Capítulo 2
Lógica Proposicional

Lógica para Programação
LEIC - Tagus Park
2º Semestre, Ano Lectivo 2007/08

©Inês Lynce
©Luísa Coheur

Programa

- Apresentação
- Conceitos Básicos
- Lógica Proposicional ou Cálculo Proposicional
- Lógica de 1ª ordem ou Lógica de Predicados
- Programação em Lógica
- Prolog

Programa

- Apresentação
- Conceitos Básicos
- Lógica Proposicional ou Cálculo Proposicional
- Lógica de 1ª ordem ou Lógica de Predicados
- Programação em Lógica
- Prolog

Bibliografia

- Martins J.P., Lógica para Programação, Capítulo 2.
- Ben-Ari M., Mathematical Logic for Computer Science, Springer-Verlag, 2003, capítulos 2 e 4 (parte)
- Huth M. e Ryan M., Logic in Computer Science, Cambridge University Press, 2004, capítulos 1 e 6 (parte)

Lógica Proposicional

- A Lógica Proposicional usa símbolos de proposição para representar proposições.
- Um símbolo de proposição representa uma proposição como um todo, ao interior da qual não podemos aceder.

Exemplo

- Joaquim é um homem – representado, por exemplo, por P.

Então, se é tão simples, porque é que damos lógica proposicional?

- Permite introduzir certos conceitos de uma forma muito simples...
- ... abrindo a porta a uma boa compreensão de lógicas mais complexas.

E ainda porque...

- Existem muitas aplicações reais para a lógica proposicional:
  - circuitos digitais;
  - verificação de hardware e software;
  - planeamento;
  - bioinformática;
  - instalação de pacotes/plug-ins para Linux/Eclipse;

E há ainda que destacar área de SAT...

- existem ferramentas muito optimizadas (os chamados *SAT solvers*) que conseguem resolver instâncias de problemas que podem ter milhões de variáveis e centenas de milhões de cláusulas
- todos os anos existe uma competição de SAT solvers onde são propostos novos problemas mais complexos ferramentas cada vez mais sofisticadas

Componentes de uma Lógica (relembrar)

1. Linguagem
2. Sistema dedutivo
3. Sistema semântico

1 - Linguagem

- Símbolos da linguagem
- Frases da linguagem

Símbolos da linguagem

- Símbolos da linguagem
  1. Símbolos de pontuação: ( )
  2. Símbolos lógicos: $\neg \wedge \vee \rightarrow$
     - 2.1 o símbolo $\neg$ corresponde à operação de negação,
     - 2.2 o símbolo $\wedge$ corresponde à operação de conjunção,
     - 2.3 o símbolo $\vee$ corresponde à operação de disjunção,
     - 2.4 o símbolo $\rightarrow$ corresponde à operação de implicação.
  3. Símbolos de proposições: P_i, para i $>$ 0.
  4. Notação: Vamos usar letras maiúsculas (P, Q, R, ...), para representar proposições, sempre que não existir perigo de confusão.

Frases da linguagem *(fbfs)*

- As *(fbfs)* (fórmulas bem formadas) correspondem ao conjunto definido através das seguintes regras de formação:
  1. Os símbolos de predicado são *fbfs* (denominadas fórmulas atómicas).
  2. Se α é uma *fbf* então $(\neg\alpha)$ é uma *fbf*.
  3. Se α e β são *fbfs* então $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$ e $(\alpha \rightarrow \beta)$ são *fbfs*.
  4. Nada mais é uma *fbf*.

Frases da linguagem *(fbfs)* - notação

- Sempre que possível os parêntesis redundantes são omitidos:
  - $\neg$ tem prioridade sobre $\wedge$ e $\vee$, e $\wedge$ e $\vee$ têm prioridade sobre $\rightarrow$.
  - $\wedge$ e $\vee$ são operações associativas à esquerda e $\rightarrow$ é associativa à direita.
- Exemplo: $(P \wedge Q) \vee (R \rightarrow (P \rightarrow Q))$ pode ser simplificado para $P \wedge Q \vee (R \rightarrow P \rightarrow Q)$.

