Lógica

Guilherme Bittencourt

Departamento de Automação e Sistemas

Universidade Federal de Santa Catarina

Florianópolis - SC - Brazil

Internet: www.das.ufsc.br/∼gb

E-mail: gb@das.ufsc.br

Sumário

- Métodos de Prova
  - Axiomático
  - Resolução
  - Método de Tableaux
  - Dedução Natural
  - Seqüentes de Gentzen
- Conclusão

Métodos de prova

- W é uma *conseqüência lógica* do conjunto de fórmulas G, se toda interpretação que satisfaz todas as fórmulas em G, simultaneamente, satisfaz também a fórmula W.

  $$G \models W$$

  Dificuldade: envolve *todas* as interpretações, que são em número infinito.

- *Método de prova*: a partir do conjunto G, utilizando *regras de inferência*, gerar novas fórmulas, eventualmente gerando a fórmula W.
  Caso exista uma seqüência de aplicações de regras de inferência que leve das fórmulas de G em W, então diz-se que W pode ser *provado* a partir de G.

  $$G \vdash W$$

Métodos de prova

Método de prova seja correto: $G \vdash W \Rightarrow G \models W$.

Método de prova é dito completo: $G \models W \Rightarrow G \vdash W$.

Contribuição de Gödel e Herbrand em 1930: criação dos primeiros métodos construtivos de prova que são corretos e completos.

Métodos de prova corretos e completos:

- sistemas de axiomas
- dedução natural
- seqüentes de Gentzen
- método de resolução
- método de tableaux
- método das conexões

Métodos de prova

Regra de inferência: função sintática que, dado um conjunto de fórmulas lógicas, gera uma nova fórmula:

$$\rho_i(\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}) = H$$

Regra da substituição: uma tautologia formada por símbolos proposicionais permanece uma tautologia quando estes símbolos são substituídos por fórmulas lógicas arbitrárias.

Tautologias utilizadas como regras de inferência:

$$\begin{array}{rl}
(A \land (A \to B)) \to B & \textit{Modus Ponens} \\
(\neg B \land (A \to B)) \to \neg A & \textit{Modus Tollens} \\
((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C) & \textit{Silogismo Hipotético} \\
\forall x.A \to A\{x/a\} & \textit{Especialização} \\
A\{x/a\} \to \exists x.A & \textit{Generalização}
\end{array}$$

Sistemas de axiomas

Sistemas de axiomas (*sistemas de Frege* ou *sistemas de Hilbert*): métodos de prova *progressivos*, que a partir de certos *axiomas* iniciais derivam conseqüências imediatas, que são por sua vez utilizadas para gerar novas conseqüências até que a fórmula desejada (o teorema) seja alcançada.
Componentes:

- um conjunto de *axiomas* (ou *esquemas de axiomas*).
- um conjunto de *regras de inferência*.

Sistemas de axiomas

$G \vdash W$, prova de W a partir do conjunto de axiomas G:

$$H_1, H_2, \ldots, H_n$$

onde:

$$H_n = W$$

H_i é uma instância de um axioma em G ou

$$H_i = \rho_i(\{H_1, H_2, \ldots, H_{i-1}\})$$

ρ_i é uma regra de inferência do sistema

Sistemas de axiomas

Estruturas axiomática *completa*, onde existe uma prova para qualquer teorema:

Regra de inferência, *Modus Ponens*:

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

Axiomas:

(i) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(ii) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(iii) $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$

(iv) $\forall x.A(x) \rightarrow A(x)\{x/c\}$

(v) $(\forall x.A \rightarrow B(x)) \rightarrow (A \rightarrow \forall x.B(x))$, onde x não aparece livre em A.

Sistemas de axiomas

Prova do teorema $P \to P$:

1. $(P \to ((P \to P) \to P)) \to ((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$, do axioma (ii) com $A = P$, $B = P \to P$ e $C = P$.
2. $P \to ((P \to P) \to P)$, do axioma (i) com $A = P$ e $B = P \to P$.
3. $(P \to (P \to P)) \to (P \to P)$, de 1 e 2 pela regra de inferência *Modus Ponens*.
4. $P \to (P \to P)$, do axioma (i) com $A = P$ e $B = P$.
5. $(P \to P)$, de 3 e 4 pela regra de inferência *Modus Ponens*.

