Lógica

(Texto en elaboração: para uso exclusivo de sala de aula)

NEWTON C. A. DA COSTA

e

DÉCIO KRAUSE

Florianópolis
Maio 2009

"In the modern development of Logic, the traditional Aristotelian Logic takes its place as a simplification of the problem presented by the subject. In this there is an analogy to arithmetic of primitive tribes compared to modern mathematics."[1]

A. N. Whitehead, in his Foreword to Quine's "A System of Logistics" (1934)

Conteúdo

Prefácio

A PALAVRA *Lógica* designa hoje uma vasta área do conhecimento, com implicações em praticamente todos os domínios da investigação. Da antiga disciplina que estudava "o raciocínio correto", ou as "formas válidas de inferência (ou de raciocínio)", a lógica transformou-se em uma disciplina que alcançou resultados que, em termos de complexidade e profundidade, nada ficam devendo aos maiores resultados da matemática. Aliás, a lógica é, presentemente, uma disciplina de características matemáticas, e a não ser que se deseje estudar uma parcela infinitesimal de seu escopo, um conhecimento sólido de boas partes da matemática se faz imperativo. Isso não impede, no entanto, que com um conhecimento mínimo dessa disciplina, ela possa ser compreendida em suas características gerais, como procuraremos evidenciar neste livro.

Ademais, durante o século XX houve o desenvolvimento e o estudo aprofundado de vários sistemas, ou *lógicas*, que ou estendiam o alcance daquela que precisou ser chamada de 'clássica', ou violavam alguns de seus princípios básicos, ou ambas as coisas. Assim, contrariamente ao que se poderia imaginar há cerca de 100 anos, hoje em dia há uma grande variedade de sistemas que permitem, por exemplo, o tratamento de contradições, sem que se tenham os dissabores que se teria se elas fossem consideradas no escopo da lógica clássica (como veremos no capítulo **??**). As lógicas não-clássicas constituem uma revolução imensa na história da ciência, comparável ao nascimento das geometrias não-euclidianas no século XIX, mas cuja significação à pessoa não especializada ainda está algo distante, se bem que se constatem, nas melhores universidades brasileiras, cursos sistemáticos sobre alguns desses sistemas, muitas vezes em áreas aparentemente distantes da filosofia ou da matemática pura, como a informática, a engenharia e mesmo a medicina.

Ademais, a lógica de hoje deixou de ser meramente um estudo teórico, parte da matemática pura, para se constituir em disciplina que tem encontrado aplicações as mais diversas, como na inteligência artificial, na robótica, na engenharia de tráfego, na medicina, além dos fundamentos da ciência (matemática, física, biologia) e mesmo nas ciências humanas, como na filosofia do direito, na psicanálise e na teoria da argumentação (esta alías podendo ser considerada a área que a originou de certo modo).

Assim, não se pode deixar de enfatizar essas três características da lógica atual: o alcance e a profundidade dos resultados alcançados, o surgimento das lógicas não-clássicas e as variadas aplicações. Talvez esses sejam indícios da importância cada vez maior dessa disciplina.

Nosso objetivo neste livro é traçar um apanhado das principais características da lógica atual, que possa servir tanto ao intelectual curioso pelos rumos da lógica de hoje, quando ao estudante interessado em conhecer seus principais conceitos básicos. Visamos dar ao leitor um panorama geral da lógica atual feito com um mínimo de aparato técnico, ainda que se exija da pessoa atenta uma boa capacidade de abstração e alguma matemática. Esperamos que, ao final, o leitor fique convencido da importância da lógica no contexto científico e filosófico atual.

Nossos agradecimentos aos nossos colegas e alunos que participam dos Seminários de Lógica junto ao Grupo de Lógica e Fundamentos da Ciência (UFSC/CNPq), que realizamos semanalmente no Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Santa Catarina desde 2001, que nos deram suficiente motivação para escrever essas notas.

Florianópolis, Maio de 2009
Os autores

Capítulo 1

Introdução

QUANDO EXERCEMOS NOSSA faculdade cognitiva, utilizamos certas categorias conceituais, algumas vezes muito gerais, como os de objeto, propriedade e relação, que nos são sugeridos pela experiência, ainda que a sua configuração final venha a transcender a própria experiência, chegando a níveis de abstração muito acentuados, como exemplificam a matemática e as ciências em geral.

Na gênese da formação dessas categorias, levamos em conta variados aspectos como, por exemplo, (1) que os objetos que nos cercam tendem a permanecer idênticos a si mesmos (ainda que haja mudanças, esses objetos retêm sua *identidade*), (2) que um objeto não pode ter e não ter uma certa propriedade nas mesmas circunstâncias (como estar e não estar em um determinado lugar em um determinado tempo, ou ter e não ter um certo formato ou composição), e (3) que dada uma certa característica que lhe possa ser aplicada, ele a tenha ou não. Esta imagem intuitiva dos objetos que nos cercam e do modo como lhes associamos suas características mais imediatas (propriedades e relações com outros objetos), influenciou a formação de nossas primeiras sistematizações racionais, em especial a geometria dos antigos gregos, a física, e a própria lógica. Muitos dos princípios básicos da lógica tradicional resultam de suposições como as acima. Através da depuração e sistematização de certos sistemas de categorias, chegamos em particular aos sistemas lógicos. Levando em conta princípios como os mencionados, edificamos a lógica tradicional, que chamaremos de *clássica*; assim, para nós, uma lógica é, de certo modo, um sistema de cânones de inferências baseados em um esquema de categorias.

É conveniente ressaltar que a palavra *lógica* é frequentemente usada em várias acepções. Interessam-nos aqui duas delas: a lógica como disciplina, que presentemente está muito longe de ser apenas, como se pensava, 'a ciência dos argumentos válidos' ou o 'estudo das formas válidas de inferência', e a lógica como sinônimo de *sistema lógico*, designando uma lógica ℓ particular, ou mesmo nos referindo aos sistemas lógicos em geral.[1] Pelo contexto, será possível constatar quando usaremos a palavra 'lógica' em uma ou em outra acepção.

A lógica (como disciplina), no entanto, não se limita ao estudo das inferências válidas de acordo com uma certa lógica ℓ. Tópicos como a teoria da recursão, a teoria dos modelos, os fundamentos da teoria dos conjuntos, para citar alguns exemplos, são típicos da lógica de hoje, e seus assuntos extrapolam em muito a investigação das inferências válidas (o leitor pode consultar a página de *Mathematical Reviews* para ter uma idéia mais precisa das áreas da lógica atual).[2]

Por outro lado, ainda que muitas vezes falemos de *lógica* no singular, não há *a* lógica. Hoje em dia dificilmente alguém minimamente versado nesse campo sustentaria que há *uma única* lógica, que mapearia, no fundo, os modos acertados de raciocinarmos 'corretamente'. Há na verdade uma infinidade de lógicas (no sentido de sistemas lógicos) distintas possíveis, e a escolha de uma delas depende fundamentalmente de critérios como intuitividade, simplicidade ou capacidade de expressão, dentre outros fatores.

Assim, 'lógica' e 'raciocínio correto', qualquer que seja a acepção na qual se usem essas palavras, têm entre si uma relação de difícil aporte, notadamente dado à existência das várias lógicas e da dificuldade de se conceituar o que seria um 'raciocínio correto'. Porém, quando falarmos de *lógica*, pura e simplesmente, sem qualquer qualificação, deve-se entender que queremos dizer lógica *clássica*, que será detalhada em suas linhas gerais no que segue.

Cabe observar, ainda, que o próprio desenvolvimento das disciplinas científicas influenciou profundamente as interrelações entre elas. Por exemplo, a influência da geometria euclidiana e da biologia para a constituição das leis lógicas tem sido reconhecida por diversos autores, como Brunschvig [4] e Enriques [12, 13]; com efeito, a imagem intuitiva dos objetos geométricos comuns, e de suas propriedades, permitiram generalizações que originaram, de certa forma, tanto a lógica aristotélica como a lógica matemática atual. Os corpos geométricos seriam hirtos e imutáveis, dotados de propriedades e mantendo relações entre si, de modo análogo às substâncias aristotélicas. Surgem daí alguns dos princípios basilares da lógica tradicional, como os historicamente mais famosos princípios da identidade, do terceiro excluído e da contradição (acima referidos como (1), (2) e (3) respectivamente), dentre outros princípios.[3]

---

[1] É interessante observar que L. Rougier, no artigo 'The relativity of logic' [26] inicia com a seguinte frase: "A lógica é definida como a arte do bem pensar, a arte do pensar corretamente". Tais 'definições' são ainda bem comuns em alguns textos.

[2] O leitor pode consultar `http:\www.ams.org/msc/03-xx.html`.

[3] Sobre esses princípios e outros conceitos citados no texto, ver Notas e Complementos —daqui para frente, simplesmente N.C.— ao final de cada capítulo. Adiantamos que é comum encontrar textos que

Outra fonte importante das leis lógicas é sem dúvida a aritmética grega (incluindo-se aí os números irracionais), que remonta aos pitagóricos e a Eudoxo mas, igualmente influentes, foram a história natural e a própria filosofia grega. Tendo-se em vista Aristóteles ter sido ao mesmo tempo um grande naturalista e o 'fundador' da lógica ocidental, parece patente que, levando-se em conta os seus interesses pela ciência natural, seus escritos em lógica tenham sofrido influência também desta área. Quanto à filosofia grega, alguns autores, como Enriques e Szabó, sustentam que os próprios fundamentos da lógica e da matemática como ciências racionais teriam sua origem na filosofia eleática, especialmente com Parmênides e Zenão de Elea [28, 29]. Segundo Szabó, teria sido o uso das provas indiretas em argumentos filosóficos, como nos célebres paradoxos de Zenão (ver N.C. deste capítulo), a fonte de técnicas incorporadas à matemática e à lógica, como a redução ao absurdo e as provas indiretas em geral.[4]

Na gênese da lógica tradicional, os sistemas de categorias baseados em suposições como as mencionadas no início (a noção de objeto, as leis da identidade e da contradição etc.) aparentemente nortearam a elaboração de suas regras básicas. Porém, a partir do início do século XX, o surgimento de alguns sistemas de lógicas alternativas trouxe a possibilidade de modificações dessas exigências, permitindo que fossem elaborados sistemas onde um ou vários desses princípios deixassem de vigorar.[5]

Na atualidade, contrariamante ao que se deu historicamente, há a tendência por parte de vários autores de desvincular as diversas lógicas de posturas metafísicas ou doutrinas filosóficas prévias que possam influenciar a elaboração dos princípios de uma determinada lógica. Assim procedendo, os diversos sistemas lógicos são trabalhados de forma independente de discussões filosóficas e metafísicas profundas, e podem ser aplicadas a praticamente todos os campos da atividade intelectual humana. Por outro lado, se nos for conveniente, podemos nos deixar ser conduzidos pelos preceitos que quisermos, de modo que os sistemas que elaborarmos sejam condizentes com tais pressupostos. O que importa é não dogmatizarmos, sustentando que uma ou outra posição deve prevalescer

---

se referem a estes três princípios como se eles fossem *os* princípios básicos da lógica clássica. Isso é falso, pois há vários outros, não tão famosos, que são igualmente importantes, como a dupla negação (a negação da negação de uma proposição é equivalente a ela própria), a formação da conjunção (dadas duas proposições, pode-se inferir a sua conjunção), a extensionalidade, a 'lei da explosão', etc. Ademais, não se pode fundamentar a lógica clássica sobre esses três princípios unicamente.

[4] Aliás, o grande geômetra italiano Federigo Enriques sustenta que o verdadeiro 'criador' da lógica seria Zenão, e não Aristóteles, sobretudo pelo fato de ele ter chegado ao método de redução ao absurdo, que implica na 'construção' de figuras impossíveis em geometria. As demonstrações diretas, por seu turno, nunca 'torcem' as figuras. Enriques sublinha que assim nasceu a lógica, quando a 'forma' tornou-se independente da 'matéria' [12].

[5] Por motivos que tornaremos claro à frente, não diremos que os mencionados princípios foram *derrogados*. Ver página (**??**).

irrestritamente.

É comum nos textos de lógica em geral abordarmos a lógica (no sentido do estudo de certos sistemas lógicos) por meio da especificação de determinadas linguagens. Alguns autores chegam a dizer que lógica *é* linguagem. Este é, no entanto, apenas um dos possíveis pontos de vista. A lógica pode, na verdade, ser abordada de diversas perspectivas. Para exemplificar, destacaremos duas delas, que se interrelacionam enormemente, e que chamaremos de abordagens *linguística* e a *algébrica-topológica*, à qual daremos atenção no capítulo 4.4.

De um ponto de vista lingüístico, fixar uma lógica ℓ exige a determinação de uma ou mais linguagens, por meio das quais expressam-se os princípios que ℓ caracteriza como *válidos*. Como já dito, para nós não há qualquer razão para se supor que existam pressupostos *a priori*, que sejam pensados como indispensáveis e que devam valer irrestritamente, sejam eles de natureza metafísica ou filosófica.[6] Para nós, não há qualquer justificação para quais regras uma lógica deve aceitar como lícitas. Claro que o cientista pode ser motivado por essa ou aquela razão, ou estar comprometido com essa ou aquela postura filosófica ou metafísica, mas podemos criar sistemas com muita liberdade, e a sua utilidade deve ser relegada a um outro tipo de problema. Passa-se com a lógica algo análogo ao que se passa com a matemática, pelo menos no que diz respeito ao célebre dizer de Georg Cantor de que a essência da matemática radica na sua completa liberdade, caso típico da geometria. O mesmo pode ser dito da lógica.

Desse modo, pode-se dar sentido preciso ao que significa 'raciocínio correto': significa correção relativa a uma particular lógica ℓ. Por exemplo, se ℓ for a lógica clássica, podemos aceitar como lícitas várias formas de redução ao absurdo. Já na lógica *intuicionista* de Brouwer-Heyting (capítulo **??**), isso não é permitido. Nas lógicas *paraconsistentes* (capítulo **??**), por outro lado, o princípio da contradição não vale em geral, podendo haver teses (teoremas) contraditórios. Em particular, nessas lógicas não vale a chamada *regra da explosão*, ou regra de *Duns Scotus*, segundo a qual de duas premissas contraditórias (uma das quais sendo a negação da outra), pode-se derivar qualquer fórmula bem formada (ou simplesmente *fórmula*) da linguagem do sistema. Esse princípio, no entanto, continua válido tanto na lógica clássica quanto na intuicionista, bem como como para certas 'proposições bem-comportadas' das lógicas paraconsistentes. Assim, quando falarmos em fazer inferências, devemos, pelo menos em tese, ter em mente qual a lógica particular que estaremos supondo em um determinado contexto.

Em linhas gerais, fixar uma lógica ℓ é determinar um modo de, dadas certas *premissas* ou *hipóteses*, podermos obter, como decorrência dos princípios de ℓ, uma *conclusão*, tudo isso devidamente codificado na linguagem de ℓ. Ou seja, temos que caracterizar

[6] Esta é, aliás, uma das teses centrais de [**?**].

uma noção de *inferência* em ℓ (ou ℓ-inferência), que dará sentido à idéia intuitiva de que uma conclusão β *se segue*, ou *é inferida* de um conjunto de premissas Γ, e isso mais uma vez depende de fatos relacionados à particular lógica ℓ adotada no momento.

Dentre as formas de inferência relativas a uma lógica ℓ, há duas que nos interessam mais pormenorizadamente, as *ℓ-deduções* e as *ℓ-induções*. Se bem que no que se segue falemos algo sobre induções em geral, posteriormente daremos atenção unicamente às inferências dedutivas, que chamaremos simplesmente de *deduções*. Tendo-se em vista o que se disse, o mais correto, ainda que isso seja pressuposto na maioria das vezes, seria falar em 'ℓ-deduções'.

1.1 Abordagens linguística vs. algébrica

Não é incomum encontrarmos textos de lógica identificando uma lógica a uma linguagem. Isto é certo unicamente sob um certo ponto de vista, que denominaremos de *abordagem linguística* (à lógica). Uma visão alternativa vem dos lógicos poloneses (principalmente), que a caracterizam como uma álgebra. Na verdade, este segundo ponto é mais geral, posto que uma linguagem pode ser vista como uma certa álgebra. (Sem muito rigor, uma álgebra é constituída por um ou mais conjuntos e de relações e/ou operações sobre os elementos desse(s) conjunto(s)). Vejamos, ainda que sem os detalhes por enquanto, em que consistem uma e outra abordagem.

A abordagem linguística

Segundo a abordagem linguística, para especificar uma lógica ℓ começamos descrevendo a sua linguagem L. Primeiramente, introduzimos um vocabulário contendo os símbolos primitivos de L. Esses símbolos funcionam como se fossem os que constam do teclado de um computador, por meio do qual desejamos escrever coisas acerca dos objetos de determinados domínios. Outros símbolos podem ser introduzidos de vários modos, em especial os definidos a partir dos primitivos (esses em geral não fazem parte da linguagem básica, ou *linguagem objeto*, como usualmente se diz, mas pertencem à metalinguagem de L).[7] Precisamos agora *aprender a escrever* com nossa linguagem. Para isso, são dadas as regras gramaticais de L. Uma expressão de L é uma sequencia (em geral, e aqui isso será suposto sempre) finita de símbolos de L, escritos convenientemente. Dentre as expressões de L, estão as suas *fórmulas*, que são especificadas pelas regras gramaticais de L. Além disso, são dadas as regras dedutivas de ℓ, ou *regras de inferência*, que

[7] Pode-se no entanto estender L acrescentando-se-lhe novos símbolos, desde que certas condições sejam obedecidas. desde que certas condições sejam obedecidas, como as chamadas 'condições de Lesniewicz', a *não criatividade* e a *eliminabilidade*. Em síntese, os novos símbolos não podem originar novos teoremas e devem poder ser eliminados caso queiramos. Para detalhes, ver o capítulo 8 de [27].

permitem que, de um certo conjunto de fórmulas, obtenhamos uma fórmula.

Mais precisamente, quando uma fórmula β é inferida das premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ por meio da regra R, dizemos que β é *conseqüência imediata*, pela regra R, das premisas dadas, e escrevemos

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta} \quad (R). \tag{1.1}$$

Uma *dedução* em ℓ é uma coleção de fórmulas da linguagem L, tal que uma delas é a fórmula que se diz ter sido *deduzida* (ou *inferida*), pelas regras dedutivas de ℓ, de outras fórmulas, que são tomadas como hipóteses ou premissas da dedução. Há diferentes modos de se definir a operação de dedução, e suas distinções caracterizam lógicas distintas, como veremos na seção **??**. Quando $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as premissas e β é a conclusão, escrevemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ ou, se quisermos fazer referência à lógica ℓ, escrevemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_\ell \beta$ para indicar esse fato. Se chamarmos de Γ o conjunto das premissas, ou seja, $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, podemos escrever ainda $\Gamma \vdash \beta$ ou $\Gamma \vdash_\ell \beta$, o que é muito conveniente. O símbolo $\vdash$ é o símbolo de dedutibilidade, e diz-se nesses casos que β é *conseqüência sintática* das α_j. No capítulo **??**, veremos a noção 'tradicional' de dedução com mais rigor.

Há no entanto algo importante que deve ser deixado claro o quanto antes, pois pode-se pensar que são somente as premissas assumidas que importam para a dedução da conclusão. Por exemplo, se deduzimos da (única) premissa "o triângulo ABC é retângulo"a conclusão "a soma dos quadrados dos catetos de ABC é igual ao quadrado de sua hipotenusa", na verdade há muito mais coisas envolvidas do que uma única premissa e a conclusão. Toda dedução rigorosa se faz (pelo menos em princípio) no contexto de um sistema devidamente estruturado (axiomaticamente), que tem uma dada lógica por *lógica subjacente* e que determina quais inferências são lícitas. No caso do nosso exemplo, podemos dizer que estamos no contexto da geometria plana usual, assim a derivação da conclusão acima depende não apenas do fato de que o triângulo ABC é retângulo, mas também dos postulados dessa geometria, bem como dos da lógica (clássica) que a alicerça. Em outras palavras, o certo seria enunciar o teorema acima assim: "Os postulados da geometria eucliana plana acarretam que, se ABC é um triângulo retângulo, então a soma dos quadrados dos catetos de ABC é igual ao quadrado de sua hipotenusa".[8] Com efeito, este resultado não vale em outras geometrias, ainda que a premissa seja mantida. Esse tipo de suposição nem sempre é mencionado explicitamente, mas deve ser ficar sub-entendido. Assim, para resumir, quando dizemos que uma conclusão β se segue de um conjunto de premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, deve ficar claro que isso se deve a princípios

[8] Cabe observar que os postulados dessa geometria comportam, além daqueles que lhe são específicos, os da lógica clássica.

de alguma lógica ℓ (ou de algum sistema dedutivo que tenha ℓ por lógica subjacente), que às vezes pode ficar sub-entendida. Não há dedução (no sentido em que estamos empregando este termo) que não seja uma ℓ-dedução, para alguma lógica ℓ.

Deste modo, como já foi dito, especificar uma particular lógica ℓ é, grosso modo, dar um mecanismo de inferências, mas lembre-se: isso não implica que a lógica –a disciplina– se resuma a tal estudo. A abordagem lingüística assume então que ℓ é caracterizada pela especificação de uma linguagem, na qual são formulados os *axiomas* de ℓ, ou *esquemas de axiomas*, bem como se explicitam as *regras de inferência* de ℓ. Quando uma fórmula β é deduzida apenas com o auxílio dos postulados da lógica ℓ, ou seja, quando não há premissas adicionais além dos axiomas, escrevemos $\vdash \beta$ (ou $\vdash_\ell \beta$), e dizemos então que β é *tese* ou *teorema* (formal) da lógica ℓ. Se quisermos, podemos supor, como se faz usualmente, que este caso é particularização da situação acima, quanto $\Gamma = \emptyset$, isto é, o conjunto Γ de premissas é vazio (o símbolo $\emptyset$ denota o *conjunto vazio*, a saber, o conjunto que não tem elementos).

Por exemplo, se ℓ for a lógica clássica e α for uma fórmula da linguagem de ℓ, então $\alpha \vee \neg\alpha$ (que informalmente se lê "α *ou* não-α",[9] e que é um modo de se escrever o princípio do terceiro excluído), é teorema de ℓ, bem como da maioria das lógicas paraconsistentes, mas não é teorema da lógica intuicionista.

Vejamos exemplo de um raciocínio que é considerado válido no contexto da lógica tradicional: "Se o número x é par, então x é divisível por 2. Ora, o número x é par. Portanto, o número x é divisível por 2". A conclusão está depois da palavra 'portanto', e as duas primeiras sentenças são as premissas. *Vemos* (intuitivamente) que o argumento é válido, já que ele reflete certas das nossas intuições e que supostamente é a lógica tradicional (ou pelo menos algum fragmento dela) que vale na nossa vida comum. Mas, como comprovar este fato? Há basicamente dois modos, que pretendemos sejam devidamente distinguidos pelo leitor.

O primeiro é puramente *sintático*, e diz respeito à noção de dedução (indicada pelo símbolo $\vdash$). A conclusão pode ser *deduzida* (inferida) das premissas pelas regras da lógica ℓ (no caso, a clássica). Com efeito, uma das 'regras clássicas' é Modus Ponendo Ponens (ou simplesmente Modus Ponens). Significa que, dadas as premissas α e $\alpha \to \beta$ (que se interpreta "se α então β"), podemos inferir β. Assim, se aceitamos as duas premissas acima e as regras da lógica clássica, em particular MP, teremos que aceitar a conclusão. Note-se que tudo se passa condicionalmente: uma vez aceitas as premissas

[9]É preciso um cuidado adicional com os exemplos tomados da linguagem natural que via de regra usamos, principalmente em cursos básicos. O significado dos conectivos lógicos nem sempre coincide com a sua 'tradução' para a linguagem comum. Por isso, exemplos que utilizem a linguagem natural devem ser olhados com cautela. Na verdade, deveriam ser substituídos por exemplos tomados da matemática.

e as regras clássicas, devemos aceitar a conclusão. A questão é que, para nós, não há qualquer justificativa *a priori* que nos force a aceitar essa ou aquela lógica, mas esse é outro problema.[10]

Desse modo, a validade de uma inferência que é expressa por meio da linguagem de uma dada lógica, e que siga as regras dessa lógica, fica a ela de certa forma condicionada. Uma *teoria* baseada em uma lógica ℓ (ou, como se diz, tendo ℓ como lógica subjacente) é um conjunto de fórmulas T tal que as deduções que se faz a partir de fórmulas de T ainda pertencem a T; em outros termos, T é *fechada para deduções*. Podemos obter teorias acrescentando novos axiomas a ℓ, e esses novos axiomas chamam-se axiomas específicos de T. Obviamente, a própria ℓ é uma teoria (com um conjunto vazio de axiomas específicos).

Outro conceito importante é o de *validade*. Se o leitor procurar uma definição de 'raciocínio válido' em um livro introdutório de lógica, provavelmente irá encontrar alguma coisa como "um argumento válido é aquele em que a conclusão não pode ser falsa se as premissas forem verdadeiras". Equivalentemente, podemos dizer que *se* as premissas forem verdadeiras, *então* a conclusão terá de sê-lo. Representando mais uma vez o conjunto das premissas por Γ e a conclusão por β, escrevemos $\Gamma \vDash \beta$ para indicar este fato e dizemos que β é *conseqüência semântica* de Γ. Dizendo isso, estamos nos comprometendo com algo que vai além dos aspectos puramente sintáticos de ℓ, como com as noções de verdade e falsidade, que são filosoficamente bastante problemáticos. Como este conceito se liga ao de dedução acima introduzido? Ou seja, se β puder ser deduzido das fórmulas em Γ (é conseqüência sintática de Γ), será também conseqüência semântica de Γ?

O que está por trás de uma resposta são as relações entre os conceitos de *demonstrabilidade* e de *verdade*. Em vários dentre os sistemas mais utilizados, como no chamado cálculo proposicional clássico ou a lógica elementar clássica, bem como em vários sistemas não clássicos, esses dois conceitos se equivalem: β é conseqüência sintática de Γ se e somente se é conseqüência semântica de Γ. Quando isso acontece, a lógica ℓ é *completa*. O *teorema da completude* para uma lógica ℓ pode ser assim enunciado: $\Gamma \vdash \beta$ se e somente se $\Gamma \vDash \beta$, onde o símbolo $\vDash$ depende da semântica que se confere à lógica ℓ.

[10] O leitor interessado em se aprofundar no assunto pode consultar da [6], onde são tratadas questões de índole pragmática (no sentido de Morris) nesse contexto, ou seja, considera-se não apenas os sinais lingúisticos e seus significados (isto é, aspectos sintáticos e semânticos de ℓ), mas também certas condições ligadas a quem está fazendo uso dessa linguagem.

A abordagem algébrica

Segundo a abordagem algébrica, uma lógica ℓ é um par ordenado $\ell = \langle \mathcal{F}, F \rangle$, onde $\mathcal{F}$ é um conjunto não vazio, dito conjunto das fórmulas de ℓ (note que não se especifica o que são as fórmulas; elas podem ser aquelas descritas segundo a abordagem linguística, o que mostra a maior generalidade da abordagem algébrica), e F é uma coleção de subconjuntos de $\mathcal{F}$, satisfazendo as seguintes condições"

(i) $F \in \mathcal{F}$

(ii) Se XXXXXXXXXXX (completar)

Todas essas definições serão exemplificadas nos capítulos seguintes.

1.2 Paralogismos

Tendo especificado quais são as formas válidas de inferência de uma lógica ℓ, aquelas que não são ℓ-válidas são chamadas de ℓ-*paralogismos*.

No tocante à lógica clássica, que aparentemente é mais próxima do modo como procedemos racionalmente acerca do mundo que nos cerca, dsitinguiremos dois tipos básicos de paralogismos: as *falácias* e as *induções*. As falácias são formas de inferência que reconhecemos como errôneas relativamente aos princípios da lógica tradicional, e as induções, ainda que não sejam válidas (no sentido de respeitarem as regras da lógica tradicional), apresentam certo grau de plausibilidade.

Classificamos as falácias em dois grupos: (1) as falácias propriamente ditas, que são decorrentes de erros não intencionais e (2) os sofismas que, ao contrário, via de regra são elaborados com a intenção de se enganar alguém.

Os sofismas contêm erros de raciocínio que são tomados como uma tática de argumentação, visando mostrar que nosso argumento é correto, quando na realidade ele não é (ver N.C). Os sofismas não aparecem propriamente no escopo de sistemas lógicos, mas no que se conhece como 'lógica informal', grosso modo, um conjunto de regras e preceitos informais que refletem em parte aqueles da lógica clássica e a nossa forma usual de raciocinar (pelo menos é o que se supõe). Em outras palavras, envolvem a dimensão *pragmática* da linguagem [6]. Na verdade, a distinção entre um sofisma e um raciocínio indutivo, na acepção que usamos este termo, só pode se dar ao nível da *praxis*.

Claro que quando se fala em 'erro de raciocínio', há que se ter algum parâmetro em conta, e em geral ele é tomado como sendo o da lógica tradicional; em geral, pode-se estender a noção de falácia para qualquer lógica ℓ, mas isso não será feito aqui.

1.3 Induções e a Lógica Indutiva

Ainda que o estudo das falácias tenha grande importância para a vida diária, assim como para certas áreas como o direito e a retórica, mais relevantes para a ciência, no entanto, são as ℓ-induções. Essas constituem formas de inferência que, ainda que não sendo válidas do ponto de vista da lógica ℓ (em geral a clássica), têm a sua conclusão como uma asserção muito plausível, uma vez que se aceitem as premissas como igualmente plausíveis. O problema está em se especificar o que significa essa 'plausibilidade'. Antes de prosseguirmos, porém, o modo como estamos usando a palavra 'indução' merece algum esclarecimento prévio.

Um argumento indutivo típico é o seguinte: observamos que um certo cisne é branco, e vamos verificando que, sempre que nos deparamos com cisnes, eles são brancos. 'Concluimos', assim, que *todos* os cisnes são brancos. Trata-se portanto de passarmos de uma certa quantidade de casos observados para uma afirmação geral: de *alguns poucos* para *todos*. (O caso dos cisnes brancos é famoso, pois até a 'descoberta' de cisnes negros na Austrália, os europeus não conheciam cisnes que não fossem brancos).

De modo mais preciso, se você olhar em um dicionário de filosofia, como o *The Cambridge Dictionary of Philosophy* [1], vai constatar que 'indução' geralmente designa uma inferência que é uma generalização a partir de casos particulares ou, em sentido mais amplo, denota qualquer inferência *ampliativa*, ou seja, "qualquer inferência na qual a afirmativa feita pela conclusão vai além da afirmativa feita pelo conjunto das premissas"[1]. Outro exemplo famoso é o exemplo dos corvos; os casos particulares de cores de corvos observados até o momento induzem a formulação da 'lei geral' "Todos os corvos são negros", que tendemos a aceitar como plausível, ainda que não tenhamos observado todos os corvos, mas devido ao fato de nunca termos encontrado um corvo que não seja negro.

Esta inferência, no entanto, não é válida se ℓ for a lógica clássica, ou seja, não pode ser *deduzida* das leis clássicas postas acima (como esperamos poder deixar claro mais à frente). Porém, como parece evidente, a conclusão é muito plausível, ou seja, temos uma grande expectativa de que ela seja verdadeira. Trata-se assim de um exemplo de uma ℓ-indução, sendo ℓ a lógica clássica, já que o argumento não é errôneo ou feito com o propósito de sobrepujar algum oponente ou impor uma opinião. Observamos mais uma vez, no entanto, que a distinção entre ℓ-falácias e ℓ-induções é algo vaga, uma vez que, por exemplo, não podemos dizer com precisão, fora do contexto de uma dada lógica, em que consiste um raciocínio 'errado'.

Assim, concluímos que uma argumentação válida do ponto de vista de ℓ tem que ser justificável pelas regras dedutivas de ℓ, em contraposição com a argumentação ℓ-falaciosa, ou seja, aquela que viola as regras dedutivas postas pela lógica ℓ e das ℓ-

induções, que apesar de não serem ℓ-válidas, não são 'raciocínios errôneos' (intuitivamente falando).

Supondo mais uma vez que ℓ é a lógica clássica, um argumento indutivo, na forma como estamos utilizando este termo, é portanto uma inferência que é aceitável com certo grau de plausibilidade, mas cujas premissas não acarretam 'logicamente' a conclusão. Assim, uma pessoa cautelosa diria que a observação de cisnes brancos e a não observação de cisnes de outra cor, levam à conclusão de que 'provavelmente' todos os cisnes são brancos, e o mesmo ocorre com os corvos: 'provavelmente' todos os corvos são negros. O problema está em se dar sentido preciso à palavra *provavelmente*.

Induções são inferências ampliativas, no sentido acima de que o que sustenta a conclusão vai além do que permitem (dedutivamente concluir) as premissas. Esta forma de argumentação, saliente-se, é vital para a ciência. Muitas leis da física, bem como de outras disciplinas, em grande medida são formuladas inicialmente como generalizações a partir de um grande número de observações e experiências: via de regra, são ampliações de casos observados, ou induções nesta nossa acepção, ainda que as teorias resultantes não sejam simplesmente coleções de dados observados.

No entanto, uma disciplina científica não pode ficar restrita a coligir 'leis' elaboradas de forma indutiva. Aliás, nem todas as leis físicas resultam de observações ou de induções a partir de observações. Einstein, por exemplo, iniciou a teoria da relatividade a partir da postulação de certos *princípios*, como o de que a velocidade da luz deve ser constante relativamente a todos os sistemas inerciais. Os princípios neste sentido, bem como as generalizações indutivas, devem ser incorporados a um sistema adequadamente formulado, no qual se possam deduzir teoremas que posteriormente podem vir a ser confrontados com a experiência.

Eventualmente, certos fatos indutivos incorporados a uma teoria podem vir a ser teoremas dessa teoria, quando devidamente formulada. Por exemplo, a célebre lei da queda dos corpos, formulada indutivamente por Galileu a partir de observações, pode ser deduzida dos axiomas da mecânica clássica de Newton, que foram colocados posteriormente.[11] Da mesma forma, a relação que expressa o teorema de Pitágoras era conhecida muito antes de Euclides, e pode ser deduzida dos axiomas de sua geometria. Do ponto de vista científico, não é muito produtivo ficar unicamente com uma espécie de catálogo de informações sobre um campo particular de investigação. Os antigos gregos nos ensinaram este fato no tocante à matemática, tendo transformado a matemática anterior em uma disciplina teórica, dotada de princípios e provando teoremas, como bem

[11] A preocupação de Galileu era verificar se há alguma relação matemática entre o espaço percorrido por um corpo que cai livremente e o tempo empregado em percorrê-lo. A resposta de Galileu foi de que o espaço percorrido s é proporcional ao quadrado do tempo t levado para percorrê-lo: $s = \frac{1}{2}gt^2$, sendo a constante de proporcionalidade g a aceleração da gravidade.

ilustram os *Elementos* de Euclides; em princípio, isso se aplica a qualquer disciplina.

Com efeito, havia um conhecimento matemático muito grande entre os egípcios e os babilônios, que era utilizado para demarcação de terras férteis (de onde veio o nome *geometria*, ou 'medida da terra'), na construção de monumentos, em cálculos astronômicos, etc., mas não havia praticamente (ou não havia nenhuma) *teoria*. As informações eram como que as de um catálogo telefônico atual, ou num livro de receitas, nos quais se pode buscar muitas informações, mas que não constituem nenhuma 'teorização'. O uso do método axiomático foi essencial para, dentre outras coisas, estabelecer a matemática como disciplina dedutiva.[12] As inferências indutivas, como etapas de formação do conhecimento (inclusive das leis lógicas), em particular do conhecimento científico, são fundamentais, como é fácil perceber, mas a ciência parece exigir que numa etapa posterior possam resultar dedutivamente de outras leis e princípios. Isso constitui a essência, posta de modo breve, do chamado método hipotético dedutivo. Da mesma forma, isso vai acontecer com a lógica.

