4 Considere o Exemplo 2. Seguem algumas representações de proposições simples por variáveis proposicionais (tal associação só existe na nossa cabeça):

- p: *o número 5 é negativo*;
- q_1: *o número 1 é ímpar*;
- q_2: *o número 2 é par*;
- r: *Mário é arquiteto*;
- s: *Mário é engenheiro*.

Seguem exemplos de fórmulas seguidas, entre parênteses, pelas proposições que representam:

- p (*o número 5 é negativo*);
- $(\neg p)$ (*o número 5 não é negativo*);
- $(q_1 \wedge q_2)$ (*o número 1 é ímpar e o 2 é par*);
- $(r \vee s)$ (*Mário é arquiteto ou engenheiro*);
- $((r \wedge s) \rightarrow p)$ (*se Mário é arquiteto e engenheiro, então o número 5 é negativo*).

□

Os símbolos $\top$ e $\bot$, na verdade, não são essenciais. Muitos autores formalizam a lógica proposicional sem esses dois símbolos. O uso dos mesmos pode apenas ser conveniente no nível de manipulação formal. Eles têm um significado fixo, que será visto na próxima seção, em que será definida a semântica da linguagem.

Exercícios

1. Represente as proposições do Exercício 1 da seção anterior por meio de fórmulas. Ao fazê-lo, indique que variáveis proposicionais representam que proposições simples. Como lá, procure usar o máximo possível de conectivos, isto é, considere uma proposição como simples somente se não for possível considerá-la composta. Aspectos não representáveis em lógica proposicional devem se ignorados.

2. Represente as proposições do Exercício 2 da seção anterior por meio de fórmulas.

2.3 Semântica da linguagem proposicional

A semântica das fórmulas será dada pela *função de valoração* $v^i : \mathcal{F} \to \{V, F\}$, uma função que dá, para uma certa interpretação i das variáveis proposicionais, o valor V ou F. Como já ressaltado anteriormente, V pode ser imaginado como *verdadeiro* e F como *falso*. Assim, dada uma fórmula $\alpha \in \mathcal{F}$, $v^i(\alpha)$ será V ou F. Veja que $v^i(\alpha)$ não é a proposição representada por α; esta só existe (se existir) na nossa cabeça. Em outras palavras, $v^i(\alpha)$ é a interpretação formal de α, V ou F, e da proposição correspondente a α (no nível da realidade) só é capturado matematicamente o fato de que ela é verdadeira (V) ou falsa (F).

A função de valoração é definida levando-se em consideração os significados de todos os símbolos do alfabeto (exceto os auxiliares), ou seja, das variáveis proposicionais e dos conectivos lógicos. Tais significados serão dados, cada um por uma função específica. Para o conectivo $\neg$, o significado será dado por uma função unária, e para os outros conectivos será dado por funções binárias, como será visto adiante. O significado de cada variável proposicional ν será dado por uma função sem argumentos ν^i, constante portanto, cujo valor deve ser V ou F. As variáveis proposicionais $\top$ e $\bot$, como os conectivos, terão interpretações fixas; no caso $\top^i = V$ e $\bot^i = F$. O i em ν^i, para cada $\nu \in V$, vem de *interpretação*; pode-se imaginar que i é uma função que dá interpretações para as variáveis proposicionais (V ou F). Para n variáveis proposicionais, existem 2^n funções i distintas, já que $\nu^i \in \{V, F\}$.

Exemplo 5 Sejam as seguintes variáveis proposicionais, com as respectivas proposições que elas representam (só na nossa cabeça):

- p: *a terra gira em torno do sol;*
- q: *Paris é a capital da França;*
- r: $\sqrt{2}$ *é um número racional.*

Então, de maneira consistente com a realidade em que vivemos, as duas primeiras proposições são verdadeiras e a terceira é falsa:

- $p^i = V$;
- $q^i = V$;
- $r^i = F$.

Se na nossa "realidade" tudo que interessa pode ser expresso a partir destas três proposições simples, então ν^i é irrelevante para ν diferente de p, q e r, mas é considerado como sendo um dos dois valores: V ou F. □

O conectivo $\neg$ é interpretado como uma função unária $fb_\neg : \{V, F\} \to \{V, F\}$[1] e os outros são interpretados como funções binárias $\phi : \{V, F\} \times \{V, F\} \to \{V, F\}$, $\phi \in \{fb_\wedge, fb_\vee, fb_\to, fb_\leftrightarrow\}$, em que

[1] O símbolo *fb* pode ser lido como "*função booleana*". Assim, $fb_\neg$ é a função booleana que dá o significado do conectivo $\neg$.

α	$(\neg\alpha)$
V	F
F	V

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

α	β	$(\alpha \to \beta)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

α	β	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Figura 2.1: Significados dos conectivos mediante tabelas da verdade.

- $fb_\neg(V) = F$ e $fb_\neg(F) = V$;
- $fb_\wedge(x, y) = V$ se $x = V$ e $y = V$, e $fb_\wedge(x, y) = F$ nos outros três casos;
- $fb_\vee(x, y) = F$ se $x = F$ e $y = F$, e $fb_\vee(x, y) = V$ nos outros três casos;
- $fb_\to(x, y) = F$ se $x = V$ e $y = F$, e $fb_\to(x, y) = V$ nos outros três casos;
- $fb_\leftrightarrow(x, y) = V$ se $x = y$, e $fb_\leftrightarrow(x, y) = F$ se $x \neq y$.

A interpretação (formal) de uma fórmula é a valoração lógica $v^i : \mathcal{F} \to \{V, F\}$, que pode ser definida recursivamente utilizando-se as interpretações dos símbolos do alfabeto:

- $v^i(\nu) = \nu^i$ para toda $\nu \in \mathcal{V}$;
- se $\alpha \in \mathcal{F}$, então $v^i((\neg\alpha)) = fb_\neg(v^i(\alpha))$;
- se $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, então
  $v^i((\alpha \wedge \beta)) = fb_\wedge(v^i(\alpha), v^i(\beta))$,
  $v^i((\alpha \vee \beta)) = fb_\vee(v^i(\alpha), v^i(\beta))$,
  $v^i((\alpha \to \beta)) = fb_\to(v^i(\alpha), v^i(\beta))$,
  $v^i((\alpha \leftrightarrow \beta)) = fb_\leftrightarrow(v^i(\alpha), v^i(\beta))$.

A Figura 2.1 mostra as interpretações das fórmulas através de *tabelas da verdade*. A primeira coluna da primeira tabela, de cabeçalho α, apresenta todos os valores possíveis para $v^i(\alpha)$ e a segunda coluna, de cabeçalho $(\neg\alpha)$, apresenta $v^i((\neg\alpha)) = fb_\neg(v^i(\alpha))$ para cada valor $v^i(\alpha) \in \{V, F\}$. As duas primeiras colunas da segunda tabela, de cabeçalhos α e β, apresentam todos os pares de valores possíveis para $v^i(\alpha)$ e $v^i(\beta)$ e a terceira coluna, de cabeçalho $(\alpha \wedge \beta)$, apresenta $v^i((\alpha \wedge \beta)) = fb_\wedge(v^i(\alpha), v^i(\beta))$ para cada par de valores possíveis para $v^i(\alpha)$ e $v^i(\beta)$. As outras tabelas têm explicações análogas.

Exemplo 6 Sejam as seguintes proposições simples, juntamente com variáveis proposicionais que as representam:

- p: *Marte é um planeta*;
- q: *A lua é um planeta*.

Tal situação é modelada em lógica proposicional fazendo-se

- $p^i = V$;
- $q^i = F$.

Tem-se então:

- $v^i((p \wedge q)) = fb_\wedge(v^i(p), v^i(q)) = fb_\wedge(p^i, q^i) = fb_\wedge(V, F) = F$. Logo, o valor lógico (interpretação formal) de $(p \wedge q)$ é F, caso p seja interpretada como V e q como F. A interpretação (em termos da "realidade") é que é *falso* que *Marte é um planeta* e *a lua é um planeta*, já que, embora Marte seja um planeta, a lua não é.
- $v^i((p \wedge (\neg q))) = fb_\wedge(v^i(p), v^i((\neg q))) = fb_\wedge(p^i, fb_\neg(v^i(q))) = fb_\wedge(V, fb_\neg(q^i)) = fb_\wedge(V, fb_\neg(F)) = fb_\wedge(V, V) = V$. Logo, a interpretação formal de $(p \wedge (\neg q))$ é V, e a interpretação (em termos da "realidade") é que é *verdadeiro* que *Marte é um planeta* e *a lua* não *é um planeta*.