Sistemas de axiomas

Sistema de axiomas correto e completo:

Utiliza apenas o operador $\uparrow$, também chamado de “não-e” (em inglês, “not and” ou “nand”)

$$A \uparrow B \equiv \neg(A \land B)$$

Regra de inferência:

$$\frac{A \quad A \uparrow (B \uparrow C)}{C}$$

Axioma:

$$(A \uparrow (B \uparrow C)) \uparrow ((A \uparrow (C \uparrow A)) \uparrow ((C \uparrow B) \uparrow ((A \uparrow C) \uparrow (A \uparrow C)))).$$

Sistemas de axiomas

Tabela verdade do operador NAND:

A	B	$A \uparrow B$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Resolução

- Método de *refutação*: para provar que $G \models W$, prova-se que $H = G \cup \{\neg W\}$ é *insatisfazível*, isto é, que não existe nenhuma interpretação que satisfaça simultaneamente todas as fórmulas de H.
- Para aplicar o método de resolução é necessário inicialmente transformar as fórmulas do conjunto H para a *forma normal conjuntiva*:

$$H = C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$$

$$C_i = L_{i,1} \vee \cdots \vee L_{i,m_i}$$

onde C_i são *cláusulas* e $L_{i,j}$ são *literais*, isto é, fórmulas atômicas negadas ou não.

Resolução

Algoritmo para converter uma fórmula lógica para a forma normal conjuntiva:

- Eliminar todas as ocorrências de $A \rightarrow B$ em W, substituindo-as por $\neg A \vee B$.
- Reduzir o escopo das negações de maneira que só restem negações aplicadas a fórmulas atômicas. Para isto usar as regras:

$$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B),$$

$$\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B),$$

$$\neg(\forall x.A) \Rightarrow \exists x.\neg(A),$$

$$\neg(\exists x.A) \Rightarrow \forall x.\neg(A),$$

$$\neg(\neg(A)) \Rightarrow A.$$

Resolução

Algoritmo para converter uma fórmula lógica para a forma normal conjuntiva:

- Substituir os nomes de variáveis de maneira que cada quantificador possua a sua própria variável.
- Mover os quantificadores, preservando sua ordem, para o início da fórmula.

Resolução

- Eliminar os quantificadores existenciais (*Skolemização*, proposto por Skolem em 1920).
  - Idéia básica: uma fórmula com uma variável quantificada existencialmente se torna verdadeira quando esta variável é substituída por pelo menos um elemento do domínio. Como a existência deste elemento está garantida, podemos atribuir-lhe um *nome*, isto é, um símbolo de constante que não apareça na fórmula H:

    $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a)$, onde a é um símbolo de constante, chamada *constante de Skolem*, que não aparece em *W*.

Resolução

- Eliminar os quantificadores existenciais (*Skolemização*)
Quando a variável quantificada existencialmente aparece dentro do escopo de um quantificador universal, o elemento do domínio associado ao quantificador existencial pode depender do valor escolhido para a variável quantificada universalmente, que pode ser qualquer. Neste caso, é necessário substituir a variável quantificada existencialmente por um símbolo de função, cujos argumentos são todas as variáveis quantificadas universalmente que dominam o quantificador existencial:

  $\forall x_1.\cdots\forall x_n.\exists y.(P(y)) \Rightarrow P(f(x_1,\ldots,x_n))$, onde *f* é um símbolo de função, chamada *função de Skolem*, que não aparece em *W*.

  Por exemplo, na fórmula $\forall x.\exists y.(M\tilde{a}e(y,x))$, se adotarmos a interpretação "para qualquer *x* existe um *y* tal que *y* é mãe de *x*" fica claro que o valor de *y*, a mãe, depende do valor de *x*, o filho.