Ainda com respeito às induções em geral, lembremos que o filósofo escocês David Hume (1711-1776) salientou que as inferências indutivas (no sentido acima de inferências ampliativas) não podem ser sustentadas logicamente (pensando-se aqui em lógica como sinônimo de lógica —dedutiva— conhecida à época), isto é, *deduzidas* dos casos particulares observados. Isso levou muitos filósofos a estudar várias formas de *lógicas indutivas*, entendidas como modos de dar algum sentido à plausibilidade da conclusão à luz da suposta admissibilidade das premissas, ainda que filósofos como Popper tenham objetado quanto à possibilidade de tais lógicas (REFS).

Uma das formas mais conhecidas de se introduzir arguementos indutivos é a que atribui à conclusão uma certa probabilidade. Assim, a conclusão, ainda que não possa ser inferida dedutivamente a partir das premissas, pode ser aceita com uma certa probabilidade, e o modo de se fazer isso (ou seja, de se entender o que quer dizer a probabilidade) distingue entre várias lógicas indutivas. Ainda que não exploremos este pondo aqui, salientamos que há várias acepções da palavra probabilidade, de forma que o assunto é deveras importante e mereceria um texto independente.[13] Deixaremos porém de lado as induções, atendo-nos à lógica dedutiva, que denominaremos simplesmente de *lógica*.

Uma observação final parece no entanto relevante. Mesmo que nos ocupemos da contra-parte dedutiva de uma teoria preponderantemente, induções são essenciais em ciência (e mesmo na matemática, como salientado particularmente por Imre Lakatos [19]).

[12] Hoje se sabe que o método axiomático está fortemente enraizado na lógica, mas curiosamente não há qualquer menção de Euclides, nem de matemáticos da época, pelo que se sabe, à lógica de Aristóteles, apesar deles terem sido contemporâneos.

[13] O leitor pode consultar [7].

1.4 Notas e complementos

Nesta seção, a título de esclarecimento, comentaremos sobre alguns temas que forma mencionados acima.

I. Princípio da Identidade. Como em geral acontece com este e com os demais princípios da lógica, há várias formas não equivalentes de enunciá-lo, como as seguintes: 1. *Formulações sintáticas* (admitindo que as linguagens mencionadas incorporem os símbolos utilizados): a) Em uma linguagem proposicional, $P \to P$, ou $P \leftrightarrow P$, sendo P uma variável proposicional; b) Em uma linguagem de primeira ordem, $\forall x(x = x)$, sendo x variável individual; c) Em uma linguagem de segunda ordem, $\forall P \forall x(P(x) \leftrightarrow P(x))$, sendo P uma variável para predicados e x uma variável individual; 2. *Formulações semânticas* a) Uma proposição verdadeira é sempre verdadeira, e uma falsa, sempre falsa; b) Toda proposição possui um único valor de verdade; c) Em qualquer contexto, as ocorrências de um dado símbolo devem sempre ter o mesmo sentido; d) A não pode ser, sob o mesmo aspecto e ao mesmo tempo, B e não-B. e) "A é B"e "A não é B"nunca são simultaneamente verdadeiras; f) Todo objeto é idêntico a si mesmo; g) A é A (eventualmente acrescentando-se "e não é não-A"), sendo A uma variável.

O leitor deve notar que essas formulações não são todas equivalentes, de forma que, quando se fala do 'princípio da identidade' (e o mesmo vale para os demais princípios apresentados abaixo), deve-se especificar de qual formulação se está falando, ou deixar isso bem claro pelo contexto.

II. Princípio do Terceiro Excluído. 1. *Formulações sintáticas* a) Numa linguagem proposicional, $A \vee \neg A$; b) Em uma linguagem de primeira ordem, $\forall x(F(x) \vee \neg F(x))$, sendo F uma constante para predicados monádica, ou então sendo $F(x)$ uma fórmula qualquer tendo x como variável livre (e podendo conter eventualmente outros parâmetros); c) Numa linguagem de ordem superior, $\forall F \forall x(F(x) \vee \neg F(x))$, sendo x variável individual e F uma variável para predicados monádica; 2. *Formulação semântica* Dadas duas proposições contraditórias, isto é, uma das quais sendo a negação da outra, uma delas é verdadeira.

III. Princípio da Contradição (ou da Não-Contradição) 1. *Formulações sintáticas* a) Numa linguagem proposicional, $\neg(A \wedge \neg A)$; b) Em uma linguagem de primeira ordem, $\forall x \neg(F(x) \wedge \neg F(x))$, sendo x variável individual e F uma constante monádica para predicados (ou então $F(x)$ denota uma fórmula qualquer com x como variável livre, eventualmente contendo outros parâmetros); c) Em uma linguagem de ordem superior, $\forall x \forall F \neg(F(x) \wedge \neg F(x))$, sendo x variável individual e F uma variável para predicados monádica. 2. *Formulação semântica* Dadas duas proposições contraditórias, isto é, uma das quais sendo a negação da outra, uma delas é falsa.

IV. Redução ao absurdo. Há várias formas de redução ao absurdo. Em síntese, a redução ao absurdo clássica é tal que, para provarmos uma certa suposição p, iniciamos por assumir a sua negação, $\neg p$. Então, a partir de $\neg p$ e dos demais princípios aceitos, derivamos, no sistema em apreço, uma proposição q e a sua negação, $\neg q$ (o que, na lógica clássica, implica que podemos derivar uma contradição $q \wedge \neg q$). Acontece que, no âmbito da lógica tradicional, uma proposição que implique uma contradição tem que ser falsa e, portanto, pelo princípio do terceiro excluído, a sua negação, $\neg\neg p$ (que equivale a p devido à *dupla negação*), tem que ser verdadeira. Assim provamos p 'indiretamente', mostrando que se p não for o caso, ou seja, se sua negação for verdadeira, chegaríamos a uma contradição.

V. Paradoxos de Zenão Zenão de Eléia (séc V a.C.) formulou uma série de 'paradoxos' relacionados ao espaço e ao tempo.[14] Por exemplo, aceitando-se a visão pitagórica de que o espaço é um conjunto de pontos, ou seja, que a realidade pode ser dividida sucessivamente em partes, chegaríamos a contradições, assim devendo aceitar a tese de Parmênides de que a realidade é um único e indivisível *Um*. Este é o caso do paradoxo que afirma que não se pode percorrer uma distância dada. Com efeito, para percorrer, digamos, um kilômetro, devemos primeiro percorrer a metade (500m), mas antes, a metade disso (mais 250m), e antes ainda a metade dessa metade (mais 125m), e assim sucessivamente, de modo que o movimento não é possível.

. Explicações satisfatórias dos paradoxos de Zenão foram possíveis somente após a criação da teoria de conjuntos, por Georg Cantor (1845-1918). Por exemplo, o 'paradoxo' citado é 'solucionado' percebendo-se que a série geométrica $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ tem soma finita 1, ou seja, $\lim_{x\to\infty}(1/2^n) = 1$.

A prova desse fato é simples de ser dada, se aceitarmos o fato conhecido de que uma série geométrica tem a forma $a + ra + ra^2 + \ldots$, onde a é o primeiro termo e r a razão. Se $|r| < 1$, e que a série converge para o valor $\frac{a}{1-r}$. No caso acima, podemos escrever

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 1/2 + 1/2(1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots),$$

que, como $a = r = 1/2 < 1$, converge para $\frac{1/2}{1-1/2} = 1$.

[14] Para uma leitura mais detalhada, recomendamos o verbete 'Zeno's Paradoxes', da *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, http://plato.stanford.edu/entries/paradox-zeno/.

Capítulo 2

Aspectos da evolução da lógica

EM SEU LIVRO *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, G. T. Kneebone faz uma constatação que resume muito bem a grande evolução pela qual passou a Lógica a partir de meados do século XIX (Kneebone 1963, pp. 5ss), bem como demonstra quanta demora houve para a completa assimilação dessas transformações. Como mostra esse autor, no artigo 'Logic' da 14a. edição da *Encyclopaedia Britannica*, publicada em 1929, Abraham Wolf falava o seguinte:

> ”A lógica é o estudo sistemático das condições gerais da inferência válida . . . *Inferência* é um ato ou processo de derivar um juízo ou proposição de outra ou de outras . . . Por uma 'proposição' devemos entender um juízo expresso em palavras, o juízo sendo ele próprio um pensamento real ou uma crença em nossa mente, a qual pode ou não ser expressa em uma proposição, pensamento este que não podemos discutir até que tenha sido assim exprimido.”

Como salienta Kneebone, a Lógica, deste modo entendida, é muito geral e levada a cabo fazendo-se uso da linguagem natural, que como se sabe é repleta de ambiguidades e não contém regras de formação muito precisas. Aponta ainda ele que, com a evolução da Lógica, houve uma tendência paulatina a se restringir o seu alcance, em parte pela necessidade de maior precisão. Como se vê no artigo da mesma *Encyclopaedia Britannica*, escrito pelo grande lógico norte-americano Alonso Church para a edição de 1959, e também citado pelo nosso autor, há uma mudança substancial na forma de encarar essa disciplina:

> ”A lógica é o estudo sistemático da estrutura das proposições e das condições gerais da inferência válida por meio de um método que abstrai o conteúdo ou *matéria* das proposições, e lida unicamente com sua *forma* lógica. Esta distinção entre forma e matéria é feita sempre que distinguimos entre a correção lógica ou validade de um raciocínio e a verdade das premissas pelas quais ele se processa e, nesse sentido, é familiar no uso diário. Entretanto, uma distinção precisa deve ser feita com referência a uma linguagem particular ou sistema de notação, uma *linguagem formalizada*, a qual evitará a inexatidão, equívocos sistemáticos e irregularidades da estrutura e expressão que são encontradas no português usual (coloquial ou literário) e em outras linguagens naturais, e seguirá ou reproduzirá a forma lógica –ao custo, quando necessário, da brevidade e facilidade de comunicação.”

Essas citações ilustram bem a transformação pela qual passou a nossa disciplina, e mostram um dos principais motivos: necessidade de precisão, ainda que para várias finalidades (como veremos abaixo, notadamente para os estudos sobre os fundamentos da matemática).

Assim, podemos dizer que a lógica, de ciência das formas válidas de raciocínio, ou estudo das formas válidas de inferência (esta ’definição’ ainda pode ser encontrada em alguns textos recentes), transformou-se em uma disciplina que envolve tópicos como a Teoria da Prova, a Teoria dos Modelos, a Teoria da Recursão, os Fundamentos da Teoria de Conjuntos, dentre outros, cujos conteúdos em nada lembram o mero estudo ‘do que se deriva do que’. ă

2.1 A lógica na antiguidade

A primeira sistematização da lógica encontra-se na obra de Aristóteles (384-322 a. C.). Apesar do feito de Aristóteles colocá-lo, segundo alguns historiadores, entre maiores nomes da Lógica de todos os tempos, o que ele fez foi muito pouco se comparado ao alcance presente dessa disciplina, ou mesmo relativamente ao que fizeram os filósofos das escolas megárica e estóicam, ainda na antiguidade grega. Os escritos em lógica de Artistóteles abarcam essencialmente o que ficou conhecido como Teoria dos Silogismos, que ao que tudo indica ele achava captava todas as formas relevantes de argumentação.

No capítulo seguinte, veremos algumas características da lógica aristotélica como exemplo de um sistema formal que denominaremos de silogítica, de forma que não a abordaremos aqui. Fica no entanto o registro da importância do trabalho do grande filósofo grego, que é considerado (ainda que não com unanimidade) o *pai da Lógica*.

Ainda na antiguidade, as escolas megárica (séculos IV e III a.C.) e estóica (séculos III e II a.C.) deram contribuições valiosas à lógica. Sob certos aspectos, eles foram muito além de Aristóteles e de seus discípulos, chegando a muito do que hoje conhecemos como cálculo proposicional clássico, se bem que seus avanços não foram difundidos, ficando em segundo plano em relação à obra de Aristóteles e seguidores, que dominou a nossa cultura em suas origens.

Os megáricos apresentaram e estudaram uma série de paradoxos envolvendo dificuldades em se julgar a veracidade de uma frase que se refere a ela mesma, a discussão sobre a natureza das formas declarativas condicionais e um estudo das modalidades (ou seja, de operadores que expressem o necessário e o possível, dentre outros conceitos), o que também fez Aristóteles.

São célebres os paradoxos, por eles tratados, como o do mentiroso, que se origina quando uma pessoa diz que está mentido: é fácil ver que aquilo que ela diz é verdadeiro se e somente se for falso. Com efeito, suponha que eu afirmo que estou mentindo. Se isso for verdade, aquilo que eu afirmo deve ser verdadeiro (pela usual concepção de que uma proposição é verdadeira se ela expressa um estado de coisas que de fato ocorre, dita 'teoria da verdade como correspondência'). Mas o que eu afirmo é a frase 'Eu estou mentindo', ou seja, dizendo uma falsidade. Assim, se o que eu afirmo é verdade (a minha frase), a minha frase deve ser falsa. Por outro lado, se a minha frase é falsa, ela terá que ser verdadeira, pois ela está dizendo exatamente que eu estou mentindo.

Outro paradoxo é conhecido como Electra, ou do homem embuçado: você diz que conhece seu irmão, mas não foi capaz de reconhecer o homem que entrou agora com a cabeça coberta, que é o seu irmão. Este paradoxo mostra a dificuldade ocasionada pela ambigüidade da palavra 'conhecer'. Outras situações deste tipo são trazidas por paradoxos como o do monte: um único grão de areia por certo não é um monte de areia, nem dois grãos o são, e nem três. Mas se continuarmos acrescentando grãos de areia, teremos um monte. Em que momento isso acontece? Um quarto tipo de situação embaraçosa é ocasionada por paradoxos como o seguinte (formulado pela escola megárica): aquilo que você não perdeu, ainda conserva. Ora, você não perdeu os chifres, portanto, ainda os conserva.

Estas formas de raciocínio, aparentemente ingênuas para os dias atuais, foram preponderantes para o desenvolvimento de formas precisas de se articular raciocínios, e se tratam de sofismas de acordo com a terminologia que introduzimos anteriormente.

Dentre as formas condicionais tratadas pelos megáricos e pelos estóicos, estão as seguintes, que foram analisadas por eles em demonstrações: "Se p e se p então q, então q", "Se p então q e não-q, então não-p", "Se não ambas p e q e p, então não-q", "Se p ou q e não-p, então q", "Se p ou q e não-q, então p". A lógica megárico-estóica usou claramente o conceito de sistema axiomático (Blanché 1968), havendo proposições não demonstradas tomadas como 'pontos de partida', como a seguinte, escrita no simbolismo atual: $((p \to q) \wedge p) \to q)$, das quais derivaram inúmeras conclusões.

Por outro lado, dificuldades como as acima provavelmente levaram à concepção da lógica clássica como uma lógica *extensional*, ou seja, que não abriga operadores intencionais como 'crença', 'necessidade', 'obrigatoriedade'. Isso será mencionado novamente à frente.

O uso do "Se ..., então ..."aparece como deveras importante, e foram dadas interpretações para o seu significado lógico. Dentre as diversas possibilidades, consagrou-se historicamente aquela dada por Filo de Mégara: declarações da forma "Se p então q"são verdadeiras exceto quando a parte "Se"for verdadeira e a parte "então"for falsa. Em outras palavras, "Se p então q"é falsa se e somente se p for verdadeira e q for falsa, o que dá a tabela-verdade da qual falaremos posterirmente (no simbolismo de hoje, dizemos que $p \to q$ significa $\neg p \vee q$, onde $\vee$ é lido como 'ou' e $\neg$ como 'não'). O *condicional de Filo* tornou-se universal em lógica e é esse o modo pelo qual usualmente se entende a expressão "Se ..., então ...". Bertrand Russell (1872-1970) nomeou-o *implicação material*, mas é preciso cuidado com a expressão 'implicação' neste contexto.

Com efeito, é comum, em "Se p então q", dizermos informalmente que *p implica q*, mas a 'implicação' aqui deve ser entendida 'materialmente', ou seja, na acepção de Filo, e não indicando que haja alguma forma de conexão causal entre p e q. Se este cuidado não for tomado, somos levados a situações aparentemente paradoxais, como as seguintes. Tendo em vista que "Se p, então se q então p"é sempre verdadeira, seríamos erroneamente levados a concluir que uma vez que $1 + 1 = 4$, então Brasília é a capital do Brasil, tendo em vista ser verdade que Brasília é a capital do Brasil e $1 + 1$ não ser igual a 4. Este, e outros paradoxos da implicação material (ver N.C. são unicamente resultados da interpretação de "Se p então q"como "p implica (acarreta) q", o que não deve ser feito. Não obstante, é comum nos textos, e não faremos diferente, chamar o condicional "Se ..., então ..."de *implicação*.

No século XX, a insatisfação com esse tipo de condicional levou alguns pensadores, como C. I. Lewis a definir o *condicional estrito*; falaremos dele no capítulo **??**.

2.2 Contribuições posteriores

Há vários nomes importantes que não poderiam deixar de ser citados em qualquer história razoável da lógica (que não estamos pretendendo fazer aqui), pois deram contribuições relevantes para o seu desenvolvimento, como Ramon Lull (1235-1315) e sua 'Grande Arte' (*Ars Magna*), que via o conhecimento nas ciências como uma espécie de 'junção' de idéias básicas, o que contribuiu para dar os primeiros passos na direção de uma 'linguagem automática' para o raciocínio (Nidditch 1962, p. 14). Outros nomes relevantes são Duns Scotus (1265/66-1308), Pseudo Scotus, Descartes (1596-1650) e sua idéia de uma 'linguagem geral', funcionando como uma espécie de aritmética, e principalmente Leibniz (1646-1716).

Em seu *De Arte Combinatoria*, de 1666, Leibniz propôs sugestões para uma 'matemática de idéias' (ibidem, p. 19).

DETALHAR mais mais mais

2.3 A lógica matemática

O escopo da Lógica, e principalmente a sua aproximação com a matemática começou a se alterar em meados do século XIX, a partir dos trabalhos de Augustus De Morgan (1806-1871), George Boole (1815-1864), Charles Sanders Peirce (1839-1914) e, principalmente, Gottlob Frege (1848-1925). Depois, com o concurso de outros como Bertrand Russell (1872-1970), Giuseppe Peano David Hilbert e outros, houve a transfiguração efetiva da lógica tradicional para a lógica matemática de nossa época, ou seja, da lógica estudada com 'métodos matemáticos'.

Boole publicou dois trabalhos célebres: *The mathematical anaylsis of logic*, em 1847, e *An investigation of the laws of thought*, em 1854. Seu objetivo era tratar a lógica (aristotélica) de um ponto de vista algébrico. Boole usou símbolos típicos da álgebra, como $+$, $\cdot$, $-$, $\mathbb{0}$ e $\mathtt{1}$ além de variáveis como a, b etc. para expressar leis gerais e que por sua vez podiam ser interpretados de vários modos. Por exemplo, vamos supor que as variáveis representam proposições e que os símbolos acima são interpretados respectivamente como a disjunção, a conjunção, a negação, uma proposição falsa e uma proposição verdadeira. Além disso, a igualdade é entendida como representando a equivalência. Então é fácil ver (se conhecemos algo da lógica proposicional clássica) que algumas leis básicas da álgebra usual permanecem válidas, como as seguintes: $a+\mathbb{0} = a$, $a + \mathtt{1} = \mathtt{1}$, $a \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$, $a \cdot \mathtt{1} = a$ etc. No entanto, outras leis algébricas não valem, pois $a + a = a$, $a \cdot a = a$, $a + (-a) = \mathtt{1}$, $a \cdot (-a) = \mathbb{0}$. Por outro lado, podemos entender que as variáveis agora percorrem os subconjuntos de um conjunto dado, e que $+$, $\cdot$, $-$, $\mathbb{0}$ e $\mathtt{1}$ representam respectivamente a união, a interseção, o complemento (em relação ao conjunto dado), o conjunto vazio e o conjunto original. A igualdade é agora a igualdade de conjuntos. Segue-se que as mesmas regras acima são verificadas.

As propriedades que se verificam com essas interpretações caracterizam uma estrutura que é denominada de *álgebra de Boole*. De um ponto de vista algébrico, o cálculo proposicional clássico é uma álgebra de Boole, assim como o é a coleção dos subconjuntos de um conjunto dado, munida das operações conjuntistas usuais. Interessante observar que nos anos 1930, um matemático do MIT (Massachussets Institut of Thechnology) chamado Claude Shannon mostrou uma interpretação interessante dessa estrutura usando circuitos elétricos, os quais têm grande importância por exemplo na construção de computadores: as variáveis representam circuitos por onde deve passar corrente elétrica, $a + b$ indica que os circuitos a e b estão em paralelo, $a \cdot b$ que eles estão em série, $-a$ diz que a está 'fechado' (se a está aberto e reciprocamente), $\mathbb{0}$ um circuito pelo qual não passa corrente e $\mathbb{1}$ um pelo qual sempre passa corrente. É fácil ver que os axiomas de uma álgebra de Boole são satisfeitos.

O trabalho de Boole permitiu que ele expressasse a silogística aristotélica em termos algébricos, de forma que a validade de silogismos podia ser verificada fazendo-se contas algébricas. Segundo alguns autores, porém, o trabalho fundamental de Boole foi muito além, a talm ponto de chegarem a considerá-lo, e não a Frege, como o criador da lógica matemática; esta é, por exemplo, a opiniçao de Corcoran (2005).

Não obstante a sua importância, a abordagem de Boole não impulsionou historicamente a lógicade modo significativo. Com efeito, a lógica tradicional aristotélica e a sua versão 'Booleana' tratam unicamente de proposiões que são redutíveis à forma sujeito-predicado. Modernamente, referimo-nos a isso dizendo que a lógica aristotélica é unicamente uma lógica de predicados *unários* ou *monádicos*.

O vínculo com a matemática foi fundamental para o real desenvolvimento da Lógica. Na verdade, a grande evolução dessa disciplina, que se deu principalmente nos séculos XIX e XX, não pode ser separada dos estudos acerca dos fundamentos da matemática que se realizaram também nessa época. Para entender o que se passou, uma breve visão desses estudos é conveniente.

Ainda que os desenvolvimentos apresentados por Boole e a escola da álgebra da lógica tenham sido enormes, foi com G. Frege que a lógica matemática se iniciou de fato. Em 1879, Frege publicou o seu célebre *Begriffsschrift*, no qual apresentou a primeira sistematização do que veio a ser chamado posteriormente de 'lógica clássica' de um modo formal, na qual as derivações eram feitas exclusivamente em função da forma das expressões envolvidas. O título completo do trabalho de Frege é *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, ou seja, "Conceitografia, uma linguagem formular do pensamento puro, imitada da linguagem aritmética", e significa, como diz van Heijenoort na apresentação da tradução do artigo de Frege (van Heijenoort 1967), uma linguagem para o pensamento puro, não para representar a lógica por meio de fórmulas, mas uma língua livre de adornos retóricos, modelada na linguagem da aritmética e construída a partir de símbolos específicos (distintos dos da aritmética) que são manipulados de acordo com regras definidas, de forma que a lógica possa ser usada para a fundamentação da aritmética.

Frege apresentou não somente o cálculo de proposições, mas o cálculo quantificacional com identidade e a análise de proposições em termos de funções e argumentos, como na matemática, em vez de em termos de sujeitos e predicados. A introdução dos quantificadores ('para todo', 'existe'), por ele e por C. S. Peirce, constitui fator distintivo para a criação da lógica como a entendemos hoje, ainda que naquela época não houvesse a separação entre lógica de primeira ordem, que permite quantificação unicamente sobre indivíduos, e as lógicas de ordem superior, nas quais se pode quantificar também sobre propriedades de indivíduos. Não obstante o trabalho de Frege ser um marco na história da lógica, não recebeu acolhida imediata, talvez pela grande dificuldade ocasionada pela simbologia utilizada, de difícil leitura. Paralelamente, estava sendo levada a cabo uma grande discussão acerca dos fundamentos da matemática, à qual seu trabalho presta uma contribuição enorme, e não se pode entender esta etapa da evolução da lógica sem que se aperceber de algumas de suas nuances.

mais mais mais Peirce em Moore: quantificadores para conjunções e disjunções infinitas

2.4 Os fundamentos da matemática

Os séculos XIX e XX são aqueles nos quais um grande aprofundamento nas questões relacionadas aos fundamentos da matemática foi alcançado. Tal tipo de estudo se inicia a partir da necessidade de formulação adequada de vários conceitos que eram usados informalmente, os quais, pela forma como eram intuitivamente concebidos, apresentavam questões difíceis de resolver. Por exemplo, o cálculo infinitesimal, desenvolvido por Newton e por Leibniz, fazia uso de quantidades 'infinitesimais', as quais se supunha eram 'infinitamente pequenas', mas sem que se dissesse de modo preciso em que isso consistia. Newton, com seu método de fluxões (derivadas), calculava com tais quantidades, mas depois as desprezava. Por exemplo, empregando uma linguagem mais atual, para achar a derivada da função $y = x^3$, procedia mais ou menos do seguinte modo: fornecia um 'acréscimo infinitesimal' à variável independente x, digamos $x + o$, com isso obtendo $(x + o)^3 = x^3 + 3x^2o + 3o^2x + o^3$. Dividindo por o, parq que se possa saber a 'taxa de variação' do acréscimo dado, obtemos $3x^2 + 3xo + o^2$. Como o (e com mais razão ainda o^2) são desprezíveis, ficamos apenas com $3x^2$, que é o que se deseja.

Este procedimento faz com que uma quantidade infinitesimal pudesse ser desprezada sem que a identidade fosse questionada, o que originava frases célebres, como o conhecido Princípio de l'Hospital, que dizia que ''duas quantidades que difiram por uma quantidade infinitamente pequena são iguais", ou a célebre frase de Johann Bernoulli,

‘’uma quantidade que é acrescida ou decrescida de uma quantidade infinitamente pequena não é acrescida e nem decrescida”. É claro que há algo errado aqui, ainda que os resultados alcançados fossem incríveis. Um dos maiores críticos desse procedimento foi o bispo B. Berkeley. Em seu célebre *O Analista*, ...

Newton não era o único. O próprio modo de se fazer matemática, ainda que levasse a resultados incríveis, de um ponto de vista rigoroso deixava muito a desejar. Por exemplo, Euler admitia que o quociente $\frac{N-1}{N}$, para N muito grande, pode ser considerado como igual a 1, o que simplificava substancialmente suas contas. Outras questões que surgiam eram as seguintes: o que é número? O que é uma função? A própria geometria euclidiana, tida por séculos como o paradigma de uma teoria matemática desenvolvida rigorosamente, apresentava problemas; já a proposição 1 do livro 1 de Euclides, em sua demonstração, usa fatos que não são assumidos pelos axiomas e que não foram provados previamente. Isso mostra como a intuição dos matemáticos e o raciocínio informal são essenciais, mas uma disciplina como a matemática não podia restar sobre uma base tão frágil. Para dar sentido a coisas como o quociente acima, do caso de Euler, foi preciso a introdução do conceito de limite, por A. L. Cauchy, no início do século XIX. Com os limites, os infinitésimos foram dispensados; o cálculo, e a matemática em geral, não precisava mais deles (porém, ver abaixo).

Outro passo importante foi a evolução da álgebra.

O programa de Hilbert. Blanché 1968: em física, começou com Arquimedes.

OS POLONESES

AS LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS Dito de modo breve, por lógica clássica entendemos o chamado cálculo de predicados de primeira ordem, com ou sem igualdade, ou alguma de suas extensões, tal como o cálculo de predicados de ordem superior (teoria de tipos) ou mesmo algum sistema de teoria de conjuntos, como Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel, Tarski-Kelley-Morse ou o sistema ML de Quine-Wang, levando-se em conta possíveis variantes desses sistemas relativamente ao uso de símbolos e/ou axiomas.

Devido à imprecisão que há em se delimitar a lógica clássica, haverá igualmente uma imprecisão em qualquer conceituação das lógicas não-clássicas. Mesmo assim, podemos dizer que as distinções entre as lógicas clássicas e a clássica residem basicamente nos seguintes itens: 1. As lógicas não-clássicas podem estar baseadas em linguagens mais ricas em capacidade de expressão do que as linguagens da lógica clássica. 2. Podem ser fundamentadas em princípios distintos 3. Podem ser caracterizadas por terem semântica distinta da usual.

As lógicas que satisfazem (1) são chamadas de complementares da clássica. Por exemplo, as lógicas modais, temporais, deônticas, epistêmicas, erotéricas, imperativas, intensionais, as que incorporam operadores para formar termos ligando variáveis (os chamados v.b.t.o.s) e as lógicas condicionais. Nas lógicas modais, cuja linguagem estende a linguagem da lógica clássica de modo a incorporar operadores intensionais que permitem exprimir os conceitos de necessidade e de possibilidade. Da mesma forma, nas lógicas deônticas usuais, há operadores que permitem exprimir os conceitos de obrigatoriedade e proibição. As lógicas temporais permitem, como o nome sugere, tratar da noção de tempo; nas lógicas da crença, pode-se falar em 'acreditar (em) uma proposição', e assim por diante. Esses são exemplos de algumas lógicas complementares à clássica que têm linguagens mais ricas que esta.

Aquelas que obedecem (2) são as lógicas heterodoxas (por uma razão que será exposta no capítulo 3, evitaremos chamá-las de rivais da lógica clássica, como às vezes se faz), Por exemplo, a lógica intuicionista é, dito de modo abreviado, obtida a partir da lógica clássica pela rejeição do princípio do terceiro excluído. Nas lógicas paraconsistentes, o princípio da contradição é restringido, e nas lógicas não-reflexivas, o conceito usual de identidade (tal como tratado pela lógica clássica) sofre algum tipo de restrição. Ademais, pode-se ter, por exemplo, lógicas pararaconsistentes deônticas, nas quais não somente não vale em geral o princípio da contradição, como aparecem os conceitos de obrigatoriedade e de proibição, dentre outros. Essas lógicas são importantes, por exemplo, na filosofia do direito. Em todos esses casos, semânticas distintas da usual são requeridas, de forma que os três itens acima se acham relacionados. Há ainda outras lógicas as quais é difícil de enquadrar em algum dos itens acima, como as lógicas fuzzy , a lógica linear, as várias lógicas quânticas ou sistemas que diferem profundamente da lógica clássica tanto em aspectos sintáticos como em aspectos semânticos, como os sistemas de Lesniewski, as lógicas infinitárias ou as combinatórias. Não obstante, a classificação dada pode ser usada em uma primeira aproximação. O exposto acima pode ser aqui sumarizado da seguinte forma. A transfiguração sofrida pela lógica nos últimos 150 anos se deve, basicamente, a três fatores: (1) o grande desenvolvimento técnico, em especial devido ao seu vínculo com a matemática, (2) o aparecimento das lógicas não-clássicas e (3) a eclosão de variadas e numerosas aplicações. No capítulo 3 teremos oportunidade de falar mais sobre isso e sobre alguns desses sistemas.

Proposições Categóricas. Proposições típicas da lógica aristotélica, que têm a seguinte forma, ditas respectivamente 'universal afirmativa' (A), 'universal negativa' (E), particular afirmativa' (I) e 'particular negativa' (O): Todo S é P; Nenhum S é P; Algum S é P e Algum S não é P. O que se disse no texto acerca dos termos das proposições categóricas denotarem termos gerais, e não nomes particulares, contrasta com sentenças usualmente tomadas como exemplo nos textos, como 'Sócrates é homem', que deve ser entendida da mesma forma que 'O homem é um animal', e isso tem a ver com o fato de que em ambas os termos sujeitos pertencem à categoria de substância (MELHORAR Kneale e Kneale, p. 33).

2.5 Sistemas mais gerais

Para alguns filósofos, como Quine, por Lógica deve-se entender unicamente a lógica clássica de primeira ordem. Quine nunca se pronunciou, pelo que se sabe, sobre as lógicas não clássicas, exceto quanto à lógica modal, que combateu ferozmente. Uma exceção pode ser uma pequena frase em seu livro *Pursuit of Truth*, na qual diz que ''a mecânica quântica convida a desvios lógicos, cuja redução aos velhos padrões não é evidente".[1]

Não obstante raros pontos de vista como o de Quine, hoje em dia aceitam-se os sistemas não clássicos e os de ordem superior como 'lógicas'. Abaixo, faremos uma exposição da chamada teoria simples de tipos, para dar uma idéia ao leitor do que constituem as linguagens e lógicas de ordem superior (à primeira).

...

2.5.1 Linguagens infinitárias

As linguagens que introduzimos até o momento eram sempre *finitárias*, ou seja, ainda que pudessem envolver uma quantidade enumerável de símbolos primitivos, admitiam como bem formadas apenas expressões contendo um número finito de tais símbolos. Porém, em matemática freqüentemente aparecem expressões como $1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ ou então $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2 \vee \ldots$ para dizer que x é um número natural. Obviamente, não é possível 'escrever' uma expressão contendo um número infinito de símbolos, logo se desejamos aceitar e dar sentido preciso a expressões como as acima, e não apenas tomá-las como abreviando alguma coisa, devemos nos dirigir para a consideração das linguagens infinitárias.

Usaremos dois subíndices para uma linguagem infinitária de primeira ordem L, escrevento

$$L_{\mu\theta}$$

onde μ e θ são ordinais, para representar uma linguagem que admite até μ blocos de quantificadores (cada um contendo um número finito deles), e θ disjunções ou conjunções com um número máximo $\lambda < \theta$ de termos.

[1] À página 36 da segunda reimpressão de 1993, pela Harvard Un. Press.

Capítulo 3

Sistemas Formais

NESTE CAPÍTULO, SÃO VISTOS alguns conceitos relacionados aos sistemas formais que importam à lógica e ao estudo mais geral da metodologia dos sistemas dedutivos (Tarski 1995). Apesar dessas notas constituírem unicamente uma breve introdução ao assunto (ver as Referências para trabalhos mais abrangentes), é importante destacar o ponto de vista aqui encerrado. Tradicionalmente, a lógica tem sido ensinada dentro de uma tradição *linguística*, que remonta basicamente a Frege e a Russell. Isso significa, em resumo, o seguinte. Uma lógica, e de maneira mais geral um sistema formal, é concebida como uma linguagem, consistindo (pelo menos) das contrapartes sintática e semântica. Na sua contraparte sintática, estudam-se os aspectos combinatoriais dos símbolos dessa linguagem, sem levar em conta o que eles representam, enquanto que na contraparte semântica essa questão é considerada.

Aqui, um sistema formal, logo uma lógica, é concebido como algo distinto, como uma espécie de álgebra, independentemente de linguagem. Trabalha-se numa teoria (intuitiva) de conjuntos, ou em um sistema como Zermelo-Fraenkel se se quiser precisão. A generalidade desta abordagem é patente, e certamente interessa ao filósofo e ao linguista entendê-la.

3.1 Sistemas formais

Um *sistema formal* $\mathcal{S}$ é constituído pelas seguintes categorias de entidades:

(1) Uma coleção não vazia de objetos, que chamamos de *fórmulas* de $\mathcal{S}$,

(2) Uma sub-coleção do conjunto de fórmulas (ventualmente vazia), cujos elementos chamamos de *axiomas* de $\mathcal{S}$ e

(3) Um conjunto de *regras de inferência*. Abreviadamente, uma regra de inferência é uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas, que nos fornece um processo para se obter uma fórmula (a *conseqüência imediata* da regra) a partir de outras fórmulas, que são as *premissas* da regra.

Se chamarmos de F o conjunto das fórmulas de $\mathcal{S}$, de A o seu conjunto de axiomas e de $\mathcal{R}$ o seu conjunto de regras, podemos olhar um sistema formal como uma tripla ordenada da forma

$$\mathcal{S} = \langle F, A, \mathcal{R} \rangle.$$

Em geral, consideraremos unicamente regras *finitárias*, tendo um número finito de premissas; se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as premissas de uma regra $R \in \mathcal{R}$ e α é conseqüência imediata das α_i ($i = 1, \ldots, n$) pela regra R, escrevemos

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\alpha} \quad (R)$$

para indicar este fato.