Utilizando-se tabela da verdade, tem-se a valoração para $(p \wedge q)$ obtida consultando-se a segunda linha da tabela para o conectivo $\wedge$:

p	q	$(p \wedge q)$
V	F	F

A valoração para $(p \wedge (\neg q))$ é obtida em dois passos: primeiramente, obtém-se a valoração para $(\neg q)$ consultando-se a segunda linha da tabela para o conectivo $\neg$ (já que $v^i(q) = F$); depois, para $(p \wedge (\neg q))$ consultando-se a primeira linha da tabela para o conectivo $\wedge$ (já que $v^i(p) = V$ e $v^i((\neg q)) = V$). Sinteticamente:

p	q	$(\neg q)$	$(p \wedge (\neg q))$
V	F	V	V

□

Em síntese, a função de valoração v^i faz o mapeamento entre a linguagem, no nível formal, e uma estrutura matemática no nível conceitual constituída das funções $fb_\neg$, $fb_\wedge$, $fb_\vee$, $fb_\rightarrow$, $fb_\leftrightarrow$ e dos valores V e F (observando-se que cada valor p^i, q^i, r^i etc. é V ou F). Tal mapeamento está esquematizado na Figura 2.2, em que são mostrados apenas os símbolos do alfabeto e seus significados. A partir deles, a parte recursiva da definição de v^i mapeia qualquer sentença α no nível formal para seu significado $v^i(\alpha)$ no nível conceitual. Observe que $v^i(\alpha)$ só depende dos valores p^i, q^i, ... relativos às variáveis proposicionais, visto que os valores $\top^i$ e $\bot^i$ e as funções que interpretam

$$\begin{array}{r cccccccccl}
\text{NÍVEL CONCEITUAL:} & fb_{\neg} & fb_{\wedge} & fb_{\vee} & fb_{\rightarrow} & fb_{\leftrightarrow} & V & F & p^i & q^i & \cdots \\
 & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \Big\uparrow & \\
\textit{Interpretação formal} & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \cdots \\
 & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \Big| & \\
\text{NÍVEL FORMAL:} & \neg & \wedge & \vee & \rightarrow & \leftrightarrow & \top & \bot & p & q & \cdots
\end{array}$$

Figura 2.2: Interpretação da linguagem proposicional.

os conectivos são predeterminados (é como se $\neg^i = fb_{\neg}$, $\wedge^i = fb_{\wedge}$ etc., para toda interpretação i). Diz-se que $\top$, $\bot$ e os conectivos são *símbolos lógicos*, enquanto que as variáveis proposicionais são *símbolos não lógicos*.[2] Daqui para frente, o conjunto das interpretações específicas das variáveis proposicionais será referido como a *interpretação* i.

Uma maneira mais econômica do que ambos os métodos apresentados no Exemplo 6 para determinar o valor lógico de uma fórmula, dada uma interpretação i, seria :

1. escrever logo abaixo de cada variável proposicional ν da fórmula, $v^i(\nu) = \nu^i$; para a segunda fórmula do exemplo 6:

$$\begin{array}{cccc}
(p & \wedge & (\neg & q)) \\
\hline
V & & & F
\end{array}$$

2. determinar as valorações de subfórmulas que sejam possíveis determinar e anotar os valores debaixo dos conectivos principais das subfórmulas; para o exemplo:

$$\begin{array}{cccc}
(p & \wedge & (\neg & q)) \\
\hline
V & & \vdots & F \\
 & & V &
\end{array}$$

3. enquanto não seja anotado um valor debaixo do conectivo principal da fórmula, repita o passo 2. Para o exemplo, mais um passo é suficiente:

$$\begin{array}{cccc}
(p & \wedge & (\neg & q)) \\
\hline
V & \vdots & \vdots & F \\
 & \vdots & V & \\
 & V & &
\end{array}$$

Segue um exemplo mais elaborado.

[2]Em inglês, *nonlogical symbols*.

Exemplo 7 Para determinar $v^i(((\neg(p \to q)) \to (p \to (p \wedge q))))$ para uma interpretação i em que $p^i = F$ e $q^i = V$, pode-se fazer:

$$\begin{aligned} v^i(((\neg(p \to q)) \to (p \to (p \wedge q)))) &= fb_{\to}(fb_{\neg}(fb_{\to}(F,V)), fb_{\to}(F, \wedge(F,V))) \\ &= fb_{\to}(fb_{\neg}(V), fb_{\to}(F,F)) \\ &= fb_{\to}(F,V) \\ &= V. \end{aligned}$$

Isso corresponde ao seguinte esquema obtido segundo o último método visto anteriormente (as linhas são obtidas de cima para baixo):

$$\begin{array}{cccccccccc} ((\neg(& p & \to & q)) & \to & (p & \to & (p & \wedge & q))) \\ \hline \vdots & F & \vdots & V & \vdots & F & \vdots & F & \vdots & V \\ \vdots & & V & & \vdots & & \vdots & & F & \\ F & & & & \vdots & & V & & & \\ & & & & V & & & & & \end{array}$$

Esta apresentação de Vs e Fs em múltiplas linhas, de cima para baixo, não é importante; é apenas um recurso didático para mostrar a ordem de obtenção dos valores. Na verdade, esses Vs e Fs podem ser colocados em uma única linha. Com isso, toda a tabela da verdade pode ser expressa, linha por linha, logo abaixo da fórmula. □

Para efeitos de eliminação de parênteses, de forma a se obter fórmulas mais legíveis, será utilizada a seguinte ordem de precedência, da maior para a menor: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$. Para conectivos indênticos, faz-se a associação à esquerda.

Exemplo 8 A expressão $p \vee q \wedge \neg p \wedge r \to (q \vee r) \wedge p$ denota o mesmo que $p \vee q \wedge (\neg p) \wedge r \to (q \vee r) \wedge p$, pois $\neg$ tem a maior precedência. Como $\wedge$ tem precedência maior do que a dos outros conectivos restantes, e a associação é feita à esquerda, esta última denota o mesmo que $p \vee ((q \wedge (\neg p)) \wedge r) \to ((q \vee r) \wedge p)$. Como a precedência de $\vee$ é maior do que a de $\to$, obtém-se $(p \vee ((q \wedge (\neg p)) \wedge r)) \to ((q \vee r) \wedge p)$. Finalmente, obtém-se a fórmula $((p \vee ((q \wedge (\neg p)) \wedge r)) \to ((q \vee r) \wedge p))$ que é, na verdade, a fórmula abreviada pela expressão original. □

Observe que o valor lógico de uma fórmula é determinado pelos valores ν^i de cada variável proposicional ν que apareça na fórmula. Mas a veracidade de ν^i, com exceção dos casos em que $\nu = \top$ ou $\nu = \bot$, só pode ser conhecida consultando-se a "realidade" para saber se a proposição representada por ν é verdadeira ou falsa. No entanto, existem dois tipos de fórmulas para as quais o valor lógico não depende das interpretações i: as tautologias e as contradições.

Uma fórmula α é uma *tautologia* (é tautológica) se, e somente se, $v^i(\alpha) = V$ para qualquer interpretação i. Assim, $\top$ é, trivialmente, uma tautologia. E uma fórmula α é uma *contradição* (é contraditória) se, e somente se, $v^i(\alpha) = F$ para qualquer interpretação i. Assim, $\bot$ é, trivialmente, uma contradição.

Destas últimas definições e do significado de $\neg$, conclui-se que α é uma contradição se, e somente se, $\neg\alpha$ é uma tautologia, e também que α é uma tautologia se, e somente se, $\neg\alpha$ é uma contradição.

Uma maneira de determinar se uma fórmula α é uma tautologia é verificar, exaustivamente, se $v^i(\alpha) = V$ para as 2^n n-uplas de valores possíveis para as n variáveis que aparecem em α (usando a definição recursiva de v ou tabela da verdade). De forma análoga, para determinar se uma fórmula α é contraditória, basta verificar, exaustivamente, se $v^i(\alpha) = F$ para as 2^n n-uplas de valores.

Uma outra maneira, que costuma ser mais eficiente, é usar um método de *refutação*, cuja idéia é tentar falsear a fórmula "caminhando" do conectivo principal em direção ao interior da fórmula; ao encontrar uma variável é atribuído a ela F, se ela deve ser falseada, ou V se ela deve ser feita verdadeira. Se for impossível falsear a fórmula, isto é, se toda tentativa levar a contradição (a uma variável deve ser atribuído V e também F), a fórmula é tautologia; caso contrário, é encontrada uma interpretação que a falseia. Mais precisamente, para tentar encontrar uma interpretação i para a qual $v^i(\alpha) = F$, basta executar o seguinte algoritmo:

1. comece com ν^i *vazia* para toda variável ν de α; $\top^i = V$ e $\bot^i = F$;

2. chame a função fazfalsa(α); se ela retornar *verdadeiro*, é porque há uma interpretação i tal que $v^i(\alpha) = F$ e, portanto, α não é tautologia; se retornar *falso* é porque tal interpretação não existe e, portanto, α é tautologia.