Resolução

- Eliminar os quantificadores universais, deixando implícito que todas as variáveis que aparecem na fórmula são quantificadas universalmente.
- Converter a fórmula para a forma de uma conjunção de disjunções usando a propriedade distributiva do operador $\vee$ sobre o operador $\wedge$:

$$A \vee (B \wedge C) \Rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

- Trocar os nomes das variáveis de maneira que cada cláusula do resultado possua suas variáveis próprias. Isto é possível devido ao resultado:

$$\forall x.(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x.(P(x)) \wedge \forall y.(Q(y)).$$

Resolução

Regra de resolução:

- Considere o seguinte par de cláusulas:

$$C_1 = L_{1,1} \vee \cdots \vee L_{1,n} \qquad C_2 = L_{2,1} \vee \cdots \vee L_{2,m}$$

  onde existem *i* e *j* tal que $L_{1,i} = P(t_1, \ldots, t_k)$ e $L_{2,j} = \neg P(t'_1, \ldots, t'_k)$ e existe uma substituição θ, tal que:

$$P(t_1, \ldots, t_k)\theta = P(t'_1, \ldots, t'_k)\theta.$$

- Neste caso, é possível inferir, a partir de C_1 e C_2 e utilizando a regra de resolução, a seguinte cláusula, chamada de *resolvente*:

$$(C_1 - \{L_{1,i}\} \cup C_2 - \{L_{2,j}\})\theta.$$

Resolução

Algoritmo de Unificação:

Unify(ϕ_1, ϕ_2)
se ϕ_1 ou ϕ_2 for um símbolo atômico **então**
  se $\phi_1 = \phi_2$ **então retorne**$\{\}$ **senão**
  se ϕ_1 for variável e $\phi_1 \not\leadsto \phi_2$ **então retorne**$\{\phi_1/\phi_2\}$ **senão**
  se ϕ_2 for variável e $\phi_2 \not\leadsto \phi_1$ **então retorne**$\{\phi_2/\phi_1\}$ **senão retorne** *Falha*
senão
Seja $\phi_1 = \varphi_1(t_{11}, \ldots, t_{1n_1})$ e
    $\phi_2 = \varphi_2(t_{21}, \ldots, t_{2n_2})$, onde $\varphi_i \in \mathbf{P}$ ou $\varphi_i \in \mathbf{F}$
se $\varphi_1 = \varphi_2$ e $n_1 = n_2 = n$ **então**
  $\Theta \leftarrow \emptyset$
  para $i = 1, \ldots, n$ **faça**
    $\theta \leftarrow$ *Unify*(t_{1i}, t_{2i})
    se $\theta =$ *Falha* **então retorne** *Falha* **senão**
    para $j = i + 1, \ldots, n$ **faça**
      $t_{1j} \leftarrow t_{1j}\theta$
      $t_{2j} \leftarrow t_{2j}\theta$
    $\Theta \leftarrow \Theta \cup \theta$
  retorne Θ
senão retorne *Falha*

Resolução

Algoritmo de Unificação:

- A ineficiência do algoritmo no pior caso pode ser constatada através do seguinte problema, onde o espaço necessário ao armazenamento da solução e dos termos intermediários cresce exponencialmente:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= P(x_1, f_2(x_1, x_1), x_3, f_4(x_3, x_3)),\\ \phi_2 &= P(f_1(a, a), x_2, f_3(x_2, x_2), x_4).\end{aligned}$$

Resolução

Algoritmo de Unificação: Os termos intermediários armazenados são os seguintes:

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= x_1, \\
t_{21} &= f_1(a,a), \\
t_{12} &= f_2(f_1(a,a), f_1(a,a)), \\
t_{22} &= x_2, \\
t_{13} &= x_3, \\
t_{23} &= f_3(f_2(f_1(a,a), f_1(a,a)), f_2(f_1(a,a), f_1(a,a))), \\
t_{14} &= f_4(f_3(f_2(f_1(a,a), f_1(a,a)), f_2(f_1(a,a), f_1(a,a))), \\
&\qquad f_3(f_2(f_1(a,a), f_1(a,a)), f_2(f_1(a,a), f_1(a,a)))), \\
t_{24} &= x_4
\end{aligned}
$$

Resolução

Algoritmo de Unificação:
e a solução encontrada é dada por:

$$\begin{aligned}
\{&x_1/f_1(a,a),\\
&x_2/f_2(f_1(a,a),f_1(a,a)),\\
&x_3/f_3(f_2(f_1(a,a),f_1(a,a)),f_2(f_1(a,a),f_1(a,a))),\\
&x_4/f_4(f_3(f_2(f_1(a,a),f_1(a,a)),f_2(f_1(a,a),f_1(a,a))),\\
&\qquad\qquad f_3(f_2(f_1(a,a),f_1(a,a)),f_2(f_1(a,a),f_1(a,a))))\}.
\end{aligned}$$