O que importa é caracterizar uma *relação de dedutibilidade*, simbolizada por $\vdash$, ou por $\vdash_{\mathcal{S}}$ (quando houver necessidade de mencionar o sistema em questão), que permita exprimir o conceito de *dedução*: a partir de certas fórmulas, dadas como premissas, podemos obter uma fórmula, a conclusão. Isso tudo pode ser feito sem que leve em conta o significado, ou interpretação, dos símbolos envolvidos, ficando-se dependente unicamente das características puramente sintáticas do sistema considerado, o que caracteriza o nome 'formal' dado a esse tipo de sistema. Dito de um modo muito geral, uma *lógica de conseqüências* é, de um ponto de vista abstrato, um par $\ell = \langle F, \vdash \rangle$, onde F é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados de fórmulas e $\vdash$ é uma relação de dedutibilidade, satisfazendo as seguintes condições, para todo $A \subseteq F$ (para um tratamento geral, ver da Costa 2005):

($\vdash_1$) $\alpha \in A \Rightarrow A \vdash \alpha$

($\vdash_2$) $A \vdash \alpha \Rightarrow A \cup B \vdash \alpha$ (Monotonicidade)

($\vdash_3$) Se $A \vdash \alpha$ para cada elemento $\alpha \in B$ e $B \vdash \beta$, então $A \vdash \beta$.

Pode-se mostrar (ibid.) que há uma e uma só maneira de transformar um sistema formal em uma lógica de conseqüências e reciprocamente. Há sistemas *não-monotônicos*, nos quais a regra da monotonicidade acima não vale, e que podem ser enquadrados como sistemas formais na acepção acima, mas não falaremos deles aqui.

Via de regra, as fórmulas de um sistema formal $\mathcal{S}$ são obtidas a partir de um conjunto inicial de símbolos, o vocabulário, ou alfabeto básico (da linguagem) de $\mathcal{S}$. Depois, outros símbolos podem ser introduzidos por meio de definições, que ajudam a expressar os conceitos desejados na linguagem de $\mathcal{S}$. Seqüências de símbolos (em geral, seqüências finitas) são chamadas de expressões da linguagem de $\mathcal{S}$ e, mediante 'regras gramaticais' dadas de modo preciso, dentre as expressões distinguem-se então as fórmulas. Os sistemas formais têm regras gramaticais precisas, contrariamente às linguagens naturais, e essa é uma de suas grandes vantagens.[1]

Uma vez que se tenha o conceito de fórmula construído de modo preciso, escolhem-se dentre elas aquelas que serão consideradas como axiomas do sistema, assim como explicitam-se as suas regras de inferência. Não há em princípio qualquer critério para a escolha dos axiomas. Isso depende das finalidades do cientista ou mesmo do gosto pessoal.

3.1.1 Alguns conceitos sintáticos

Por uma *prova* ou *demonstração* de uma fórmula α em $\mathcal{S}$, entenderemos uma seqüência finita de fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_n$ tais que β_n é α e cada β_i $(i < n)$ é um axioma ou conseqüência de fórmulas precedentes por uma das regras de inferência. Se há uma prova de α em $\mathcal{S}$, dizemos que α é um *teorema* (formal) de $\mathcal{S}$, e escrevemos $\vdash \alpha$, ou $\mathcal{S} \vdash \alpha$ (ou ainda $\vdash_{\mathcal{S}} \alpha$), quando houver necessidade de se explicitar o sistema $\mathcal{S}$.

Dizemos que α é *conseqüência sintática* de um conjunto Γ de fórmulas se há uma seqüência $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de fórmulas tais que β_n é α e cada β_i $(i < n)$ é um axioma, ou pertence a Γ, ou é conseqüência de fórmulas precedentes por uma das regras de inferência; neste caso, escrevemos $\Gamma \vdash \alpha$ e também dizemos que α foi deduzida do conjunto Γ de premissas. Alternativamente, podemos escrever $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \alpha$, ou (como faremos), simplesmente $\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \alpha$. Evidentemente, se Γ é o conjunto vazio (isto é, não há premissas), então α é derivável (ou demonstrável) unicamente a partir dos axiomas de $\mathcal{S}$ e é portanto um teorema de $\mathcal{S}$. Resulta da definição dada que todo axioma é demonstrável.

[1] O aluno atento deve estar percebendo que fala-se por exemplo em 'seqüência' de símbolos. O que é uma seqüência? Tecnicamente, é uma função cujo domínio é o conjunto ω dos números naturais. Isso mostra que, a rigor, estamos trabalhando em um 'local' onde se possa falar de seqüências, funções, etc., ou seja, numa teoria de conjuntos. Uma linguagem é, na verdade, uma certa álgebra.

Apenas para registro, salientamos que o conceito de 'prova' acima não é 'universal'. Existe 'prova' na matemática intuicionista, por exemplo, que é distinta da acima, e sobre a qual falaremos oportunamente. Ademais, cabe observar que 'provas' como dadas pelo conceito acima praticamente nunca ocorrem nos textos de matemática. Por quê? O motivo é que seria muito tedioso mencionar cada pequeno passo dado em uma demonstração. As 'provas' (demonstrações) apresentadas são via de regra argumentos informais dados na metalinguagem (o português acrescido de símbolos específicos), e nelas são apontados unicamente os passos que podem suscitar algum cuidado especial, ou questionamento por parte do leitor. Tais são as *provas informais*, e faremos muitas delas no decorrer deste livro. Em geral, os matemáticos 'sabem' (pelo menos idealmente) como preencher os espaços deixados em uma prova informal, de modo que elas podem, em princípio, ser escritas de acordo com a definição acina, caso necessário. Mais à frente, veremos uma comparação entre uma prova formal e uma informal.

Teorema 3.1.1 *Em um sistema formal $\mathcal{S}$, tem-se:*

(i) $\alpha \vdash \alpha$

(ii) $\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$ *(Monotonicidade)*

(iii) Se $\Gamma \vdash \alpha$ *para toda* $\alpha \in \Delta$ *e se* $\Delta \vdash \beta$*, então* $\Gamma \vdash \beta$

(iv) $\alpha \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$

Demonstração: Exercício. ▮

O conceito de conseqüência sintática ($\vdash$) se relaciona com o de conseqüência semântica($\models$) mediante um (meta)teorema importante, denominado de *teorema da completude*, que no entanto não vale em geral. Para aqueles sistemas formais para os quais vale o referido teorema, temos em particular que $\models \alpha$ se e somente se $\vdash \alpha$ (veremos isso com mais vagar à frente). Abreviadamente, isso está dizendo, informalmente, que todas as verdades lógicas são demonstráveis (são teoremas do sistema), e que todos os teoremas são verdades lógicas. Este parece, é claro, um grande ideal a ser atingido, pois em um tal sistema formal, dito sem rigor, provaríamos todas as suas verdades, e somente elas. Como veremos, apesar de haver sistemas formais completos nesta acepção, o resultado não se aplica para sistemas mais interessantes, como a aritmética elementar.

Exercício 3.1.1 *(1) Prove o teorema acima. (2) Descreva o significado de cada uma das expressões seguintes: (a)* $\Gamma \vdash \alpha$*; (b)* $\vdash \alpha$*; (c)* $\Gamma \models \alpha$*; (d)* $\models \alpha$*.*

Definição 3.1.1 *Um sistema formal $\mathcal{S}$ é compacto se sempre que se tem $\Gamma \vdash \alpha$, existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$.*

Como em nossos sistemas toda prova envolve sempre um número finito de fórmulas, resulta que os sistemas formais que estamos considerando são compactos.

3.2 Exemplos de sistemas formais

Nesta seção, daremos alguns exemplos de sistemas formais. Para enfatizar o aspecto 'formal', nada será dito sobre o significado dos símbolos ou das regras primitivas, ainda que no primeiro deles o leitor poderá facilmente identificar o processo usual de somar números naturais.

3.2.1 O sistema MAIS

O sistema MAIS será designado por $\mathfrak{M}$ (cf. Hodel 1995, pp. 8ss). A sua linguagem, denotada $L_{\mathfrak{M}}$, consta unicamente dos seguintes símbolos: $+$, $=$, $*$. Intuitivamente, os símbolos de $L_{\mathfrak{M}}$ são como os sinais que estão em um teclado de um computador (neste caso, nosso teclado tem somente três teclas), por meio do qual desejamos escrever coisas acerca dos objetos de determinados domínios. Precisamos portanto aprender a escrever com nossa linguagem. Para isso, vejamos as regras gramaticais de $L_{\mathfrak{M}}$.

Seqüências finitas de símbolos de $L_{\mathfrak{M}}$ são *expressões* dessa linguagem. Uma *fórmula* é uma expressão do tipo $x+y=z$, onde x, y e z são seqüências finitas de $*$'s. Além disso, a expressão $*=*$ é uma fórmula. Por exemplo, $**\ +\ **\ =\ *****$ é uma fórmula, mas $*\ *\ **\ ==$ não é. Repare que x, y e z não fazem parte de $L_{\mathfrak{M}}$, que é denominada de *linguagem objeto*. Aqui, símbolos como $x, y, z, \ldots$ são usados para nos referir a expressões de $L_{\mathfrak{M}}$, e pertencem à *metalinguagem* de $L_{\mathfrak{M}}$, enquanto que outros símbolos, como $*$, são usados como *nomes* deles próprios. Se não fizermos essa distinção, seremos conduzidos a dificuldades, como teremos oportunidade de esclarecer à frente.

Dentre as fórmulas de $L_{\mathfrak{M}}$, devemos agora escolher algumas para axiomas de $\mathfrak{M}$. Escolheremos apenas uma, a saber, a fórmula $*\ +\ *\ =\ **$. Isso feito, resta apontar as regras de inferência de $\mathfrak{M}$. São as duas seguintes (cada uma com uma única premissa), onde α e β denotam fórmulas:

$$\frac{x+y=z}{x*+y=z*}\ (R1) \quad , \quad \frac{x+y=z}{y+x=z}\ (R2) \quad \frac{\alpha=\beta}{\beta=\alpha}\ (R3).$$

É fácil ver que $*\,*\,*\ +\ *\,*\,*\ =\ *\,*\,*\,*\,**$ é um teorema de $\mathfrak{M}$. Com efeito, temos a seguinte prova (repare que a 'prova' aqui apresentada satisfaz a definição dada acima):

1.	$* + * = **$	Axioma
2.	$** + * = ***$	1, R1
3.	$*** + * = ****$	2, R1
4.	$* + *** = ****$	3, R2
5.	$** + *** = *****$	4, R1
6.	$*** + *** = ******$	5, R1

Na coluna da direita, indica-se como as derivações foram realizadas. Podemos introduzir outros conceitos por meio de definições, e há vários modos de se fazer isso.[2] Por exemplo, chamemos de 'um', 'dois', etc. aos objetos que satisfazem respectivamente os predicados $1 =_{\mathsf{def}} *$, $2 =_{\mathsf{def}} **$, $3 =_{\mathsf{def}} ***$, etc. Da mesma forma que x, y e z, os símbolos 1, 2, 3 e os demais que podemos introduzir deste modo não pertencem à linguagem objeto $L_{\mathfrak{M}}$, mas à sua metalinguagem. O símbolo $=_{\mathsf{def}}$ é lido 'igual por definição'.[3] Teoremas acerca desses novos objetos podem agora ser derivados, como por exemplo que $2 = 1 + 1$ (isso se segue das definições, do unico axioma e da regra (R3).

O importante, relativamente aos sistemas formais, não é unicamente o que se pode realizar no seu 'interior' (provar os seus teoremas), mas analisar os próprios sistemas como um todo e estudar o seu uso para se entender peculiaridades de outros sistemas. O caso da aritmética é um bom exemplo não só pela sua importância intrínsea, mas por nos fornecer informações relevantes sobre outros sistemas, como sera visto abaixo. Porém, antes de tudo isso, vamos continuar com o nosso sistema $\mathfrak{M}$. Sobre ele, podemos dizer várias coisas, como se exemplifica com o conceito de *verdade* em $\mathfrak{M}$, que chamaremos de $\mathfrak{M}$-verdade, e que é o seguinte: dizemos que uma fórmula $x + y = z$ é $\mathfrak{M}$-verdadeira se o número total de ocorrências de $*$ do lado esquerdo da igualdade é igual ao número de ocorrências deste mesmo símbolo do lado direito da igualdade; caso contrário, diremos que ela é $\mathfrak{M}$-falsa. Por exemplo, $**+** = ****$ (ou $2+2 = 4$) é $\mathfrak{M}$-verdadeira, enquanto que $** + * = *$ $(2 + 1 = 1)$ é $\mathfrak{M}$-falsa. Podemos então mostrar que todos os teoremas de $\mathfrak{M}$ são $\mathfrak{M}$-verdadeiros por meio de uma técnica chamada de *indução sobre teoremas*.

Isso funciona assim: é fácil ver que o único axioma de $\mathfrak{M}$ é $\mathfrak{M}$-verdadeiro, e que se as premissas das regras (R1) e (R2) são $\mathfrak{M}$-verdadeiras, suas conclusões também o são. Deste modo, devido à definição de prova dada antes, todos os teoremas de $\mathfrak{M}$ são $\mathfrak{M}$-verdadeiros, como queríamos provar. No entanto, a afirmativa de que todos os teoremas de $\mathfrak{M}$ são $\mathfrak{M}$-verdadeiros não é um teorema de $\mathfrak{M}$, pois em particular não é uma fórmula da linguagem desse sistema, mas um teorema *sobre* $\mathfrak{M}$, o que usualmente se denomina de

[2] Falaremos sobre definições oportunamente.

[3] Podemos acrescentar símbolos estendendo a linguagem objeto, desde que algumas condições sejam satisfeitas, mas sobre isso falaremos à frente.

um *metateorema* de $\mathfrak{M}$. (Os resultados de Gödel, *v.g.*, que veremos abaixo, são exemplos de metateoremas sobre determinados sistemas formais.) As distinções entre teorema e metateorema, assim como entre linguagem objeto e metalinguagem, são facilmente compreendidos depois de um pouco de experiência, de modo que continuaremos como de hábito a empregar a terminologia que vimos adotando de chamar de 'teoremas' alguns resultados que na verdade são 'metateoremas' (como o *meta*teorema da completude da lógica elementar, do qual falaremos abaixo).

Se assumirmos que as verdades lógicas de $\mathfrak{M}$ são as fórmulas $\mathfrak{M}$-verdadeiras, então podemos provar um teorema de completude para $\mathfrak{M}$. A demonstração deste fato não é difícil de ser dada, e o leitor pode constatar intuitivamente (ainda que isso não tenha estritamente valor matemático) que uma fórmula $\mathfrak{M}$-verdadeira pode ser provada ser um teorema de forma análoga ao caso (da prova) exemplificado acima. Reciprocamente, se algo é um teorema de $\mathfrak{M}$, é fácil constatar que ela será $\mathfrak{M}$-verdadeira.

Exercício 3.2.1

1. *Mostre que* $***\ +\ ****=*******$ *é um teorema de* $\mathfrak{M}$.

2. *Porque podemos resolver o exercício anterior simplemente contando os números de* $*$*s à esquerda e à direita do símbolo de igualdade (ou seja, porque essa contagem responde a pergunta feita?)*

3. *Construa um sistema formal MULT, similarmente a MAIS, cujos teoremas sejam fórmulas verdadeiras acerca da multiplicação de números naturais. Depois, mostre que* $**\times***=******$ *é um teorema desse sistema.*

3.2.2 O sistema MIU

Um outro exemplo interessante de sistema formal foi apresentado por Douglas Hofstadter em seu livro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid* (Hofstadter 1980). O interessante desse sistema é que ele não tem, aparentemente, qualquer motivação intuitiva. O alfabeto do sistema chamado de MIU consiste dos seguites três símbolos: M, I, U. As fórmulas são ocorrências finitas e não vazias de símbolos do alfabeto. O único axioma é MI e há quatro regras de inferência:

(Regra I) A qualquer fórmula terminada com I, pode-se acrescentar um U no final (ou seja, se $x\mathsf{I}$ é um teorema, então $x\mathsf{IU}$ é um teorema);

(Regra II) Dada qualquer fórmula do tipo Mx, pode-se duplicar a parte após o M inicial, obtendo-se Mxx;

(Regra III) Se três I ocorrem consecutivamente em uma fórmula, eles podem ser substituídos por um U;

(Regra IV) Dois U consecutivos podem ser deletados de qualquer teorema.

Alguns fatos básicos sobre MIU são por exemplo os seguintes:[4] MUIU é um teorema deste sistema, mas que MU não é; em símbolos, $\vdash_{\mathrm{MIU}}$ MUIU, mas $\nvdash_{\mathrm{MIU}}$ MU. Aqui vai um resumo da solução: o primeiro é bastante simples, e o leitor não terá dificuldade em mostrar uma derivação de MUIU a partir da axiomática dada; quanto ao segundo, basta verificar que as quatro regras de inferência 'preservam a multiplicidade por 3': a primeira e a quarta não alteram o número de I's em um teorema. Quanto à segunda e à terceira, verifica-se que ambas, uma vez iniciando-se com um número múltiplo de 3 em um teorema, este número não é alterado pela aplicação das regras (e elas não 'criam' I's, mas apenas mudam em múltiplos de 3 os já existentes). Trata-se de mais um exemplo de aplicação da indução sobre teoremas. O número de ocorrências de I's em qualquer teorema não é divisível por 3, e em particular não pode ser zero. Como corolário (na verdade, um 'meta-corolário'), segue que em qualquer teorema deve haver pelo menos um I. Assim, MU não pode ser um teorema de MIU.

Exercício 3.2.2 *(a) Mostre que* MUII *é um teorema de* MIU*; (b) Justifique: pode-se 'demonstrar' um axioma de um sistema formal $\mathcal{S}$? Como? Isso não entra em contraste com a (muitas vezes aprendida na escola) crença de que 'um axioma é algo que não se demonstra'? Como explica isso?*

3.2.3 Silogística formal

Veremos agora um outro exemplo de sistema formal, que denominaremos de *silogística*, denotado S, uma vez que aproxima muito da silogística aristotélica, sendo nela inspirado.

Antes, é conveniente recordar alguns conceitos básicos da teoria dos silogismos categóricos.

A primeira sistematização daquilo que ficou conhecido como 'lógica' encontra-se na obra de Aristóteles (384-322 a. C.). Apesar do feito de Aristóteles em lógica colocá-lo, segundo alguns historiadores, entre maiores nomes da lógica de todos os tempos, o que ele fez foi muito pouco se comparado ao alcance presente dessa disciplina. Os escritos

[4] Para uma detalhes, ver Hofstadter 1980, pp. 260-1.

do filósofo grego em lógica abarcam essencialmente o que ficou conhecido como Teoria dos Silogismos, que ao que tudo indica ele achava captava todas as formas relevantes de argumentação. ăNos silogismos ditos *categóricos*, as proposições são todas de um formato particular, ditas *proposições categóricas*, que têm a seguinte estrutura:

(A) Todos os S são P,

(I) Algum S é P,

(E) Nenhum S é P ou

(O) Algum S não é P.

As do primeiro tipo (universais afirmativas) são ditas estarem em 'A', as do segundo tipo (particulares afirmativas) em 'I', as do terceiro (universais negativas) em 'E' e as do quarto tipo (particulares negativas) estão em 'O'. Em cada uma delas, 'S' é o *termo sujeito* e 'P' o *termo predicado*.[5]

A lógica aristotélica, ou silogística, é uma lógica de *termos* (objetos do pensamento), envolvendo unicamente nomes gerais, como 'homem', 'animal', 'mortal', que se aplicam a determinadas categorias de objetos, que se supõe 'existirem' no mundo real (como veremos, há problemas se aplicarmos a teoria aristotélica a coisas inexistentes como 'cavalos alados'). O objetivo é determinar quais formas de inferência, como 'Se todos os animais morrem um dia e se todos os homens são animais, então todos os homens morrem um dia', são certas, ou *válidas*. A relação entre as proposições A, E, I e O é descrita pelo que de denomina de *quadrado das oposições*:

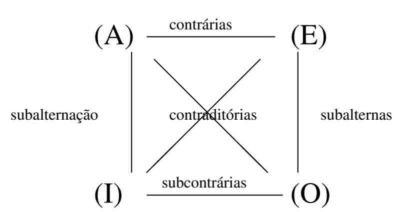

Figura 3.1: O quadrado das oposições

[5]Para facilitar a memorização, é interessante observar que as letras 'A' e 'I', correspondentes às proposições categóricas afirmativas, são as duas primeiras vogais da palavra *affirmo*, enquanto que 'E' e 'O', que correspondem às proposições categóricas negativas, são as vogais da palavra *nego*.

Exercício 3.2.3 *Encontre exemplos que atestem o seguinte: entre duas proposições contraditórias, se uma delas é verdadeira, a outra é falsa. Proposições contrárias não podem ser ambas verdadeiras, mas podem ser ambas falsas.*

Inferência silogística

Na inferência silogística, uma das operações lícitas é a da *conversão*. Há basicamente duas formas de conversão (de uma proposição a outra). Primeiro, a *conversão perfeita* ('operada *simpliciter*'), que mantém o valor verdade da proposição dada. São as seguintes as conversões perfeitas lícitas: (a) uma simples troca entre os termos S e P, como 'Algum S é P' implica 'Algum P é S', (b) 'Nenhum S é P' implica 'Nenhum P é S' e (c) se é falso que nenhum S seja P, então é falso que nenhum P seja S e se é falso que algum S seja P, então é falso que algum P seja S.

O segundo tipo de conversão, dito *conversão imperfeita* (*per accidens*) é o que conserva o valor verdadeiro, mas não necessariamente o falso, somente sendo legítima para as proposições universais (afirmaticas e negativas), Assim, temos a conversão imperfeita que leva de uma proposição em 'A' a uma em 'I': de 'Todo S é P', chegamos a 'Algum P é 'S', mas não conversamente (repare que os termos sujeito e predicado foram trocados, e que há a necessidade de haver pelo menos um objeto que seja um S). Por exemplo, de 'Todos os homens são mortais' derivamos 'Algum mortal é homem'. A outra conversão imperfeita lícita é a que leva de uma proposição em 'E' a uma em 'O': de 'Nenhum S é P para 'Algum P não é S'.

Exercício 3.2.4 *Justifique: entre as proposições subalternas, as universais implicam as particulares, mas não reciprocamente.*

Essas transformações não se aplicam para proposições em 'O'; com elas, o máximo que podemos fazer é o que se denomina de *conversão por negação* (ou por contraposição): de 'Algum S não é P', que reescrevemos como 'Algum S é não-P', chegamos a 'Algum não-P é S', e a não mais do que isso. Por exemplo, de 'Algum homem não é mortal' chegamos a 'Algum imortal (não-mortal) é homem'.

Além dessas inferências, cabe ainda salientar que de uma proposição universal afirmativa (em 'A'), como 'Todo homem é mortal', podemos derivar 'Sócrates é mortal'; trata-se de uma aplicação do princípio aristotélico *dictum de omni et nullo*, como diziam os medievais: o que é predicado de qualquer todo é predicado de qualquer parte deste todo (Kneale & Kneale 1980, p. 81). Isso vale tanto para proposições afirmativas quanto para negativas.

Para as demais inferências, é preciso notar que, em um silogismo categórico, as três proposições que nele figuram ligam três termos, ditos *termo maior* (P), *termo médio*

(M) e *termo menor* (S). A conclusão (a terceira proposição) contém os termos maior e menor (na terminologia que se usa hoje, S designa o sujeito e P o predicado); o seu termo predicado é o termo maior e o seu termo sujeito é o termo menor. O termo médio aparece unicamente nas premissas, e em ambas deve ter o mesmo conteúdo, ou compreensão e deve haver pelo menos um objeto que comprove este conceito. Uma das premissas, a premissa principal, contém o termo médio e o termo maior, a premissa menor contém o termo médio e o termo menor. Os aristotélicos representaram todas as formas válidas de silogismos por meio de quatro figuras (Aristóteles havia considerado apenas três), como na figura 3.2.

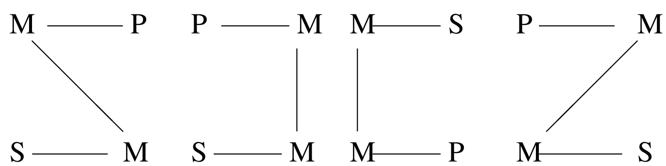

Figura 3.2: As quatro figuras

Nota-se que, como salientou Aristóteles, em todo silogismo devemos ter sempre uma premissa universal, e pelo menos uma delas deve ser afirmativa. Dentre as 64 possibilidades (4^3), os medievais usavam versos em latim para memorizar as 24 formas válidas de inferência dadas por cada figura. As 19 primeiras são:[6]

> Barbara, Celarent, *primae* Darii, Ferio *que*.
> Cesare, Camestres, Festino, Baroco, *secundae*.
> *Tertia grande sonans recitat* Darapti, Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison.
> *Quartae sunt* Bamalip, Calemes, Ditamis, Fesapo, Fresison.

A nessas deve-se acrescentar ainda Barbari e Celaront à figura 1, Cesarop e Camestrop à figura 2, e Camelop à figura 4. Importante notar que muitas dessas formas somentre são válidas se admitirmos que sempre há pelo menos um objeto que comprove os conceitos.

Exercício 3.2.5 *Justifique que, se não admitirmos que há pelo menos um objeto que comprove os conceitos envolvidos, então Barbari, Celaront, Cesarop, Camestrop, Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo e Camelop deixam de ser válidos.*

[6] Cf. Dopp 1970, pp. 143-144.

Para entender como isso funciona, deve-se atentar para as vogais, que indicam as proposições categorias que figuram em cada silogismo. Por exemplo, em um silogismo em Festino, as propoposições que nele figuram são E, I e O, dispostas como mostra a segunda figura acima. Algumas das consoantes têm papel relevante na redução dos silogismos aos da primeira figura, como veremos abaixo. Tomemos um exemplo de um silogismo em Festino:

> Nenhum super-herói é covarde.
> Algumas pessoas são covardes.
> Logo, algumas pessoas não são super-heróis,

o termo maior é 'pessoas', o menor é 'super-herói' e o médio (que figura em ambas a as premissas mas não na conclusão, distribuído conforma ilustra a figura 2 acima) é 'covarde'.

Exercício 3.2.6 *Dê exemplos de cada uma das formas de silogismo descritas pelos versos acima.*

Saliente-se que a teoria de Aristóteles não trata de inferências particulares, mas da estrutura de certos tipos de inferência (os silogismos), que se pensava à época captavam as formas válidas de raciocínio, e um dos fatores mais importantes para que isso pudesse ser feito foi o uso de *variáveis*, ou seja, letras (como 'S' e 'P') que denotam objetos arbitrários de uma certa coleção de entidades (supostamente existentes). Assim, o silogismo exemplificado acima é um caso particular da forma geral

> Nenhum P é M.
> Alguns S são M.
> Logo, alguns S não são P,

e se pode substituir S, P e M por outros termos, obtendo-se assim outras formas válidas de inferência (por exemplo, substitua P, M e S respectivamente por 'cavalo', 'ser com penas' e 'animais terrestres').

Não obstante genial sob certo ponto de vista, a silogística categórica aristotélica apresenta limitações. Uma delas é que trata unicamente de inferências contendo duas premissas, apenas três termos geais e todas as proposições envolvidas devem ser da forma A, E, I ou O. No entanto, é patente que as formas usuais de inferência exigem muito mais do que isso. Por exemplo, tomemos o seguinte raciocínio, que não pode ser captado por qualquer silogismo categórico:

> "Todo comerciante deve pagar seus impostos, e nenhum homem honesto gosta de pagar propinas a maus fiscais. Mas, se todo aquele que deve pagar impostos é honesto, então nenhum comerciante gosta de pagar propinas a maus fiscais”.

Uma outra limitação da silogística aristotélica é devida ao fato de que ela não é adequada para grande parte das formas de inferência que se faz em matemática, em particular aquelas que envolvem não unicamente fatos acerca de se certos objetos têm ou não uma determinada propriedade, mas que encerrem relações entre eles. Por exemplo, o simples raciocínio válido "Se A é maior do que B e se B é maior do que C, então A é maior do que C", não é captado por qualquer das formas válidas de silogismo. Este ponto, percebido por exemplo por Leibniz, foi preponderante para uma maior aproximação da lógica com a matemática. Finalmente, a silogística aristotélica lida unicamente com termos que designam objetos supostamente existentes; se usarmos a teoria de silogismos sem obedecer a esta restrição, somos levados a situações paradoxais, como a seguinte, tirada de um silogismo válido (em *Fesapo*):

> Nenhum animal com um só chifre na testa é um unicórnio.
> Todos os unicórmios são animais com chifres.
> Portanto, alguns animais com chifres não são animais com um só chifre na testa.

Se admitirmos que as premissas são verdadeiras, então a conclusão teria que ser verdadeira devido à validade do silogismo. Mas a conclusão parece conflitar com o fato de um argumento em Fesapo ser válido. O problema está em que a veracidade da premissa principal (a primeira) é alcançada na suposição de que não existam unicórnios, pois se eles não existem, então nenhum animal (em particular os que tenham chifres) pode ser um unicórnio. Ou seja, a silogística aristotélica só funciona para coisas ’reais’ como atletas, cavalos ou gaviões, mas dá problemas quando aplicada a coisas inexistentes, como unicórnios.[7]

Se um dado silogismo de uma certa figura é ou não válido só pode ser conhecido por inspeção. Por outro lado, das quatro figuras, levando em conta que há quatro tipos de proposições categóricas, concluímos que há 256 silogismos possíveis. Para eliminar os que não são válidos, há alguma regras básicas, que os reduzem para 24 formas válidas; dessas 24, cinco podem ser eliminados porque de certo modo estão implícitos em outras; por exemplo, sabemos que uma proposição em ’A’ implica uma em ’I’. Assim,

[7] O exemplo é retirado de Devlin 1997, p. 44.

um silogismo AAI (as premissas sendo em 'A' e a conclusão em 'I'), de certa forma já se encontra em Barbara, e não precisa ser considerado. As regras são as seguintes (Kneebone 1963, p. 17):[8]

R1. Todo silogismo tem unicamente três termos.

R2. Todo silogismo tem apenas três proposições.

R3. O termo médio deve estar *distribuído* pelo menos uma vez. Um termo diz-se distribuído em uma proposição se é afirmado ou negado universalmente nessa proposição. Ou seja, par que o termo médio diga respeito ao mesmo objeto nas duas premissas, em ao menos uma delas ele deve ser tomado univerralmente.[9]

R4. Nenhum termo pode estar distribuído na conclusão se não estiver distribuído em pelo menos uma das premissas.

R5. De duas premissas negativas nada pode ser concluído.

R6. Se uma das premissas é negativa, a conclusão é negativa. Se a conclusão é negativa, uma das premissas é negativa.

R7. De duas premissas particulares, nada pode ser concluído.

R8. Se uma das premissas é particular, a conclusão é particular.

Exercício 3.2.7 *Justifique a afirmativa feita acima: "Um silogismo Barbari (as premissas sendo em 'A' e a conclusão em 'I'), de certa forma já se encontra em Barbara, e não precisa ser considerado."Ache 'onde já estão cada um dos seguintes': Celaront, Cesarop, Camestres e Camelop.*

Redução à primeira figura

Um dos feitos mais relevantes de Aristóteles no que se refere à lógica foi ter mostrado de que forma os silogismos podem ser 'reduzidos' uns aos outros, de modo que bastam apenas poucos deles para sustentar todas outras formas de argumentação silogística. Ele mostrou que há várias possibilidades de se realizar essa redução. Aqui, esboçaremos como os silogismos das figuras 2, 3 e 4 podem ser reduzidos aos da primeira, ou

[8] Para um estudo detalhado da silogística aristotélica, ver Łukasiewicz 1977, ou Kneale & Kneale 1980.

[9] Caso contrário, teríamos por exemplo as premissas ALgum M é P e Algum S é M, que podem ser ambas verdadeiras com distintos objetos M.

seja, transformados em um silogismo equivalente da primeira figura. Na verdade, como mostrou Aristóteles, bastam os silogismos em Barbara e Darii, mas aqui, por facilidade, ficaremos com os quatro da primeira figura.[10] Isso funciona, resumidamente, do seguinte modo (seguiremos mais uma vez Kneebone 1963, pp. 18ss).

Deve-se levar em conta os processos de conversão vistos acima, e atentar para as seguintes regras, dadas em função dos nomes dos silogismos mostrados nos versos anteriormente exibidos:

(i) No nome de cada silogismo, a primeira letra indica para qual silogismo da primeira figura ele será reduzido (o de mesma letra inicial).

(ii) A letra *s* indica uma conversão perfeita da proposição denotada pela vogal precedente.

(iii) A letra *p* indica uma conversão imperfeita (por limitação) da proposição denotada pela vogal precedente.

(iiv) A letra *m* (de *mutare*) indica uma permutação das duas premissas.

Vamos ilustrar com alguns casos. Por exemplo, um silogismo em Cesare, da forma (E) 'Nenhum *P* é *M*', (A) 'Todos os *S* são *M*' / (E) 'Nenhum *S* é *P*', reduz-se a Celarent (de acordo com (i) acima) do seguinte modo: primeiro, a letra *s* indica que devemos converter de modo simples a proposição *E*, obtendo 'Nenhum *M* é *P*'. Esta premissa, junto com a segunda original e a conclusão, dão um silogismo em Celarent. Assim, obtivemos um silogismo da primeira figura cuja conclusão é derivada de premissas equivalentes.

Mais um exemplo: veremos como Felapton (por exemplo, (E) 'Nenhum *M* é *P*', (A) 'Todo *M* é *S*' / (O) 'Algum *S* não é *P*') se reduz a Ferio. Primeiro, a letra *p* indica que devemos converter por limitação (*per accidens*) a premissa em A, obtendo 'Algum *S* é *M*'; então, ficamos com o silogismo (E) 'Nenhum *M* é *P*', (I) 'Algum *S* é *M*' / (O) 'Algum *S* não é *P*', que é um caso de Ferio.

Os únicos silogismos que não podem ser reduzidos seguindo-se as regras acima são Baroco e Bocardo, devido à presença de uma proposição em 'O', que não pode ser convertida das formas acima. Para reduzí-los, usa-se o *método indireto* ou *reductio ad impossible*, que pode também ser aplicado a outras formas de silogismo).[11] Este método, resumidamente, é o seguinte: iniciamos tomando como uma nova premissa a negação da conclusão original. (Repare abaixo que a posição do *c* diz qual premissa

[10] O leitor curioso pode alternativamente ver o capítulo 12 de Mates 1965 ou Dopp 1970, p. 147.

[11] Ver Kneale & Kneale op. cit., p. 80.

será tomada como contrditória da conclusão.) Depois, combinando esta nova premissa com a antiga premissa maior, chegamos a um silogismo da primeira figura (nos dois casos, a Barbara). Aplicando-o, obtemos uma conclusão que é incompatível com a premissa menor original. Assim, a hipótese de que a conclusão original é falsa leva a uma impossibilidade, o que nos obriga a aceitá-lo. Este procedimento está de acordo com o seguinte teorema do cálculo proposicional clássico, conforme veremos à frente: $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q)$, e ao método de redução ao absurdo, usado por exemplo por Euclides.

Vamos exemplificar este método com a redução de Bocardo a Barbara. O que temos de saída é algo do tipo (O) 'Algum M não é P', (A) 'Todo M é S' / (O) 'Algum S não é P'. Formamos então um novo silogismo cuja premissa maior é a negação (contraditória) da conclusão, ou seja, (A) 'Todo S é P'. A premissa menor é a premissa menor do argumento original, ou seja, (A) 'Todo M é S'. Aplicando Barbara obtemos 'Todo M é P'. Ora, isso contraria a premissa maior do silogismo original, o que nos indica que negar a sua conslusão é incorrer em uma falsidade. Portanto, o argumento é válido.

Aristóteles apresentou ainda uma 'silogística modal', da qual não falaremos aqui. A lógica aristotélica, que incorpora não só o que fez Aristóteles, mas também seus seguidores (que, por exemplo, incorporam a quarta figura), permaneceu praticamente inalterada até meados do século XIX. O filósofo Immanuel Kant (1724-1804) chegou a comentar, no Prefácio à segunda edição da *Crítica da Razão Pura*, que a lógica, desde Aristóteles, não havia dado nenhum passo avante e nenhum para trás, permanecendo, "ao que tudo indica, completa e acabada" (Kant 1980, p. 9). Quão equivocada foi a opinião de Kant, em achar que a lógica de então seria algo completo e acabado, é tema que abordaremos daqui para frente.