Segue, em pseudolinguagem, algoritmos para as funções fazfalsa e fazverdadeira. A pseudolinguagem segue a linha convencional de linguagens procedurais tipo C ou Pascal. Está-se supondo a existência dos tipos fórmula e *booleano*, este último presente em todas (ou quase todas) as linguagens de programação procedural convencionais. Observe que as palavras *não*, *e* e *ou* pertencem à pseudolinguagem, sendo usadas em expressões lógicas da mesma, como é convencional. As palavras *verdadeiro* e *falso* serão usadas, na pseudolinguagem, para representar os dois valores booleanos. Portanto, se fazfalsa(α)= *verdadeiro*, então α não é tautologia, senão é tautologia (neste último caso, fazfalsa(α)= *falso*). Um detalhe importante, não presente em linguagens convencionais, é que a avaliação de uma expressão lógica e_1 *e* e_2, ou e_1 *ou* e_2, é *não determinística*: tanto pode ser avaliada a sub-expressão e_1 primeiro, quanto e_2. Nos exemplos apresentados a seguir, será sempre tomado o caminho de computação que dê menos trabalho (em particular, se a avaliação de uma sub-expressão for sufiente para determinar o resultado, a outra não é avaliada). Mas, ressalta-se que qualquer caminho que se siga leva à obtenção da solução, com mais, ou menos, trabalho, depedendo da ordem que se imponha às computações possíveis. As linhas estão numeradas apenas para referências posteriores nos exemplos.

função fazfalsa(fórmula α): retorna *booleano*:
caso α seja da forma

f1. variável ν: se $\nu^i = V$ então retorne *falso* (é impossível falsear α), senão faça $\nu^i := F$ e retorne *verdadeiro*.

f2. $\neg\beta$: retorne fazverdadeira(β);

f3. $\beta \wedge \gamma$: retorne fazfalsa(β) *ou* fazfalsa(γ);

f4. $\beta \vee \gamma$: retorne fazfalsa(β) *e* fazfalsa(γ);

f5. $\beta \rightarrow \gamma$: retorne fazverdadeira(β) *e* fazfalsa(γ);

f6. $\beta \leftrightarrow \gamma$: retorne (fazverdadeira(β) *e* fazfalsa(γ)) *ou* (fazfalsa(β) *e* fazverdadeira(γ)).

Um algoritmo similar (dual) para a função fazverdadeira:

função fazverdadeira(fórmula α): retorna *booleano*:
caso α seja da forma

v1. variável ν: se $\nu^i = F$ então retorne *falso* (é impossível fazer α verdadeira), senão faça $\nu^i := V$ e retorne *verdadeiro*.

v2. $\neg\beta$: retorne fazfalsa(β);

v3. $\beta \wedge \gamma$: retorne fazverdadeira(β) *e* fazverdadeira(γ);

v4. $\beta \vee \gamma$: retorne fazverdadeira(β) *ou* fazverdadeira(γ);

v5. $\beta \rightarrow \gamma$: retorne fazfalsa(β) *ou* fazverdadeira(γ);

v6. $\beta \leftrightarrow \gamma$: retorne (fazverdadeira(β) *e* fazverdadeira(γ)) *ou* (fazfalsa(β) *e* fazfalsa(γ)).

Seguem exemplos. Um f debaixo de um conectivo $\odot$ ou de uma variável significa que foi feita uma chamada fazfalsa(α), sendo $\odot$ o conectivo principal de α ou α a variável; um v significa que foi feita uma chamada fazverdadeira(α). Um V ou F debaixo de uma variável significa que foi atribuído tal valor à mesma pelo algoritmo. A tentativa de atribuir um valor contraditório é mostrada colocando-se os valores conflitantes dentro de um retângulo. No início de cada linha está indicada a linha respectiva do algoritmo.

Exemplo 9 A fórmula $\neg(p \wedge \neg p)$, que expressa o princípio da não contradição restrito à variável proposicional p, é tautológica:

- pela tabela da verdade:

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
V	V	F	F	V
V	F	F	V	F

- por refutação: deve-se tentar falsear a fórmula:

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$p)$
f				

Mas $v^i(\neg\alpha) = F$ apenas se $v^i(\alpha) = V$:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & \neg & (p & \wedge & \neg & p) \\
\hline
 & f & & \vdots & & \\
\text{f2} & & & v & &
\end{array}
$$

Para se ter $v^i(p \wedge \neg p) = V$, é preciso ter $v^i(p) = V$ e $v^i(\neg p) = V$:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & \neg & (p & \wedge & \neg & p) \\
\hline
 & f & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\text{f2} & & \vdots & v & \vdots & \\
\text{v3} & & v & & v &
\end{array}
$$

O algoritmo atribui V a p^i:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & \neg & (p & \wedge & \neg & p) \\
\hline
 & f & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\text{f2} & & \vdots & v & \vdots & \\
\text{v3} & & v & & v & \\
\text{v1} & & V & & &
\end{array}
$$

Para se ter $v^i(\neg p) = V$, é preciso ter $v^i(p) = F$:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & \neg & (p & \wedge & \neg & p) \\
\hline
 & f & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f2} & & \vdots & v & \vdots & \vdots \\
\text{v3} & & v & & v & \vdots \\
\text{v1} & & V & & & \vdots \\
\text{v2} & & & & & f
\end{array}
$$

O algoritmo tenta atribuir F a p^i:

$$
\begin{array}{r|ccccc}
 & \neg & (p & \wedge & \neg & p) \\
\hline
 & f & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f2} & & \vdots & v & \vdots & \vdots \\
\text{v3} & & v & & v & \vdots \\
\text{v1} & & \boxed{V} & & & \vdots \\
\text{v2} & & & & & f \\
\text{f1} & & & & & \boxed{F}
\end{array}
$$

Conclusão: a fórmula só é falseável se $v^i(p) = V$ e $v^i(p) = F$. Mas isto é impossível! Logo, a fórmula não é falseável e, portanto, é tautológica. O algoritmo, ao atingir a linha f1 para falsear p, uma variável à qual já fora atribuído o valor V, retorna *falso*; em seguida, ocorre uma seqüência retornos de *falso* até a chamada principal, e o algoritmo retorna *falso*.

□

Segue um exemplo mais elaborado para mostrar que algumas vezes o método de refutação apresentado pode ser bem mais eficiente que o da tabela da verdade.

Exemplo 10 A fórmula $(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) \rightarrow (\neg p \rightarrow q)$ é uma tautologia.

- Pela tabela da verdade, segundo formato, considera-se as $2^3 = 8$ linhas:

$(p$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\vee$	$r))$	$\rightarrow$	$(\neg$	p	$\rightarrow$	$q)$
V	V	F	V	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V	V	V
V	V	V	F	V	V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F

- Por refutação:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
 & (p & \leftrightarrow & (\neg & q & \vee & r)) & \rightarrow & (\neg & p & \rightarrow & q) \\
 & & \vdots & & & & & f & & & \vdots & \\
\text{f5} & & v & & & & & & & & f &
\end{array}
$$

- Neste ponto, pode-se tentar fazer $v^i(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) = V$ primeiro ou então $v^i(\neg p \rightarrow q) = F$. Escolhendo esta última opção:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
 & (p & \leftrightarrow & (\neg & q & \vee & r)) & \rightarrow & (\neg & p & \rightarrow & q) \\
 & & \vdots & & & & & f & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f5} & & v & & & & & & \vdots & \vdots & f & \vdots \\
\text{f5} & & & & & & & & v & \vdots & & f \\
\text{v2} & & & & & & & & & f & & \\
\text{f1} & & & & & & & & & F & & \\
\text{f1} & & & & & & & & & & & F
\end{array}
$$

Existem dois casos a considerar para fazer $v^i(p \leftrightarrow (\neg q \vee r)) = V$.

Caso 1:

	$(p$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\vee$	$r))$	$\rightarrow$	$(\neg$	p	$\rightarrow$	$q)$
	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		f	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f5	$\vdots$	v			$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	f	$\vdots$
f5	$\vdots$				$\vdots$			v	$\vdots$		f
v2	$\vdots$				$\vdots$				f		
f1	$\vdots$				$\vdots$				$\boxed{F}$		
f1	$\vdots$				$\vdots$						F
v6.1	v				v						
v1	$\boxed{V}$										

Caso 2:

	$(p$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	q	$\vee$	$r))$	$\rightarrow$	$(\neg$	p	$\rightarrow$	$q)$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	f	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
f5	$\vdots$	v	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	f	$\vdots$
f5	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		v	$\vdots$		f
v2	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			f		
f1	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			F		
f1	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$					$\boxed{F}$
v6.2	f		$\vdots$	$\vdots$	f	$\vdots$					
f1	F		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$					
f4			f	$\vdots$		f					
f2				v							
f1				$\boxed{V}$							

Logo, a fórmula não é falseável e, portanto, é tautologia.

□

Como às vezes existe mais de uma forma de fazer uma fórmula ou subfórmula verdadeira ou falsa, todas elas devem ser levadas em consideração, como mostrado no exemplo anterior e também no exemplo a seguir.