Exemplo

- Se P representa a proposição “está a chover”;
- Se Q representa a proposição “está vento”;
- Se R representa a proposição “eu fico em casa”;
- $P \land Q$ representa a proposição “está a chover e está vento”;
- $(P \land Q) \rightarrow R$ representa a proposição “se está a chover e está vento, então eu fico em casa”;
- ...

2 - Sistema dedutivo

- O sistema dedutivo especifica regras de inferência (regras de manipulação simbólica) que permitem introduzir novas *fbfs* a partir de *fbfs* já existentes.

2 - Sistema dedutivo - o que vamos estudar?

- Abordagem da dedução natural (contém apenas regras de inferência);
- Abordagem axiomática (baseada num conjunto de axiomas + pequeno conjunto de regras de inferência);
- Propriedades do sistema dedutivo;
- Princípio da resolução.

Abordagem da dedução natural - e como é que são essas regras de inferência?

- Tipicamente, existem duas regras de inferência por cada símbolo lógico ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$):
    1. Regra de introdução: introdução do símbolo lógico numa nova *fbf*.
    2. Regra de eliminação: eliminação de um símbolo lógico de uma *fbf* já existente.

Abordagem da dedução natural - conceito de prova

- Sequência finita de linhas numeradas, cada uma das quais ou contém uma premissa ou uma *fbf* que é adicionada à prova utilizando as *fbf* que existem nas linhas anteriores e uma das regras de inferência.

Abordagem da dedução natural - objectivo de uma prova

- Dado um conjunto de premissas $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$ conseguir derivar a conclusão ψ, ou seja, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$.

Abordagem da dedução natural - derivabilidade

- Se existir uma prova de ψ a partir de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, diz-se que ψ é derivável a partir de $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$.

Vamos lá então a essas regras de inferência!!!

Mas antes, um conceito muito importante, o de fórmula de inserção

- Seja α uma *fbf*. Uma fórmula de inserção de α é qualquer *fbf* obtida a partir de α através da substituição de todas as ocorrências de qualquer dos seus símbolos de proposição por uma *fbf* qualquer.

Regra da premissa

- Permite a introdução de qualquer *fbf* numa prova, marcando-a como premissa (Prem).

Regra da repetição

- Permite que numa prova se repita uma linha já existente na prova

$$\frac{\alpha}{\alpha} \quad Rep$$

Introdução da conjunção

$$\frac{\alpha \qquad \beta}{\alpha \wedge \beta} \quad I\wedge$$

$I\wedge$: exemplo $(P, Q \vdash P \wedge Q)$

1	P	*Prem*
2	Q	*Prem*
3	$P \wedge Q$	$I\wedge, (1, 2)$

Eliminação da conjunção

$$\frac{\alpha \land \beta}{\alpha} \quad E_1\land$$

$$\frac{\alpha \land \beta}{\beta} \quad E_2\land$$

Na prática $E\land$ refere-se indistintamente a $E_1\land$ e $E_2\land$.

$E\wedge$: exemplo ($P \wedge Q \vdash P$ e $P \wedge Q \vdash Q$)

1	$P \wedge Q$	*Prem*
2	P	$E\wedge, 1$

1	$P \wedge Q$	*Prem*
2	Q	$E\wedge, 1$

Prova para $P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$

1	$P \wedge Q$	$Prem$
2	R	$Prem$
3	Q	$E\wedge, 1$
4	$Q \wedge R$	$I\wedge, (3, 2)$

Provas hipotéticas

- Uma prova hipotética é uma prova iniciada com a introdução de uma hipótese.
  - Uma prova hipotética cria um ambiente onde se assume que a hipótese é verdadeira.
  - Este ambiente vai ser representado por uma caixa.