O curioso sobre a lógica aristotélica é que, como dito, não obstante Aristóteles ser considerado o 'pai' da lógica, não há menção a ele ou à sua silogística nos trabalhos de matemáticos como Arquimedes ou Euclides, ou de importantes matemáticos posteriores.[12] Essa é uma questão interessante que deixamos para ser respondida pelos historiadores: por que esses matemáticos não citam Aristóteles? Teriam eles ignorado a silogística aristotélica? Por que a lógica (no sentido do estudo de inferências dedutivas) e a matemática andaram em linhas paralelas até praticamente a época de Leibniz?

[12]Não obstante, o grande geômetra italiano Federigo Enriques sustenta que o verdadeiro 'criador' da lógica teria sido Zenão de Eléia, e não Aristóteles, pelo fato de ter chegado ao método de redução ao absurdo, que implica na 'construção' de figuras impossíveis em geometria. As demonstrações diretas, por seu turno, nunca 'torcem' as figuras. Enriques sublinha que assim nasceu a lógica, quando a 'forma' tornou-se independente da 'matéria'.

O sistema S

Vejamos agora o nosso exemplo de sistema formal, que chamaremos de S. A linguagem de S, designada por $\mathcal{L}_{\mathsf{S}}$, contém os seguintes símbolos primitivos: (i) uma coleção enumerável de *termos simples*. As letras x, y, z denotam termos simples desta linguagem; (ii) quatro predicados binários, A, I, E e O.

Os *termos* de $\mathcal{L}_{\mathsf{S}}$ são os seus termos simples, e as *fórmulas* são expressões da forma Axy, Exy, Ixy e Oxy, para x e y termos quaisquer (aqui, contrariamente à silogística aristotélica, não presicam ser distintos). As fórmulas serão denotadas por letras gregas minúsculas, e os conjuntos de fórmulas, por letras gregas maiúsculas. Dada uma fórmula α, definimos a sua *contraditória*, denotada $\overline{\alpha}$, da seguinte forma: $\overline{Axy} =_{\mathsf{def}} Oxy$, $\overline{Oxy} =_{\mathsf{def}} Axy$, $\overline{Exy} =_{\mathsf{def}} Ixy$ e $\overline{Ixy} =_{\mathsf{def}} Exy$. O leitor deve reparar que esta definição se coaduna com o quadrado das oposições (figura 3.1).

É claro que esse sistema tem motivação na silogística aristotélica. A escolha das regras de inferência é justificada pela possibilidade de redução das figuras 2, 3 e 4 à primeira. As regras correspondentes aos silogismos em Baroco e Bocardo são introduzidas para que evitemos as dificuldades da sua redução, como salientado acima (no entanto, visto como um sistema formal, S independe completamente dessas motivações e razões).

Uma *interpretação* para $\mathcal{L}_{\mathsf{S}}$ é uma função I do conjunto de seus termos em uma coleção de conjuntos não vazios. Intuitivamente, a imagem do termo t pela interpretação I é entendido como o conjunto $I(t)$ dos objetos designados pelo termo t; a exigência de que tais conjuntos não sejam vazios está mais uma vez de acordo com a silogística aristotélica.

Seja I uma interpretação para $\mathcal{L}_{\mathsf{S}}$. Definimos o *valor-verdade* de uma fórmula α, denotado $I(\alpha)$, do seguinte modo: (i) $I(Axy) = 1$ se e somente se $I(x) \subseteq I(y)$; (ii) $I(Exy) = 1$ se e somente se $I(x) \cap I(y) = \emptyset$; (iii) $I(\alpha) = 0$ se e somente se $I(\overline{\alpha}) = 1$, e (iv) $I(\alpha) = 1$ se e somente se $I(\alpha) \neq 0$.

Os conceitos de modelo de um conjunto de fórmulas, a noção de dedutibilidade de uma fórmula a partir de um conjunto de fórmulas, etc., são análogas às usuais. Diremos que um conjunto Γ de fórmulas é *trivial* se $\Gamma \vdash \alpha$ para toda fórmula α (caso contrário, Γ é *não-trivial*), e que é *inconsistente* se existe uma fórmula α tal que $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \overline{\alpha}$; caso contrário, Γ é *consistente*.

Os postulados de S são as seguintes regras de dedução (não há axiomas):

$\frac{Ayz, Axy}{Axz}$ (Barbara) $\qquad$ $\frac{Eyz, Axy}{Exz}$ (Celarent)

$\frac{Ayz, Ixy}{Ixz}$ (Darii) $\qquad$ $\frac{Eyz, Ixy}{Oxz}$ (Ferio)

$\frac{Azy, Oxy}{Oxz}$ (Baroco) $\qquad$ $\frac{Oyz, Ayx}{Oxz}$ (Bocardo)

$\frac{Ixy}{Iyx}$ (conversão-I) $\frac{Exy}{Eyx}$ (conversão-E)

$\frac{Axy}{Ixy}$ (subalternação-AI) $\frac{Exy}{Oxy}$ (subalternação-EO)

Exercício 3.2.8 *Mostre que todas as formas de silogismo dadas pelas quatro figuras podem ser codificadas em $\mathcal{L}_S$ e as conclusões resultantes provadas a partir das premisas assumidas a partir das regras acima unicamente (veja exemplo a seguir).*

Para exemplificar o exercício anterior, indicaremos como se pode mostrar que um silogismo em Festino pode ser derivado em nossa axiomática. Primeiro, é preciso 'traduzir' adequadamente o silogismo. Tomemos o exemplo dado à página 36.

Nenhum super-herói é covarde.
Algumas pessoas são covardes.
Logo, algumas pessoas não são super-heróis,

Escrevendo em nossa linguagem Ehc e Ipc para as premissas, devemos derivar Oph. Temos então a seguinte derivação: (1) Ehc (premissa); (2) Ipc (premissa); (3) Ech (de 1, por conversão-E); (4) Oph (de 3 e 2, por Ferio). Um outro exemplo: Bamalip, que podemos expressar do seguinte modo: $Axy, Ayz \vdash Izx$, pode ser mostrado válido assim: (1) Axy (premissa); (2) Ayz (premissa); (3) Ixy (1, subalternação-I); (4) Ixz (2,4, Darii). Os outros casos são um bom exercício, que deixamos a critério do leitor.

Salientaremos uma das propriedades mais interessantes de $\mathcal{S}$. Dito de modo informal: de um conjunto finito de premissas contraditórias, não se deduz qualquer proposição. Ou seja, se Γ é um conjunto finito de fórmulas entre as quais figuram α e $\overline{\alpha}$, não se segue que $\Gamma \vdash \beta$ para toda β. Para provar este fato, vamos supor que as fórmulas Axy e Oxy (que são contraditórias pela nossa definição) pertençam a Γ. Aplicando Baroco, derivamos Oxx. Porém, é fácil ver que Oxx é falso para qualquer interpretação. Com efeito, suponha que I é uma interpretação qualquer para a linguagem do nosso sistema. Então, tem-se sucessivamente:

$$I(Oxx) = 1 \Leftrightarrow I(\overline{Axx}) = 0 \Leftrightarrow I(x) \not\subseteq I(x),$$

o que é impossível.

Isso mostra que o sistema S, apesar de poder comportar premissas contraditórias (mas sempre um número finito de premissas), não é trivial. No entanto, se há infinitas premissas, pode haver trivialização. Em resumo, o sistema $\mathcal{S}$ é *paraconsistente*, na acepção desta palavra que será discutida posteriormente. Isso no entanto não significa que o sistema de Aristóteles, se a ele se pudesse aplicar essa terminologia (uma vez que não estava devidamente formalizado), fosse paraconsistente. O motivo é que é duvidoso que o estagirita aceitasse uma proposição da forma Oxx, que em tradução à linguagem comum seria "Algum x não é x". Como para ele todos os conceitos deveriam ser instanciados, dificilmente ele admitiria uma tal proposição. No entanto, este é um ponto a ser discutido pelo historiador da filosofia.

Capítulo 4

A lógica proposicional clássica

VAMOS DAR UM EXEMPLO de um sistema formal, denominado de *cálculo proposicional clássico*, que formaliza a chamada lógica proposicional clássica, ou lógica sentencial clássica. Designaremos esse sistema por $\mathbb{P}$. O vocabulário desse sistema contém os seguintes símbolos primitivos; uma coleção enumerável[1] de símbolos, $A, B, C, A_1, B_1, \ldots$, chamados de *variáveis proposicionais*, mais os seguintes símbolos: $\neg$, $\vee$, além dos parênteses) e (. As expressões da linguagem de $\mathbb{P}$ são seqüências finitas desses símbolos, como $\neg)\vee A))\vee B))$. O leitor pode pensar nesses símbolos como sendo aqueles constantes de um teclado de computador (um teclado potencialmente infinito) no qual digitaremos as coisas que nos interessam. A expressão exemplificada poderia então ter sido digitada por alguém 'que não sabe escrever'. É preciso portanto aprender as regras gramaticais da linguagem em questão.

Tais regras gramaticais especificam que serão *fórmulas* (expressões gramaticalmente bem formadas da linguagem) de $\mathbb{P}$ unicamente aquelas expressões obtidas por alguma das seguintes cláusulas: (a) os símbolos A, B, C, etc. são fórmulas (ou seja, escrever um desses símbolos é fazer algo acertado do ponto de vista de nossa gramática); (b) se p e q são fórmulas, então $\neg p$ e $(p \vee q)$ são fórmulas; (c) estas são as únicas fórmulas. Os parênteses são usados para evitar ambigüidade. Por exemplo, $(\neg p \vee q)$ deve ser distinguida de $\neg(p \vee q)$. No segundo caso, o operador $\neg$ aplica-se à fórmula $(p \vee q)$, ao passo que no primeiro ele se aplica unicamente a p. As letras p, q, r etc. são usadas

[1]Um conjunto é *enumeravel* (alguns dizem *denumerável*) se possuir tantos elementos quantos são os números naturais $0, 1, 2, \ldots$. Um tal conjunto tem cardinalidade $\aleph_0$. Um conjunto é *contável* se for finito (o número de elementos é um número natural) ou enumerável.

como *metavariáveis* para fórmulas, ou seja, são variáveis que percorrem o conjunto das fórmulas da linguagem de $\mathbb{P}$.

Ao escrevermos as fórmulas de $\mathbb{P}$, adotaremos a convenção de eliminar os parênteses externos, escrevendo $p \vee q$ em vez de $(p \vee q)$. Isso posto, podemos introduzir outros símbolos por definições abreviativas, do seguinte modo:

$$p \wedge q =_{\mathsf{def}} \neg(\neg p \vee \neg q)$$
$$p \to q =_{\mathsf{def}} \neg p \vee q$$
$$p \leftrightarrow q =_{\mathsf{def}} (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Note que os novos símbolos $\wedge$, $\to$ e $\leftrightarrow$ também não fazem parte do vocabulário básico de nossa linguagem.

Com esses novos símbolos, podemos observar melhor o uso dos parênteses. Para isso, introduzimos a seguinte hierarquia em 'order decrescente de resistência' para a leitura dos conectivos: $\neg$, depois $\wedge$ e $\vee$, e finalmente $\to$ e $\leftrightarrow$. Com isso, já usando a convenção apontada acima, devemos distinguir entre as fórmulas $p \vee (q \to r)$ e $p \vee q \to r$, uma vez que a primeira abrevia $(p \vee (q \to r))$, enquanto que a segunda abrevia $((p \vee q) \to r)$. Isso funciona mais ou menos do mesmo modo que se usam os símbolos $+$ e $\times$ em aritmética; por exemplo, em $2 \times 3 + 5$, 'sabemos' (pelas regras gramaticais da linguagem da aritmética) que esta expressão abrevia $(2 \times 3) + 5$, e não $2 \times (3 + 5)$. Se há conectivos de 'igual resistência' seguidos, como em $p \vee q \wedge r$, convenciona-se a 'leitura à esquerda', ou seja, que a expressão anterior abrevia $((p \vee q) \wedge r)$.

Simplificações deste tipo serão feitas doravante sem maiores explicações, desde que não causem dúvidas quanto à natureza das fórmulas envolvidas. Uma regra de inferência com premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e conclusão q será escrita abreviadamente assim:

$$\frac{p_1, p_2, \ldots, p_n}{q}.$$

De maneira geral, os postulados, isto é axiomas e regras de inferência, de um sistema formal S são escolhidos para cumprir certas finalidades, como caracterizar dedutivamente todas as fórmulas logicamente válidas, se isso for possível. Por exemplo, para o sistema $\mathbb{P}$, escolhemos os seguintes postulados,[2] admitindo que $\neg$ e $\vee$ são os conectivos primiticos, bem como as *axiomas definicionais*, que introduzem os demais conectivos proposicionais:

[2]Na verdade, tratam-se de *esquemas* de axiomas, já que estamos usando variáveis metalinguísticas em sua formulação. Os axiomas propriamente ditos são obtidos mediante substituição das letras p, q, etc. por fórmulas nas quais figurem apenas símbolos do alfabeto básico .

(P1) $p \vee p \to p$

(P2) $p \to p \vee q$

(P3) $p \vee q \to q \vee p$

(P4) $(p \to q) \to (r \vee p \to r \vee q)$.

(MP Modus Ponens) $\frac{p,\, p \to q}{q}$

(D1) $p \wedge q =_{\text{def}} \neg(\neg p \vee \neg q)$

(D2) $p \to q =_{\text{def}} \neg p \vee q$

(D3) $p \leftrightarrow q =_{\text{def}} (p \to q) \wedge (q \to p)$.

(RD Regra Definicional) Se r abrevia s de acordo com uma das definições anteriores, então r e s podem ser intercambiadas em qualquer fórmula.

Como já dito acima, as *regras de inferência* caracterizam a noção de dedutibilidade no sistema que estamos considerando. Para o sistema $\mathbb{P}$, temos unicamente duas regras primitivas, Modus Ponens e a regra definicional. Outras regras podem ser derivadas. Algumas 'regras clássicas' são as seguintes:

Redução ao Absurdo:

$$\frac{\neg p \to q, \neg p \to \neg q}{p}$$

Dedução: se q é inferida de $\Gamma \cup \{p\}$, onde Γ é um conjunto de fórmulas, então podemos inferir $p \to q$ a partir de Γ. Em símbolos, $\Gamma, p \vdash q \Rightarrow \Gamma \vdash p \to q$ (o símbolo $\Rightarrow$ é metalinguístico).

Modus Tollens:

$$\frac{\neg q, p \to q}{\neg p}$$

Tollendo Ponens:

$$\frac{p \vee q, \neg p}{q}$$

Dupla Negação

$$\frac{p}{\neg\neg p}\,,\ \frac{\neg\neg p}{p}$$

Regra de Adjunção, ou Conjunção:

$$\frac{p, q}{p \wedge q}$$

Eliminação do $\wedge$, ou Separação

$$\frac{p \wedge q}{p}, \frac{p \wedge q}{q}$$

Tollendo Ponens

$$\frac{p \vee q,\ \neg p}{q},\ \frac{p \vee q,\ \neg q}{p}$$

Introdução do $\vee$

$$\frac{p}{p \vee q},\ \frac{q}{p \vee q}$$

Simplificação Disjuntiva, ou Contração

$$\frac{p \vee p}{p}$$

Leis Comutativas

$$\frac{p \wedge q}{q \wedge p},\ \frac{p \vee q}{q \vee p}$$

Leis Associativas

$$\frac{p \wedge (q \wedge r)}{(p \wedge q) \wedge r},\ \frac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge (q \wedge r)},\ \frac{p \vee (q \vee r)}{(p \vee q) \vee r},\ \frac{(p \vee q) \vee r}{p \vee (q \vee r)}$$

Bicondicional

$$\frac{p \leftrightarrow q}{p \rightarrow q},\ \frac{p \leftrightarrow q}{q \rightarrow p},\ \frac{p \rightarrow q,\ q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$$

Autodedutibilidade

$$\frac{p}{p}$$

Leis de De Morgan

$$\frac{p \vee q}{\neg(\neg p \wedge \neg q)},\ \frac{p \wedge q}{\neg(\neg p \vee \neg q)},\ \frac{\neg(p \vee q)}{\neg p \wedge \neg q},\ \frac{\neg(p \wedge q)}{\neg p \vee \neg q}$$

Silogismo Disjuntivo

$$\frac{p \vee q\ ,\ p \rightarrow r\ ,\ q \rightarrow s}{r \vee s}$$

Contraposição

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q \rightarrow \neg p},\ \frac{\neg p \rightarrow \neg q}{q \rightarrow p}$$

Substituição por equivalentes

$$\frac{\Gamma, p \vdash q,\ p \leftrightarrow r}{\Gamma, r \vdash q}$$

Como ilustração, vejamos de que forma podemos derivar a regra Modus Tollens dos postulados acima. Isso pode ser feito mostrando-se que qualquer inferência, na qual

Modus Tollens é usada, pode ser substituída por uma inferência na qual somente a regras primitivas são usadas. Com efeito, suponha primeiro que temos a seguinte derivação que usa Modus Tollens: (1) $p \to q$ (premissa 1); (2) $\neg q$ (premissa 2); (3) $\neg p$ (das duas primeiras linhas, por Modus Tollens). Admita-se que já sabemos que, em nosso cálculo $\mathbb{P}$, temos uma derivação para $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (ou seja, trata-se de um teorema de $\mathbb{P}$). Então, a derivação que desejamos inicia com a derivação de $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ e depois substuímos a prova acima pela seguinte: (1') $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$ (teorema já obtido); (2') $p \to q$ (premissa 1); (3') $\neg q \to \neg p$ (das duas anteriores, por Modus Ponens); (4') $\neg q$ (premissa 2); (5') $\neg p$ (das duas anteriores, por Modus Ponens). Como se vê, obtemos $\neg p$ a partir das premissas 1 e 2 usando unicamente as regras primitivas. Fato similar ocorre com as demais regras derivadas.

Deste modo, por meio dos axiomas e regras, podemos obter as proposições derivadas (teoremas) tendo em vista a noção de dedução ($\vdash$) dada anteriormente. Alguns teoremas importantes de $\mathbb{P}$, que expressam o que se poderia chamar de 'leis básicas' da lógica clássica, são os seguintes (as demonstrações ficam como exercício):[3] $\vdash (p \to \neg p) \to p$ (outra forma de redução ao absurdo), $\vdash (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$ (redução ao absurdo intuicionista), $\vdash p \leftrightarrow \neg\neg p$ (dupla negação), $\vdash p \to p \vee q$ (regra de adição), $\vdash \neg p \to (p \to q)$ ('uma falsa proposição implica qualquer outra'), $\vdash (p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$ (útil na prova de que uma proposição p implica uma proposição q, mostrando-se que a negação de q implica a negação de p), $\vdash q \to (p \to q)$ ('uma proposição verdadeira é implicada por qualquer proposição'), $\vdash (p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ (regra de De Morgan), $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$ (lei da contradição), $\vdash (p \wedge \neg p) \to q$ (lei de Duns Scotus, ou 'de uma contradição tudo se segue').

Vejamos mais um exemplo: provaremos que $\vdash p \vee \neg p$ (ou seja, o princípio do terceiro excluído é um teorema de $\mathbb{P}$). Para isso, vamos admitir que já tenhamos provado que $p \to p$ é um teorema desse sistema. Considermos então a seguinte 'prova': (1) a prova de $p \to p$; (2) $p \vee q \to q \vee p$ (postulado P3); (3) $(\neg p \vee q) \to (q \vee \neg p)$ (da anterior, substituindo-se p por $\neg p$); (4) $(\neg p \vee p) \to (p \vee \neg p)$ (da anterior, substituindo-se q por p); (5) $p \to p$ (teorema já demonstrado); (6) $\neg p \vee p$ (da anterior, tendo em vista a definição de $\to$); (7) $p \vee \neg p$ (de (4) e (6), por Modus Ponens).[4] Note que a sequência de fórmulas (1)–(6) obedece todos os requisitos da definição de prova dada anteriormente.

Um exemplo de uma derivação em $\mathbb{P}$ a partir de um conjunto de premissas é o se-

[3] Veja no entanto Wilder 1965, pp. 226ss.

[4] Uma prova de $p \to p$ é a seguinte, cujas justificativas deixamos a cargo do leitor: (1) $(p \to q) \to (r \vee p \to r \vee q)$; (2) $(p \to q) \to (\neg r \vee p \to \neg r \vee q)$; (3) $(p \to q) \to ((r \to p) \to (r \to q))$; (4) $((p \vee p) \to q) \to ((r \to (p \vee p)) \to (r \to q))$; (5) $((p \vee p) \to p) \to ((r \to (p \vee p)) \to (r \to p))$; (6) $((p \vee p) \to p) \to ((p \to (p \vee p)) \to (p \to p))$; (7) $p \vee p \to p$; (8) $(p \to p \vee p) \to (p \to p)$; (9) $p \to p \vee q$; (10 $p \to p \vee p$; (11) $p \to p$.

guinte. Seja $\Gamma = \{p, p \to q, q \to r\}$. Mostraremos que $\Gamma \vdash r$. Com efeito, temos: (1) p (está em Γ); (2) $p \to q$ (idem); (3) q (de 1 e 2, por Modus Ponens); (4) $q \to r$ (pertence a Γ); (5) r (de 2 e 4, por Modus Ponens). Um outro exemplo importante é o o que segue. Admita que em Γ tenhamos duas fórmulas contraditórias, da forma p e $\neg p$. Provaremos que pode-se derivar *qualquer* fórmula q a partir de um tal Γ (os antigos diziam "*ex falso seguitur quodlibet*", algo como "de uma falsidade tudo se segue"(recorde a lei de Duns Scotus mencionada acima). A 'falsidade' aqui referida sendo a fórmula $p \wedge \neg p$, que pode ser inferida a partir de p e de $\neg p$ pela regra derivada de adjunção vista anteriormente. A derivação é a seguinte, na qual somente mencionamos alguns 'teoremas de $\mathbb{P}$', sem acrescentar suas provas:

1.	$\neg p$	Pertence a Γ
2.	p	Idem
3.	$p \to (\neg q \to p)$	Teorema de $\mathbb{P}$
4.	$\neg p \to (\neg q \to \neg p)$	Idem
5.	$\neg q \to p$	2, 3, MP
6.	$\neg q \to \neg p$	1, 4, MP
7.	$(\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q)$	Teorema de $\mathbb{P}$
8.	$(\neg q \to p) \to q$	6, 7, MP
9.	q	5, 8, MP

A importância deste resultado será explorada no capítulo sobre lógicas não-clássicas, quando falaremos das lógicas não-clássicas. Por ora, é suficiente sabermos que a prova acima estabelece que, se tivermos premissas contraditórias, ou se em um sistema dedutivo fundado na lógica clássica, chegarmos a proposições (teoremas) contraditórios, poderemos derivar em tal sistema qualquer expressão bem formada de sua linguagem como teorema. É por esse motivo, essencialmente, que havia, pelo menos até meados do século passado, um 'horror às contradições'.

Algumas das principais propriedades do operador $\vdash$ são as seguintes, algumas das quais serão provadas mais tarde:

(1) [Autodedutibilidade] Para toda $p \in \Gamma$, tem-se que $\Gamma \vdash p$.

(2) [Monotonicidade] Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e se $\Gamma \vdash p$, então $\Delta \vdash p$. Informalmente, se algo é dedutível a partir de um certo conjunto de premissas, continua sendo dedutível de qualquer conjunto obtido do anterior quando a ele agregamos premissas adicionais.

(3) [Compacidade] $\Gamma \vdash p$ see existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash p$.

(4) [Regra do Corte] Se $\Delta \vdash p$ e de $\Gamma \vdash q$ para cada $q \in \Delta$, então $\Gamma \vdash p$.

No que diz respeito às provas em $\mathbb{P}$, há um resultado importante, chamado de *teorema da dedução*. Este teorema pode ser assim enunciado, sendo p e q fórmulas quaisquer e Γ um conjunto de fórmulas:

[Teorema da Dedução] $\Gamma, p \vdash q \Rightarrow \Gamma \vdash p \to q$.

Com efeito, relativamente ao teorema da dedução, há três casos a considerar. Primeiramente, q pode ser um axioma de $\mathbb{P}$. Neste caso, obviamente, $\Gamma \vdash q$. Vimos acima que $\vdash q \to (p \to q)$ (página 49). Então, por Modus Ponens, obtemos $\Gamma \vdash p \to q$. A segunda possibilidade é que q coincide com p (ou seja, *q é p*). Neste caso, o que se pede é mostarar $\Gamma \vdash p \to p$, o que já foi feito. Finalmente, q pode ter sido obtida de r e de $r \to q$ por uma aplicação de Modus Ponens. Inicialmente, notemos que $\Gamma, p \vdash r$ e $\Gamma, p \vdash q \to r$. Além disso, as fórmulas r e $r \to q$ devem estar em um estágio da prova que antecede a prova de q usando Γ, p. Conseqüentemente, pela hipótese de indução, $\Gamma \vdash p \to r$ e $\Gamma \vdash p \to (r \to q)$. Mas (como se pode mostrar), temos o seguinte teorema de $\mathbb{P}$: $\vdash (p \to (r \to q)) \to ((p \to r) \to (p \to q))$. Duas aplicações de Modus Pones dão o que desejamos.

Informalmente, se q pode ser derivado do conjunto Γ de premissas, ao qual se acrescenta p, então pode-se derivar $p \to q$ desse mesmo conjunto Γ. Em outras palavras, o teorema afirma que *existe* uma prova de $p \to q$ a partir de Γ desde que haja uma prova de q a partir de $\Gamma \cup \{p\}$. Isso é muito útil, pois em matemática freqüentemente nos contentamos com o fato de que uma prova é sabida existir, mesmo sem que precisemos explicitá-la. Assim, se o matemático deseja mostrar que vale uma implicação da forma $p \to q$ a partir de Γ, ele pode proceder do seguinte modo: assume p como 'premissa adicional' e obtém uma derivação de q a partir desse conjunto aumentado. Então, o teorema da dedução garante que a prova procurada existe, sem que o matemático necessite exibí-la explicitamente.

4.1 Semântica

Seja V um conjunto qualquer de variáveis proposicionais. Vamos definir uma aplicação υ (dita *valoração*, ou *interpretação*) de V no conjunto $\{0, 1\}$.[5] Os objetos 0 e 1 são ditos *valores-verdade*, e a única coisa que importa é que sejam distintos. Em vez de 1

[5]Para sermos mais precisos, podemos usar a álgebra de Boole **2** apresentada no Apêndice A. A escolha de tal álgebra caracteriza a lógica proposicional clássica como uma lógica 'a dois valores' (de verdade).

e 0, poderíamos ter escrito V e F, como usualmente se faz nos livros introdutórios de lógica. Escolheremos 1 para ser o *valor distinguido*, que intuitivamente representará o *verdadeiro*, enquanto que 0 representará o *falso*. O valor $\upsilon(X)$, para $X \in V$, é dito *valor-verdade* de X. Se $\upsilon(X) = 1$, dizemos que X é *verdadeira* com respeito à valoração v, e que é *falsa* em caso contrário (ou seja, se $\upsilon(X) = 0$).

Se V' é o conjunto das fórmulas de L *gerado* a partir das fórmulas do conjunto V,[6] então podemos definir uma aplicação υ' de V' em $\{0, 1\}$ do seguinte modo:[7]

(1) Se $X \in V$, então $\upsilon'(X) = \upsilon(X)$. Portanto, υ é uma *extensão* de υ.

(2) Para todas p e q em V', tem-se que:

(i) $\upsilon'((\neg p)) = (\upsilon'(p))^*$, onde x^* denota o complemento de x na álgebra de Boole **2**.

(ii) $\upsilon'((p \vee q)) = \upsilon'(p) \sqcup v'(q)$.

Pode-se provar que, dada υ, há uma única υ' que preenche as condições acima.[8] Daqui para frente, não escreveremos mais υ', mas simplesmente υ para denotar uma valoração, entendendo que pode ser a função que estende o conjunto básico de variáveis proposicionais considerada às fórmulas por elas geradas.

Se $\upsilon(p) = 1$, dizemos que a valoração υ *satisfaz* a fórmula p, e escrevemos υ sat p, e que υ nsat p em caso contrário. Ainda, se Γ é um conjunto de fórmulas e υ é uma valoração, escrevemos υ sat Γ se υ sat p para toda p de Γ. Neste caso, dizemos que υ é um *modelo* de Γ. O conceito de υ nsat Γ é introduzido de modo óbvio (existe pelo menos uma fórmula p de Γ tal que υ nsat p).

Tendo em vista a definição acima dos conectivos $\wedge$, $\to$ e $\leftrightarrow$, resulta que:

$$\upsilon(p \wedge q) = \upsilon(p) \sqcap \upsilon(q)$$
$$\upsilon(p \to q) = (\upsilon(p))^* \sqcup \upsilon(q)$$
$$\upsilon(p \leftrightarrow q) = ((\upsilon(p))^* \sqcup \upsilon(q)) \sqcap (\upsilon(p) \sqcup (\upsilon(q))^*)$$

Dizemos que uma fórmula p é *consequência tautológica*, ou que é *conseqüência semântica* de um conjunto Γ de fórmulas, e escrevemos

$$\Gamma \models p,$$

[6] Por exemplo, se $V = \{A, B\}$, então $V' = \{A, B, \neg A, A \wedge A, A \wedge B, \neg A \vee B, \ldots\}$.

[7] Se o leitor ainda não leu o Apêndice A, ou se não conhece as álgebras de Boole, pode raciocinar como segue: pense que os valores de $\upsilon'(p)$, para p qualquer, são sempre 0 ou 1. Isso posto, $(\upsilon'(p))^* = 0$ se e somente se $(\upsilon'(p)) = 1$, $\upsilon'(p \vee q)$ é o maior dentre $\upsilon'(p)$ e $\upsilon'(q)$ e $\upsilon'(p \wedge q)$ é o menor dentre eles.

[8] A prova é feita fazendo-se uso do chamado Teorema da Recursão. Ver o Apêndice B.

se toda valoração (definida no conjunto das variáveis proposicionais que ocorrem nas fórmulas de Γ) que satisfaz as fórmulas de Γ satisfaz p. Em outras palavras, todo modelo de Γ é modelo de p. Se $\Gamma = \{p_1, \ldots, p_n\}$ e $\Gamma \models p$, escreveremos alternativamente

$$p_1, \ldots, p_n \models q.$$

No caso particular de $\Gamma = \emptyset$, temos $\emptyset \models p$, que escrevemos simplesmente

$$\models p.$$

Neste caso, dizemos que p é uma *tautologia*. Outro caso de interesse é quando nenhuma valoração satisfaz Γ; neste caso, $\Gamma \models p$ para toda p. Por exemplo, tomemos $\Gamma = \{q, \neg q\}$, que não é satisfeito por nenhuma valoração (este resultado tem uma contraparte sintática que será vista à frente. Se p não é satisfeita por nenhuma valoração, dizemos que p é uma *contradição*, como por exemplo $q \wedge \neg q$.

Escrevemos $p \models q$ para denotar que $\{p\} \models q$, e diremos que p *implica tautologicamente* q. Se $p \models q$ e $q \models p$, então p e q são *tautologicamente equivalentes*, como por exemplo, $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \vee \neg q$, como é fácil verificar.

Mediante o conceito de valoração, pode-se provar a existência de um procedimento efetivo (um algoritmo) para se saber, dados um conjunto $\Gamma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ de fórmulas e uma fórmula β, se

$$\Gamma \models \beta$$

ou não.[9] Em particular, tomando $\Gamma = \emptyset$, tal algoritmo servirá para que possamos determinar se uma dada fórmula é ou não uma tautologia. O método é o das *tabelas-verdade*. Comecemos com um exemplo, a saber, mostraremos que

$$\neg A \vee B \models A \to B.$$

Para tanto, considera-se todas as possíveis valorações com domínio $\{A, B\}$ (note que A e B são variáveis proposicionais; se fossem fórmulas mais complexas, o domínio deveria ser o conjunto de todas as variáveis proposicionais que ocorressem nas fórmulas envolvidas). Obviamente, há 4 funções possíveis de tal conjunto em $\{0, 1\}$, que chamaremos de υ_i, $i = 1, \ldots, 4$.

As valorações podem ser dispostas numa tabela como a abaixo, cada linha representando as imagens $\upsilon_i(A)$ e $\upsilon_i(B)$ de cada valoração:

[9]Como de hábito, escreveremos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ em vez de $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \beta$.

	A	B
υ_1	1	1
υ_2	1	0
υ_3	0	1
υ_4	0	0

Esta tabela pode ser ampliada de sorte a incluir as fórmulas $\neg A \vee B$ e $A \to B$. Abaixo de cada uma delas, são indicados os valores que assumem para cada uma das possíveis valorações. Tais valores são obtidos, como já se viu anteriormente, do modo seguinte (indicaremos alguns casos, chamando de υ_i ($i = 1, \ldots, 4$) respectivamente as valorações descritas pelas linhas da tabela acima):

Tem-se portanto, para υ_1:

$$\begin{aligned}
\upsilon_1(\neg A \vee B) &= \upsilon_1(\neg A) \sqcup \upsilon_1(B) \\
&= (\upsilon_1(A))^* \sqcup \upsilon_1(B) \\
&= 1^* \sqcup 1 \\
&= 0 \sqcup 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

De modo similar, e omitindo alguns detalhes óbvios,

$$\begin{aligned}
\upsilon_2(\neg A \vee B) &= \upsilon_2(A) \sqcup \upsilon_2(B) \\
&= 0 \sqcup 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

É fácil ver que obtem-se a tabela seguinte, onde as linhas de 1 a 4 denotam os valores das fórmulas correspondentes para as valorações $\upsilon_1, \ldots \upsilon_4$:

A	B	$\neg A \vee B$	$A \to B$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

O que resulta é que $\neg A \vee B$ e $A \rightarrow B$ têm 'a mesma tabela', ou seja, toda valoração que satisfaz uma delas também satisfaz a outra. Em outras palavras, as fórmulas em questão são tautologicamente equivalentes e resulta o que se queria demonstrar.

Perceba que, por definição, uma fórmula tem sempre um número finito de letras proposicionais, de sorte que as tabelas-verdade (como são denominadas as tabelas como as acima) terão sempre um número finito de linhas.[10]

Se atentarmos para a definição precendente, podemos obter facilmente as seguintes *tabelas-verdade* (cada linha representa uma valoração diferente):

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

A tabela do condicional $A \rightarrow B$ expressa a distinção da 'implicação material' e a noção intuitiva de 'acarreta'. Com efeito, o *condicional material* que estamos usando capta a seguinte noção, atribuída a Filo de Mégara, que segundo consta dizia que um verdadeiro condicional é aquele que não tem um antecendente verdadeiro e um conseqüente falso [22, p. 203]. Assim, a sentença "Se $1 + 1 = 5$, então 4 é um número primo"é verdadeira em virtude do seu antecedente ser falso (linha 3 da tabela).

Isso faz com que tenhamos que ter cautela se quisermos aplicar a lógica proposicional (ou qualquer outro sistema) à linguagem natural. Os conectivos lógicos não captam totalmente o significado dos correspondentes nas linguagens naturais. Há sentido em se afirmar que '$1 = 1 = 5 \rightarrow 4$; é primo' é verdadeira, mas a 'tradução' desta sentença para a linguagem natural, como indicada no pargágrafo precedente, parece bastante estranha.

4.1.1 A completude e a decidibilidade do cpc

Por um *método de decisão* para um sistema formal F entende-se um método por meio do qual podemos decidir em um número finito de passos se uma dada fórmula é ou não

[10] Por indução, é fácil mostrar que se há n variáveis proposicionais envolvidas, haverá 2^n valorações possíveis, logo, 2^n linhas na tabela-verdade.

um teorema de F. O chamado *problema de decisão* de F é encontrar um tal método ou provar que ele não existe. A dificuldade reside em que é preciso definir de modo sensato o que significa ter-se um *método*, o que se faz com o auxílio da Teoria da Recursão, uma das mais importantes áreas da lógica atual, mas que não abordaremos aqui; em vez disso, suporemos que os conceitos acima são intuitivamente claros, e o que interessa enfatizar é que as tabelas-verdade fornecem um método de decisão para o cpc.