No entanto, caso os termos fossem analisados em ordem inversa, ou melhor, caso o algoritmo fosse suficientemente inteligente para determinar qual a melhor ordem, o resultado seria a seguinte substituição:

$$\{x_4/f_4(x_3,x_3),x_3/f_3(x_2,x_2),x_2/f_2(x_1,x_1),x_1/f_1(a,a)\}.$$

Resolução

Método completo de prova baseado na resolução: *método de saturação de nível*

- Dado um conjunto H de cláusulas, gere sucessivamente os conjuntos de cláusulas $H^0, H^1, H^2, \ldots$ definidos da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
H^0 &= H \\
H^n &= \{\text{Resolventes de } C_1 \text{ e } C_2 \mid C_1 \in H^0 \cup \ldots \cup H^{n-1} \wedge C_2 \in H^{n-1}\} \\
& \quad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

- Caso o conjunto H seja insatisfazível, demonstra-se que sempre existirá um inteiro k tal que $NIL \in H^k$, onde *NIL* é a cláusula vazia. No entanto, este método, apesar de correto e completo, é extremamente ineficiente e muitas vezes impraticável devido ao rápido crescimento dos conjuntos H^n.

Resolução

As provas por resolução são normalmente apresentadas na forma de um grafo; mais especificamente, uma árvores binária invertida com a cláusula vazia na raiz e as cláusulas do conjunto original nas folhas. Cada nodo interno é associado a um resolvente e tem como descendentes nodos associados às cláusulas que o geraram.

Resolução

Exemplo: Considere a situação: “onde Carlos vai, Amélia também vai. Carlos está na praia. Onde está Amélia?”. Formalmente:

$$
\begin{aligned}
&\forall x. Em(x, carlos) \rightarrow Em(x, amelia),\\
&Em(praia, carlos),\\
&\exists x. Em(x, amelia).
\end{aligned}
$$

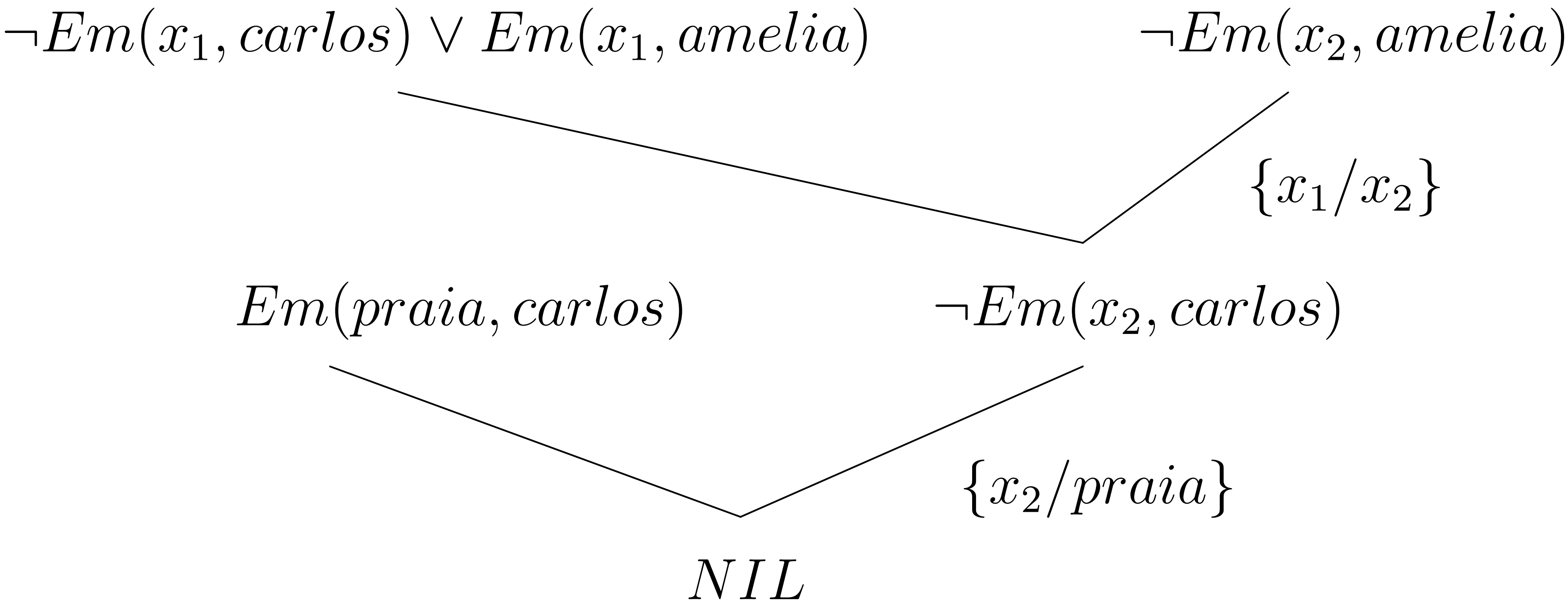
Em forma clausal:

$$
\begin{aligned}
H \quad = \quad & \{\neg Em(x_1, carlos) \vee Em(x_1, amelia),\\
& Em(praia, carlos), \neg Em(x_2, amelia)\}.
\end{aligned}
$$

A cláusula $\neg Em(x_2, amelia)$ corresponde à negação do teorema.

Resolução

Uma possível árvore de prova por resolução para o conjunto de cláusulas H é apresentada na figura abaixo:



Método de Tableaux

Conjunto de regras para a construção de um tableau lógico a partir de um conjunto de fórmulas lógicas.

- Regras para fórmulas conjuntivas:

$$\frac{A \wedge B}{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}} \qquad \frac{\neg(A \vee B)}{\begin{array}{c} \neg A \\ \neg B \end{array}} \qquad \frac{\neg(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c} A \\ \neg B \end{array}}$$

- Regras para fórmulas disjuntivas:

$$\frac{A \vee B}{A \mid B} \qquad \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \mid \neg B} \qquad \frac{A \rightarrow B}{\neg A \mid B}$$

- Regra para a negação:

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Método de Tableaux

Conjunto de regras para a construção de um tableau lógico a partir de um conjunto de fórmulas lógicas.

- Regras para fórmulas quantificadas universalmente:

$$\frac{\forall x.A}{A\{x/t\}} \qquad \frac{\neg\exists x.A}{\neg A\{x/t\}}$$

onde t é um termo.

- Regras para fórmulas quantificadas existencialmente:

$$\frac{\exists x.A}{A\{x/\pi\}} \qquad \frac{\neg\forall x.A}{\neg A\{x/\pi\}}$$

onde π é um parâmetro.

Método de Tableaux

Exemplo: Para a fórmula

$$
\begin{aligned}
W \quad = \quad & \forall x.(Bom(x) \rightarrow Alegria) \rightarrow \\
& \exists x.Bom(x) \rightarrow Alegria
\end{aligned}
$$

pode-se apresentar a seguinte prova, onde a primeira linha corresponde a $\neg W$:

(1)	$\neg(\forall x.(B(x) \rightarrow A) \rightarrow \exists x.B(x) \rightarrow A)$					
(2)	$\forall x.(B(x) \rightarrow A)$				de	(1)
(3)	$\neg(\exists x.B(x) \rightarrow A)$				de	(1)
(4)	$\exists x.B(x)$				de	(3)
(5)	$\neg A$				de	(3)
(6)	$B(a)$				de	(4)
(7)	$B(a) \rightarrow A$				de	(2)
(8)	$\neg B(a)$	de	(7)	A	de	(7)

Cálculo de Seqüentes

Conjunto de regras completo para a lógica proposicional:

Axiomas $A \vdash A \qquad A, \neg A \vdash B \qquad \vdash V$

Regra de Enfraquecimento Se $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ e $\Delta_1 \subseteq \Delta_2$ então $\frac{\Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\Gamma_2 \vdash \Delta_2}$

Regras para a Negação $\frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A}$

Regras para a Conjunção $\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B}$

Regras para a Disjunção $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \vee B}$

Regras para a Implicação $\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \rightarrow B}$

Cálculo de Seqüentes

Um exemplo de prova no cálculo de seqüentes para o teorema :

$$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$$

é dado pela árvore a seguir :

$(1) \quad A \vdash A$ $\qquad$ $(2) \quad B \vdash B$

$(3) \quad A, B \vdash A$ $\qquad$ $(4) \quad B, A \vdash B$

$(5) \quad A, B \vdash A \wedge B$

$(6) \quad B \vdash A \wedge B, \neg A$

$(7) \quad \vdash A \wedge B, \neg A, \neg B$

$(8) \quad \neg(A \wedge B) \vdash \neg A, \neg B$

$(9) \quad \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$

$(10) \quad \vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Dedução Natural