Regra da re-iteração

- Regra apenas aplicável a provas hipotéticas e que nos permite repetir, dentro de uma prova hipotética, qualquer *fbf* que exista na prova que contém a prova hipotética.

$$\frac{\alpha}{\boxed{\alpha}} \quad \textit{Reit}$$

Introdução da implicação

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \beta\end{array}}}{\alpha \to \beta}\quad \mathsf{I} \to$$

Exemplo ($P \vdash Q \rightarrow P$)

1	P	$Prem$
2	Q	Hip
3	P	$Reit, 1$
4	$Q \rightarrow P$	$I \rightarrow, (2,3)$

$I \rightarrow$: exemplo $(P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q))$

1	P	*Prem*
2	Q	*Hip*
3	P	*Reit*
4	$P \wedge Q$	$I\wedge, (3, 2)$
5	$Q \rightarrow (P \wedge Q)$	$I \rightarrow, (2, 4)$

Eliminação da implicação (modus ponens)

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\beta} \quad E \rightarrow$$

$E \rightarrow$: exemplo $(P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$

1	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	*Prem*
2	$P \rightarrow Q$	*Hip*
3	P	*Hip*
4	Q	$E \rightarrow, (3, 2)$
5	$Q \rightarrow R$	$E \rightarrow, (3, 1)$
6	R	$E \rightarrow (4, 5)$
7	$P \rightarrow R$	$I \rightarrow, (3, 6)$
8	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	$I \rightarrow, (2, 7)$

Conceito de teorema

- Um teorema é uma *fbf* que pode ser inferida sem o uso de premissas.

Exemplo

- $(P \rightarrow P)$
- $(P \rightarrow R) \rightarrow ((\neg Q \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow R))$

Exercício - esta é para vocês fazerem

- Utilizando o sistema de dedução natural, mostre que
  - $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$
- e
  - $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
- são teoremas.

Introdução da negação

$$\dfrac{\boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \beta\\ \neg\beta\end{array}}}{\neg\alpha}\qquad I\neg$$

$I\neg$: exemplo ($P \to Q, \neg Q \vdash \neg P$)

1	$P \to Q$	$Prem$
2	$\neg Q$	$Prem$
3	P	Hip
4	Q	$E \to, (3, 1)$
5	$\neg Q$	$Reit, 2$
6	$\neg P$	$I\neg, (3, (4, 5))$

Eliminação da negação

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha} \quad E\neg$$

$E\neg$: exemplo ($\neg P \vdash P \to Q$)

1	$\neg P$	*Prem*
2	P	*Hip*
3	$\neg Q$	*Hip*
4	P	*Reit*, 2
5	$\neg P$	*Reit*, 1
6	$\neg\neg Q$	$I\neg, (3, (4, 5))$
7	Q	$E\neg, 6$
8	$P \to Q$	$I \to, (2, 7)$

Introdução da disjunção

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad I_1\vee$$

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta} \quad I_2\vee$$

Eliminação da disjunção

$$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \boxed{\begin{array}{c}\alpha\\ \vdots\\ \phi\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\beta\\ \vdots\\ \phi\end{array}}}{\phi} \quad E\vee$$

$E\vee$: exemplo ($P \vee Q \vdash Q \vee P$)

1	$P \vee Q$			*Prem*
2	P	*Hip*	Q	*Hip*
3	$Q \vee P$	$I\vee, 2$	$Q \vee P$	$I\vee, 2'$
4	$Q \vee P$			$E\vee, (1, (2, 3), (2', 3'))$

Conceito de regra de inferência derivada

- Uma regra de inferência derivada é um padrão de raciocínio correspondente à aplicação de várias regras de inferência.

Exemplo

- *modus tollens* (exemplo para $I\neg$: $P \rightarrow Q, \neg Q \vdash \neg P$),
- introdução da dupla negação ($P \vdash \neg\neg P$),
- introdução da disjunção negada ($\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \vee Q)$).