Primeiro, vejamos que cálculo $\mathbb{P}$ é *completo* na seguinte acepção: dado um conjunto Γ de fórmulas e uma fórmula p, tem-se que se

$$\Gamma \vDash p \text{ então } \Gamma \vdash p.$$

Em particular, se $\Gamma = \emptyset$, resulta que $\vDash p$ implica $\vdash p$.[11] assim, se uma fórmula α é uma tautologia, é teorema de $\mathbb{P}$. Temos portanto um procedimento adequado (e efetivo) para saber se uma dada fórmula é um teorema de $\mathbb{P}$ e resolver o problema da decidibilidade deste cálculo.

Com efeito, mediante o uso de tabelas-verdade, podemos determinar (em um número finito de passos, pois a tabela sempre tem um número finito de linhas) se uma dada fórmula é ou não uma tautologia; basta que obtenhamos a sua tabela-verdade. Se a fórmula assumir valor-verdade 1 para toda valoração (ou seja, em todas as linhas), então ela é uma tautologia, e portanto um teorema do cpc. Se só contiver zeros, é uma *contradição* (e, tendo zeros e uns, é dita ser uma *contingência*).

Uma lista útil de (esquemas de) tautologias (logo, de teoremas do cpc)é a seguinte:

1. $\vDash p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ (comutatividade da disjunção)
2. $\vDash p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ (comutatividade da conjunção)
3. $\vDash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$ (comutatividade do bicondicional)
4. $\vDash (p \rightarrow (q \rightarrow r)) \leftrightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$
5. $\vDash p \wedge p \leftrightarrow p$ (idempotência, 1)
6. $\vDash p \vee p \leftrightarrow p$ (idempotência, 2)
7. $\vDash p \vee \neg p$ (terceiro excluído)
8. $\vDash \neg(p \wedge \neg p)$ (não-contradição)
9. $\vDash p \leftrightarrow \neg\neg p$ (dupla negação)
10. $\vDash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (lei de De Morgan)

[11] Para uma demonstração deste resultado, chamado de (meta)*teorema da completude* do cálculo $\mathbb{P}$, ver Mendelson 1997, p. 42. A recíproca deste resultado, conhecida como Teorema da Correção, será mencionada abaixo.

11. $\vDash \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (lei de De Morgan)
12. $\vDash p \rightarrow p$ (lei proposicional da identidade,1)
13. $\vDash p \leftrightarrow p$ (lei proposicional da identidade,2)
14. $\vDash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ (lei de Peirce)
15. $\vDash (p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$ (distributividade de $\wedge$ em relação a $\vee$)
16. $\vDash (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ (distributividade de $\vee$ em relação a $\wedge$)
17. $\vDash (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ (contraposição)
18. $\vDash (\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ (redução ao absurdo, 1)
19. $\vDash (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$ (redução ao absurdo, 2)
20. $\vDash ((p \wedge \neg q) \rightarrow (r \wedge \neg r)) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (redução ao absurdo, 3)
21. $((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ (redução ao absurdo, 4)
21. $\vDash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg p)$ (redução ao absurdo intuicionista)
22. $\vDash (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow ((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$ (redução ao absurdo clássica)
23. $\vDash (p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ (relação entre $\wedge$ e $\vee$)
24. $\vDash (p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$ (relação entre $\wedge$ e $\vee$)
25. $\vDash (p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg p \vee q$ (lei de Filo)
26. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (relãção entre $\wedge$ e $\rightarrow$)
27. $\vDash (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ (relação entre $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$)
28. $\vDash (p \wedge \top) \leftrightarrow p$ (onde $\top$ é qualquer tautologia)
29. $\vDash (p \vee \top) \leftrightarrow \top$ (idem)
30. $\vDash (p \vee \bot) \leftrightarrow p$ (onde $\bot$ é qualquer contradição)
31. $\vDash (p \wedge \bot) \leftrightarrow \bot$ (idem)

4.2 Validade de argumentos e a linguagem natural

O uso de sistemas como $\mathbb{P}$ para interpretar argumentos feitos na linguagem natural é bastante difundido e faz parte integrante de qualquer curso introdutório de lógica. Um argumento é válido, como já vimos acima, se sempre que suas premissas forem verdadeiras resulta que a conclusão também é verdadeira. Assim, um argumento $\mathcal{A}$ com premissas $p_1, p_2. \ldots, p_n$ e conclusão q é verdadeiro se e somente se o condicional $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ for uma tautologia. Com efeito, se esta expressão for uma tautologia, então nunca poderá ocorrer que a conjunção das premissas seja verdadeira (o que se dará se e somente se *todas* elas forem verdadeiras) e a conclusão seja falsa. Reciprocamente, se este é o caso, então $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \rightarrow q$ é uma tautologia.

Por exemplo, considere o seguinte argumento: Se Paulo é jovem, vai a festas nos fins de semana. Se Paulo vai a festas nos fins de semana, então corre o risco de se envolver com drogas. Ora, Paulo é jovem. Portanto, corre o risco de se envolver com drogas.

A simbolização é simples: P para 'Paulo é jovem', Q para 'Paulo vai a festas nos fins de semana' e R para 'Paulo corre o risco de se envolver com drogas'. Assim, o argumento tem premissas $P \to Q$, $Q \to R$ e P, e conclusão R. É fácil ver que $(P \to Q \wedge Q \to R \wedge P) \to R$ é uma tautologia, logo o argumento é válido.

Uma outra forma, como já comentamos acima, é estabelecer que a conclusão se segue (é dedutível) das premissas. Isso pode ser feito facilmente, tendo em vista as premissas e aplicando Modus Ponens três vezes. Os dos métodos são equivalentes, ainda que o primeiro (o das tabelas-verdade) seja o mais fácil de se usar na maioria das vezes (uma exceção talvez seja precisamente o exemplo dado).

No entanto, cmo saientado acima, o uso do cálculo $\mathbb{P}$ para essas finalidades deve ser feito com reserva, como enfatizaremos abaixo. É preciso ter em mente que os conectivos lógicos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\leftrightarrow$ não refletem precisamente 'não, 'e', 'ou', 'implica' e 'se e somente se' da linguagem natural. O seu 'significado' é dado pela axiomática de $\mathbb{P}$ (ou pelo conceito semântico de verdade de Tarski, que veremos à frente),[12] e resulta do interesse em aplicações na matemática. Com efeito, em português, as sentenças 'Paulo casou com Maria *e* teve filhos' não é equivalente a 'Paulo teve filhos *e* casou com Maria'. Da mesma forma, 'Paulo vai pescar *ou* vai ao cinema' não pode ser simbolizado por $P \vee C$, pois neste caso esta fórmula seria verdadeira caso ambas, P e C fossem verdadeiras, mas supõe-se que Paulo não possa ir ao cinema e pescar ao mesmo tempo.

Da mesma forma, uma expressão como 'Se 1+1=7, então Florianópolis é capital da França' seria verdadeira se a simbolizássemos por $p \to q$, posto que o antecedente é falso, mas no contexto da linguagem natural, uma afirmação como essa seria certamente taxada como sem sentido. O cálculo $\mathbb{P}$ é uma pequena parte da lógica clássica, que foi erigida para finalidades de fundamentação da matemática. Por exemplo, na geometria plana, a afirmação 'Se A e B são pontos distintos então há uma única reta que os contém' seria verdadeira se existisse um único ponto, uma vez que isso faria com que o antecedente fosse falso. Este artifício, a saber, de concluir que uma certa proposição é verdadeira porque o antecedente deixa de ser satisfeito, é muito usada na matemática clássica, e recebe o nome de *prova por vacuidade*.

Assim, ainda que não nos alonguemos no assunto, fica o alerta: deve-se ser extremamente cauteloso quando se for usar a notação lógica e esquemas de inferência de

[12]Contrariamente ao que muitas vezes se apregoa, as tabelas de verdade não definem 'totalmente' os conectivos. Por exemplo, tome a tabela da negação: $\neg p$ é verdadeiro se e somente se p é falso e considere a expressão 'x é mortal'. A tabela da negação não confere significado à expressão '$\neg$(x é mortal)'.

cálculos como $\mathbb{P}$ para análises em contextos envolvendo a linguagem natural. O melhor, em cursos iniciais, é dar exemplos em matemática, para a qual o cálculo foi construído.

4.3 Mais sobre a metamatemática de do cpc

Na formulação do sistema $\mathbb{P}$, optamos pelos conectivos $\neg$ e *vee* como primitivos. No entanto, a escolha poderia ser outra, e conseqüentente os postulados deveriam ser devidamente adaptados. Isso nos conduziria a *outro* sistema formal, porém (se a escolha fosse adeuada) *equivalente* ao sistema $\mathbb{P}$, no sentido de que teriam os mesmos teoremas (tautologias). Há váraias escolhas possíveis; o que importa é que seja colocadon no vocabulário básico um outro *conjunto adequado* de conectivos, definindo-se então os demais em função dos escolhidos. São 'adequados' os seguintes conjuntos de conectivos (ver a seção 4.5 à frente): $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \wedge, \vee\}$, $\{\neg, \wedge, \rightarrow\}$, $\{\neg, \vee, \rightarrow\}$, $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ e $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Para cada escolha possível, postulados convenientes devem ser fornecidos, de forma que os axiomas de um sejam teoremas do outro.

Além das mencionadas acima (completude e decidibilidade), o cpc apresenta outras propriedades importantes. Veremos do que se trata, mas convém notar que os conceitos aqui definidos se aplicam aos sistemas axiomáticos em geral.

Um conjunto Γ de fórmulas (da linguagem) de $\mathbb{P}$ (ou de um sistema $\mathcal{S}$ qualquer cuja linguagem contenha um símbolo de negação $\neg$) é *consistente em sentido sintático* se não existe fórmula p tal que se tenha $\Gamma \vdash p$ e $\Gamma \vdash \neg p$. Caso contrário, Γ é *sintaticamente inconsistente* ou *contraditório*. No caso do cpc, Γ é *consistente em sentido semântico* se existe uma valoração (atribuição de valores-verdade para as variáveis proposicionais que formam as fórmulas de Γ) tal que, relativamente a esta atribuição, todas as fórmulas de Γ resultem verdadeiras. Caso contrário, Γ é *semanticamente inconsistente*. O conjunto Γ pode muito bem ser a coleção de axiomas do cálculo $\mathbb{P}$, como é o caso de particular interesse aqui.

É fácil constatar que $\mathbb{P}$ (ou seja, que o seu conjunto de axiomas) é consistente, tanto sintatica quanto semanticamente. Com efeito, é fácil ver que cada um dos axiomas de $\mathbb{P}$ é uma tautologia, e que as regras de inferência, quando aplicadas a tautologias, conduzem a tautologias. Assim, todos os teoremas desse cálculo são tautologias. Este resultado é chamado de *teorema da correção* (*soundness*) deste cálculo. Como nenhuma tautologia pode ser negação de uma tautologia (pois ambas têm que ser sempre verdadeiras), vem que não existirá fórmula p tal que tanto ela como sua negação sejam ambas teoremas de $\mathbb{P}$.

Isso posto, podemos reformular o Teorema da Completude do cpc incorporando a sua correção, do seguinte modo (o sentido dos símbolos é tal como acima):

$$\Gamma \vdash \alpha \text{ se e somente se } \Gamma \vDash \alpha.$$

Em particular, $\vdash \alpha$ se e somente se $\vDash \alpha$. Já vimos que o as tabelas-verdade fornecem um método de decisão para $\mathbb{P}$. Assim, este cálculo é *decidível*, no sentido de existir um procedimento efetivo (um algoritmo) que permita dizer, em um número finito de etapas, se uma dada fórmula é ou não um teorema do cálculo (basta fazer a tabela-verdade e verificar –devido ao teorema da completude– se é ou não uma tautologia). De maneira mais geral, um sistema axiomático S é *decidível* se existe um procedimento efetivo (um algoritmo)[13] que permita determinar, dada uma fórmula p, se $S \vdash p$ ou $S \vdash \neg p$.

Uma forma de provar a consistência sintática de $\mathbb{P}$ é a seguinte. Vimos acima que se p e $\neg p$ forem deriváveis de um conjunto de fórmulas, todas as fórmulas da linguagem de $\mathbb{P}$ serão igualmente deriváveis desse mesmo conjunto (trivialização). Portanto, se houver pelo menos uma fórmula da linguagem de $\mathbb{P}$ que não seja teorema deste cálculo, ele é consistente. Podemos apresentar uma infinidade delas; por exemplo, $p \to q$ não é teorema de $\mathbb{P}$ (pois não é uma tautologia).

4.4 Algebrização do cpc

Finalmente, vejamos como se pode tratar o cálculo $\mathbb{P}$ de um outro ponto de vista, o algébrico. Chamamos de $\mathcal{P}$ a coleção de todas as fórmulas de $\mathbb{P}$. Definamos sobre $\mathcal{P}$ a seguinte relação $\sim$: sendo p e q fórmulas quaisquer, então[14]

$$p \sim q \Leftrightarrow \vdash p \leftrightarrow q.$$

Verificamos agora que $\sim$ é uma *relação de equivalência* sobre $\mathcal{P}$, ou seja, é reflexiva, pois $\vdash p \leftrightarrow p$ para toda p, é simétrica, uma vez que se $\vdash p \leftrightarrow q$ então $\vdash q \leftrightarrow p$ e é transitiva, pois se $\vdash p \leftrightarrow q$ e $\vdash q \leftrightarrow r$, vem que $\vdash p \leftrightarrow r$, como se pode verificar sem dificuldade.

Definimos então a classe de equivalência de uma fórmula p pela relação $\sim$, denotada $[p]_\sim$, da seguinte forma:

$$[p]_\sim =_{\mathsf{def}} \{q : p \sim q\}.$$

[13]Para uma definição precisa desse conceito, é necessário utilizar a noção de função recursiva, o que está fora dos objetivos deste texto. Informalmente, pode-se pensar em um processo efetivo como algo que pode ser realizado por um computador comum.

[14]Estamos usando aqui o símbolo $\Leftrightarrow$ como abreviação para 'se e somente se' na metalinguagem.

Chama-se *conjunto quociente* de $\mathcal{P}$ pela relação $\sim$ ao conjunto

$$\mathcal{P}/_{\sim} =_{\mathsf{def}} \{[p]_{\sim} \,:\, p \in \mathcal{P}\},$$

cujos elementos são as classes de equivalência acima definidas. Repare em que consistem essas classes: dada uma fórmula p, a classe de p, ou seja, o conjunto $[p]_{\sim}$, é formado por todas aquelas fórmulas que são equivalentes a p. Assim, $\neg(\neg r \wedge \neg s) \in [r \vee s]_{\sim}$, por exemplo. Sobre o conjunto $\mathcal{P}/_{\sim}$, definimos agora as seguintes operações:

$\overline{[p]}_{\sim} =_{\mathsf{def}} [\neg p]_{\sim}$ (classe complementar)

$[p]_{\sim} \sqcup [q]_{\sim} =_{\mathsf{def}} [p \vee q]_{\sim}$ (reunião de classes)

$[p]_{\sim} \sqcap [q]_{\sim} =_{\mathsf{def}} [p \wedge q]_{\sim}$ (interseção de classes)

$\mathbf{0} =_{\mathsf{def}} [p \wedge \neg p]_{\sim}$ (classe das contradições)

$\mathbf{1} =_{\mathsf{def}} [p \vee \neg p]_{\sim}$ (classe das tautologias)

Finalmente, verfica-se que a estrutura

$$\mathfrak{P} =_{\mathsf{def}} \langle \mathcal{P}/_{\sim}, ^{-}, \sqcup, \sqcap, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$$

é uma álgebra de Boole*, chamada de *álgebra de Lindenbaum* associada ao cálculo $\mathbb{P}$.

Este resultado permite que afirmemos, como se faz habitualmente por abuso de linguagem, que o cálculo proposicional clássico *é* uma álgebra de Boole. Isso no entanto deve ser qualificado: na verdade, o mais correto seria dizer que a contraparte algébrica do dito cálculo é uma álgebra de Boole. Assim, do ponto de vista abstrato, essas duas estruturas (qual seja, a do cálculo propriamente dito) e uma álgebra de Boole se confundem. Deste modo, pode-se estudar $\mathbb{P}$ de pelo menos dois pontos de vista equivalentes: a partir de uma linguagem, dando postulados, definindo dedução, etc., em um processo que ganhou o gosto dos filósofos principalmente a partir de B. Russell e D. Hilbert, e pelo método algébrico, como preferem até hoje muitos matemáticos, poloneses principalmente.

No Apêndice A, que sugerimos ao leitor interessado, falamos mais sobre a algebrização dos sistemas lógicos.

4.5 Conectivos adequados

O leitor pode pular esta seção se desejar, voltando a ela depois que tiver lido o Apêndice A sobre álgebras de Boole.

Uma *função booleana* n-ária é uma aplicação (função) de $\{0, 1\}^n$ em $\{0, 1\}$ (dotado de uma estrutura de álgebra de Boole). Se p é uma fórmula cujas variáveis proposicionais ocorrem entre $A_1, \ldots, A_n$, seja v valoração tal que $v(A_i) = x_i$, $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$. A partir de p podemos definir uma função booleana f_p n-ária pondo

$$f_p(x_1, \ldots, x_n) = v(p)$$

Exemplo 4.5.1

Para $x_i \in \{0, 1\}$*,* $i = 1, \ldots, n$*, definimos* $I_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$*.*

Seja p *a fórmula* $\neg A$*. Então pomos* $f_p : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ *como* $f_p(x_i) = v(p) = v(\neg A) = (v(A))^*$ *(na álgebra de Boole). Em palavras,* f_p *'troca' o valor-verdade que* v *assinala a* A*.*

Seja p *a fórmula* $q \to r$*. Definimos* $f_p : \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$ *pondo* $f_p(x_1, x_2) = (I_1^2(x_1, x_2))^* \sqcup I_2^2(x_1, x_2)$*.*

Neste último caso, note que se x_1 e x_2 denotam os valores-verdade de q e r respectivamente, então a tabela abaixo (de f_p) reproduz fielmente a de $q \to r$:

x_1	x_2	$(I_1^2(x_1, x_2))^* \sqcup I_2^2(x_1, x_2)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Nota-se por outro lado que dar uma função booleana n-ária é nada mais do que dar uma tabela-verdade com n linhas. Por exemplo, a tabela seguinte define uma função booleana ternária:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

O problema interessante é estabelecer o inverso: dada uma tal tabela, achar uma fórmula que tenha tal tabela como tabela-verdade. Essa questão foi resolvida por E. Post em 1921, e será visto abaixo.

4.5.1 O Teorema de Post

Vimos acima que era pertinente indagar, dada uma tabela-verdade, ou seja, dada uma função booleana, se é possível encontrar uma fórmula que tenha tal tabela como tabela-verdade. O teorema seguinte soluciona essa questão.

[Teorema de Post] Seja f uma função booleana. Então existe uma fórmula p tal que $f = f_p$.
Demonstração: Se $Img(f) = \{0\}$, basta tomar p como sendo qualquer contradição, por exemplo, $\neg A \wedge A$. Se $Img(f) \neq \{0\}$, admita que f seja n-ária. Para cada $1 \leq i \leq 2^n$, seja l_i a conjunção $U_1^i \wedge \ldots \wedge U_n^i$, onde U_j^i é A_j se na i-ésima linha da tabela de f a variável x_j assume valor-verdade 1, e U_j^i é $\neg A_j$ em caso contrário. Por exemplo, para a função f da tabela precedente (ver parte final da Nota 2), temos:

L_1 é $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$
L_2 é $A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3$
L_3 é $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$
L_4 é $A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$
L_5 é $\neg A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$
L_6 é $\neg A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3$
L_7 é $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3$
L_8 é $\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3$

Considere agora p como sendo a disjunção de todas as L_j que correspondem a linhas nas quais f assume valor 1. No caso, p é $L_2 \vee L_3 \vee L_5 \vee L_6 \vee L_8$. O que se afirma é que p é precisamente a fórmula que tem a tabela-verdade descrita por f. Com efeito, definida uma valoração v, ou seja, dada uma atribuição de valores-verdade para $A_i, i = 1, \ldots, n$, digamos que v corresponda à linha j da tabela. Então $v(L_j) = 1$, mas $v(L_i) \neq 1$ para todo $i \neq j$. Se f assume valor 1 na linha j, então L_j é uma das disjunções de p, logo $v(p) = 1$ em tal caso. Por outro lado, se f assume valor 0 na linha j, então L_j não é uma das disjunções de p, e então todas as L_k que compõem p assumem o valor-verdade 0 para tal atribuição, logo $v(p) = 0$. Portanto, p 'gera' a tabela de f.▮

Corolário importante é que p contém somente os conecticos lógicos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$. Tendo em vista a possibilidade de se definir os conectivos a partir de outros, resulta imeditato o seguinte resultado:[15] A qualquer função booleana corresponde uma fórmula cujos únicos conectivos são $\neg$ e $\wedge$, ou então somente $\neg$ e $\vee$ ou então somente $\neg$ e $\rightarrow$.

Os conjuntos $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$ e $\{\neg, \rightarrow\}$ dizem-se *conjuntos adequados* de conectivos para o Cálculo Proposicional. Intuitivamente, a partir de qualquer desses conjuntos podemos obter todos os demais conectivos.

Mais formalmente, o que acontece é o seguinte (vamos exemplificar tomando $\{\neg, \wedge\}$ como conjunto básico de conectivos). Chamando de $\mathsf{2}$ ao conjunto $\{0, 1\}$, a função booleana $*$ é obviamente uma função de $\mathsf{2}$ em $\mathsf{2}$, como já se viu, ao passo que $\sqcap$ é uma função de $\mathsf{2}^2$ em $\mathsf{2}$. A definição de $p \vee q$ a partir de $\neg$ e $\wedge$ usará essas duas funções $*$ e $\sqcap$, como é se de esperar. A partir delas, definimos a função $\sqcup : \mathsf{2}^2 \mapsto \mathsf{2}$ pondo $\sqcup =_{\mathsf{def}} * \circ \sqcap \circ *^c$, onde $\circ$ denota a usual composição de funções e $*^c$ é a extensão canônica de $*$ ao conjunto $\mathsf{2} \times \mathsf{2}$.[16] Ou seja, $*^c(x, y) = (*(x), *(y))$.

Assim, a partir de um elemento genérico $(x, y) \in \mathsf{2} \times \mathsf{2}$ (do domínio de $\sqcup$), obtemos $\sqcup(x, y) = *(\sqcap(*^c(x, y))) = *(\sqcap(*(x), *(y)))$. A função $\sqcup$ tem precisamente a tabela de $A \vee B$, como se pode mostrar facilmente (exercício).[17]

De modo semelhante, definem-se funções adequadas para expressar $A \rightarrow B$ e para $A \leftrightarrow B$ e, daí, estendem-se tais funções para fórmulas mais gerais $p \vee q$, $p \rightarrow q$ e para $p \leftrightarrow q$. Para completar o exercício, podemos fazer o mesmo partindo de outro conjunto básico, escolhido dentre os adequados. No entanto, resultado importante é constatar

[15] Um *corolário* de um teorema demonstrado é uma proposição que se segue do teorema; de modo breve, é uma conseqüência do teorema demonstrado.

[16] Ver o Cap. II, § 3, No. 9, de N. Bourbaki, *Theory of sets*, Hermann & Addison-Wesley, 1986.

[17] Por exempo, $\sqcup(1, 1) = * \circ \sqcap \circ *^c(1, 1) = * \circ \sqcap(0, 0) = *(0) = 1$.

que a partir de $\{\neg, \leftrightarrow\}$ *não se pode* obter os demais conectivos; em outras palavras, tal conjunto *não é* adequado. A prova deste fato advém de que não se consegue definir funções booleanas adequadas para espelhar os demais conectivos a partir daquelas que caracterizam os conectivos $\neg$ e $\leftrightarrow$. Com efeito, as únicas funções-verdade que se pode obter a partir desses dois conectivos são as dadas pela tabela abaixo, e se aplicarmos $\neg$ a qualquer delas ou $\leftrightarrow$ a quaisquer duas delas, resultará em uma das funções da tabela, como é fácil ver.[18]

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \leftrightarrow p$	$p \leftrightarrow \neg p$	$p \leftrightarrow q$	$p \leftrightarrow \neg q$
1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1	0

Analogamente, $\{\neg\}$ não é adequado pois as únicas funções de uma variável definíveis a partir desse conjunto são a função identidade e a própria negação, ao passo que uma função que assuma sempre valor 1 não pode ser definida.

4.6 Outras axiomáticas para o cpc

Há vários outros sistemas formais que igualmente podem ser chamados de lógica sentencial, lógica proposicional clássica, ou cálculo proposicional clássico, além daquele exibido acima. As diferenças estão basicamente no vocabulário escolhido e/ou nos postulados. A grande semelhança é que todos eles fornecem a mesma classe de teoremas ou, como para todos vale um teorema de completude, a mesma classe de tautologias. Indicaremos abreviadamente alguns desses sistemas, que com freqüencia podem ser encontrados na literatura.

Cabe observar que a notação em lógica não é padrão. Ainda que tenha havido uma tendência bastante grande para o uso dos símbolos quando grafados da forma como fizemos acima, há variações, principalmente se o leitor pesquisar algum texto mais antigo. Algumas das principais variações são dadas pela tabela abaixo (baseada em Kneale & Kneale 1980, p. 527):

[18] Outra demonstração deste fato pode ser vista na página 31 de Mendelson, E., *Álgebra booleana e circuitos de chaveamento*, McGraw Hill, 1977 (Col. Schaum).

Conceito	Peano-Russell	Hilbert	Outros	Łukasiewicz
negação	$\sim p$	$\overline{p}$, $\rightharpoondown p$, $\neg p$		Np
disjunção	$p \vee q$	$p \vee q$		Apq
conjunção	$p \,.\, q$	$p \& q$	$p \wedge q$, pq	Kpq
condicional	$p \supset q$	$p \to q$		Cpq
bicondicional	$p \equiv q$	$p \sim q$	$p \leftrightarrow q$	Epq

Um fato curioso é que, na chamada *notação polonesa* (Łukasiewicz), não são necessarios símbolos auxiliares, comom parênteses, para escrever fórmulas sem ambiguidade. Por exemplo, $\neg p \to (q \to p)$ é escrito CNpCqp, enquanto que $p \wedge \neg p \to q$ fica CKpNpq.

Para apresentar alguns dos sistemas, usaremos a notação que vimos empregando até aqui, e sempre utilizaremos esquemas de axiomas.

Axiomática de Whitehead-Russell

O sistema em questão foi proposto originalmente por Whitehead e Russell na primeira edição dos *Principia Mathematica*, e tem como conectivos primitivos $\neg$ e $\vee$; a expres são $p \to q$ é usada para abreviar $\neg p \to q$. Os axiomas são os seguintes, e a única regra é Modus Ponens:

(1) $p \vee q \to p$

(2) $p \to p \vee q$

(3) $p \vee q \to q \vee p$

(4) $p \vee (q \vee r) \to q \vee (p \vee r)$

(5) $(p \to q) \to (r \vee p \to r \vee q)$

Em 1926, Paul Bernays mostrou que o axioma (4) pode ser derivado dos demais; os restantes são equivalentes aos postulados que utilizamos na formulação do nosso cálculo $\mathbb{P}$.

Axiomática de Mendelson

Proposto por Elliot Mendelson em 1964 (na primeira edição do seu livro indicado na bibliografia), tem como símbolos primitivos $\neg$ e $\to$ e tem Modus Ponens como única regra de inferência. Os esquemas de axiomas são (p, q e r denotam fórmulas):

(1) $p \to (q \to p)$

(2) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$

(3) $(\neg p \to \neg q) \to ((\neg p \to q) \to p)$

Axiomática de Frege-Łukasiewicz

O sistema proposto originalmente em 1879 por G. Frege em seu *Begriffsschrift* (exceto pela notação), tem os conectivos $\neg$ e $\to$ como primitivos, e os seguintes axiomas (a única regra é Modus Ponens) (cf. Tarski 1983, p. 43):

(1) $p \to (q \to p)$

(2) $(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r))$

(3) $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$

(4) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

(5) $\neg\neg p \to p$

(6) $p \to \neg\neg p$

Posteriormente, Jean Łukasiewicz mostrou que esta axiomática é redundante (os axiomas não são independentes), pois o terceiro deles pode ser derivado dos dois precedentes. Além disso, ainda mostrou que os últimos três podem ser substituídos por um único axioma, ficando-se com a seguinte axiomática:

(1) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

(2) $\neg\neg p \to p$

(3) $p \to (\neg p \to q)$

Axiomática de Kleene

O sistema apresentado por S. C. Kleene em 1952 tem os seguintes conectivos primitivos: $\vee$, $\wedge$, $\to$ e $\neg$, e a única regra é Modus Ponens. Os axiomas são:

(1) $p \to (q \to p)$

(2) $(p \to (q \to r)) \to (p \to q) \to (p \to r))$

(3) $p \wedge q \to p$

(4) $p \wedge q \to q$

(5) $p \to (q \to (p \wedge q))$

(6) $p \to p \vee q$

(7) $q \to p \wedge q$

(8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$

(9) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

(10) $\neg\neg p \to p$

Sistemas com um único axioma

Chamam-se de 'barras de Sheffer', ou *conectivos de Sheffer*, simbolizados por $\downarrow$ (negação conjunta) e | (disjunção alternativa), os conectivos definido pelas tabelas seguintes:

p	q	$p \downarrow q$	$p \vert q$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Se pusermos $\neg p =_{\mathsf{def}} (p \downarrow p)$, e $p \wedge q =_{\mathsf{def}} ((p \downarrow q) \downarrow (q \downarrow q))$, podemos definir dois de nossos conectivos ($\neg$ e $\wedge$) a partir de $\downarrow$, e então já sabemos como obter os demais a partir desses. Um trabalho adicional é comprovar que as tabelas-verdade que obtemos coincidem com as nossas conhecidas. Reciprocamente, o conectivo $\downarrow$ pode ser definido a partir dos nossos conhecidos do seguinte modo:

$$p \downarrow q =_{\mathsf{def}} \neg(p \wedge q),$$

o que mostra porque $p \downarrow q$ é verdadeiro se e somente se nem p e nem q são verdadeiros (e em que sentido é o 'oposto' de $\wedge$). Uma frase da linguagem natural que pode ser formalizada com o auxílio desse conectivo é "Não ambos, João e Carlos, podem ocupar a vaga na direção da revista". Claro está que a única situação em que ela poderá ser falsa será no caso dos dois ocuparem o cargo.

O outro conectivo, a*negação alternativa* (Mendelson 1997, p. 24) é o 'oposto' do $\vee$, e expressa o usual "nem p e nem q"como em "Nem Antonio e nem Carlos ocuparão a direção da revista". Analogamente ao caso anterior, este conectivo pode ser definido assim:

$$p|q =_{\text{def}} \neg(p \vee q)).$$

Constata-se facilmente que são tautologias: $\neg p \leftrightarrow (p|p)$, e que $p \vee q \leftrightarrow ((p|q)|(q|p))$.

As definições dadas mostram que os conectivos de Sheffer são adequados. Usando-os, podemos apresentar postulados para um cálculo proposicional contendo um único axioma. Por exemplo, Nicod apresentou em 1917 a seguinte axiomática, que tem | como único conectivo lógico:

$$(p|(q|r))|((s|(s|s))|((t|q)|((p|t)|(p|t))))$$

A única regra de inferência é a seguinte: r segue de p de de $p|(q|r)$.

Se usarmos $\neg$ e $\rightarrow$ como primitivos, podemos ter um sistema com um único axioma, a saber (apresentado por Meredith em 1953), cuja única regra de inferência é Modus Ponens:

$$((((p \rightarrow q) \rightarrow (\neg r \rightarrow \neg s)) \rightarrow r) \rightarrow t) \rightarrow ((t \rightarrow p) \rightarrow (s \rightarrow p))$$

Aparentemente, usar um só axioma parece algo desejável. No entanto, as demonstrações tornam-se bastante difíceis. O leitor pode tentar reproduzir alguma das provas dadas acima em um desses cálculos para comprovar este fato.

A lógica proposicional que vimos acima, em qualquer de suas formalizações, é apenas uma pequena parte do que se conhece como lógica clássica. No capítulo seguite, daremos um passo adicional e importante no estudo dos sistemas lógicos.

4.7 Outros sistemas proposicionais

Admitamos uma linguagem com variáveis proposicionais $A, B, C, \ldots$, conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$, além dos parênteses como símbolos auxiliares, e cuja única regra de inferência seja Modus Ponens. As fórmulas $p, q, r, \ldots$ são obtidas de modo óbvio. Os esquemas de axiomas abaixo descrevem alguns dos mais importantes sistemas de lógicas proposicionais, que serão mencionados a seguir:

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

(2) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$

(3) $(p \wedge q) \to p$

(4) $(p \wedge q) \to q$

(5) $p \to (q \to p \wedge q)$

(6) $p \to p \vee q$

(7) $q \to p \vee q$

(8) $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$

(9) $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

(10) $p \to (\neg p \to q)$

(11) $p \vee \neg p$

Além disso, chama-se Lei de Peirce, como já visto, a expressão $((p \to q) \to p) \to p$.

Os postulados (1) e (2) (sempre mais Modus Ponens) fornece a *lógica implicativa intuicionista*. Se a (1) e (2) acrescentarmos a Lei de Peirce, obtemos a *lógica implicativa clássica*. Os postulados (1) – (8) fornecem a *lógica proposicional positiva intuicionista*. Mais a Lei de Peirce, obtém-se a *lógica positiva clássica*. Os postulados (1) – (9) fornecem a *lógica intuicionista minimal de Johansson-Kolmogorov* (que chamaremos de K). De (1) a (10), temos a *lógica intuicionista de Brouwer-Heyting*; de (1) – (11), temos a lógica proposicional clássica (a Lei de Peirce é teorema dessa lógica). Uma outra maneira de obter a lógica proposicional clássica é assumir (1) – (9) mais $\neg\neg p \to p$.

Por exemplo, são teoremas da lógica K cada uma das seguintes fórmulas:

$\vdash_K (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$
$\vdash_K p \to \neg\neg p$
$\vdash_K (p \to \neg A) \to \neg p$
$\vdash_K \neg(p \wedge \neg p)$
$\vdash_K (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$
$\vdash_K (p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$
$\vdash_K (p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$
$\vdash_K p \wedge \neg p \to \neg q$
$\vdash_K p \to (\neg p \to \neg q)$
$\vdash_K \neg p \leftrightarrow \neg\neg\neg p$
$\vdash_K p \to (q \to p)$
$\vdash_K (p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r))$

$\vdash_K p \to p$
$\vdash_K (p \leftrightarrow q) \to (q \leftrightarrow p)$
$\vdash_K (p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \to (p \leftrightarrow r)$
$\vdash_K p \leftrightarrow q, q/p$
$\vdash_K p \leftrightarrow p, p/q$
$\vdash_K (p \leftrightarrow q) \to (F(p) \leftrightarrow F(q))$, onde $F(p)$ representa uma fórmula qualquer na qual ocorre p e $F(q)$ representa a mesma fórmula, só que com a eventual substituição de algumas (ou todas) as ocorrências de p por q.
$\vdash_K (p \to q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow p \wedge q)$
$\vdash_K \neg p \wedge \neg q \leftrightarrow \neg(p \vee q)$
$\vdash_K \neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$
$\vdash_K \neg\neg(p \to q) \to (\neg\neg p \to \neg\neg q)$

Neste cálculo temos ainda o seguinte, que aponta algumas fórmulas que não são teoremas de K:

$\nvdash_K \neg\neg p \to p$ (Dupla Negação, um dos lados)
$\nvdash_K p \vee \neg p$ (Terceiro Excluído)
$\nvdash_K (p \wedge \neg p) \to q$ (Lei de Duns Scotus)
$\nvdash_K p \vee (p \to q)$
$\nvdash_K ((p \to q) \to p) \to p$ (Lei de Peirce)
$\nvdash_K p \to (\neg p \to q)$
Tem-se ainda que $p, \neg p \nvdash_K q$.

Este último resultado tem conseqüências importantes, pois mostra que o sistema K é paraconsistente. Uma lógica é *paraconsistente* se pode servir de lógica subjacente a sistemas inconsistentes (que tenham teses contraditórias) mas não triviais (nem toda fórmula é um teorema). Ou seja, uma contradição não trivializa K. Isso no entanto já não acontece com a lógica de Brouwer-Heyting por causa do postulado (10), que equivale à Lei de Scotus.