Exemplo 11 Para fazer a fórmula $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ falsa, tem-se dois casos a considerar:

Caso 1. $v^i(\neg p \vee q) = V$ e $v^i(p \rightarrow q) = F$:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & (\neg & p & \vee & q) & \leftrightarrow & (p & \rightarrow & q) \\
 & & & \vdots & & f & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f6.1} & & & v & & & \vdots & f & \vdots \\
\text{f5} & & & & & & v & & f \\
\text{v1} & & & & & & V & & \vdots \\
\text{f1} & & & & & & & & F
\end{array}
$$

Para fazer verdadeira uma disjunção existem dois casos:
Caso 1.1:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & (\neg & p & \vee & q) & \leftrightarrow & (p & \rightarrow & q) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & & f & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f6.1} & \vdots & \vdots & v & & & \vdots & f & \vdots \\
\text{f5} & \vdots & \vdots & & & & v & & f \\
\text{v1} & \vdots & \vdots & & & & \boxed{V} & & \vdots \\
\text{f1} & \vdots & \vdots & & & & & & F \\
\hline
\text{v4.1} & V & \vdots & & & & & & \\
\text{v2} & & \boxed{F} & & & & & &
\end{array}
$$

Caso 1.2:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & (\neg & p & \vee & q) & \leftrightarrow & (p & \rightarrow & q) \\
 & & & \vdots & \vdots & f & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f6.1} & & & v & \vdots & & \vdots & f & \vdots \\
\text{f5} & & & & \vdots & & v & & f \\
\text{v1} & & & & \vdots & & V & & \vdots \\
\text{f1} & & & & \vdots & & & & \boxed{F} \\
\hline
\text{v4.2} & & & & \boxed{V} & & & &
\end{array}
$$

Caso 2. $v^i(\neg p \vee q) = F$ e $v^i(p \rightarrow q) = V$:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & (\neg & p & \vee & q) & \leftrightarrow & (p & \rightarrow & q) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f & & \vdots & \\
\text{f6.2} & \vdots & \vdots & f & \vdots & & & v & \\
\text{f4} & f & \vdots & & f & & & & \\
\text{f2} & & v & & \vdots & & & & \\
\text{v1} & & V & & \vdots & & & & \\
\text{f1} & & & & F & & & &
\end{array}
$$

Para fazer verdadeira uma condicional existem dois casos:
Caso 2.1:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & (\neg & p & \lor & q) & \leftrightarrow & (p & \to & q) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f & \vdots & \vdots & \\
\text{f6.2} & \vdots & \vdots & f & \vdots & & \vdots & v & \\
\text{f4} & f & \vdots & & f & & \vdots & & \\
\text{f2} & & v & & \vdots & & \vdots & & \\
\text{v1} & & \boxed{V} & & \vdots & & \vdots & & \\
\text{f1} & & & & F & & \vdots & & \\
\hline
\text{v5.1} & & & & & & f & & \\
\text{f1} & & & & & & \boxed{F} & &
\end{array}
$$

Caso 2.2:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
 & (\neg & p & \lor & q) & \leftrightarrow & (p & \to & q) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f & & \vdots & \vdots \\
\text{f6.2} & \vdots & \vdots & f & \vdots & & & v & \vdots \\
\text{f4} & f & \vdots & & f & & & & \vdots \\
\text{f2} & & v & & \vdots & & & & \vdots \\
\text{v1} & & V & & \vdots & & & & \vdots \\
\text{f1} & & & & \boxed{F} & & & & \vdots \\
\hline
\text{v5.2} & & & & & & & & \boxed{V}
\end{array}
$$

Logo, em qualquer um dos casos é impossível falsear a fórmula. Portanto, ela é uma tautologia. □

O exemplo a seguir tem sucesso na tentativa de falsear uma fórmula, mostrando, portanto, que ela não é tautológica.

Exemplo 12 Seja $\alpha = (p \to (q \lor r)) \lor (p \to q)$. Falseando α:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & (p & \rightarrow & (q & \vee & r)) & \vee & (p & \rightarrow & q) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & f & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{f4} & \vdots & f & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & f & \vdots \\
\text{f5} & v & & \vdots & f & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{v1} & V & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{f4} & & & f & & f & & \vdots & & \vdots \\
\text{f1} & & & F & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\text{f1} & & & & & F & & \vdots & & \vdots \\
\text{f5} & & & & & & & v & & f \\
\text{v1} & & & & & & & V & & \vdots \\
\text{f1} & & & & & & & & & F
\end{array}
$$

Logo, $v^i(\alpha) = F$ para $p^i = V$, $q^i = r^i = F$. Assim, α não é tautologia. □

Evidentemente, para determinar se uma fórmula α é uma contradição por refutação, basta ver se $v^i(\neg\alpha)$ pode ser F, ou seja, se $v^i(\alpha)$ pode ser V. Ou seja, tenta-se fazer a fórmula ser verdadeira; se não for possível ela ser verdadeira, então ela é uma contradição; caso contrário, não é uma contradição. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 13 A fórmula $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ é uma contradição, como atesta a segunte tentativa frustrada de fazê-la verdadeira:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & (p & \wedge & q) & \wedge & \neg & (p & \vee & q) \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & v & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{v3} & \vdots & v & \vdots & & v & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{v3} & v & & v & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{v1} & \boxed{V} & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{v1} & & & V & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{v2} & & & & & & \vdots & f & \vdots \\
\text{f4} & & & & & & f & & f \\
\text{f1} & & & & & & \boxed{F} & &
\end{array}
$$

Isto mostra que não existe i tal que $v^i((p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)) = V$. Assim, a fórmula é uma contradição. □

Uma fórmula α é uma *contingência* (é contingente) se, e somente se, α não é tautologia nem contradição. Ou seja, α é uma contingência se, e somente se, $v^i(\alpha) = V$ para alguma interpretação i e $v^i(\alpha) = F$ para alguma interpretação i.

Logo, toda fórmula é uma tautologia ou contradição ou contingência.

Define-se a seguir dois termos importantes:

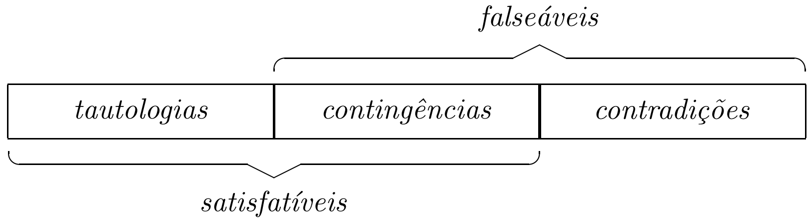

Figura 2.3: Relacionamentos entre tipos de fórmulas.

- α é *satisfatível* se, e somente se, existe i tal que $v^i(\alpha) = V$. Se α não é satisfatível, diz-se que é *insatisfatível*. Evidentemente, uma fórmula é insatisfatível se, e somente se, é contraditória.
- α é *falseável* se, e somente se, existe i tal que $v^i(\alpha) = F$. Assim, uma fórmula é falseável se, e somente se, não é tautológica, ou seja, é contingente ou contraditória.

A Figura 2.3 apresenta esquematicamente o relacionamento entre as classes de fórmulas definidas anteriormente.

Qual é o relacionamento entre uma fórmula α e sua negação $\neg\alpha$? Pode-se mostrar que:

- α é satisfatível se, e somente se, $\neg\alpha$ é falseável;
- α é falseável se, e somente se, $\neg\alpha$ é satisfatível;
- α é insatisfatível se, e somente se, $\neg\alpha$ é tautológica; e
- α é tautológica se, e somente se, $\neg\alpha$ é insatisfatível.

O problema de determinar se uma fórmula é satisfatível é um clássico problema NP-completo. Dadas as duas primeiras afirmativas acima, vê-se que o problema de determinar se uma fórmula é falseável é também NP-completo. Já os problemas de determinar se uma fórmula é tautológica ou se uma fórmula é insatisfatível são coNP-completos (aparentemente mais complexos, não?).

Uma interpretação i é dita ser um *modelo* para uma fórmula α se, e somente se, $v^i(\alpha) = V$. Assim, os modelos para uma certa fórmula correspondem às linhas da tabela da verdade para as quais ela é verdadeira. Em particular, qualquer i é modelo para $\top$ e nenhum é modelo para $\bot$. De forma similar, diz-se que i é um modelo para um conjunto de fórmulas H se, e somente se, para $v^i(\alpha) = V$ para toda $\alpha \in H$.

A seguir, será apresentada a noção de conseqüência lógica, que modela as situações em que se pode dizer que uma proposição segue (logicamente) de um conjunto de proposições assumidas como verdadeiras. É baseado nessa noção que o matemático usualmente trabalha (consciente ou inconscientemente), ao contrário de um provador automático, que usualmente trabalha com base em um sistema dedutivo. Este último, de qualquer forma, só pode ser avaliado, quanto a correção e completude, a partir da definição de conseqüência lógica.

Exercícios

1. A disjunção vista nessas notas é a chamada disjunção *inclusiva*. Uma outra, menos usada em matemática (mas mais usada em outros contextos, como construção de circuitos digitais) é a disjunção *exclusiva*, em que se considera α "ou" β verdadeira apenas se α é verdadeira ou β verdadeira, mas não ambas. Faça a tabela da verdade para "ou exclusivo". Mostre como expressar "ou exclusivo" sem um símbolo específico para tal (ou seja, usando apenas os conectivos já vistos).

2. Descubra, para cada fórmula abaixo, se ela é tautológica, contraditória ou contingente. Em seguida, explique da maneira mais sucinta que puder a sua resposta:

a) $\neg(\top \wedge \neg\bot) \leftrightarrow (\top \rightarrow \bot \vee \top)$

b) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q) \rightarrow q$

c) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(q \rightarrow p)$

d) $(p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \rightarrow \neg p)$

e) $\neg p \wedge (q \rightarrow p) \rightarrow \neg q$

3. Considere as fórmulas obtidas para o Exercício 2 da seção anterior. Construa um modelo para tal conjunto. Este modelo diz o que, caso se interprete as variáveis proposicionais de acordo com as proposições do Exercício 2?