Conjunto de regras completo para a lógica proposicional:

Regras de Introdução

$\wedge\mathbf{I}$ $$\frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

$\vee\mathbf{I}$ $$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B}$$

$\rightarrow\mathbf{I}$ $$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

$\neg\mathbf{I}$ $$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array} \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ \neg B\end{array}}{\neg A}$$

Regras de Eliminação

$\wedge\mathbf{E}$ $$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$\vee\mathbf{E}$ $$\frac{A \vee B \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]\\ \vdots \\ C\end{array}}{C}$$

$\rightarrow\mathbf{E}$ $$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

$\neg\mathbf{E}$ $$\frac{A \quad \neg A}{B} \qquad \frac{\begin{array}{c}[\neg A]\\ \vdots \\ A\end{array}}{A}$$

Dedução Natural

Regra da *Introdução da Implicação*: esta regra afirma que, se ao supor A é possível provar B, então a suposição de A pode ser descartada e a fórmula $A \rightarrow B$ pode ser inferida. Esta regra é usualmente representada por:

$$\cfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}$$

onde, os símbolos $[\;]$ representam o fato de que A é uma suposição e a linha pontilhada representa uma prova de B a partir de A.

Dedução Natural

Ao ser utilizada no interior de uma prova, a regra dá origem a uma prova subordinada que é representada por um quadro, no interior do qual vale a suposição que aparece na sua primeira linha:

$$\boxed{\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ B \end{array}}$$

$$A \longrightarrow B$$

onde, novamente, a linha pontilhada representa uma prova de B a partir de A.

Dedução Natural

Prova para o terceiro axioma de Frege utilizando apenas as duas regras associadas ao operador de implicação:

(1)	$(A \to (B \to C))$	Suposição
(2)	B	Suposição
(3)	A	Suposição
(4)	$(B \to C)$	Modus Ponens $1, 3$
(5)	C	Modus Ponens $2, 4$
(6)	$(A \to C)$	Introdução da $\to 3, 5$
(7)	$(B \to (A \to C))$	Introdução da $\to 2, 6$
(8)	$(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$	Introdução da $\to 1, 7$

Dedução Natural

Algumas destas regras admitem casos particulares importantes, por exemplo, na regra $\neg\mathbf{I}$ pode-se fazer $B = A$ e a regra passa a ser :

$$\neg\mathbf{I} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A] \\ \vdots \\ \neg A\end{array}}{\neg A}$$

Dedução Natural

Outro caso particular é quando se faz $B = \neg A$ na regra $\vee\mathbf{E}$, neste caso a disjunção $A \vee B = A \vee \neg A$ é sempre verdadeira e a regra se reduz para :

$$\vee\mathbf{E} \qquad \frac{\begin{array}{cc} [A] & [\neg A] \\ \vdots & \vdots \\ C & C \end{array}}{C}$$

Dedução Natural

Prova por dedução natural do teorema: $\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q$

<table>
<tr><td colspan="2">$(1)\ \neg(P \wedge Q)$ Suposição</td></tr>
<tr><td>$(2)\ P$ Suposição

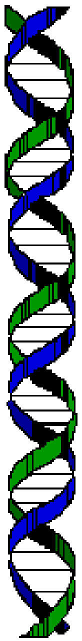
$(3)\ Q$ Suposição
$(4)\ P \wedge Q$ $\wedge \mathbf{I}\ 2, 3$
$(5)\ \neg Q$ $\neg \mathbf{E}\ 1, 4$

$(6)\ \neg Q$ $\neg \mathbf{I}\ 3, 5$
$(7)\ \neg Q \vee \neg P$ $\vee \mathbf{I}\ 6$</td><td>$\neg P$ Suposição

$\neg Q \vee \neg P$ $\vee \mathbf{I}\ 2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(8)\ \neg P \vee \neg Q$ $\vee \mathbf{E}\ 2, 7$</td></tr>
</table>

$(9)\ \neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg P \vee \neg Q$ $\rightarrow \mathbf{I}\ 1, 8$

Conclusão



$\longrightarrow$