Uma idéia básica relacionada à lógica intuicionista é a da rejeição das provas indiretas.[19] Na matemática tradicional, para provar que existe um objeto x que satisfaça uma certa condição $P(x)$, por exemplo, "existe um número par entre 10 e 14", podemos mostrar que a não existência de tal x conduz a uma contradição ou absurdo.

Para Brouwer, no entanto, falando sem muito rigor, a *existência* de um objeto matemático só pode ser assumida de houver um procedimento mental para se *construir* esse

[19] Ainda que as demonstrações detalhadas desses fatos requeiram quantificação, eles nos serão úteis para entender algo do 'modo intuicionista' de pensar.

objeto. Simplificadamente, podemos dizer que, de acordo com os intuicionistas, a prova de uma fórmula p, como a acima de que existe x tal que $P(x)$, mostrando que a sua negação $\neg p$ conduz a uma contradição, não pode ser aceita, pois se de $\neg p$ podemos derivar uma contradição, isso apenas mostraria que $\neg p$ é falsa, mas não que p é verdadeira. Do ponto de vista técnico, isso faz com que seja preciso rejeitar princípios que valem na lógica clássica, como as leis da dupla negação ($p \leftrightarrow \neg\neg p$) e do terceiro excluído ($p \vee \neg p$), que não são teoremas do sistema de Brouwer-Heyting. A lógica intuicionista (ao nível do cálculo de predicados de primeira ordem, que veremos à frente), foi axiomatizada pela primeira vez por Heyting na década de 1930, contrariando Brouwer, o criador do intuicionismo, para quem a lógica é *posterior* à matemática, que para ele poderia ser desenvolvida sem a necessidade de se apelar para princípios lógicos. No entanto, a lógica de Heyting foi posteriormente aceita por ele. Kolmogorov de certo modo é um precursor de Heyting, e queria, sobretudo, provar que a matemática clássica poderia ser reinterpretada de um prisma brouweriano, o que legitimaria tal matemática intuicionisticamente. I. Johansson tratou do cálculo elaborado por Kolmogorov, definindo a lógica que ficou, desde então, conhecida como lógica intuicionista minimal.

Vejamos um outro exemplo curioso, que é aceito por um matemático 'clássico', mas não por um 'intuicionista'. Vamos demonstrar que existem dois números irracionais a e b tais que a^b é irracional. A demonstração é a seguinte: suponha que $a = b = \sqrt{2}$. Ora, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou não é (neste caso, é irracional). Se for irracional, a demonstração está encerrada. Se for racional, mude os números: tome agora $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (que por hipótese é irracional) e $b = \sqrt{2}$. Ora, como $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ é racional, chegamos aos números procurados.

O matemático clássico não se importa com o fato de nunca sabermos *se* $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou não. Ele 'acredita' no princípio do terceiro excluído, e sabe que um dos casos acontece, e ele não precisa necessariamente saber qual deles é o que vale. Para o intuicionista, isso não é aceitável. Se desejamos mostrar que existem dois números irracionais a e b tais que a^b é irracional, devemos fornecer um modo de se 'construir' (mesmo que mentalmente) esses números.

Há no entanto uma forma de redução ao absurdo que o intuiocionista aceita, dita *redução ao absurdo intuicionista* (postulado (9) acima): $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$. Isso significa intuitivamente que se uma proposição p conduz a duas teses contraditórias (q e $\neg q$), ela deve ser rejeitada (é falsa), e obtemos $\neg p$. Com este postulado, podemos provar a negação de uma fórmula. Para o intuicionista, termos uma prova de $\neg p$ indica que p é *falsa*; uma prova de p indica que p é *verdadeira*. Uma proposição que represente por exemplo um problema em aberto em matemática (para o qual não se tenha nem uma prova e nem uma prova de que não valha), não é, portanto, nem verdadeira e nem falsa. Vê-se aqui que os conceitos de verdade e falsidade, bem como o de prova ou demonstração, são distintos dos discutidos acima para a lógica clássica.

A lógica intuicionista não admite tabelas de verdade, e nem os conectivos podem ser definidos uns a partir dos outros, como acontece no cpc (à exceção do bicondicional $\leftrightarrow$, que pode ser definido como de hábito). Por isso, as axiomáticas dessas lógicas devem incorporar em suas linguagens todos os conectivos (exceto $\leftrightarrow$).

Capítulo 5

A lógica elementar clássica

UM OUTRO SISTEMA FORMAL de grande relevância é o denominado de *lógica clássica de primeira ordem*, *cálculo clássico de predicados de primeira ordem com igualdade* ou *lógica elementar clássica*. Inicialmente, introduziremos a idéia geral de uma *linguagem de primeira ordem*.

5.1 Linguagens de primeira ordem

Uma linguagem de primeira ordem comporta basicamente duas categorias de símbolos em seu vocabulário primitivo: os símbolos *lógicos* e os *não-lógicos*. Há muitas variações possíveis quanto à escolha desses símbolos, e essas escolhas distinguem uma linguagem de outra.

Dentre os primeiros, estão os seguintes símbolos: (i) *conectivos proposicionais* (escolhe-se um conjunto adequado, no sentido do capítulo 2); (ii) *símbolos auxiliares*: parênteses e a vírgula (dependendo do modo como se articulam as regras gramaticais, esses símbolos podem ser dispensados); (iii) uma coleção enumerável de *variáveis individuais*; (iv) eventualmente, o *símbolo de igualdade*, = (neste caso, a linguagems será uma linguagem de primeira ordem *com igualdade*); (v) *quantificadores* (o quantificador universal ou o existencial ou ambos).

Os símbolos não-lógicos são de três tipos: (i) um conjunto qualquer de *constantes individuais* (eventualmente, esse conjunto pode ser vazio, ou seja, a linguagem pode não ter constantes individuais, como ocorre com $\mathcal{L}_{ZF}$ que veremos abaixo); (ii) *símbolos de predicados*, cada um de uma certa aridade, ou peso, $n > 0$ (n sendo um número natural), e (iii) *símbolos funcionais*, cada um de uma certa aridade $n > 0$.

Os símbolos funcionais de peso n podem ser vistos como símbolos de predicados de peso $n + 1$, assim que um ou outro (ou seja, símbolos de predicados ou funcionais) podem ser dispensados. Não obstante essas possibilidades de eliminação de certos símbolos, muitas vezes á conveniente tê-los a todos. Tudo depende dos objetivos a serem alcançados.

Como se vê, o que descrevemos acima foi uma espécie de 'esqueleto' geral do que seja uma linguagem de primeira ordem 'básica'. A expressão *primeira ordem* refere-se ao fato de que há unicamente variáveis individuais, mas não variáveis para predicados ou funções; isso ficará mais claro abaixo. Como dito acima, há muitas variações possíveis, inclusive linguagens de primeira ordem contendo símbolos outros que os apontados anteriormente, como os chamados v.b.t.o.*, ou operadores que formam termos ligando variáveis a fórmulas (veja o Glossário deste capítulo).

Para o que vem a seguir, vamos particularizar uma linguagem de primeira ordem, que chamaremos de $\mathcal{L}_1$. Os símbolos primitivos de $\mathcal{L}_1$ são os seguintes: osa conectivos $\neg$ e $\vee$, o quantificador é o universal, $\forall$, o símbolo de igualdade $=$, símbolos auxiliares (parênteses e vírgula). As variáveis individuais serão $x_1, x_2, \ldots$ (usaremos x, y, z, w para denotar variáveis individuais). Os símbolos de predicados serão representados pelas letras F, G, H, P, Q, R, S, e a sua aridade será indicada pelo contexto; os símbolos funcionais serão representados pelas letras f, g, h e sua aridade também será dada pelo contexto. As constantes individuais serão denotadas por a, b, c.

Quanto à gramática dessa linguagem, temos o seguinte. As *expressões* de $\mathcal{L}_1$ são seqüências finitas de símbolos, como $\forall \wedge ((\neg x_3 a_7$ e $\forall x(x = x)$. Os *termos* e as *fórmulas* constituem as 'expressões bem formadas' do ponto de vista gramatical, e são definidos do seguinte modo. As variáveis individuais e as constantes individuais são termos; se f é um símbolo funcional de peso n e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é um termo, e esses são os únicos termos de $\mathcal{L}_1$.

As fórmulas, por sua vez, são dadas pela seguinte definição: se s e t são termos, a expressão $(s = t)$ é uma fórmula (dita fórmula *atômica*); se F é um símbolo de predidado de peso n e $t_1, t_2, \ldots, t_n$ são termos, então $F(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é também uma fórmula atômica; as demais fórmulas (fórmulas *gerais*, ou *moleculares*) são obtidas do seguinte modo. Se α e β são fórmulas, então $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta)$, são fórmulas; se x é uma variável individual e α é uma fórmula, então $\forall x\alpha$ é uma fórmula. Nada mais é fórmula.

Os demais conectivos, $\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são supostos definidos como habitualmente, e serão utilizados a partir de agora (ver a página 46), e utilizamos a mesma convenção para a eliminação de parênteses feita no capítulo anterior (veja à página 46. Definimos então o quantificador existencial do seguinte modo: $\exists x\alpha =_{\mathsf{def}} \neg\forall x\neg\alpha$.

Como ocorre com a linguagem da lógica proposicional, não há uniformidade também com relação ao modo de simbolizar os quantificadores. A tabela abaixo ilustra alguns casos:

Conceito	Peano-Russell	Hilbert	Outros	Łukasiewicz
quant. universal	$(x)\alpha(x)$	$(x)\alpha(x)$	$\forall x\alpha(x)$, $\bigwedge x\alpha(x)$	$\Pi x\alpha(x)$
quant. existencial	$(\exists x)\alpha(x)$	$(\mathrm{E}x)\alpha(x)$	$\exists x\alpha(x)$, $\bigvee x\alpha(x)$	$\sum x\alpha(x)$

Antes de prosseguirmos, vamos ver em que consiste uma das mais importantes interpretações dessa linguagem. Via $\mathcal{L}_1$, desejamos falar de objetos de um domínio D, que chamamos de *domínio* (ou *universo*) *do discurso* (em geral, supõe-se que D é um conjunto não vazio), bem como das propriedades, relações e funções entre eles. As variáveis individuais percorrem D, como quando na escola elementar usávamos x e y para denotar números reais. Assim, sintaticamente, uma variável é um símbolo de nossa linguagem, que deve ser usado de acordo com as regras gramaticais, como as apontadas acima; semanticamente, uma variável denota um objeto arbitrário de D, mas é preciso algum cuidado aqui (veja o Glossário, em Variáveis*).

As constantes individuais, por outro lado, quando a linguagem as contém, denotam objetos específicos de D. Na verdade, funcionam como *nomes* desses objetos, como o fazem os numerais 1 e 2 no caso da aritmética usual, que denotam certos números específicos, ou a constante π, que denota um certo número real. Se o domínio fosse uma coleção de pessoas, então 'Pedro' poderia ser uma constante individual, nomeando (sem ambiguidade) um objeto de D. Um termo da forma $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ também denota um elemento de D, mas a especificação desse elemento depende das interpretações dadas ao símbolo funcional f e do que representam os termos $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Por exemplo, se f representa a operação de adição de números reais (que é uma função de peso 2), então $f(t_1, t_2)$ representa o real obtido somando-se o real representado por t_1 com o real representado por t_2.

Os símbolos de predicados denotam *relações* sobre D. É conveniente lembrar aqui que uma relação de aridade n sobre D é um subconjunto de D^n (o produto cartesiano de D por ele mesmo n vezes). Símbolos de predicados n-ários denotam então relações n-árias sobre D. Se $n = 1$, o símbolo de predicado é *unário* e representa um subconjunto de D, a *extensão* do predicado. Predicados unários representam *propriedades* dos elementos do domínio. A interpretação pretendida da igualdade é a relação de identidade sobre D, ou seja, se $s = t$ for verdadeira (veremos quando isso acontece em breve), então s e t denotam *o mesmo* objeto de D.

Mediante uma interpretação adequada, que veremos à frente, uma fórmula de $\mathcal{L}_1$

corresponde a uma asserção acerca dos objetos do domínio, de suas relações e/ou operações. Veremos a seguir, depois de mais alguns conceitos, o que significa dizer que uma dada fórmula é *verdadeira* relativamente a uma determinada interpretação da linguagem $\mathcal{L}_1$. Abaixo, exibiremos alguns casos especiais de linguagens de primeira ordem que nos interessam particularmente.

Em uma fórmula do tipo $\forall x\alpha$ (respect., $\exists x\alpha$, a fórmula α é dita ser o *escopo* (alcance) do quantificador $\forall x$ (respect., $\exists$). Por exemplo, em $\forall x(\exists yP(x, y) \to \forall zQ(x, y, z))$, o escopo de $\forall z$ é $Q(x, y, z)$ o de $\forall y$ é $P(x, y)$ e o de $\forall x$ é $\exists yP(x, y) \to \forall zQ(x, y, z)$. Uma ocorrência de uma variável x em uma fórmula α é *ligada* em α se ela está em um quantificador da forma $\forall x$ que figura em α ou está no escopo de $\forall x$. Caso contrário, a ocorrência de x é *livre* em α. Por exemplo, na fórmula $\forall x(\exists yP(x, y) \to \forall zQ(x, y, z))$, todas as três ocorrências de x são ligadas; as duas primeiras ocorrências de y são ligadas, mas a terceira é livre, e as duas ocorrências de z são ligadas. Percebe-se que uma mesma variável pode ocorrer livre e também ligada em uma mesma fórmula. Uma fórmula que não tem variáveis livres é uma *fórmula fechada*, ou *sentença*.

Quando as variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ocorrem livres em α, escrevemos $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Em particular, $\alpha(x)$ indica que x ocorre livre em α. A utilidade desta notação vem do fato de que muitas vezes escreveremos $\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ para indicar a fórmula obtida de $\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mediante a substituição de x_i pelo termo t_i ($i = 1, \ldots, n$).

5.1.1 Exemplos de linguagens de primeira ordem

Os exemplos de linguagens de primeira ordem que daremos abaixo pressupõe os símbolos lógicos da linguagem com igualdade $\mathcal{L}_1$; explicitaremos unicamente os símbolos não-lógicos de cada uma.

Linguagem da aritmética elementar

Denotaremos por $\mathcal{L}_{AP}$ a linguagem de primeira ordem para a *aritmética de primeira ordem* (também chamada de *aritmética elementar*).[1] Os símbolos lógicos desta linguagem são os de $\mathcal{L}_1$. Os símbolos não-lógicos são os seguintes: uma constante individual $\circledcirc$, um símbolo funcional unário S e dois simbolos funcionais binários $\oplus$ e $\otimes$. Usaremos m, n, r, s, t para denotar os termos dessa linguagem, que são os seguintes (basta seguir a definição dada acima): as variáveis individuais, a constante $\circledcirc$ e as expressões $S(n)$, $n \oplus m$ e $n \otimes m$ (muitas vezes, para evitar o uso excessivo de parênteses, escreveremos Sn em vez de $S(n)$). As fórmulas atômicas são da forma $n = m$. As demais fórmulas

[1] A palavra 'elementar' não tem aqui a conotação de 'simples', mas de algo que é feito sem o recurso de noções conjuntistas.

são obtidas como na definição anterior. Um exemplo de uma fórmula molecular (não atômica) dessa linguagem é a seguinte: $\exists x(y = S(\circledcirc))$. Como antecipado acima, novos símbolos podem ser introduzidos pelas chamadas *definições abreviativas* (ver o Apêndice C), como o seguinte: $x \leq y =_{\mathsf{def}} \exists z(x \oplus z = y)$, ou $Par(x) =_{\mathsf{def}} \exists y(x = S(S(\circledcirc)) \otimes y)$. Veremos abaixo o que essas expressões podem significar (dependendo da interpretação que se dê aos símbolos não lógicos).

Linguagem da teoria elementar de grupos

Designaremos por $\mathcal{L}_G$ a linguagem para a *teoria elementar dos grupos*, cujos símbolos não lógicos são os seguintes: uma constante individual e, um símbolo funcional de peso 2, $\star$ (denotaremos por $s \star t$ o termo $\star(s,t)$) e um símbolo funcional $'$ de peso 1; o termo $'(t)$ será denotado t'.

Linguagem da teoria elementar das álgebras de Boole

Chamaremos esta linguagem de $\mathcal{L}_B$. Seus símbolos não lógicos são dois símbolos funcionais binários $\sqcap$ e $\sqcup$, um símbolo funcional unário $^{-}$ e duas constantes individuais $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Linguagem da teoria elementar dos corpos ordenados

Denotada por $\mathcal{L}_{CO}$, tem como símbolos não lógicos: duas constantes individuais, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$, dois símbolos funcionais binários, $+$ e $\times$, dois símbolos funcionais unários $-$ e $^{-1}$ e um símbolo de predicados binário, $\leq$.

Esta é a mesma linguagem da *teoria elementar dos números reais*, que apresentaremos abaixo.

Linguagem da teoria elementar de conjuntos

A linguagem $\mathcal{L}_{ZF}$ da *teoria de conjuntos Zermelo-Fraenkel* (ZF) tem como símbolo não-lógico um único predicado binário $\in$. Escreve-se $x \in y$ para denotar a fórmula atômica $\in(x,y)$. A fórmula $\neg \in (x,y)$ é escrita $x \notin y$ (x não pertence a y).

Linguagem da teoria elementar de categorias

Chamaremos de $\mathcal{L}_{TC}$ a linguagem para a *teoria elementar de categorias*, que tem como não-lógicos os seguintes símbolos: um predicado ternário K e dois símbolos funcionais unários, D e C.[2] Os termos são as variáveis individuais e as expressões da forma $D(x)$ e $C(x)$, que abreviaremos repectivamente por $dom(x)$ (domínio de x) e $cod(x)$ (co-domínio de x). As fórmulas atômicas são, além de expressões do tipo $x = y$ (já na forma abreviada), as expressões da forma $K(x, y, z)$), com x, y e z variáveis individuais, que abreviaremos escrevendo $x \circ y = z$ (diz-se que z é a *composição* de x e y).

5.2 Interpretação de uma linguagem de primeira ordem

Acima, já nos referimos ao fato de que uma linguagem de primeira ordem pode ser *interpretada* de um certo modo. Vejamos agora com um pouco mais de cuidado o que isto significa. Admita novamente a nossa linguagem $\mathcal{L}_1$. Uma *interpretação conjuntista* para $\mathcal{L}_1$ é uma estrutura

$$\mathfrak{A} = \langle D, \rho \rangle,$$

onde: (i) D é um conjunto não vazio (o *domínio* da interpretação); (ii) ρ é uma função cujo domínio é o conjunto dos símbolos não lógicos de $\mathcal{L}_1$, definida da seguinte forma. Se c é uma constante individual, então $\rho(c) \in D$. Se f é um símbolo funcional n-ário, então $\rho(f)$ é uma função de D^n em D, e se F é um símbolo de predicados de aridade n, então $\rho(F)$ é um subconjunto de D^n (ou seja, uma relação n-ária sobre D). A função ρ é denominada de *função denotação* de $\mathcal{L}_1$ em $\mathfrak{A}$.

ALgumas vezes, em vez de usar a função ρ na estrutura acima, listam-se coleções de objetos de D, de relações e de funções sobre D, de forma que uma estrutura para uma linguagem de primeira ordem fica sendo algo do seguinte tipo, onde I, J e K são conjuntos de índices:

$$\mathfrak{A} = \langle D, \{a_i\}_{i \in I}, \{R_J\}_{j \in J}, \{f_k\}_{k \in K} \rangle.$$

Vejamos alguns exemplos envolvendo cada uma das linguagens introduzidas acima, começando com $\mathcal{L}_{AP}$. A interpretação que destacaremos é dita *interpretação padrão* (ou *standard*) da linguagem da aritmética elementar. O domínio é o conjunto ω dos números naturais. A constante $\circledcirc$ é interpretada (pela função ρ) no número natural 0 (zero). O símbolo funcional unário S é uma função de ω em ω (pois a sua aridade é $n = 1$), definida assim $\rho(s)(x) = x + 1$, onde x é uma variável que percorre o conjunto ω, e é chamada de 'função sucessor'. Os símbolos funcionais $\oplus$ e $\otimes$ são interpretados como sendo as operações usuais de adição e de multiplicação de números naturais respectivamente (que são funções de ω^2 em ω).

Isto posto, uma fórmula como a dada acima, ou seja, $\exists x(y = S(\circledcirc))$, diz que existe um número natural que é o sucessor do número zero. Definindo $x \preceq y =_{\mathsf{def}} \exists z(x \oplus z = y)$,

[2]Seguiremos Hatcher 1982, cap. 8.

como fizemos acima, e $x \preceq y =_{\mathsf{def}} x \prec y \vee x = y$, $x \succeq y =_{\mathsf{def}} \neg(x \prec y)$ e $x \succ y =_{\mathsf{def}} \neg(x \preceq y)$, o leitor pode facilmente verificar que as fórmulas seguintes, numeradas (1) e (2), podem ser traduzidas (de acordo com esta interpretação) respectivamente do seguinte modo: "Não existe um número natural que seja maior ou igual a todos os outros"e "O número n é um número primo". As fórmulas são (pressupondo que $p = \rho(n)$ e $q = \rho(m)$): (1) $\neg\exists x\forall y(y \prec x)$ e (2) $\neg(n = S(\circledcirc)) \wedge \forall x(\exists y(n = x \otimes y) \to x = n \vee x = S(\circledcirc))$. Voltaremos a esta linguagem depois.

Vejamos agora duas interpretações possíveis para a linguagem $\mathcal{L}_G$ da teoria de grupos. A primeira é a seguinte: o universo é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a constante e é interpretada no número real 0, o símbolo funcional $\star$ é interpretado como sendo a usual adição de números reais, e o símbolo funcional $'$ como a operação que associa a cada real x o real $-x$. Uma outra interpretação é a que tem como domínio o conjunto dos números complexos $A = \{1, i, -1, -i\}$, a constante e denota o número 1, $'$ é a função definida assim: $1' = 1$, $i' = -i$, $-1' = -1$ e $-i' = i$, e $\star$ a operação definida pela tábua seguinte:

$\star$	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1

Uma interpretação para $\mathcal{L}_B$ é a seguinte: o domínio é o conjunto $\mathcal{P}(X)$ das partes (ou dos subconjuntos) de um conjunto não vazio qualquer X. Às constantes **0** e **1** associamos respectivamente o conjunto vazio, $\emptyset$ e o conjunto X. Aos símbolos $\sqcap$ e $\sqcup$, são associadas respectivamente as operações de interseção $\cap$ e união $\cup$ de elementos do domínio, e ao símbolo funcional $^-$, a operação que, ao conjunto Y, associa o seu complementar relativamente a X (ou seja, o conjunto $X - y$).

Uma outra interpretação para essa mesma linguagem é a seguinte. O domínio é o conjunto $2 = \{0, 1\}$, com $0 \neq 1$. Definimos a operação correspondente ao símbolo funcional $^-$ do seguite modo: $\overline{0} = 1$ e $\overline{1} = 0$. Quando aos demais, usamos as tabelas (note que aqui estamos comentendo o abuso de linguagem de usar o mesmo símbolo para a interpretação dos símbolos de $\mathcal{L}_B$):

$\sqcap$	0	1	$\vdots$	$\sqcup$	0	1
0	0	1	$\vdots$	0	0	0
1	1	1	$\vdots$	1	0	1

Para a linguagem $\mathcal{L}_{ZF}$, no entanto, as interpretações conjuntistas apresentam problemas. Com efeito, se pensarmos que as suas variáveis (que são os únicos termos) representam *conjuntos*, o domínio da intrepretação teria que ser a coleção (conjunto) de todos os conjuntos, e o símbolo de predicados $\in$ seria interpretado como a usual pertinência, denotado pelo mesmo símbolo. Assim, a fórmula $x \in y$ indicaria que o conjunto x é elemento (membro, pertence) ao conjunto y. O problema é especificar esse 'conjunto de todos os conjuntos'; como obtê-lo? Vimos nos exemplos precedentes que os domínios são certos conjuntos que resultam dos postulados de uma teoria de conjuntos como ZF, mas isso não é possível aqui. Abordaremos essa questão novamente mais à frente, mas desde já é conveniente que o leitor atente para que deve-se tomar certos cuidados quando se fala em interpretações de uma linguagem.

É possível no entanto dar outras interpretações para $\mathcal{L}_{ZF}$, como aquela que tem como domínio o conjunto ω dos números naturais e $\in$ é interpretado na relação $<$ de 'menor que' entre tais números. No entanto, como veremos, essa interpretação não é 'muito interessante' (não originará um *modelo* da teoria de conjuntos ZF).

Agora, o caso da linguagem $\mathcal{L}_{TC}$. Uma interpretação tem como domínio a coleção de todos os grupos, o predicado K é interpretado de forma que $K(x, y, z)$ indica (que z é) a composição dos morfismos x e y, $D(x)$ e $C(x)$ sendo respctivamente o domínio e o co-domínio do morfismo x. Uma outra interpretação tem como domínio a coleção de todos os conjuntos; morfismos são funções entre conjuntos, $K(x, y, z)$ diz que z é a composição das funções x e y, $D(x)$ e $C(x)$ são respectivamente o domínio e o co-domínio da função x.

5.3 Verdade segundo uma interpretação

Podemos agora introduzir o importante conceito de *verdade de acordo com uma interpretação*, e analisar algumas de suas mais importantes implicações. Este conceito, resultante dos trabalhos do lógico Alfred Tarski (1901-1983), é reconhecido como um dos mais relevantes realizados em lógica no século XX, tendo enorme impacto filosófico. O conceito de verdade é fundamental para que possamos definir o que seja um *modelo* para um conjunto de sentenças de uma dada linguagem de primeira ordem (que podem ser os axiomas de uma certa teoria). Isso tem grandes conseqüências em lógica, em matemática e em filosofia, e desejamos explorar um pouco as conseqüências dessa definição.

Admita que seja dada uma interpretação para $\mathcal{L}_1$. Vamos considerar agora seqüências infinitas de elementos do domínio D (isso é feito para que os detalhes técnicos se tornem mais simples). Como supusemos que as variáveis de $\mathcal{L}_1$ estão arranjadas em uma lista infinita $x_1, x_2, \ldots$, então cada seqüência associa um indivíduo de D a cada variável de $\mathcal{L}_1$. Assim, dada uma fórmula qualquer α e uma seqüência $s = \langle s_1, s_2, \ldots \rangle$ de elementos de D, cada uma das variáveis livres de α fica associada a um indivíduo de D por meio da seqüência s. Isso é importante para que possamos definir o que consiste dizer que uma seqüência s *satisfaz* uma fórmula α com respeito a uma interpretação.

Inicialmente, definimos uma função que associa a cada termo t de $\mathcal{L}_1$ um elemento $s(t)$ de D como segue: (a) se t é uma constante individual, digamos a, então $s(t)$ é o elemento $\rho(a) \in D$ que a função denotação associa a a; (b) se t é uma variável individual, digamos x_j, então $s(t)$ é o elemento s_j da seqüência s; (c) se t é da forma $f(t_1, \ldots, t_n)$, com f símbolo funcional n-ário e os $t_1, \ldots, t_n$sendo termos, então $s(t)$ é $\rho(f)(s(t_1), \ldots, s(t_n))$.

Então, vem a seguinte definição, que diz o que significa dizer que uma seqüência s *satisfaz* uma fórmula α de $\mathcal{L}_1$ com respeito à interpretação dada:

(i) se α é uma fórmula atômica da forma $F(t_1, \ldots, t_n)$, onde F é um símbolo de predicado de aridade n, então s satisfaz α com respeito à interpretação dada se e somente se $\langle s(t_1), \ldots, s(t_n) \rangle \in \rho(F)$; diz-se que s *não satisfaz* α em caso contrário.

(ii) se α é uma fórmula atômica da forma $t_1 = t_2$, então s satisfaz α com respeito à interpretação se e somente se $\langle s(t_1), s(t_2) \rangle \in \Delta_D$, onde Δ_D é a *diagonal* de D, ou seja, o conjunto $\Delta_D =_{\mathsf{def}} \{\langle x, x \rangle : x \in D\}$, e não satisfaz α em caso contrário.

(iii) Se $alpha$ é da forma $\neg\beta$, então s satisfaz α se e somente se s não satisfaz β.

(iv) se α é da forma $\beta \vee \gamma$, então s satisfaz α se e somente se s satisfaz β ou satisfaz γ.

(v) se α é da forma $\forall x_j \beta$, então s satisfaz α se e somente se toda s_j-variante de s, ou seja, toda seqüência s' que difira de s no máximo quanto ao elemento s_j, é tal que s' satisfaz β.

Tendo em vista as definições dos demais conectivos e do quantificador existencial já apontadas, resulta da definição:

(vi) se α é da forma $\beta \wedge \gamma$, então s satisfaz α se e somente se s satisfaz β e s satisfaz γ;

(vii) se α é da forma $\beta \to \gamma$, então s satisfaz α se e somente se s não satisfaz β ou satisfaz γ;

(viii) se α é da forma $\beta \leftrightarrow \gamma$, então s satisfaz α se e somente se s satisfaz ambas, β e γ, ou não satisfaz nenhuma das duas.

(ix) se α é da forma $\exists x_j \beta$, então s satisfaz α se e somente se existe uma s_j-variante de s, ou seja, uma seqüência s' que difira de s no máximo quanto ao elemento s_j, é tal que s' satisfaz β.

Por exemplo, dada a interpretação standard da linguagem $\mathcal{L}_{AP}$, a seqüência $s = \langle 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots \rangle$ satisfaz a fórmula $\exists x_1(x_1 > S(\circledcirc))$, pois há uma x_1-variante de s, por exemplo, $s' = \langle 3, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots \rangle$ que satisfaz $x_1 > S(\circledcirc)$.

Define-se então o que significa uma fórmula α ser *verdadeira* (ou *falsa*) para (ou relativamente a) uma interpretação $\mathfrak{A} = \langle D, \rho \rangle$, que se simboliza por $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ (ou $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha$): isso se dá quando a fórmula α é satisfeita por *toda* seqüência s formada com elementos de D, e é *falsa* se *nenhuma* seqüência de elementos de D a satisfaz, o que se escreve assim: $\mathfrak{A} \nvDash \alpha$ (ou $\nvDash_{\mathfrak{A}} \alpha$). A fórmula do parágrafo anterior é verdadeira para a interpretação standard da linguagem da aritmética elementar, enquanto que $\forall x_2(x_2 \prec S(\circledcirc))$ é falsa para esta mesma interpretação, pois nem toda x_2-variante de s dada acima satisfaz $(x_2 \prec S(\circledcirc))$ (por exemplo, a seqüência $s' = \langle 1, 4, 1, 2, \ldots \rangle$ não a satisfaz). Repare no entanto que há fórmulas para as quais há seqüências que a satisfazem e outras que não, como por exemplo $x_3 \prec S(\circledcirc)$; estas não são nem verdadeiras e nem falsas para a interpretação dada (intuitivamente, uma fórmula que tem uma variável livre, como a anterior, será verdadeira ou falsa *dependendo* do valor que se dê à variável, ou às variáveis, se houver mais de uma, não sendo portanto nem verdadeira e nem falsa sem que se especifique uma tal atribuição).

Pode-se demonstrar que valem os seguintes fatos relativamente ao conceito de verdade (Mendelson 1997, pp. 61-62):

(I) $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ se e somente se $\mathfrak{A} \nvDash \neg\alpha$.

(II) $\mathfrak{A} \nvDash \alpha$ se e somente se $\mathfrak{A} \vDash \neg\alpha$ (α é falsa para uma interpretação se e somente se $\neg\alpha$ é verdadeira para essa mesma interpretação).

(III) Nunca se tem $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ e $\mathfrak{A} \nvDash \alpha$ (ou seja, uma dada fórmula nunca é verdadeira e falsa reativamente a uma dada interpretação).

(IV) Se α é uma *sentença* (fórmula sem variáveis livres), então $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ ou $\mathfrak{A} \nvDash \neg\alpha$ para toda interpretação $\mathfrak{A}$ (uma sentença é sempre verdadeira ou falsa).

(V) Se $\mathfrak{A} \vDash \alpha$ e $\mathfrak{A} \vDash \alpha \to \beta$, então $\mathfrak{A} \vDash \beta$.

(VI) $\mathfrak{A} \nvDash \alpha \to \beta$ se e somente de $\mathfrak{A} \nvDash \alpha$ e $\mathfrak{A} \vDash \beta$ (o que equivale a $\mathfrak{A} \vDash \neg\beta$).

(VII) Uma *instância* de uma tautologia é uma fórmula obtida substituindo-se as variáveis proposicionais que nela figuram por fórmulas, as mesmas variáveis sendo substituídas pelas mesmas fórmulas. Por exemplo, $\forall x(S(x) \succ \circledcirc) \vee \neg\forall x(S(x) \succ \circledcirc)$ é uma instância da tautologia $p \vee \neg p$. Isto posto, tem-se então que toda instância e uma tautologia é verdeira para qualquer interpretação (é logicamente válida, conforme definição abaixo).

(IX)Dizemos que um termo t é *livre para x_j em $\alpha(x_j)$*, se em t a variável x_j não ocorre livre no escopo de um quantificador em x_k, onde x_k é uma variável de t (intuitivamente, isso significa que se substituírmos t nas ocorrências livres de x_j em $\alpha(x_j)$, nenhuma variável de t torna-se ligada em $\alpha(t)$).[3] Com essa restrição, tem-se que $\forall x_j\alpha(x_j) \to \alpha(t)$ é logicamente válida (isso será importante à frente).

Algumas definições relevantes são as seguintes. Uma fórmula que é verdadeira para qualquer interpretação é dita ser *logicamente válida*, ou *válida* simplesmente. Uma fórmula é *contraditória* se e somente se é falsa para toda interpretação. Uma interpretação é *modelo* para um conjunto Γ de fórmulas se e somente se todas as fórmulas de Γ são verdadeiras para essa interpretação; diz-se também que uma interpretação é *modelo* para uma fórmula α se α for verdadeira para esta interpretação.

Como exemplo, vamos provar (informalmente) que

$$\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x))$$

é logicamente válida (deixaremos os detalhes ao encargo do leitor). Com efeito, admita por absurdo que exista uma intepretação $\mathfrak{A}$ relativamente à qual se tenha $\mathfrak{A} \vDash \forall x(\alpha(x) \to \beta(x))$ mas $\mathfrak{A} \nvDash \forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$. Então, para todo termo t, a sentença $\alpha(t) \to \beta(t)$ é verdadeira para a interpretação dada (caso contrário, haveria violação do ítem IX acima; chamemos este fato de '*'). Por outro lado, sendo $\forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$ falsa para esta interpretação, então devemos ter (por VI acima) $\mathfrak{A} \vDash \forall x\alpha(x)$, logo $\mathfrak{A} \vDash \alpha(t)$ para todo t (chamemos isto de '**'), e $\mathfrak{A} \nvDash \forall x\beta(x)$ (o que equivale a $\mathfrak{A} \vDash \neg\beta(t)$ para algum termo t (chamamos isto de '***'). Ora, '*' e '**' acarretam que '***' não pode acontecer. Portanto, uma tal interpretação não existe e a fórmula dada é logicamente válida.

Uma fórmula α *implica logicamente* uma fórmula β se e somente se, em qualquer interpretação, toda seqüência que satisfaça α também satisfaz β (o que acontece se e somente se $\alpha \to \beta$ for logicamente válida, ou ainda, se e somente se todo modelo de α for modelo de β). Uma fórmula α é *conseqüência lógica* de um conjunto Γ de fórmulas

[3] Por exemplo, y é livre para x em $F(x)$, mas não o é em $\forall yF(x)$, já que se substituíssemos y no lugar de x nesta fórmula, uma variável que era livre torna-se ligada.

se e somente se, em qualquer interpretação, toda seqüência que satisfaça as fórmulas de Γ também satisfaz α (ou seja, todo modelo de Γ é modelo de α). Duas fórmulas são *logicamente equivalentes* se e somente se uma delas implica logicamente a outra (o que se dá se e somente se $\alpha \leftrightarrow \beta$ for logicamente válida, ou ainda, se e somente se todo modelo de α é modelo de β e reciprocamente).