4. Suponha que você tem algoritmos para determinar, para uma fórmula qualquer, se ela é:

a) tautologia;

b) contradição;

c) satisfatível;

d) falseável.

Explique como você poderia utilizar cada um desses quatro algoritmos para determinar, dados um conjunto de fórmulas H e uma fórmula α, se $H \models \alpha$. (Comece supondo que $H = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}\ldots$)

2.4 Conseqüência lógica

Uma fórmula α é uma *conseqüência lógica* de um conjunto de fórmulas H (ou H *implica logicamente* α), $H \models \alpha$, se, e somente se, para qualquer i, $v^i(\alpha) = V$ se para toda $\beta \in H$ $v^i(\beta) = V$. Em outras palavras, $H \models \alpha$ se, e somente se, todo modelo para H é modelo para α. Em particular, observe que $H \models \tau$ para toda tautologia τ e todo $H \subseteq \mathcal{F}$; assim, por exemplo, $H \models \top$ para todo $H \subseteq \mathcal{F}$ e $\{\} \models \tau$ para toda tautologia τ.

Exemplo 14 As únicas interpretações i que satisfazem $p \wedge q$ (ou seja, os únicos modelos para $p \wedge q$) são aquelas em que $p^i = q^i = V$. E, neste caso, $v^i(p) = V$, $v^i(q) = V$, $v^i(p \vee q) = V$, $v^i(p \rightarrow q) = V$, o que permite concluir, respectivamente que:

- $\{p \wedge q\} \models p$;
- $\{p \wedge q\} \models q$;
- $\{p \wedge q\} \models p \vee q$;
- $\{p \wedge q\} \models p \rightarrow q$.

Analisando-se as tabelas da verdade, vê-se que sempre que $v^i(p) = V$, segue-se que $v^i(p \vee q) = V$, $v^i(q \vee p) = V$ e $v^i(q \rightarrow p) = V$. Logo:

- $\{p\} \models p \vee q$;
- $\{p\} \models q \vee p$;
- $\{p\} \models q \rightarrow p$.

□

A seguir apresenta-se dois exemplos de padrões de inferência clássicos da lógica matemática, mostrando-se, assim, que eles são semanticamente corretos.

Exemplo 15 Um modelo i para $\{p \rightarrow q, p\}$ é tal que $v^i(p) = V$ e $v^i(p \rightarrow q) = V$. Disso, segue-se que $v^i(q) = V$. Portanto, $\{p \rightarrow q, p\} \models q$. Assim, dado que $p \rightarrow q$ e p sejam verdadeiras, q é necessariamente verdadeira! Na verdade, raciocínio análogo mostra um resultado mais geral: $\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \models \beta$ *para quaisquer fórmulas* α e β. Isto corrobora uma das regras de inferência mais utilizadas em demonstrações de teoremas: a regra *modus ponens*. Esta regra diz: se forem deduzidas as fórmulas $\alpha \rightarrow \beta$ e α, então pode-se deduzir a fórmula β.

De maneira similar, tem-se a regra *modus tollens*, que permite concluir $\neg\alpha$ a partir de $\alpha \rightarrow \beta$ e $\neg\beta$. Esta regra é corroborada pelo fato de que $\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$. □

O conectivo lógico $\rightarrow$ tem uma estreita relação com conseqüência lógica, relação esta expressa pelo teorema a seguir.

Teorema 1 *$H \cup \{\alpha\} \models \beta$ se, e somente se, $H \models \alpha \rightarrow \beta$.*

Prova

($\rightarrow$) Suponha que $H \cup \{\alpha\} \models \beta$. Seja um modelo m para H. Basta mostrar que $v^m(\alpha \rightarrow \beta) = V$. Dois casos:

Caso 1. $v^m(\alpha) = V$. Então m é também modelo para $H \cup \{\alpha\}$ e, como $H \cup \{\alpha\} \models \beta$, $v^m(\beta) = V$. Como se $v^m(\alpha) = V$, então $v^m(\beta) = V$, segue-se que $v^m(\alpha \rightarrow \beta) = V$.

Caso 2. $v^m(\alpha) = F$. Neste caso, $\mathit{fb}_{\rightarrow}(v^m(\alpha), v^m(\beta)) = V$ e, portanto, $v^m(\alpha \rightarrow \beta) = V$.

($\leftarrow$) Suponha que $H \models \alpha \rightarrow \beta$. Seja um modelo m para $H \cup \{\alpha\}$. Basta mostrar que $v^m(\beta) = V$. Sendo m um modelo para $H \cup \{\alpha\}$, m é modelo para H. Assim, como $H \models \alpha \rightarrow \beta$, $v^m(\alpha \rightarrow \beta) = V$. Como $v^m(\alpha) = V$, segue-se destas duas últimas que $v^m(\beta) = V$. □

Observe, em particular, que se $H = \emptyset$, então $\{\alpha\} \models \beta$ se, e somente se, $\{\} \models \alpha \to \beta$, ou seja $\{\alpha\} \models \beta$ se, e somente se, $\alpha \to \beta$ é uma tautologia.

Exemplo 16 Qualquer fórmula da forma $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ é tautológica. Segue-se, pelo teorema anterior, que $\{(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)\} \models \alpha \to \gamma$. Disto, segue-se também que $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \models \alpha \to \gamma$. Isto corrobora a chamada regra do *silogismo hipotético*: de $\alpha \to \beta$ e $\beta \to \gamma$, pode-se deduzir $\alpha \to \gamma$. □

Fórmulas da forma $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$ são tautologias. Logo, pelo Teorema 1, segue-se que $H \cup \{\alpha \wedge \neg\alpha\} \models \beta$. Portanto, qualquer fórmula é conseqüência lógica de uma contradição! Do ponto de vista de uma dedução, qualquer fórmula pode ser deduzida de uma contradição (direta ou indiretamente, dependendo do sistema dedutivo específico utilizado).

Propriedades bastante intuitivas da conseqüência lógica, utilizadas no dia a dia quando se demonstra teoremas são ($H \subseteq \mathcal{F}$ e $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$):

- $H \cup \{\alpha\} \models \alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$. Ou seja, qualquer hipótese é conseqüência de um conjunto de hipóteses que a contém.

- Se $H \models \alpha$ e $H \cup \{\alpha\} \models \beta$, então $H \models \beta$. Ou seja, se uma afirmativa β é conseqüência de um conjunto de hipóteses H acrescido de uma afirmativa α, sendo α conseqüência do conjunto H, segue-se que β é conseqüência de H.

- Se $H \models \alpha$, então $H \cup \{\beta\} \models \alpha$. Ou seja, ao se acrescentar novas hipóteses, toda afirmativa que era conseqüência antes do acréscimo continua sendo conseqüência após o acréscimo. Uma lógica para a qual esta propriedade se verifica é dita ser *monotônica*.

Um conceito extremamente importante, que pode facilitar muito na atividade de demonstrar teoremas é o de *eqüivalência lógica*. Informalmente, duas fórmulas são ditas logicamente equivalentes se elas expressam exatamente a mesma coisa. Mais precisamente, duas fórmulas α e β são *logicamente equivalentes*, $\alpha \equiv \beta$, se, e somente se, $\{\alpha\} \models \beta$ e $\{\beta\} \models \alpha$. Logo, α e β são logicamente equivalentes se, e somente se, $v^i(\alpha) = v^i(\beta)$ para toda i. É interessante observar que todas as tautologias são logicamente equivalentes entre si, assim como todas as contradições.

Exemplo 17 Pela tabela da verdade, verifica-se que $v^i(\neg(\neg p \vee \neg q)) = v^i(p \wedge q)$ para toda interpretação i. Segue-se que $\neg(\neg p \vee \neg q) \equiv p \wedge q$. □

O teorema a seguir expõe uma relação importante entre $\equiv$ e o conectivo $\leftrightarrow$.

Teorema 2 *$\alpha \equiv \beta$ se, e somente se, $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia.*

Prova

É fácil verificar que $\alpha \equiv \beta$ se, e somente se, $v^i(\alpha) = v^i(\beta)$ para toda i. E também que $v^i(\alpha) = v^i(\beta)$ para toda i se, e somente se, $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia. □

Exemplo 18 Pela tabela da verdade, verifica-se que $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \lor q)$ é uma tautologia. Segue-se que $p \to q \equiv \neg p \lor q$. A fórmula $(p \land q \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r))$ é uma tautologia. Segue-se que $p \land q \to r \equiv p \to (q \to r)$. $\square$

Note-se que a relação de equivalência lógica é realmente uma relação de equivalência, pois possui as propriedades:

- reflexividade: $\alpha \equiv \alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$;
- simetria: se $\alpha \equiv \beta$, então $\beta \equiv \alpha$ para toda $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$;
- transitividade: se $\alpha \equiv \beta$ e $\beta \equiv \gamma$, então $\alpha \equiv \gamma$ para toda $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$.