Regras de inferência derivadas: $I\neg\neg$ $(P \vdash \neg\neg P)$

1	P	*Prem*
2	$\neg P$	*Hip*
3	P	*Rep*, 1
4	$\neg P$	*Rep*, 2
5	$\neg\neg P$	$I\neg, (2, (3, 4))$

Numa prova que contém α podemos inferir $\neg\neg\alpha$.

Regras de inferência derivadas: $I\neg\vee$ $(\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \vee Q))$

1	$\neg P$			*Prem*
2	$\neg Q$			*Prem*
3	$P \vee Q$			*Hip*
4	P	*Hip*	Q	*Hip*
5	P	$Rep, 4$	$\neg P$	*Hip*
6			$\neg Q$	$Rep, 2$
7			Q	$Rep, 4'$
8			$\neg\neg P$	$I\neg, (5', (6', 7'))$
9			P	$E\neg, 8'$
10	P			$E\vee, (3, (4, 5), (4', 9'))$
11	$\neg P$			$Rep, 1$
12	$\neg(P \vee Q)$			$I\neg, (3, (10, 11))$

Numa prova que contém $\neg\alpha$ e $\neg\beta$ podemos inferir $\neg(\alpha \vee \beta)$.

Regras de inferência derivadas: $I\neg\vee$ $(\neg P, \neg Q \vdash \neg(P \vee Q))$

- Agora fazem vocês!

Como diminuir o número de linhas das provas?

- Utilizando teoremas!
- Utilizando regras de inferência derivadas!

Como diminuir o número de linhas das provas usando teoremas?

- Sempre que precisarmos de usar teoremas podemos omitir a sua prova, introduzindo apenas uma linha com a *fbf* correspondente e justificando-a como um teorema.

Como diminuir o número de linhas das provas usando regras de inferência derivadas?

- Uma regra de inferência derivada corresponde a uma abstracção através da qual podemos agrupar a aplicação de várias regras num único passo.

Como construir provas? Sugestões...

- Para provar uma *fbf* da forma $\alpha \rightarrow \beta$ usar uma prova hipotética introduzindo α como hipótese e tentando derivar β.
- Para provar uma *fbf* da forma $\alpha \wedge \beta$ tentar provar separadamente α e β.
- Para provar uma *fbf* da forma $\alpha \vee \beta$ tentar provar *uma* das *fbfs* (α ou β).

Como construir provas? Sugestões... (cont.)

- Para provar uma *fbf* da forma $\neg\alpha$:
  - Utilizar as *fbfs* existentes na prova para derivar directamente $\neg\alpha$.
  - Utilizar uma prova hipotética com a hipótese α para tentar chegar a uma contradição.
- Para provar uma *fbf* que corresponde a um símbolo de predicado:
  - Tentar aplicações de regras que introduzem esse predicado.
  - Tentar prova por absurdo:
    - usando uma prova hipotética iniciada com a negação do predicado,
    - e tentando derivar uma contradição dentro dessa prova hipotética.
  - Usar raciocínio por casos a partir de disjunções.

Conclusão...

- As *fbfs* numa prova são:
  - ou premissas,
  - ou teoremas,
  - ou correspondem à aplicação de regras de inferência.
- As regras de inferência são:
  - ou regras definidas associadas aos símbolos lógicos,
  - ou regras de inferência derivadas.

Novos símbolos lógicos

- Símbolos lógicos tradicionais: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$
  - Mas são suficientes os símbolos $\neg$ e $\rightarrow$!
    - Exercício: definir $\vee$ e $\wedge$ usando $\neg$ e $\rightarrow$.
- Outro símbolo lógico relevante: equivalência $(\leftrightarrow)$
  - Se α e β são *fbfs* então $\alpha \leftrightarrow \beta$ é *fbf*.
  - $\alpha \leftrightarrow \beta \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

Introdução da equivalência

$$\frac{\alpha \to \beta \qquad \beta \to \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta} \quad \mathit{I} \leftrightarrow$$

Eliminação da equivalência

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \quad E_1 \leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha} \quad E_2 \leftrightarrow$$