5.4 Análise crítica do conceito de verdade

O conceito de verdade delineado acima é, em linhas gerais, oriundo dos trabalhos de Alfred Tarski na década de 1930, ainda que não tenha sido apresentada originalmente por Tarski na forma acima, e é conhecida como *concepção semântica* da verdade. O que se vê é que o conceito de verdade é relativizado a uma determinada interpretação: uma fórmula é ou não verdadeira sempre relativamente a uma dada interpretação, e algumas fórmulas podem ser verdadeiras de acordo com uma interpretação, mas falsas relativamente a outras. Ora, uma interpretação *conjuntista*, como vimos, é um constructo conjuntista (um par ordenado) $\mathfrak{A} = \langle D, \rho \rangle$ no qual o primeiro elemento é um conjunto e o segundo uma determinada função (a função denotação). Ou seja, para formularmos adequadamente o que possa ser uma interpretação para uma dada linguagem de primeira ordem, ficamos dependentes de um aparato metamatemático (via de regra, uma teoria de conjuntos) na qual essas entidades possam ser provadas existirem de algum modo (resultam dos postulados da teoria de conjuntos utilizada). Se quisermos ser precisos, podemos dizer que utilizamos a teoria Zermelo-Fraenkel (ZF) como metamatemática. Isso porém faz com que tenhamos que ter certos cuidados. Por exemplo, suponha-se que a linguagem seja $\mathcal{L}_{ZF}$ e que a desejamos verificar se a fórmula que na linguagem de ZF expressa a proposição "Para todo conjunto x, existe um conjunto y do qual x é elemento"(ou seja, $\forall x \exists y (x \in y)$). Como aplicar a definição semântica de verdade para saber se esta sentença é verdadeira ou falsa relativamente a uma dada interpretação? De acordo com a definição acima, uma interpretação para $\mathcal{L}_{ZF}$ teria que ser um par ordenado $\langle D, \rho \rangle$, no qual D fosse a coleção de todos os conjuntos. Ora, pode-se mostrar que em ZF, não existe tal classe. Em outras palavras, em ZF não há *conjunto universal*. Assim, o domínio de uma tal interpretação não pode ser obtido como um conjunto de ZF, ainda que esse tipo de entidade 'exista' em outras teorias. Além disso, há outros problemas, que apontaremos mais tarde, resultantes do segundo teorema de incompletude de Gödel do qual falaremos abaixo. A questão dos *modelos* de ZF será comentada abaixo. Em resumo, uma linguagem como $\mathcal{L}_{ZF}$ não tem semântica *conjuntista* no sentido apontado no texto, e a noção de verdade em uma teoria como ZF não pode ser dada como acima; a única forma é admitir uma forma de 'verdade informal', dada informalmente em algum 'modelo' informal da teoria de conjuntos.

Um outro exemplo de limitação do conceito semântico de verdade vem da linguagem $\mathcal{L}_{TC}$ da teoria elementar das categorias. Por motivos análogos aos mencionados no caso de ZF, há categorias que são 'extremamente grandes' para 'caberem' em uma teoria como ZF. Por exemplo, a categoria de (todos) os conjuntos, a de (todos) os grupos, etc., que envolvem totalidades que não são conjuntos de ZF. A teoria de categorias pode ser formulada como uma teoria elementar, da forma como a apresentamos neste capítulo. Um modo de fundamentar essa teoria é pela extensão de ZF a uma teoria que admita *universos*, como propôs inicialmente A. Grothendieck, tema este muito estudado pelo primeiro dos autores deste livro, que no entanto foge aos propósitos destas notas.

Com as outras linguagens exemplificadas anteriormente, não há este tipo de problema; podemos definir uma estrutura (interpretação) que seja um *modelo* para a aritmética elementar (no sentido de que os postulados dessa teoria sejam verdadeiros relativamente a tal interpretação) em ZF, como fizemos acima com a intepretação standard, que (como se pode provar), é um modelo da aritmética. O mesmo se dá com o caso de grupos, já que grupos (modelos da axiomática da teoria de grupos) podem ser construídos em uma teoria como ZF.

Uma outra observação importante é a seguinte. Como vimos anteriormente, Tarski enfatizou a importância de distinguirmos entre a linguagem *da qual* falamos, a linguagem objeto, da linguagem *na qual* falamos, a metalinguagem. Por outro lado, a sua 'definição' de verdade deveria, conforme ele mesmo acentuou, se conformar ao Esquema T, que lhe daria o critério de adequação material. Ora, na apresentação precedente, não vimos nada parecido com o Esquema T. Onde então está ele? A resposta é a seguinte.

Primeiro, devemos perceber que o termo 'verdade' é introduzido por meio de uma definição 'formalmente correta' na metalinguagem. É por meio dos axiomas e regras da matalinguagem que as sentenças da forma "S se e somente se S"são provadas, o que dá à 'definição' de verdade o caráter de ser materialmente adequada. Assim, podemos assumir, como fez Tarski, a definição (na metalinguagem) de um predicado Tr (para 'truth', *verdade* em inglês) tal que se possa provar (na metalinguagem), para cada sentença S da linguagem objeto, que "$\mathsf{Tr}(S) \leftrightarrow S$". Devido a um teorema do próprio Tarski, conhecido como Teorema da Não Definibilidade do Conceito de Verdade, que veremos à frente, esse predicado não pode ser introduzido na linguagem objeto, desde que ela satisfaça algumas condições a serem vistas. Ou seja, devido a esse teorema, *verdade* e *demonstrabilidade* não coincidem em geral.

5.5 Os postulados da lógica elementar clássica

Os postulados (esquemas de axiomas e regras de inferência) da lógica elementar $\mathcal{L}^1$ são os seguintes, onde α, β e γ são fórmulas, x é uma variável individual. A expressão $\alpha(x)$ representa uma fórmula na qual a única variável livre é x:

(E1) $\alpha \vee \alpha \to \alpha$

(E2) $\alpha \to \alpha \vee \beta$

(E3) $\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

(E4) $(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta)$

(E5) $\forall x\alpha(x) \to \alpha(t)$, onde t é um termo livre para x em $\alpha(x)$. Em particular, t pode ser a própria variável x; assim, um caso particular deste postulado pode ser assim escrito: $\forall x\beta(x) \to \beta(x)$.

(E6) $\forall x(\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \forall x\beta)$, se β não contém occorências livres de x

(E7) $\forall x(x = x)$

(E8) $\forall x\forall y(x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$, com $\alpha(z)$ sendo uma fórmula qualquer, na qual a variável z figura livre, x e y são variáveis distintas, $\alpha(x)$ e $\alpha(y)$ resultam da substituição de z respectivamente por x e por y em $\alpha(z)$ em ocorrências livres de z.

(MP) $\alpha, \alpha \to \beta / \beta$

(Gen) $\alpha / \forall x\alpha$

A regra (MP) é Modus Ponens e (Gen) é a regra de 'generalização'. A este sistema, denominamos *lógica elementar clássica*, *lógica clássica de primeira ordem com igualdade*, *cálculo clássico de predicados de primeira ordem com igualdade* ou ainda *cálculo quantificacional clássico de primeira ordem com igualdade*. Adicionando aos postulados acima axiomas específicos para os símbolos não lógicos que por ventura houver, obtemos *teorias elementares*, ou *teorias de primeira ordem*. Nestes casos, diz-se que tais teorias têm a lógica elementar como *lógica subjacente*. A seguir, exploraremos tanto a lógica elementar quanto algumas teorias elementares.

O conceito de dedução ($\vdash$), de conseqüência sintática e os demais conceitos sintáticos são similares aos apresentados para o cálculo proposicional, unicamente que teremos agora fórmulas da linguagem de $\mathcal{L}^1$ em vez de letras proposicionais, além de expressões quantificadas. A noção de *teorema* ($\vdash \alpha$) é exatamente igual à dada para a lógica proposicional, bem como a noção de dedução a partir de um conjunto de premissas ($\Gamma \vdash \alpha$).

Um teorema de dedução vale para $\mathcal{L}^1$, mas em uma forma algo modificada do que aquela que vimos para o cálculo proposicional, devido à presença da regra Gen. Trata-se do seguinte:

> [Teorema da Dedução] Suponha que temos $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, e que na dedução de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$, nenhuma aplicação de Gen é feita de forma a quantificar uma variável que é livre de β. Então, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Se em particular β é uma sentença e $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Como já dito no caso proposicional, este teorema facilita em muito as deduções. Por exemplo, consideremos o seguinte esquema de uma derivação (ou seja, o que se segue *abrevia* uma prova formal em $\mathcal{L}^1$): mostraremos que $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash \forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$.

(1) $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)$	(hipótese)
(2) $\forall x\alpha(x)$	(hipótese)
(3) $\alpha(x) \to \beta(x)$,	(1), `E5`
(4) $\alpha(x)$	(2), `E5`
(5) $\beta(x)$	(3), MP
(6) $\forall x\beta(x)$	(5), Gen

A derivação acima mostra que de $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)$ e de $\forall x\alpha(x)$, obtemos $\forall x\beta(x)$. Assim, pelo teorema da dedução, obtemos $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x) \vdash \forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$.

A partir da axiomática acima, podemos mostrar que são teoremas da lógica elementar clássica as seguintes fórmulas, que constituem uma lista útil de 'verdades lógicas':

(1) $\vdash \exists x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \to \exists x\alpha(x) \wedge \exists x\beta(x)$

(2) $\vdash \forall x\alpha(x) \vee \forall x\beta(x) \to \forall x(\alpha(x) \vee \beta(x))$

(3) $\vdash \forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$

(4) $\vdash \forall x(\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)) \leftrightarrow (\forall x\alpha(x) \leftrightarrow \forall x\beta(x)$

(5) $\vdash \forall x(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \leftrightarrow \forall x\alpha(x) \wedge \forall x\beta(x)$

(6) $\vdash \exists x(\alpha(x) \vee \beta(x)) \leftrightarrow \exists x\alpha(x) \vee \exists x\beta(x)$

Igualmente úteis são as seguintes regras derivadas de inferência, em adição á regra Gen vista acima:

Generalização : se t é um termo que não figura em nenhuma das suposições nas quais se baseia a conclusão, então

$$\frac{\alpha(t)}{\forall x \alpha(x)}.$$

Particularização, ou Especialização : nela, t é um termo livre para x em $\alpha(x)$ (em particular, pode ser a própria vaiável x):

$$\frac{\forall x \alpha(x)}{\alpha(t)}.$$

Introdução existencial : igualmente, t é um termo livre para x em $\alpha(x)$:

$$\frac{\alpha(t)}{\exists x \alpha(x)}.$$

Eliminação existencial : (idem)

$$\frac{\exists x \alpha(x)}{\alpha(t)}.$$

Vejamos um exemplo do uso dessas regras, cuja derivação no entanto não apontaremos. Mostraremos que $\vdash \forall x \alpha(x) \rightarrow \exists x \alpha(x)$.

(1) $\forall x \alpha(x)$	(hipótese)
(2) $\alpha(x)$	(Particularização)
(3) $\exists x \alpha(x)$	(Introd. existencial)
(4) $\forall x \alpha(x) \vdash \exists x \alpha(x)$	(o que fizemos de 1 a 3)
(5) $\vdash \forall x \alpha(x) \rightarrow \exists x \alpha(x)$	(teo. dedução)

Com relação às regras de dedução da lógica elementar, um cuidado especial deve ser tomado com a regra de generalização. Esta regra é usada por exemplo quando o matemático deseja provar, digamos, alguma coisa sobre triângulos retângulos (o teorema de Pitágoras, por exemplo). Ele inicia assim: "Seja ABC um triângulo retângulo. Então ...". Neste argumento, ABC (que fas o papel do t na regra) não está funcionando como um *nome* de um triângulo retângulo particular, ou seja, como uma constante, mas como uma variável livre, denotando um triângulo retângulo *arbitrário*. Feita essa prova, como ela se refer a um ABC *qualquer*, pode-se inferir que o que foi demonstrado vale para todos os triângulos retângulos.

Um exemplo de um mal uso da regra é o seguinte (Lemmon 1971, pp. 108-9): suponha que temos um objeto t da geometria euclidiana plana (uma figura) e que assumimos que: (i) t tem somente ângulos agudos, o que expressaremos escrevendo $A(t)$, e que (ii) t é formada unicamente por linhas retas, que escrevemos $R(t)$. Então, dos postulados dessa geometria, ontemos que t é um triângulo, $T(t)$. Assim, temos $A(t), R(t) \vdash T(t)$. Pelo teorema da dedução, $A(t) \vdash R(t) \to T(t)$. Aplicando generalização, chegamos a $\forall x(R(x) \to T(x))$, ou seja, dada uma figura que tenha todos os ângulos agudos, então toda figura que seja retilínea é um triângulo. Esta conclusão é evidentemente falsa, e a falácia na sua derivação é a seguinte: não podemos passar de $R(t) \to T(t)$ para $\forall x(R(x) \to T(x))$ porque a conclusão se assenta em uma hípótese em que figura t ou, como se diz, *depende* de t. Com efeito, a conclusão $R(t) \to T(t)$ depende de $A(t)$, na qual t é mencionada, e então a regra de generalização não pode ser aplicada. Para evitar derivações como essa é que a restrição à regra foi mencionada: podemos obter $\forall x\alpha(x)$ a partir de $\alpha(t)$ somente quando t não aparece em nenhuma hipótese da qual a conclusão dependa.

Vejamos um exemplo do uso correto dessa regra: provaremos que $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)), \forall x\alpha(x) \vdash \forall x\beta(x)$. Os passos são os seguintes:

(1) $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x))$	Hipótese
(2) $\forall x\alpha(x)$	Hipótese
(3) $\alpha(t) \to \beta(t)$	(1), Particularização
(4) $\alpha(t)$	(2), Particularização
(5) $\beta(t)$	(3), (4), Modus Ponens
(6) $\forall x\beta(x)$	(5), Generalização

5.6 Teorias elementares

Uma teoria elementar, ou teoria de primeira ordem, é aquela que tem por lógica subjacente a lógica elementar vista anteriormente. Isso significa que usamos a linguagem $\mathcal{L}_1$ acima, acrescentando símbolos não-lógicos específicos para a teoria a ser considerada, bem como axiomas não-lógicos regendo esses novos símbolos. Se não acrescentarmos nenhum símbolo não-lógico a $\mathcal{L}_1$ e nenhum axioma não-lógico, obtemos a primeira teoria elementar de nosso interesse, a própria lógica elementar $\mathcal{L}^1$, também chamada de *cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade*.

As teorias desempenharam um papel importante não só em lógica, mas na filosofia da ciência no início do século XX; o chamado positivismo lógico, por exemplo, advogava que as teorias científicas deveriam ser formuladas tendo por base a lógica elementar. Segundo essa concepção, uma teoria científica deveria ser formulada tendo $\mathcal{L}^1$ como lógica subjacente, à linguagem da qual acrescentaríamos símbolos específicos e axiomas específicos.[4] Nesta seção, veremos algumas teorias elementares que nos serão úteis para discutir assuntos pontuais que colocaremos oportunamente.

5.6.1 Aritmética Elementar

A aritmética elementar, aritmética de primeira ordem, ou Aritmética de Peano, que chamaremos de $\mathcal{AP}$ é basicamente a teoria cuja linguagem $\mathcal{L}_{AP}$ foi descrita acima (seção 5.2) e cujos postulados se obtêm acrescentando-se aos ((`E1-E8`) anteriores os seguintes, que regem o comportamento dos símbolos não lógicos $\circledcirc$ (constante individual), S (símbolo funcional unário), $\oplus$ e $\otimes$ (simbolos funcionais binários):

(`AP1`) $\forall x \forall y(S\,x = S\,y \rightarrow x = y)$

(`AP2`) $\forall x(\circledcirc \neq S\,x)$

(`AP3`) Se $\alpha(x)$ é uma fórmula qualquer de $\mathcal{L}_{AP}$ e x é uma variável individual, então $\alpha(\circledcirc) \wedge \forall x(\alpha(x) \rightarrow \alpha(S\,x)) \rightarrow \forall x \alpha(x)$ (princípio da indução, do qual falaremos abaixo). Recorde-se que uma fórmula com uma única variável livre pode ser dita representar uma *propriedade* dos indivíduos do domínio de uma dada interpretação. Assim, podemos reformular o postulado `A3` do seguinte modo: para qualquer propriedade $\alpha(x)$, se $\circledcirc$ tem esta propriedade e se, sempre que um certo x a te, se segue que $S\,(x)$ também a tem, então todos os objetos do domínio têm a referida propriedade.

(`AP4`) $\forall x(x \oplus \circledcirc = x)$

(`AP5`) $\forall x \forall y(x \oplus S\,y \rightarrow S\,(x \oplus y))$

(`AP6`) $\forall x(x \otimes \circledcirc = \circledcirc)$

(`AP7`) $\forall x \forall y(x \otimes S\,y = x \otimes y \oplus x)$

Anteriormente, já nos referimos à chamada *interpretação standard* de $\mathcal{L}_{AP}$. Em síntese, o seu domínio é o conjunto ω dos números naturais, $\circledcirc$ denota o número 0, S é

[4]Uma excelente exposição deste ponto de vista filosófico, que ficou conhecido desde Putnam como 'Received View' (Vista recebida), acha-se no artigo 'Historical background to the Received View', de Federick Suppe, pp. 6-232 de F. Suppe (ed.), *The structure of scientific theories*, 2nd. ed., Un. of Illinois Press, 1979.

uma função que associa a cada número natural n o seu sucessor $n+1$, $\oplus$ e $\otimes$ a adição $+$ e a multiplicação $\cdot$ de números naturais. Ou seja, trata-se de uma estrutura da forma (o símbolo S é usado tanto na linguagem quanto na estrutura)

$$\mathfrak{N} = \langle \omega, \circledcirc, S, \oplus, \otimes \rangle.$$

Não é difícil nos convencermos de que esta interpretação é um *modelo* para os postulados acima (ainda que a prova detalhada seja trabalhosa), chamado *modelo standard* da aritmética elementar. Devido a alguns fatos que apontaremos mais à frente, esta aritmética apresenta *modelos não-standard*, em um sentido que ficará claro posteriormente, mas que desde já deve ser armazenado em sua memória.

Podemos agora desenvolver $\mathcal{AP}$, introduzindo outros conceitos e provando teoremas relativos a eles. Por exemplo, introduzimos por definição o conceito de 'menor oi igual a' da seguinte forma: $x \preccurlyeq y =_{\mathsf{def}} \exists z(x \oplus z = y)$, e abreviamos $\neg(x \preccurlyeq y)$ por $x \npreceq y$. É fácil provar que resulta o seguinte teorema, que expressa algumas das principais propriedades da relação $\preccurlyeq$: $\forall x(x \preccurlyeq x)$ (reflexividade), $\forall x \forall y(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq x \to x = y)$ (anti-simetria), e $\forall x \forall y \forall z(x \preccurlyeq y \wedge y \preccurlyeq z \to x \preccurlyeq z)$ (transitividade). Ou seja, $\preccurlyeq$ é uma *ordem parcial*.

Semelhantemente, definimos $x \prec y =_{\mathsf{def}} x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$ e provamos os seguintes fatos (que fazem com que $\prec$ seja uma ser uma *ordem linear*, ou *total*, ou ainda, *estrita*), onde $x \nprec y$ abrevia $\neg(x \prec y)$: $\forall x(x \nprec x)$ (ireflexividade), $\forall x \forall y \forall z(x \prec y \wedge y \prec z \to x \prec z)$ (transitividade), $\forall x \forall y(x = y \vee x \prec y \vee y \prec x)$ (tricotomia).

Para um desenvolvimento detalhado de $\mathcal{AP}$, o leitor deve consultar literatura específica, como Landau 1966. No entanto, falaremos algo sobre o pastulado `A3`. Na verdade, trata-se de um *esquema de axiomas*: obtém-se um axioma de $\mathcal{AP}$ para cada fórmula $\alpha(x)$ que utlizarmos no postulado. Repare ainda que em `A3` é feita referência a 'uma propriedade qualquer $\alpha(x)$', mas não se emprega o quantificador $\forall$ para dizer isso; em outras palavras, não escrevemos $\forall\alpha(x)(\alpha(\circledcirc) \wedge \ldots)$. Isso se deve ao fato de que em uma linguagem de primeira ordem a definição de fórmula impede que se quantifique sobre qualquer coisa que não sejam objetos do domínio; em outras palavras, as regras gramaticais impõem que, depois de um quantificador, deve vir uma variável individual, e não uma variável para propriedades. Este passo adicional será no entanto permitido nas linguagens de ordem superior, que veremos oportunamente.

Os axiomas `AP4` e `AP5` definem a adição recursivamente (ver o Apêndice B: Indução e Recursão), enquanto que os axiomas `AP6` e `AP7` definem recursivamente a multiplicação. Ilustraremos a característica recursiva desses axiomas do seguinte modo. Primeiramente, mais definições: $0 =_{\mathsf{def}} \circledcirc$, $1 =_{\mathsf{def}} S(\circledcirc)$, $2 =_{\mathsf{def}} S(1)$, $3 =_{\mathsf{def}} S(2)$, etc. Podemos agora provar em $\mathcal{AP}$ que $3 + 2 = 5$. A prova é, esquematicamente, a seguinte: $3 + 2 = 3 + S(1) = S(3 + 1) = S(3 + S(0)) = S(S(3 + 0)) = S(S(3)) = S(4) = 5$. Os passos são facilmente justificados pelos axiomas da adição.

Em $\mathcal{AP}$, há alguns teoremas fundamentais, que se pensarmos no modelo stndard expressam as propriedades conhecidas dos números naturais, como a associatividade e a comutatividade das operações $\oplus$ e $\otimes$, a distributividade de $\otimes$ em relação a $\oplus$, etc.

Acima, falamos que o axioma `AP3` expressa o princípio da indução. Há outras formas de indução, igualmente úteis em geral, das quais salientaremos uma delas. Camaremos o princípio dado por `AP3` de *primeira forma* do princípio da induçao. A *segunda forma* desse princípio, também chamda de *indução completa*, é a seguinte, que pode ser derivada em $\mathcal{AP}$:

> [Indução Completa] Para concluir que todos os objetos do domínio de um modelo de $\mathcal{AP}$ (por exemplo, todos os números naturais) têm uma certa propriedade $\alpha(x)$ (u satisfazem uma condição), é suficiente mostrar que sempre que todos os objetos 'menores' (no sentido da relação definida $\prec$) do que um objeto x têm essa propriedade, resulta que x tem essa propriedade. Em símbolos,
> $$\forall x(\forall y(y \prec x \to \alpha(y) \to \alpha(x))) \to \forall x\alpha(x).$$

Um outro resultado importante é o seguinte

> [Princípio do Menor] Se uma dada condição é satisteita por algum objeto de um modelo de $\mathcal{AP}$ (em particular, pelos números naturais), então há um menor deles que satisfaz essa condição; em símbolos,
> $$\exists x\alpha(x) \to \exists y(\alpha(y) \wedge \forall z(z \prec y \to \neg\alpha(z))).$$

Na seção 7.3 do capítulo seguinte, falaremos de algumas propriedades metamatemáticas de $\mathcal{AP}$.

5.6.2 Teoria elementar de grupos

A teoria elementar de grupos, que chamaremos de $\mathfrak{G}$, tem $\mathcal{L}_G$ como linguagem. Os postulados específicos são:

(`G1`) $\forall x\forall y\forall z(x \star (y \star z) = (x \star y) \star z)$

(`G2`) $\forall x(x \star e = e \star x = x)$

(`G3`) $\forall x(x \star x' = x' \star x = e)$

A teoria dos grupos é uma das mais importantes partes da matemática, inclusive em aplicações e na sistematização das ciências empíricas. Os modelos dos axiomas acima são os *grupos*.

Se, além dos axiomas acima, valer ainda um quarto, que expressa a comutatividade da operação $\star$, os modelos dessa nova axiomática são chamados de *grupos comutativos*, ou *abelianos* (em homenagem ao matemático Niels Henrik Abel (1802-1829)). O axioma adicional é:

(G4) $\forall x \forall y (x \star y = y \star x)$,

e a teoria que se obtém acrescentando-se esse axioma é chamada teoria elementar dos grupos abelianos, $\mathfrak{G}_A$. Exemplifiquemos uma dedução na teoria dos grupos abelianos. Provaremos que $\forall x \exists ! y (x \star y = x)$. Primeiramente, é preciso fixar alguma terminologia, que é adotada em geral, em qualquer teoria elementar:

$$\exists ! y \alpha(y) =_{\text{def}} \exists y (\alpha(y) \wedge \forall z (\alpha(z) \rightarrow z = y)).$$

A expressão $\exists !$ é lida *existe um único*. Daremos inicialmente uma prova informal do fato acima: por G2, sabemos que existe um tal y, a saber, e. Por absurdo, vamos supor que exista e_1 tal que $\forall x (x \star e_1 = e_1 \star x = x)$. Por particularização, temos $e \star e_1 = e_1 \star e = e$, mas também $e_1 \star e = e \star e_1 = e_1$. Assim, pela transitividade da igualdade, segue-se que $e = e_1$.∎

Um esboço da prova formal é:

(1) $\forall x (x \star e = e \star x = x)$	G4
(2) $\exists y \forall x (x \star y = y \star x = x)$	Introd. existencial
(3) $\forall x (x \star e_1 = e_1 \star x = x)$	Hipótese
(4) $e \star e_1 = e_1 \star e = e$	(1), Particularização
(5) $e_1 \star e = e \star e_1 = e_1$	(3), Particularização
(6) $e = e_1$	Transitividade da igualdade

5.6.3 Teoria elementar das álgebras de Boole

A teoria $\mathfrak{B}$ tem $\mathcal{L}_B$ por linguagem. Os axiomas específicos são os seguintes:

(B1) $\forall x \forall y \forall z ((x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z))$

(B2) $\forall x \forall y \forall z ((x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z))$

(B3) $\forall x \forall y(x \sqcap y = y \sqcap x)$

(B4) $\forall x \forall y(x \sqcup y = y \sqcup x)$

(B5) $\forall x \forall y \forall z(x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z))$

(B6) $\forall x \forall y \forall z(x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z))$

(B7) $\forall x(x \sqcap \overline{x} = \mathbf{0})$

(B8) $\forall x(x \sqcup \overline{x} = \mathbf{1})$

(B9) $\forall x(x \sqcap x = x)$

(B10) $\forall x(x \sqcup x = x)$

(B11) $\forall x(x \sqcap \mathbf{0} = \mathbf{0})$

(B12) $\forall x(x \sqcup \mathbf{0} = x)$

(B13) $\forall x(x \sqcap \mathbf{1} = x)$

(B14) $\forall x(x \sqcup \mathbf{1} = \mathbf{1})$

(B15) $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$

As estruturas que satisfazem esses axiomas (ou seja, os seus modelos) são chamadas de *álgebras de Boole*. Vamos dar um exemplo. Seja X um conjunto qualquer, e definamos o domínio da interpretação como sendo o conjunto $\mathcal{P}(x)$ das partes (subcinjuntos) de X. As operações $\sqcap$, $\sqcup$, $-$ são interpretadas respectivamente como a interseção de subconjuntos de X, a união entre esses subconjutos e a operação que associa a um dado subconjunto de X o seu complementar relativo a X. Ademais, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ denotam respectivamente o conjunto vazio e o conjunto X.

Um outro exemplo importante é o da álgebra de Lindenbaum associada ao cálculo proposicional clássico, à qual já nos referimos.

5.6.4 Teoria elementar dos corpos ordenados

Denominaremos de $\mathfrak{C}$ a teoria elementar dos corpos ordenados, que tem $\mathcal{L}_{CO}$ como linguagem. Os axiomas não lógicos são os seguintes:

(CO1) $\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$

(CO2) $\forall x \forall y(x + y = y + x)$

(CO3) $\forall x(x + \mathbf{0} = x)$

(CO4) $\forall x(x + -x = \mathbf{0})$

(CO5) $\forall x \forall y \forall z(x \times (y \times z) = (x \times y) \times z)$

(CO6) $\forall x \forall y(x \times y = y \times x)$

(CO7) $\forall x(x \times \mathbf{1} = x)$

(CO8) $\forall x(x \neq \mathbf{0} \to x \times x^{-1} = \mathbf{1})$

(CO9) $\forall x \forall y \forall z(x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z))$

(CO10) $\mathbf{0} \neq \mathbf{1}$

(CO11) $\mathbf{0}^{-1} = \mathbf{0}$

(CO12) $\forall x(\mathbf{0} \leq x \vee \mathbf{0} \leq -x)$

(CO13) $\forall x(x \neq \mathbf{0} \to \neg(\mathbf{0} \leq x) \vee \neg(\mathbf{0} \leq -x))$

(CO14) $\forall x \forall y(\mathbf{0} \leq x \wedge \mathbf{0} \leq y \to \mathbf{0} \leq x + y)$

(CO15) $\forall x \forall y(\mathbf{0} \leq x \wedge \mathbf{0} \leq y \to \mathbf{0} \leq x \times y)$

(CO16) $\forall x \forall y(x \leq y \leftrightarrow \mathbf{0} \leq y + -x)$

Os modelos dessa axiomática são os corpos ordenados. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, munido das usuais operações de adição (+) e de multiplicação ($\times$), com $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ denotando respectivamente os números reais 0 e 1, $\leq$ sendo a usual ordem entre os reais, $-$ e $^{-1}$ denotando as operações que associam a cada real x o seu oposto $-x$ e o seu simétrico (ou recíproco) x^{-1}. Outro exemplo é o do conjunto $\mathbf{Q}$ dos números racionais, com os símbolos anteriores sendo interpretados de maneira óbvia.

Se acrescentarmos aos axiomas acima o esquema de axiomas seguinte:

(CO17) $\exists x \alpha(x) \wedge \exists y \forall x(\alpha(x) \to x \leq y) \to \exists z(\forall x(\alpha(x) \to x \leq z) \wedge \forall y(\forall x(\alpha(x) \to x \leq y) \to z \leq y))$, onde $\alpha(x)$ é uma fórmula qualquer, obtemos a teoria elementar dos corpos ordenados *completos*. O conjunto dos números reais munido das operações usuais como indicado acima é um modelo (o modelo *standard*) dessa teoria, mas o conjunto dos números racionais (com as operações, etc.) não é. O motivo é que nem todo conjunto de racionais limitado superiormente tem supremo (o menor limite superior) *em* $\mathbb{Q}$, que é o que expressa o novo axioma.[5] Por exemplo, o conjunto formado pelos números racionais 1; $1,4$; $1,41$; $1,414$, ... é limitado superiormente, mas o supremo de tal conjunto (que seria o número real $\sqrt{2}$) não é racional. O axioma (na verdade, um esquema de axiomas) `CO17` é chamado de *axioma da continuidade*. Em virtude de $\langle \mathbb{R}, +, \times, -,^{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ ser o modelo *pretendido* da teoria cujos axiomas são `CO1` a `CO17`, essa teoria é denominada de *teoria elementar dos números reais*. Falaremos mais sobre ela à frente.

5.6.5 Teoria elementar dos conjuntos

Indicaremos, sem muitos comentários, os axiomas específicos da teoria Zermelo-Fraenkel, que denominaremos de ZF, cuja linguagem é a já vista $\mathcal{L}_{ZF}$.

(`ZF1`) [Axioma da Extensionalidade] Se dois conjuntos têm os mesmos elementos, eles são iguais. A recíproca, ou seja, a afirmação de que se eles são iguais então têm os mesmos elementos é teorema da lógica elementar, logo, é teorema de ZF:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

(`ZF2`) [Axioma do Par] Dados x e y quaisquer, existe um conjunto z (único por extensionalidade) cujos únicos elementos são x e y. Este conjuntom é representado (na metalinguagem) por $z = \{x, y\}$, e é dito *par* formado por x e y. Se $x = y$, temos o *unitário* de x, ou seja, o conjunto $\{x\}$:

$$\forall x \forall y \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t = x \lor t = y)$$

(`ZF3`) [Esquema da Separação] Se $\alpha(x)$ é uma fórmula de $\mathcal{L}_{ZF}$ e x e y forem variáveis distintas, então pra todo z existe o conjunto dos elementos de z que t em a 'propriedade' expressa por αx), que é único por `ZF1`:

$$\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z \land \alpha(x))$$

[5]Um conjunto ordenado X é *limitado superiormente* quando existe y tal que $x \leq y$ para todo $x \in X$. O objeto y é dito ser um *limite superior* para X.

(ZF4) [Axioma do conjunto potência, ou conjunto das partes] Dado um conjunto x, existe o conjunto y cujos elementos são os subconjuntos (ou partes) de x, denotado $\mathcal{P}(x)$. A unicidade é conseqüência de ZF1:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

(ZF5) [Axioma do conjunto união] Dado um conjunto x, existe um conjunto (único) cujos elementos são os elementos dos elementos de x. Estre conjunto é denotado $\bigcup x$, e se x tem unicamente dois elementos, digamos s e t, por $s \cup t$:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (z \in t \wedge t \in x))$$

A partir desses postulados, podemos demonstrar a existência e a unicidade do *conjunto vazio*, denotado $\emptyset$, que não tem elementos, bem como da *interseção* de conjuntos, pode-se conceituar *par ordenado*, *relação*, *função*, etc.

(ZF6) [Axioma do infinito] Existe um conjunto infinito:

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$$

(ZF7) [Axioma da fundação, ou da regularidade] Este postulado acarreta, entre outras coisas, que não existe conjunto x tal que $x \in x$, e que, em um sentido preciso, todos os conjuntos são formados a partir do conjunto vazio (ver abaixo) mediante operações de união e de obtenção do conjunto das partes de um conjunto dado:

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))$$

(ZF8) [Esquema da substituição] Seja $\alpha(x, y)$ fórmula de $\mathcal{L}_{ZF}$ na qual x e y figuram livres e sendo elas variáveis distintas. Se u e v são variáveis distintas entre si e distintas de x e y, então:

$$\forall x \exists ! y \alpha(x, y) \rightarrow \forall u \exists v \forall y (y \in v \leftrightarrow \exists x (x \in u \wedge \alpha(x, y)).$$

A expressão $\exists ! y \alpha(x, y)$ lê-se 'existe um único y tal que $\alpha(x, y)$. Assim, o antecedente do axioma diz que, para cada x, existe um único y tal que se tem $\alpha(x, y)$. Isso se expressa dizendo que a fórmula $\alpha(x, y)$ é y-funcional.

(ZF9) [Axioma da escolha] Este é um dos enunciados mais famosos da matemática, fonte de inúmeras controvérsias. Em 1938, Gödel provou que se os demais postulados de ZF não conduzem a contradições, o mesmo se dá se a eles acrescentarmos o axioma da escolha. Em 1963, Paul Cohen provou o mesmo para a negação desse axioma. Isso implica que ele é independente dos demais axiomas (não pode ser provado a partir deles, e nem a sua negação tampouco pode). A teoria, com este axioma, é em geral denotada por ZFC:

$$\forall x(\forall y \forall z((y \in x \wedge z \in x \wedge y \neq z) \to (y \neq \emptyset$$

$$\wedge\, y \cap z = \emptyset)) \to \exists y \forall z(z \in x \to \exists w(y \cap z = \{w\})))$$

Mais abaixo, quando falarmos dos modelos das teorias elementares, comentaremos algo mais sobre esses postulados. Por ora, é suficiente saber que é possível desenvolver toda a matemática tradicional a partir desses postulados (com exceção de coisas como as tratadas pela teoria de categorias). Isso significa intuitivamente que todas as proposições verdadeiras da matemática comum podem ser definidas a partir da noção de conjunto, ou *se reduzem* a conjuntos e operações com conjuntos. É preciso no entanto uma certa cautela com a frase anterior, pois ela depende do que se entenda por 'matemática comum'. Se entendermos por isso aqueles conteúdos que se vê nos livros usuais sobre o assunto, ela é verdadeira. Se no entanto a nossa matemática envolver totalidades muito grandes, como a coleção de todos os grupos, ou certos cardinais ditos inacessíveis, por exemplo, então ela é falsa.

Vamos agora dar um exemplo de dedução em ZF. As regras lógicas são aquelas da lógica elementar, e podemos usar inclusive as regras derivadas. Procederemos informalmente, deixando os detalhes para serem preenchidos pelo leitor.