Seja $\alpha[\beta/\gamma]$ o resultado de substituir uma ocorrência da subfórmula β em α pela fórmula γ. Então, se $\beta \equiv \gamma$, tem-se que $v^i(\alpha) = v^i(\alpha[\beta/\gamma])$ para qualquer i; portanto, $\alpha \equiv \alpha[\beta/\gamma]$. Informalmente: o significado de uma fórmula não muda se uma subfórmula sua (ou ela mesma) for substituída por uma fórmula equivalente.

A seguir serão apresentados alguns exemplos de equivalências lógicas simples, mas bastante úteis. A lista não é exaustiva, mesmo porque o conjunto de equivalências é infinito. Esta lista será suficiente para permitir mostrar outras equivalências em exemplos que seguem, usando resultados anteriores. Por outro lado, ela não pretende também ser completa (no sentido de ser suficiente para permitir mostrar quaisquer outras equivalências). Elas estão numeradas apenas para serem referenciadas nos exemplos:

1.$\neg\top \equiv \bot$	2. $\neg\bot \equiv \top$	3. $\alpha \land \neg\alpha \equiv \bot$
4.$\alpha \lor \neg\alpha \equiv \top$	5. $\alpha \land \top \equiv \alpha$	6. $\alpha \land \bot \equiv \bot$
7.$\alpha \lor \top \equiv \top$	8. $\alpha \lor \bot \equiv \alpha$	9. $\alpha \land \beta \equiv \beta \land \alpha$
10. $\alpha \lor \beta \equiv \beta \lor \alpha$	11. $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$	12. $\neg(\alpha \land \beta) \equiv \neg\alpha \lor \neg\beta$
13. $\neg(\alpha \lor \beta) \equiv \neg\alpha \land \neg\beta$	14. $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \lor \beta$	15. $\alpha \to \beta \equiv \neg\beta \to \neg\alpha$

16. $(\alpha \land \beta) \land \gamma \equiv \alpha \land (\beta \land \gamma)$
17. $(\alpha \lor \beta) \lor \gamma \equiv \alpha \lor (\beta \lor \gamma)$
18. $\alpha \land (\beta \lor \gamma) \equiv (\alpha \land \beta) \lor (\alpha \land \gamma)$
19. $(\alpha \lor \beta) \land \gamma \equiv (\alpha \land \gamma) \lor (\beta \land \gamma)$
20. $\alpha \lor (\beta \land \gamma) \equiv (\alpha \lor \beta) \land (\alpha \lor \gamma)$
21. $(\alpha \land \beta) \lor \gamma \equiv (\alpha \lor \gamma) \land (\beta \lor \gamma)$

etc...

Seguem exemplos de utilização. À direita de cada equivalência é anotado o número da equivalência mais simples que a propiciou.

Exemplo 19 Segue uma seqüência de eqüivalências para mostrar que $(p \to q) \land p \equiv p \land q$.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \land p &\equiv (\neg p \lor q) \land p && (14)\\
&\equiv (\neg p \land p) \lor (q \land p) && (19)\\
&\equiv (p \land \neg p) \lor (q \land p) && (9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \bot \vee (q \wedge p) && (3)\\
&\equiv (q \wedge p) \vee \bot && (10)\\
&\equiv q \wedge p && (8)\\
&\equiv p \wedge q && (9)
\end{aligned}$$

Como $\equiv$ é transitiva, segue-se o resultado. □

Exemplo 20 Mostrando que $(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$:

$$\begin{aligned}
(p \to r) \wedge (q \to r) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (q \to r) && (14)\\
&\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) && (14)\\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r && (21)\\
&\equiv \neg(p \vee q) \vee r && (13)\\
&\equiv (p \vee q) \to r && (14)
\end{aligned}$$

□

Exemplo 21 Para mostrar que $q \models p \to q$, basta mostrar que $q \to (p \to q)$ é uma tautologia:

$$\begin{aligned}
q \to (p \to q) &\equiv \neg q \vee (p \to q) && (14)\\
&\equiv \neg q \vee (\neg p \vee q) && (14)\\
&\equiv \neg q \vee (q \vee \neg p) && (10)\\
&\equiv (\neg q \vee q) \vee \neg p && (17)\\
&\equiv (q \vee \neg q) \vee \neg p && (10)\\
&\equiv \top \vee \neg p && (4)\\
&\equiv \neg p \vee \top && (10)\\
&\equiv \top && (7)
\end{aligned}$$

□

Toda fórmula é logicamente equivalente a alguma outra que utiliza apenas os conectivos $\neg$ e $\vee$, pois os conectivos $\wedge$, $\to$ e $\leftrightarrow$ podem ser "eliminados", tendo em vista as seguintes equivalências:

- $\alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$;
- $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$ (este último $\wedge$ pode ser eliminado utilizando-se a primeira equivalência).

Diz-se, então, que $\{\neg, \vee\}$ é um conjunto *completo* de conectivos. Mais dois exemplos de conjuntos completos de conectivos: $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg, \to\}$.

Exercícios

1. Mostre que $\{\neg p\} \models p \to q$.

2. Para os pares de fórmulas a seguir, descubra se são logicamente equivalentes, ou se uma é conseqüência lógica da outra. Em seguinda, explique da maneira mais sucinta que puder a sua resposta.

a) $(p \to r) \land (q \to r)$ e $(p \lor q) \to r$

b) $(p \to r) \land (q \to s)$ e $(p \land q) \to (r \lor s)$

c) $p \leftrightarrow q$ e $(p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$

3. Seguem alguns argumentos expressos em português. Expresse-os em lógica proposicional. Depois verifique se os mesmos são corretos usando o conceito de conseqüência lógica.

a) Se eu ganhei na megasena, então sou rico. Eu não ganhei na megasena. Logo, não sou rico.

b) Se não chover, a roça não produz e o pasto seca. Se o pasto seca, o gado não resiste. Portanto, se não chover, o gado não resiste.

c) João será absolvido ou condenado. Se for absolvido, será porque a testemunha mentiu. Mas a testemunha não mentiu. Portanto, João será condenado.

d) Se Deus é todo-poderoso e infinitamente bom, então não existe o diabo. Deus é todo-poderoso e existe o diabo. Portanto, Deus não é infinitamente bom.

e) Se você come demais, acaba ficando obeso. Se faz exercício físico todo dia, fica bem condicionado. E se não é obeso e é bem condicionado, não adoece com facilidade. Mas você adoece com facilidade. Portanto, você come demais e não faz exercício físico todo dia.

4. Uma abordagem para demonstração automática, alternativa ao método dedutivo a ser apresentado na próxima seção, é baseada em verificar se um conjunto de fórmulas tem ou não um modelo. A abordagem é justificada pelo fato de que:

$$H \models \alpha \text{ se, e somente se } H \cup \{\neg\alpha\} \models \bot$$

ou melhor:

$$H \models \alpha \text{ se, e somente se } H \cup \{\neg\alpha\} \text{ não tem um modelo.}$$

Suponha que um algoritmo determine um modelo para $H \cup \{\neg\alpha\}$. Como tal modelo pode ser usado para justificar que $H \not\models \alpha$?

2.5 Dedução

Como dito na Seção 2.1, um argumento envolve afirmar que uma certa proposição é verdadeira caso todas as proposições de certo conjunto sejam (consideradas) verdadeiras. Um argumento é modelado pela afirmação de que certa fórmula (a conclusão) é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas (as premissas). Assim, considere a seguir um argumento como sendo a afirmação de que certa fórmula é conseqüência lógica de um conjunto de fórmulas.

Um argumento que diz que α é conseqüência lógica de $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\}$ é *correto* se, e somente se, $\{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n\} \models \alpha$ e, portanto, se $(\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \ldots \wedge \beta_n) \rightarrow \alpha$ é uma tautologia. Um argumento correto é dito também ser válido, legítimo. Um argumento incorreto é dito também ser inválido, ilegítimo, um sofisma.

Como já foi dito, a noção correspondente a conseqüência lógica no nível formal é a de dedução. Assim, um argumento formal é a afirmação de que certa fórmula (a conclusão) pode ser diretamente deduzida a partir de um conjunto de fórmulas (as premissas). Tal tipo de argumento é expresso mediante o que se denomina uma *regra de inferência*.

Assim, uma regra de inferência é uma afirmação de que uma dada fórmula α, a *conclusão*, segue diretamente de outras fórmulas β_1, β_2,..., β_n, as *premissas*. Para denotá-la utiliza-se a notação (a ordem das premissas é irrelevante):

$$\begin{array}{c} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \\ \hline \alpha \end{array}$$

Para se qualificar como uma regra de inferência, o argumento correspondente deve ser correto. Seguem vários exemplos de regras de inferência:

1. *Adição* (AD): $\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \dfrac{\alpha}{\beta \vee \alpha}$

2. *Simplificação* (SIMP): $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \quad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$

3. *Conjunção* (CONJ): $\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \\ \hline \alpha \wedge \beta \end{array}$

4. *Modus ponens* (MP): $\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}$

5. *Modus tollens* (MT): $\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \neg\beta \\ \hline \neg\alpha \end{array}$

4. *Silogismo disjuntivo* (SD): $\begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\alpha \\ \hline \beta \end{array} \quad \begin{array}{c} \alpha \vee \beta \\ \neg\beta \\ \hline \alpha \end{array}$

7. *Silogismo hipotético* (SH): $\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \beta \rightarrow \gamma \\ \hline \alpha \rightarrow \gamma \end{array}$

8. *Dilema construtivo* (DC): $\begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ \gamma \rightarrow \delta \\ \alpha \vee \gamma \\ \hline \beta \vee \delta \end{array}$

Seja α uma fórmula e H um conjunto de fórmulas. Então, *α é dedutível a partir de H*, $H \vdash \alpha$, se existe uma seqüência de fórmulas β_1, β_2, ..., β_n tal que β_n é α e cada

β_i é uma fórmula de H ou o resultado da aplicação de uma regra de inferência com premissas antes de β_i. A seqüência β_1, β_2, $\ldots$, β_n é uma *dedução* de α.

Sendo as regras de inferência argumentos válidos, tem-se que: *se* $H \vdash \alpha$*, então* $H \models \alpha$.

Exemplo 22 A dedução a seguir mostra que $\{p \wedge q, (p \vee r) \rightarrow s\} \vdash p \wedge s$ e, portanto, $\{p \wedge q, (p \vee r) \rightarrow s\} \models p \wedge s$. Cada fórmula da dedução recebe um número para posterior referência. À direta de cada fórmula é anotado, entre parênteses, como ela foi obtida: a regra de inferência utilizada e os números das premissas. As primeiras fórmulas, que recebem a anotação H, são as hipóteses.

1. $p \wedge q$ (H)
2. $(p \vee r) \rightarrow s$ (H)
3. p (SIMP 1)
4. $p \vee r$ (AD 3)
5. s (MP 2,4)
6. $p \wedge s$ (CONJ 3,5)

□

Segue mais um exemplo.

Exemplo 23 A dedução a seguir mostra que

$$\{q \vee (r_1 \rightarrow r_2), q \rightarrow s, \neg s \rightarrow (r_2 \rightarrow p), \neg s\} \vdash r_1 \rightarrow p$$

e, portanto, $\{q \vee (r_1 \rightarrow r_2), q \rightarrow s, \neg s \rightarrow (r_2 \rightarrow p), \neg s\} \models r_1 \rightarrow p$.

1. $q \vee (r_1 \rightarrow r_2)$ (H)
2. $q \rightarrow s$ (H)
3. $\neg s \rightarrow (r_2 \rightarrow p)$ (H)
4. $\neg s$ (H)
5. $\neg q$ (MT 2,4)
6. $r_1 \rightarrow r_2$ (SD 1,5)
7. $r_2 \rightarrow p$ (MP 3,4)
8. $r_1 \rightarrow p$ (SH 6,7)

□

Observe que se o sistema dedutivo só contém regras de inferência baseadas em argumentos corretos, ele é correto (não deduz fórmulas que não sejam conseqüências lógicas). Daí, as conclusões expostas nos exemplos anteriores. Agora o outro lado: existe um conjunto de regras de inferência tal que

$$\text{se } H \models \alpha, \text{ então } H \vdash \alpha?$$

Ou seja, existe um sistema dedutivo completo? Uma primeira coisa a se observar, é que toda tautologia τ deve ser dedutível, já que $\{\} \models \tau$.

Como mencionado anteriormente, um sistema dedutivo é composto de dois tipos de entidades, além de uma linguagem:

- regras de inferência; e
- *axiomas lógicos*: fórmulas que podem fazer parte de uma dedução sem serem deduzidas.

A primeira coisa a se notar é que um axioma lógico, α, deve ser uma tautologia, já que se $\{\} \vdash \alpha$, então deve-se ter que $\{\} \models \alpha$. Uma segunda observação importante é que podem existir (e, na verdade, existem) múltiplos sistemas dedutivos completos. Alguns podem se basear em mais regras de inferência e menos axiomas e outros em menos regras e mais axiomas. Uma terceira observação é que os axiomas são normalmente especificados mediante o que se denomina *esquema de axioma*; por exemplo, um esquema de axioma presente em alguns sistemas dedutivos é o esquema:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha).$$

Este esquema representa um conjunto infinito de axiomas, um axioma para cada par de fórmulas α e β. Uma última observação, é que um esquema de axioma pode ser visto como uma regra de inferência sem premissas. Por exemplo, o esquema anterior pode ser visto como a regra:

$$\frac{}{\alpha \to (\beta \to \alpha)}$$

Apenas para dar um exemplo de sistema dedutivo correto e completo para a lógica proposicional, será apresentado o seguinte sistema com três esquemas de axiomas e uma regra de inferência:

- Se α, β e γ são fórmulas, então são axiomas:

  Ax1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$
  Ax2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
  Ax3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to [(\neg\beta \to \alpha) \to \beta]$

- Regra de inferência: *modus ponens*.

Evidentemente este sistema dedutivo aproveita o fato de que o conjunto de conectivos $\{\to, \neg\}$ é completo.

Na verdade, obter uma dedução utilizando o sistema dedutivo anterior pode ser uma tarefa muito penosa, e a dedução resultante pode não ser nada legível (embora correta). Segue um exemplo.

Exemplo 24 A seguinte dedução mostra que $\{\} \vdash p \to p$:

1. $(p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ (Ax2)
2. $p \to ((p \to p) \to p)$ (Ax1)
3. $(p \to (p \to p)) \to (p \to p)$ (MP 1,2)
4. $p \to (p \to p)$ (Ax1)
5. $p \to p$ (MP 3,4)

□

A partir do sistema dedutivo anterior, é possível derivar novas regras de inferência que podem facilitar (para um ser humano) enormemente o trabalho de obter uma dedução. As regras mostradas até agora, incluindo a de *modus ponens*, só permitem inferências *diretas*, ou seja, a partir de certas fórmulas já deduzidas. Um outro tipo de regra de inferência é aquela que permite deduzir uma fórmula com base também em fórmulas supostas temporariamente em trechos de (sub)deduções. Por exemplo:

$$\frac{H \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{H \vdash \alpha \rightarrow \beta}$$

Esta regra diz que "para deduzir uma fórmula da forma $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de um conjunto de hipóteses H, é suficiente deduzir β a partir de $H \cup \{\alpha\}$". Ou seja, para deduzir $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de um conjunto de hipóteses, basta supor α como uma hipótese adicional, e provar β. O teorema a seguir, apresentado sem prova, justifica essa regra. Ele é denominado *teorema da dedução.*

Teorema 3 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ e $H \subseteq \mathcal{F}$. Tem-se: se $H \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $H \vdash \alpha \rightarrow \beta$.*

Este teorema segue do teorema 1 e do teorema da completeza da lógica proposicional (considerando-se qualquer um dos inúmeros sistemas dedutivos para a mesma), enunciado a seguir.

Teorema 4 *(Teorema da Completeza) Sejam $H \subseteq \mathcal{F}$ e $\alpha \in \mathcal{F}$. $H \vdash \alpha$ se, e somente se $H \models \alpha$.*

Uma noção importante relativamente a deduções é a de *consistência*. Um conjunto de fórmulas $H \subseteq \mathcal{F}$ é dito *inconsistente* se, e somente se, $H \vdash \bot$. Um resultado importante, já aludido na Seção 2.4, é que qualquer fórmula pode ser deduzida de uma contradição (direta ou indiretamente, dependendo do sistema dedutivo específico utilizado). Ou seja, se H é inconsistente, então $H \vdash \alpha$ para toda $\alpha \in \mathcal{F}$. Ou ainda, o conjunto de todas as fórmulas dedutíveis a partir de um conjunto inconsistente é o conjunto $\mathcal{F}$ (considerando-se, evidentemente, um sistema dedutivo correto e completo).

Em *sistemas de dedução natural*, o conjunto de axiomas é vazio e a cada conectivo são associadas certas regras de inferência que propiciam a introdução e a eliminação do conectivo. Em vez de apresentar um exemplo de sistema de dedução natural, com regras de inferências apenas suficiente para assegurar a completeza, serão apresentadas abaixo um conjunto de várias regras de inferência que são ou podem ser utilizadas por uma pessoa durante demonstrações de teoremas.

Na verdade, durante o *processo de obtenção* de uma demonstração de teorema, uma regra de inferência pode ser utilizada de duas formas diferentes:

- Para propiciar a inferência de uma afirmativa α a partir de hipóteses e/ou afirmativas previamente deduzidas.

- Para prover uma *estratégia* para a dedução de uma certa afirmativa: tentar deduzir as premissas de certa regra de inferência que conclua a afirmativa que se deseje provar.

Permeando o uso das regras de inferência destas duas formas, pode-se também utilizar equivalências lógicas do tipo daquelas vistas na página 32. Por exemplo, para provar uma afirmativa da forma $\alpha \rightarrow \beta$[3] basta provar uma das seguintes afirmativas equivalentes: $\neg\beta \rightarrow \neg\alpha$, $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ etc.

Seguem exemplos de estratégias de prova importantes, juntamente com regras de inferência que as justificam.

Prova de uma conjunção

- Regra de inferência:

$$\frac{\begin{array}{c} H \vdash \alpha \\ H \vdash \beta \end{array}}{H \vdash \alpha \wedge \beta}$$

- Estratégia: para deduzir $\alpha \wedge \beta$, dividir a prova em duas partes; em uma delas provar α, e na outra provar β (em qualquer ordem).

A regra de inferência é, na verdade a regra 3 (CONJ) mostrada na página 35; só que aqui o conjunto de hipóteses H é explicitado, enquanto que nas regras lá mostradas tal conjunto está implícito. Em geral, se α for da forma $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, $n \geq 2$, a prova é dividida em n partes, cada uma para provar um α_i.

Prova direta

- Regra de inferência:

$$\frac{H \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{H \vdash \alpha \rightarrow \beta}$$

- Estratégia: para deduzir $\alpha \rightarrow \beta$, supor α e provar β.

- Exemplo: Suponha que se queria provar, para um certo número natural n, que se n é par, então n^2 é par. Esta afirmativa é da forma $\alpha \rightarrow \beta$, em que α é uma fórmula atômica que represente "n é par" e β é uma fórmula atômica que represente "n^2 é par". Usando a estratégia da prova direta, a demonstração começa assim: *Suponha que n é par*. Em seguida, basta provar que *n^2 é par*. No final, após provar que n^2 é par, pode-se concluir, então: *se n é par, então n^2 é par*.

[3] Você já notou que a maioria das afirmativas a serem provadas tem, implícita ou explicitamente, esta forma?

Note que a regra de inferência que justifica a prova direta nada mais é do uma formulação do teorema da dedução (Teorema 3).

Prova indireta (ou prova pela contrapositiva)

- Regra de inferência:

$$\frac{H \cup \{\neg\beta\} \vdash \neg\alpha}{H \vdash \alpha \to \beta}$$

- Estratégia: para deduzir $\alpha \to \beta$, supor $\neg\beta$ e provar $\neg\alpha$.

- Exemplo: Suponha que se queria provar, para um certo número natural n, que se n^2 é par, então n é par. Esta afirmativa é da forma $\alpha \to \beta$, em que α é uma fórmula atômica que represente "n^2 é par" e β é uma fórmula atômica que represente "n é par". Usando a estratégia da prova indireta, a demonstração começa assim: *Suponha que n não é par (ou seja, n é ímpar)*. Em seguida, basta provar que *n^2 não é par (ou seja, n^2 é ímpar)*. No final, após provar que n^2 não é par, pode-se concluir, então: *se n^2 é par, então n é par.*

Observe que a estratégia de prova indireta para $\alpha \to \beta$ nada mais é do que a estratégia de prova direta para $\neg\beta \to \neg\alpha$, e que $\neg\beta \to \neg\alpha \equiv \alpha \to \beta$.

Prova por contradição (ou prova por redução a absurdo)

- Regra de inferência:

$$\frac{H \cup \{\neg\alpha\} \vdash \bot}{H \vdash \alpha}$$

- Estratégia: para deduzir α, supor $\neg\alpha$ e provar $\bot$.

Pela regra que justifica a prova direta, de $H \cup \{\neg\alpha\} \vdash \bot$, pode-se concluir que $H \vdash \neg\alpha \to \bot$. Mas $\neg\alpha \to \bot \equiv \alpha$. Logo, pode-se realmente concluir que $H \vdash \alpha$. Observe ainda que $\bot$ é uma contradição, portanto logicamente equivalente a qualquer outra contradição. Assim, na verdade não há a necessidade de deduzir especificamente $\bot$; basta deduzir uma contradição qualquer! Uma maneira de usar esta estratégia é supor $\neg\alpha$ e provar α; conseguindo-se, conclui-se que há uma contradição $(\alpha \wedge \neg\alpha)$, o que permite concluir α. Note que isto é coerente com o fato de que se $H \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$, então, pela regra da estratégia direta, $H \vdash \neg\alpha \to \alpha$; mas, $\neg\alpha \to \alpha \equiv \alpha$! Utilizando-se a noção de inconsistência, anteriormente introduzida, uma outra maneira de enunciar essa estratégia de prova é: para deduzir α a partir de H, basta verificar se $H \cup \{\neg\alpha\}$ é inconsistente; se for, concluir α.

Prova por casos

- Regra de inferência:

$$\frac{\begin{array}{c} H \vdash \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n \\ H \cup \{\alpha_1\} \vdash \gamma \\ H \cup \{\alpha_2\} \vdash \gamma \\ \vdots \\ H\{\alpha_n\} \vdash \gamma \end{array}}{H \vdash \gamma}$$

- Estratégia: para deduzir γ, deduza, antes uma disjunção $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ ($n \geq 2$); em seguida, divida o resto da demonstração em n *casos*, um para cada termo da disjunção: no caso 1, supor α_1 e provar γ; no caso 2, supor α_2 e provar γ; ...; no caso n, supor α_n e provar γ.

Algumas vezes pode-se usar como disjunção $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$ uma tautologia. Por exemplo, para provar que um certo número n tem uma propriedade P, basta considerar dois casos: (1) supor que n é par e provar que, neste caso, n tem a propriedade P; e (2) supor que n não é par (é ímpar) e provar que, neste caso, n tem também a propriedade P. Este raciocínio é correto, visto que $p \vee \neg p$ é tautológica, sendo p usada para representar a proposição "n é par".

Das estratégias descritas anteriormente, duas delas podem ser consideradas para aplicação com qualquer tipo de fórmula: a prova por contradição e a prova por casos. As outras são aplicáveis quando o conectivo principal da fórmula é um conectivo específico:

- Conectivo $\wedge$: prova de uma conjunção.
- conectivo $\rightarrow$: prova direta ou indireta.

E se o conectivo principal for $\neg$, $\vee$ ou $\leftrightarrow$, que estratégias podem ser usadas além das provas por contradição ou por casos? Nestes casos, as estratégias principais continuam sendo as anteriores, só que antes de aplicá-las, deve-se utilizar (nem que implicitamente) alguma equivalência lógica. Isto pode ser feito, dada a seguinte regra de inferência (dado que $\alpha \equiv \beta$ se, e somente se, $\alpha \leftrightarrow \beta$ é uma tautologia):

$$\frac{\begin{array}{c} H \vdash \alpha \\ \{\} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \end{array}}{H \vdash \beta}$$

Com relação ao conectivo $\neg$, se ele não é o único conectivo da fórmula, uma possibilidade é mover o conectivo "para dentro" da fórmula antes de prová-la, usando as equivalências. Depois, usar uma estratégia para o novo conectivo principal.

- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta)$
- $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \wedge \beta)$

Por exemplo, para provar $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, basta provar $\alpha \wedge \neg\beta$, ou seja, pela estratégia da prova de uma conjunção, basta dividir a prova em duas partes, provando α em uma e $\neg\beta$ em outra.

Se o conectivo principal for $\vee$, para provar $\alpha \vee \beta$, como $\alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \rightarrow \beta$, basta provar $\neg\alpha \rightarrow \beta$ usando a prova direta ou indireta. Em particular, se α é da forma $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$, $n \geq 2$, usando-se a prova direta basta supor $\neg\alpha_1 \wedge \neg\alpha_2 \wedge \cdots \wedge \neg\alpha_n$ e provar β.

Ainda se o conectivo principal for $\vee$, existe uma estratégia similar à prova por casos para provar $\alpha \vee \beta$: dado que uma afirmativa $\gamma_1 \vee \gamma_2$ seja dedutível, basta provar $\gamma_1 \rightarrow \alpha$ e que $\gamma_2 \rightarrow \beta$. Se a disjunção envolver mais de dois termos, ou seja, se for da forma $\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n$, a estratégia seria: caso $\gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \cdots \vee \gamma_k$ seja dedutível, para cada i, $1 \leq i \leq k$, provar $\gamma_i \rightarrow \alpha_j$ para algum $1 \leq j \leq n$.

Finalmente, se o conectivo for $\leftrightarrow$, para provar $\alpha \leftrightarrow \beta$, basta provar $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$, já que $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

Às vezes, deve-se provar que várias afirmativas são logicamentes equivalentes entre si, ou seja, deve-se mostrar que $H \vdash \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \alpha_n$, $n \geq 3$. Como $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \alpha_n \equiv (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \wedge (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \wedge \cdots \wedge (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \wedge (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$, uma estratégia econômica é fazer a prova em n etapas: provar (1) $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, (2) $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$, $\ldots$, $(n-1)$ $\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n$, (n) $\alpha_n \rightarrow \alpha_1$.

Exercícios

1. Especifique uma estratégia para provar afirmativas da forma $\alpha \oplus \beta$, em que $\oplus$ deve ser interpretado como "ou exclusivo".

2. Suponha que:

$$\begin{aligned} &H \models \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n,\ n \geq 2; \\ &H \models \alpha_1 \rightarrow \beta; \\ &H \models \alpha_2 \rightarrow \beta; \\ &\vdots \\ &H \models \alpha_n \rightarrow \beta. \end{aligned}$$

Mostre que, neste caso, $H \models \beta$. Formule uma estratégia de prova, *diferente da prova por casos*, justificável por este resultado.