Provaremos que $\exists! x \forall y(x \notin y)$, ou seja, que existe um único conjunto que não tem elementos, que será chamado de *conjunto vazio*, representado (na metalinguagem) pelo símbolo $\emptyset$. Primeiro, provaremos que existe um tal conjunto. Procederemos como explicado à página **??**, quando falamos da regra Gen. Seja z um conjunto arbitrário e $\alpha(x) =_{\text{def}} x \neq x$. Por particularização, aplicando o esquema da separação, obtemos $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \in z \wedge x \neq x)$. Supondo que $x \in z$, isso equivale a $\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow x \neq x)$. Por eliminação existencial, chamando o conjunto y de $\emptyset$, obtemos $\forall x(z \in \emptyset \leftrightarrow x \neq x)$. Usando a quarta 'verdade lógica' da página 89, obtemos $\forall x(x \in \emptyset) \leftrightarrow \forall x(x \neq x)$. Mas, do axioma E6, vem que $\forall x(x = x)$. Portanto, $\forall x(x \in \emptyset)$. Isso prova a existência do conjunto $\emptyset$. Quanto à unicidade, suponha por absurdo que exista $\emptyset_1$ tal que $\forall x(x \notin \emptyset_1)$. Aplicando o axioma da extensionalidade e usando particularização duas vezes, obtemos $\forall z(z \in \emptyset \leftrightarrow z \in \emptyset_1) \to \emptyset = \emptyset_1$. Como o antecendente desse condicional é uma instância de uma tautologia, temos que $\emptyset = \emptyset_1$. Obviamente, os detalhes foram suprimidos.

Importante salientar que, dada uma fórmula $\alpha(x)$ da linguagem de ZF, nem sempre a coleção dos objetos que satisfazem esta fórmula é um *conjunto* de ZF. Na verdade, o que é ou deixa de ser um *conjunto* depende da axiomática que se emprega, ou da teoria de conjuntos que se está considerando. Em certas teorias, como na de von Neumann, Bernays e Gödel (NBG), distingue-se entre *classe* e conjunto.[6] Aqui, usaremos a palavra 'classe' para denotar a coleção (que nem sempre é um 'z=ZF-conjunto') dos objetos que satisfazem uma dada condição, e escreveremos $\{x : \alpha(x)\}$ para denotá-la. O postulado da separação acima impõe uma limitação, indicando que serão conjuntos de ZF apenas aquelas classes que são formadas por elementos que perteçam a um conjunto, ou seja, a algo já dado pela axiomática.

Deste modo, coisas como o 'conjunto (ou classe) de Russell', a saber, a classe $R = \{x : x \notin x\}$, formada quando se toma para $\alpha(x)$ a fórmula $\neg(x \in x)$, não 'existe' em ZF, pois não há *conjunto* dado pelos axiomas de onde 'separar' os x que seriam seus elementos. Se notarmos que $R \in R \leftrightarrow R \notin R$, donde $R \in R \wedge R \notin R$ (paradoxo de Russell), vê-se porque este paradoxo não pode ser derivado em ZF.

5.6.6 Teoria elementar das categorias

Como vimos acima, a linguagem $\mathcal{L}_{TC}$ da teoria elementar das categorias, que segundo Hatcher (1982, cap. 8) chamaremos de C, tem três símbolos não-lógicos primitivos: um predicado ternário K e dois símbolos funcionais unários D e C. As variáveis individuais são $x, y, z, \ldots$. Os postulados específicos dessa teoria são:

(TC1) $\forall x(D(C(x)) = C(x) \wedge C(D(x)) = D(x))$. O domínio do co-domínio de x é o co-domínio de x, e o co-domínio do domínio de x é o domínio de x.

(TC2) $\forall x \forall y \forall z \forall w(K(x, y, z) \wedge K(x, y, w) \rightarrow z = w)$. A composição de x e y, quando existe, é única.

(TC3) $\forall x \forall y((\exists z K(x, y, z) \leftrightarrow C(x) = D(y))$. A composição de x e y existe se e somente se o domínio de y coincide com o co-domínio de x.

(TC4) $\forall x \forall y \forall z(K(x, y, z) \rightarrow (D(z) = D(x) \wedge C(z) = C(y))$. Se z é a composição de x e y, então o seu domínio é o domínio de x e seu co-domínio é o co-domínio de y.

(TC5) $\forall x(K(D(x), x, x) \wedge K(x, C(x), x))$. O domínio de um x qualquer é a identidade à esquerda de x da operação de composição, enquanto que o co-domínio é a identidade à direita.

[6]Para uma visão geral de várias dessas teorias, ver Krause 2002, cap. 5.

(TC6) $\forall x \forall y \forall z \forall w \forall s \forall s \forall t((K(x, y, z) \wedge K(y, w, r) \wedge K(x, r, s) \wedge K(z, w, t)) \rightarrow s = t)$. Quando definida, a composição é associativa.

Os modelos de C são as *categorias*. Os elementos do domínio de um modelo de C são chamados de *morfismos* da categoria, da mesma forma que chamamos de *conjuntos* os elementos do domínio de uma estrutura que é um modelo de ZF. Falaremos desses modelos à frente.

5.7 Lógica polissortida

Em alguns contextos, é comum empregarmos variáveis de diferentes espécies, ou gêneros, para distinguir entre diferentes conceitos, como na geometria, quando usamos $A, B, C, \ldots$ para denotar pontos, $r, s, l, \ldots$ para retas e $\alpha, \beta, \ldots$ para denotar planos. Linguagens que comportam variáveis de diversos gêneros são chamadas de *linguagens polissortidas* (em inglês, *many-sorted languages*, uma tradução da palavra alemã *mehrsortig*, usada por Arnold Schmidt em um artigo de 1938, cf. Wang 1952.), e que aqui traduziremos por *gênero*. Podemos ter então linguagens bissortidas, trissortidas, etc., e as linguagens como a nossa $\mathcal{L}_1$ são monossortidas, contendo variáveis de um único gênero.

Designaremos por L_P a linguagem polissortida seguinte. De início, admitiremos uma coleção I de gêneros (ou 'sorts'). Os símbolos lógicos de L_P são os conectivos proposicionais $\neg$ e $\vee$, parênteses e vírgula, para cada gênero $i \in I$, uma coleção enumerável de variáveis individuais de gênero i, $x_1^i, x_2^i, \ldots$ e, para algum gênero $i \in I$, um símbolo de igualdade $=_i$, que é visto como um predicado de gênero $\langle i, i \rangle$. Ademais, para cada gênero $i \in I$, a linguagem tem um quantificador universal $\forall_i$.

Os símbolos não-lógicos de L_P são: uma coleção (eventualmente vazia) de constantes de gênero i para cada $i \in I$, $a_1^1, a_2^i, \ldots$; para cada natural $n > 0$ e para cada n-upla de gêneros $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$, uma coleção (que pode ser vazia, mas pelo menos uma dessas coleções não é) de símbolos de predicados n-ários de gênero $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ e, de novo para cada $n > 0$ e $n + 1$-upla de gêneros $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$, uma coleção (eventualmente vazia) de símbolos funcionais n-ários, que são ditos serem de gênero $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$. Indicaremos os símbolos de predicados e funcionais respectivamente por $P, Q, \ldots$ e $f, g, \ldots$, deixando os seus respectivas gêneros sendo indicados no contexto.

As definições de *termo* e de *fórmula* de L_P são análogas àquelas de $\mathcal{L}_1$, com observância óbvia a respeito dos gêneros. Ou seja, uma constante individual ou uma variável individual de gênero i é um termo de gênero i; de f é um símbolo funcional de gênero $\langle i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \rangle$ e $t_1, \ldots, t_n$ são termos de gêneros $i_1, \ldots, i_n$ respectivamente, então

$f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo de gênero $n + 1$. Se P é um símbolo de predicados de gênero $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$ e se $t_1, \ldots, t_n$ são termos de gêneros $i_1, \ldots, i_n$ respectivamente, então $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula atômica. Se t_1 e t_2 são termos de gênero i, então, se houver o predicado $=_i$, a expressão $(t_1 =_i t_2)$ é uma fórmula atômica. O leitor deve reparar que estamos admitindo que não há identidade entre objetos de gêneros distintos. Se x^i é uma variável de gênero i e $\alpha(x^i)$ é uma fórmula, então $\forall_i x^i \alpha(x^i)$ é uma fórmula. As demais fórmulas, envolvendo $\neg$ e $\vee$ são definidas como de hábito. O quantificador existencial $\exists_i$ e os demais conectivos proposicionais têm definições análogas àquelas já vistas no caso monossortido.

Usamos convenções padrão para parênteses e os conceitos sintáticos de dedução, dedução a partir de um conjunto de premissas, bem como todos os demais, são definidos de modo análogo ao caso já estudado.

É fácil perceber como se pode dar uma axiomática para a lógica elementar polissortida. Os postulados são como os da lógica elementar, só que, quando houver substituições de variáveis por termos, deve-se respeitar os gêneros envolvidos. Esta axiomática resultará completa em relação à semântica descrita na seção seguinte.

5.7.1 Semântica

Uma estrutura polissortida é uma estrutura $\mathfrak{A}_P = \langle D_i, \rho \langle_{i \in I}$, onde os D_i são conjuntos não vazios e ρ é uma função cujo domínio é a coleção dos símbolos não-lógicos de L_P, definida do seguinte modo: (a) se a^i é uma constante de gênero i, então $\rho(a^i) \in D_i$; (b) se P é um símbolo de predicado de gênero $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle$, então $\rho(p) \subseteq D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_n}$; (c) para cada símbolo funcional de gênero $\langle i_1, \ldots, i_n, n+1 \rangle$, $\rho(f)$ é uma função de $D_{i_1} \times \ldots \times D_{i_n}$ em D_{n+1}.

Os conceitos semânticos como satisfatibilidade, verdade, modelo e outros são definidos de modo análogo ao caso das linguagens monossortidas. Pode-se então provar, dentre outros, os seguintes resultados:

Compacidade Se todo subconjunto finito de um conjunto Γ de fórmulas de L_P tem modelo (entendido aqui como uma estrutura polissortida adequada), então Γ tem modelo.

Löwenheim-Skolem Seja $\mathfrak{A}$ uma estrutura polissortida que é um modelo para Γ. Então Γ tem um modelo contável (no qual todos os D_i são contáveis) que é elementarmente equivalente a $\mathfrak{A}$.

5.7.2 Redução à linguagem monossortida

A linguagem polissortida L_P pode ser reduzida a uma linguagem monossortida do seguinte modo. Para cada $i \in I$, acrescentamos à linguagem $\mathcal{L}_1$ um predicado unário G_i. A noção de fórmula é estendendida admitindo-se que, se x é uma variável individual, então $G_i(x)$ é uma fórmula, que intuitivamente diz que x é do gênero i. Depois, todas as variáveis x^i que ocorrem nas expressões de L_P são substituídas por $x \wedge G_i(x)$, e as expressões da forma $\forall_i \alpha(x^i)$ são substituídas por $\forall x(G_i(x) \to \alpha(x)$ e $=_i$ por $=$. Essas providências definem uma tradução de L_P para a linguagem monossortida estendida com adição dos predicados G_i.

Mesmo as estruturas polissortidas podem ser convertidas em estruturas usuais $\mathfrak{A}$, como introduzidas na seção 5.2, do seguinte modo: o domínio passa a ser $D = \bigcup_{i \in I} D_i$, e a cada predicado G_i associamos o conjunto D_i. É fácil ver que obtém-se traduções adequadas dos demis conceitos, de forma que resulta o seguinte teorema, que se pode provar sem dificuldade: uma fórmula da linguagem L_P é verdadeira em uma estrutura polissortida $\mathfrak{A}_P$ se e somente se a sua tradução (como indicada acima) é verdadeira na correspondente estrutura $\mathfrak{A}$.

Na seção 9.4, daremos um exemplo de uma lógica bissortida que tem relação com algumas discussões filóficas sobre os fundamentos da mecânica quântica.

5.8 Notas e Complementos

I. V.b.t.o. *V.b.t.o.* é a abreviação para *variable binding term operator*, ou operador que forma termo ligando variáveis. Pode-se incorporar tais operadores (um ou mais) às linguagens de primeira ordem, regisdos por postulados específicos, obtendo-se *lógicas elementares com v.b.t.o.*. Se υ é um v.b.t.o e $\alpha(x)$ é uma fórmula na qual x é variável livre, então a expressão $\upsilon x\alpha(s)$ é um termo, e a variável x acha-se agora ligada. Alguns exemplos importantes são os seguintes. Primeiro, o *descritor*, ι. A expressão $\iota x\alpha(x)$ é lida "o (único) x tal que $\alpha(x)$", se existe um tal x. Se não existe, ou se há mais de um, há vários modos de se entender $\iota x\alpha(x)$, uma delas fixando-se um determinado elemento para ser denotado pelo termo $\iota x\alpha(x)$, a outra supondo-se que, neste caso, simplesmente $\iota x\alpha(x)$ fica destituída de significado. Deste modo, $\iota x\alpha(x)$ formaliza a expressão "o (a) tal e tal", ou seja, o artigo definito 'o (a)'. Veja abaixo sobre Teoria das Descrições. O outro v.b.t.o. importante é o chamado *epsilon de Hilbert*; a expressão $\epsilon x\alpha(x)$ é lida como "um x tal que $\alpha(x)$. Assim, formaliza-se o artigo indefinido 'um (uma)'. N. Bourbaki usa um equivalente ao ϵ como símbolo primitivo da linguagem da versão de ZF que apresenta, mas escreve τ em vez de ϵ (Bourbaki 1968, cap. 1). Um outro v.b.t.o. é o *operador de abstração* $\{\ :\ \}$; sendo x e $\alpha(x)$ como acima, então $\{x : \alpha(x)\}$ é a coleção dos objetos x para os quais se verifica $\alpha(x)$. Como exemplo, são os seguintes os axiomas de podem ser acrescidos àqueles da lógica elementar se a linguagem tiver ι como novo símbolo primitivo, para todos x e y e para todas α e β: (1) $\iota x\alpha(x) = \iota y\alpha(y)$; (2) $\forall x(\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)) \to \iota x\alpha(x) = \iota x\beta(x)$; (3) $\exists! x\alpha(x) \to \forall x(x = \iota x\alpha(x) \leftrightarrow \alpha(x))$. Assim, quando existe um único objeto que satisfaz $\alpha(x)$, $\iota x\alpha(x)$ denota esse objeto; caso contrário (se hpá mais de um ou nenhum objeto nessas condições), $\iota x\alpha(x)$ é destituída de significado, e as expressões nas quais $\iota x\alpha(x)$ aparece não possume sentido, não sendo, em particular, nem verdadeiras e nem falsas relativamente á interpretação considerada.

II. Teoria das Descrições Apresentada por Bertrand Russell em 1905 em um célebre artigo intitulado *On denoting*, foi considerada por F. P. Ramsey como a maior contribuição que Russell deu à lógica, e pode ser dita ser a teoria geral do denotar. Expressões como "o atual rei da França", "o melhor jogador de futebol do mundo", "o menor número natural", que parecem se referir a um determinado objeto por meio de alguma característica que lhe é peculiar, denominam-se *descrições definidas*, ou simplesmente *descrições*, e se distinguem das *descrições indefinidas*, que são expressões da forma "um soldado raso"ou "uma maçã verde", que em vez dos artigos definidos 'o' ou 'a', contém os artigos indefinidos 'um' ou 'uma'. Russell propôs a sua teoria com o objetivo de superar as dificuldades da teoria dos objetos de Alexius Meinong (1853-1920), como quando consideramos frases como "o atual rei da França é careca", ou "o quadrado redondo é quadrado"; quanto à primeira, se atualmente não há rei da França, sobre o que estamos falando? E, quanto à segunda, ela parece conduzir a um objeto contraditório. A teoria de Russell visava reduzir de modo acentuado os compromissos ontológicos que podem haver quando usamos frases como essas. Segundo ele, há uma ilusão em se acreditar que a frase "o atual rei da França"é da forma sujeito-predicado, não representando o sujeito lógico da frase "o atual rei da França é careca"pois, como mostrou Russell, a verdadeira forma lógica da frase "o atual rei da França"é tal que, nela, não figura a descrição "o tal e tal". Seguindo com o exemplo, ele mostra que afirmar "o atual rei da França é careca"equivale a afirmar duas proposições: (1) existe um único um objeto que é o rei da França, (2) se alguma coisa é rei da França, essa coisa é careca. Se escrevermos $C(x)$ para 'x é careca' e $F(x)$ para x é rei da França', a conjunção de (1) e (2) dá $\exists x(F(x) \wedge C(x) \wedge \forall y(F(y) \to y = x))$, na qual não figura nada da forma 'o tal e tal'. Deste modo, as descrições (definidas), ou seja, expressões da forma $\iota x\alpha(x)$, são meros símbolos incompletos, não tendo sentido em si mesmos, só adquirindo um significado em relação a um dado contexto, sendo elimináveis pelas chamadas definições contextuais (ver o Apêndice C); por exemplo, "o atual rei da França é careca", que escreveríamos como $C(\iota xF(x))$, é na verdade uma abreviação para a conjunção de (1) e (2) apondada acima.

As descrições definidas nem sempre podem funcionar como um nome, ainda que o inverso seja sempre possível. Vejamos um exemplo de como são usadas, considerando o seguinte argumento (Lemmnon 1971, pp. 166-7): "O autor de Ilíada escreveu Odisséia. Portanto, alguém escreveu tanto Ilíada quanto Odisséia". Se tratarmos "O autor de Ilíada"como um nome, representado por h, não obtemos um argumento válido, pois de $O(h)$ não podemos obter $\exists x(I(x) \wedge O(x))$. Na verdade, precisamos nos certificar que exatemente aquela pessoa que escreveu Ilíada também escreveu Odisséia, ou seja, nossa premissa deve ser $\exists x(I(x) \wedge O(x) \wedge \forall y(I(y) \to x = y))$, pois a partir dela podemos derivar $\exists x(I(x) \wedge O(x))$ aplicando a 'verdade lógica' (1) da página 89 e o teorema da dedução.

Finalmentre, é importante salientar que todas as entidades (ou objetos) matemáticas não são objetos propriamente ditos, mas são símbolos incompletos nesta acepção, e não é necessário supor que elas existam, ou seja, nos comprometermos com sua existência. O 'peso existencial' é dado pelo quantificador ∃, de forma que um objeto 'existe' quando figura no escopo de um quantificador (como disse Quine, "ser é ser o valor de uma variável"). Mesmo assim, é preciso cuidado se formos interpretar ao pé da letra a frase de Quine, pois há teorias, como o sistema ZF na forma de Bourbaki (Bourbaki 1968), que não têm variáveis em sua linguagem.

III. Variáveis Como dito no texto, é preciso um certo cuidado quando tentamos 'interpretar' (ou mesmo explicar) o que são variáveis. Alguns textos afirmam coisas como 'uma variável é um símbolo que denota um objeto arbitrário do domínio D'. No entanto, suponha que a linguagem considerada é $\mathcal{L}_{ZF}$. Que objetos denotam as variáveis individuais dessa linguagem? Ou seja, que domínio seria esse? Um conjunto? Como se sabe, ZF não tem semântica no sentido usual de se definir uma interpretação constituída de um *conjunto* e uma função denotação (isso ficará claro no capítulo seguinte). Por isso, tentativas de 'explicações' podem mais confundir o bom aluno do que ajudá-lo. O melhor é, por ora, entender uma variável como um símbolo da linguagem que é usado de acordo com certas regras.

Capítulo 6

Lógicas de ordem superior

PARA DARMOS CONTA do raciocínio dedutivo, não é suficiente nos limitarmos à lógica elementar, mas precisamos partir para a *grande lógica*. Há dois modos básicos de se estender a lógica elementar ao que se chama de grande lógica: lógicas de ordem superior e teorias de conjuntos. Neste capítulo, daremos atenção às primeiras, exibindo um sistema de ordem ω que é chamado de *teoria simples de tipos*, em distinção à teoria *ramificada*, originalmente proposta por Bertrand Russell. No capítulo 2, falamos algo sobre a história da teoria de tipos.

É bom que se diga que há outros modos de se alcançar sistemas mais potentes do que a lógica elementar, e que podem servir de alicerce para a matemática padrão, como por exemplo a teoria das categorias ou diversas mereologias*, que igualmente podem ser consideradas como alternativas para a 'grande lógica'. No entanto, são as teorias de tipos (como a apresentada abaixo) e as teorias de conjuntos que *estendem* a lógica elementar em um sentido preciso, ao passo que mereologias ou a teoria das categorias partem de pressupostos completamente diferentes.

A diferença básica entre as linguagens de ordem superior (segunda ordem, terceira ordem, ..., ordem ω) é que, nessas, há também variáveis para predicados (ou conjuntos), relações e funções, e pode-se quantificar sobre essas entidades. Por exemplo, considere a sentença em matemática que afirma que toda relação binária R sobre um conjunto X que seja reflexiva, simétrica e transitiva, é tal que se $x, y \in X$ e $R(x, y)$, então para todo $z \in X$, se $R(x, z)$, então $R(y, z)$. Para escrever essa sentença em símbolos, precisamos de variáveis para relações e conjuntos, e exceto se estivermos por exemplo em $\mathcal{L}_{ZF}$, na qual as variáveis denotam (intuitivamente falando) conjuntos e relações são certos conjuntos, precisamos quantificar não apenas sobre elementos de X, mas sobre o próprio X e sobre R, para escrevermos coisas como "Para toda $R \ldots$". Uma tal sentença não pode ser escrita em uma linguagem de primeira ordem.

Para um outro exemplo, tomemos o princípio da indução simples, que formulamos anteriormente (página 92) assim: Se $\alpha(x)$ é uma fórmula qualquer de $\mathcal{L}_{AP}$ e x é uma variável individual, então $\alpha(\circledcirc) \wedge \forall x(\alpha(x) \to \alpha(Sx)) \to \forall x\alpha(x)$. Se tivermos variáveis para fórmulas (aqui estamos abreviando o discurso; veremos como isso ocorre depois) e pudermos quantificar sobre essas entidades, podemos escrever $\forall\alpha(\alpha(\circledcirc) \wedge \forall x(\alpha(x) \to \alpha(Sx)) \to \forall x\alpha(x))$. A diferença é enorme. Se cada fórmula determina um conjunto de números naturais, então na primeira formulação estaremos habilitados a fazer apenas $\aleph_0$ substituições, que é o cardinal do conjunto das fórmulas de $\mathcal{L}_{AP}$. Na segunda, por outro lado, estamos quantificando sobre *todos* os subconjuntos de ω, e há $2^{\aleph_0}$ subconjuntos. Como se vê, o uso de linguagens de ordem superior fornece uma maior capacidade de expressão.

6.1 A teoria simples de tipos

Nesta seção, apresentaremos uma lógica de ordem superior (teoria simples de tipos) que chamaremos de $\mathcal{L}^\omega$. Para iniciar, vamos dar uma definição. Chamamos de *conjunto dos tipos*, denotado por Π, ao menor conjunto tal que: (a) $i \in \Pi$ e (b) se $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \in \Pi$, então $\langle\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\rangle \in \Pi$. Assim, por esta definição, os seguintes objetos são tipos: i, $\langle i\rangle$, $\langle i, i, \rangle$, $\langle\langle i\rangle, \langle i, i\rangle\rangle$, etc.

Por exemplo, são tipos: i, $\langle i\rangle$, $\langle i, i\rangle$, $\langle i, \langle i, i\rangle, \langle i\rangle\rangle$, etc.

Chamaremos de $\mathcal{L}^\omega$ uma lógica de ordem ω, e sua linguagem de L_ω, que comporta os seguintes símbolos primitivos: (1) os conectivos $\neg$ e $\vee$ (os demais são definidos como já visto antes –à página 4); (2) o quantificador universal, $\forall$ (o quantificador existencial é definido como usual); (3) símbolos auxiliares: parênteses e vírgula; (4) para cada tipo $\tau \in \Pi$, uma coleção enumerável de variáveis de tipo τ: $X_1^\tau, X_2^\tau, \ldots$. Quando não houver possibilidade de confusão, usaremos X, Y, Z, F, G, H, etc. para denotar tais variáveis. (4) Para cada tipo τ, uma coleção, eventualmente vazia, de constantes de tipo τ, $A_1^\tau, B_2^\tau, \ldots$, que denotaremos por A, B, C.

Os conceitos de termo e de fórmula (da linguagem) de $\mathcal{L}^\omega$ são os seguintes: as constantes (se houver) e as variáveis de tipo τ são termos de tipo τ. Se F é um termo de tipo $\langle\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n\rangle$ e $T_1, T_2, \ldots, T_n$ são termos de tipos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ respectivamente, então $F(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ é uma fórmula atômica. As demais fórmulas (moleculares) são definidas de modo análogo ao que se fez relativamente às linguagens de primeira ordem.

A igualdade (identidade) pode ser definida do seguinte modo:

$$U = V =_{\mathsf{def}} \forall F(F(U) \leftrightarrow F(V)),$$

onde U e V são termos de mesmo tipo τ e F é uma variável de tipo $\langle\tau\rangle$. A definição acima, portanto, é na verdade um 'esquema' de definições, uma para cada tipo $\tau \in \Pi$. Ela está simplesmente dizendo que, para cada tipo τ, a expressão $U = V$ abrevia $\forall F(F(U) \leftrightarrow F(V))$. Assim, na verdade a definição acima comporta o que Russell chamava de uma *typical ambiguity*, pois define uma infinidade de relações de identidade (uma para cada tipo). A definição é conhecida no contexto filosófico como Lei de Leibniz, podendo ser vista como a conjunção de dois princípios importantes filosoficamente, que são os seguintes, os quais têm interesse especialmente quando $\tau = i$:

(PII) [Identidade dos Indiscerníveis] $\forall F(F(U) \leftrightarrow F(V)) \rightarrow U = V$

(PI) [Indiscernibilidade dos Idênticos] $U = V \rightarrow \forall F(F(U) \leftrightarrow F(V))$

Usualmente, pretende-se que $U = V$ signifique que os objetos denotados por U e por V sejam *o mesmo* objeto, ao passo que $\forall F(F(U) \leftrightarrow F(V))$ significaria que U e V têm exatamente as mesmas propriedades (os predicados unários denotam propriedades de indivíduos), ou seja, que eles são *indiscerníveis*, ou *indistinguíveis*. Então, (PI) seria (intuitivamente) trivialmente verdadeiro, uma vez que um objeto certamente deve ter as mesmas propriedades que ele mesmo, mas (PII) é motivo para sérias divergências e hipóteses filosóficas acerca de sua validade.

Em primeiro lugar, cabe salientar que qualquer discussão neste sentido é demasiadamente vaga se não especificarmos uma série de coisas, a começar pela lógica que estamos adotando. De onde se infere que se $U = V$ então U e V se referem ao *mesmo* objeto? O que quer dizer 'o mesmo' se o conceito de identidade supostamente ainda não foi definido? Se não demos uma semântica sensata para nossa linguagem, de que objetos se está falando? Da mesma forma, qual o significado do quantificador $\forall$? É o mesmo significado que se dá usualmente a ele na lógica clássica? Por quê? Qual o domínio da variável F? O que são 'propriedades' de indivíduos?

Todos esses assuntos devem ser devidamente qualificados para que a discussão se dê de forma objetiva. No entanto, em geral os filósofos assumem que os termos envolvidos têm os seus sentidos intuitivos, e então vem a questão de se saber por exemplo se (PII) é ou não válido em geral ou se vale somente para determinados tipos de objetos. O nome de Leibniz surge neste contexto em virtude de seu célebre Princípio da Identidade dos Indiscerníveis, formulado em várias partes de sua obra, e que informalmente diz que não podem haver *dois* objetos indiscerníveis, que difiram *solo numero*, ou seja, somente por um ser um e o outro ser o outro. Se são *dois*, argumentava Leibniz, tem que haver uma 'propriedade' (ele falava em termos de 'qualidades') que os distinga. Porém, Leibniz sempre formulou seu princípio em uma forma negativa, dizendo que *não* há objetos indiscerníveis, nunca na forma *positiva* supostamente expressa pela fórmula acima. Aliás, uma linguagem como a que estamos utilizando nem existia no tempo de Leibniz, assim que é demasiadamente especulativo dizer-se que (PII) acima reflete o dito de Leibniz. Melhor é proceder com cautela; se *chamarmos* de Lei de Leibniz à definição de identidade dada acima, e de (PII) e (PI) as expressões vistas, ainda que utilizemos o nome de Leibniz não estamos nos compromentendo com a sua posição filosófica. Este é um assunto para os historiadores da filosofia, e não compete à lógica.

Os postulados de $\mathcal{L}^\omega$ são os seguintes:

(T1-T6) Postulados análogos aos (E1)-(E6) da lógica elementar clássica (página **??**), somente que as variáveis que ocorrem são de algum tipo $\tau \in \Pi$ e as substituições de variáveis por termos deve obedecer a compatibilidade entre tipos (variáveis devem ser substituídas por termos de mesmo tipo).

(T7) [Axioma da Separação] Seja $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ fórmula com X_j ($j = 1, \ldots, n$) variáveis de tipos $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ respectivamente, então

$$\exists P \forall X_1 \forall X_2 \ldots \forall X_n (F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leftrightarrow P(X_1, X_2, \ldots, X_n)).$$

Se U e V são termos de mesmo tipo $\tau = \langle t_1, \ldots, \tau_n \rangle$ e se $X_1, \ldots, X_n$ são variáveis de tipos respectivamente $t_1, \ldots, \tau_n$, então U e V são *extensionalmente equivalentes*, e escreve-se $U \leftrightarrow V$ se e somente de $\forall X_1 \ldots \forall X_n (U(X_1, \ldots, X_n) \leftrightarrow V(X_1, \ldots, X_n))$. Temos então que

(T8) [Axioma da Extensionalidade] Para tipos adequados,

$$\forall X \forall Y ((X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow X = Y.$$

Em palavras, X e Y são extensionalmente equivalentes se e somente se forem idênticos.

(T9) [Axioma do Infinito] Seja R variável de tipo $\langle i, i \rangle$, X, Y, Z variáveis distintas de tipo i. Então

$$\exists R (\forall X \neg R(X, X) \land \forall X \exists Y R(X, Y) \land \forall X \forall Y \forall Z (R(X, Y) \land R(Y, Z) \to R(X, Z))).$$

(T10) [Axioma da Escolha] Sejam X variável de tipo τ, Y e Z variáveis de tipo μ, R e F variáveis de tipo $\langle\tau,\mu\rangle$. Então

$$\forall R\exists F(\forall X(\exists YR(X,Y) \to \exists Y(R(X,Y) \wedge F(X,Y)))$$
$$\wedge\forall X\forall Y\forall Z((F(X,Y) \wedge F(X,Z) \to Y = Z))).$$

Os postulados T7-T10 *estendem* a lógica elementar, habilitando o sistema a comportar o desenvolvimento de praticamente toda a matemática padrão. Não há necessidade de postulados semelhantes aos postulados da igualdade, uma vez que o conceito de identidade foi definido acima pela Lei de Leibniz. Qualquer 'explicação' desses axiomas (ou postulados) terá que ser feita, em última instância, na linguagem natural, e sempre se incorrerá em imprecisões e mesmo em erros próprios dessa linguagem. Em todo caso, cientes dessas limitações, vamos mesmo assim dar algumas explicações intuitivas para que o leitor possa ter uma idéia do que dizem esses postulados. Por facilidade, é melhor pensarmos em termos de conjuntos, como geralmente estamos habituados, mas lembre que, verdadeiramente, nada se afirma sobre 'conjuntos' na linguagem da teoria de tipos (qualquer referência a conjuntos pode ser eliminada por definições contextuais, como veremos abaixo).

O postulado da separação afirma que, para toda fórmula $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, existe um predicado P que lhe é *extensionalmente equivalente*, num sentido semelhante ao explicado acima para termos. A restrição dos tipos na formulação do postulado é essencial. Com efeito, suponha que não houvesse tal restrição. Neste caso, poderíamos ter uma fórmula definida assim: $F(X) =_{\mathsf{def}} \neg X(X)$ (o leitor deve notar que $X(X)$ não é uma fórmula de L_ω). Usando o postulado, derivamos $\exists P\forall X(P(X) \leftrightarrow \neg X(X))$, Chamando este predicado de $\mathcal{R}$ (em homenagem a Russell), obtemos $\forall X(R(X) \leftrightarrow \neg X(X))$, logo, isso vale para todo X, vale para quando X for $\mathcal{R}$, o que dá $\mathcal{R}(\mathcal{R}) \leftrightarrow \neg\mathcal{R}(\mathcal{R})$, de onde facilmente se deriva a contradição $\mathcal{R}(\mathcal{R}) \leftrightarrow \wedge\mathcal{R}(\mathcal{R})$. Esta é uma forma de se derivar o célebre *paradoxo de Russell*. Em outras palavras, se não fosse imposta a restrição sobre os tipos para que uma expressão da forma $F(X_1, \ldots, X_n)$ seja uma fórmula, a teoria resultante seria inconsistente.

Se pensarmos em uma semântica intuitiva de nossa linguagem, que se refere a objetos, suas operações e propriedades (só que agora podemos significativamente quantificar sobre essas entidades todas), então o postulado da extensionalidade de certo modo aponta que não há qualquer distinção entre predicados unários (de tipo $\langle i\rangle$) e conjuntos de objetos. Os predicados unários (de tipo $\langle i\rangle$) geralmente são pensados como designando *propriedades* dos objetos aos quais a linguagem se refere. O que o postulado da extensionalidade afirma informalmente, então, é que toda propriedade determina um conjunto, a sua *extensão*.

O postulado do infinito diz que há uma relação (predicado binário) que é irreflexiva, fortemente conectada e transitiva. Essa sentença não pode ser verdadeira em nenhum domínio finito. Quanto ao axioma da escolha, o que ele afirma é que (empregando novamente uma linguagem conjuntista), dada qualquer relação R, existe sempre uma função F que tem o mesmo domínio que R (se aplica aos mesmos objetos).

A partir desses postulados, podemos derivar praticamente toda a matemática tradicional (há no entanto coisas que 'ficam de fora', como por exemplo os chamados ordinais de segunda ordem de Cantor, que podem ser obtidos em ZF).

6.2 Semântica

Quando se fala em *semântica* para a teoria de tipos, é preciso um cuidado enorme. O mesmo se dá, como vimos, com a linguagem da teoria de conjuntos. O tema é complicado, mas mesmo assim vamos fazer algumas considerações a este respeito, visando esclarecer o assunto.

Em primeiro lugar, saliente-se que não há *a* teoria de tipos. Quando nos refermos a ela no singular, queremos indicara aquela que estamos apresentando neste capítulo. Relativamente à sua semântica, podemos indagar *onde* uma tal semântica é elaborada, e seria correto enfatizar que falamos de *uma* semântica, pois na verdade há uma infinidade de semânticas possíveis, que dependem da teoria que se usa na matemática. Se dissermos que ela será desenvolvida em ZF (ou em outra teoria de conjuntos), estaremos condenando a teoria de tipos a se transformar em algo conjuntista, e assim destruindo o seu suposto papel como teoria fundamental para a fundamentação da matemática, pois o importante passam então a ser os conjuntos e viria a questão: porque então não fazer tudo *diretamente* com conjuntos e simplesmente ignorar a teoria de tipos? Se queremos mostrar que essa teoria pode realmente desempenhar um papel importante no tocante aos fundamentos da matemática, é preciso cautela.

Feitas essas qualificações, vamos proceder de forma mais simples, trabalhando com conjuntos, mas estaremos cientes da escolha feita. Assim, suporemos que todos os conceitos desta seção podem ser desenvolvidos em ZF.

Seja então D um conjunto não vazio. Um *frame* para L_ω baseado em D é uma função e com domínio no conjunto Π dos tipos, definida do seguinte modo:

(a) $e(i) = D$

(b) Sendo $\tau = \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$, então $e(\tau) \subseteq \mathcal{P}(e(\tau_1) \times \ldots \times e(\tau_n))$. Se valer a igualdade, o frame é *standard*.

Uma *denotação* para L_ω com respeito a um frame e é uma função ϕ com domínio no conjunto das constantes de L_ω, definida por:

(a) $\phi(A^i) \in D$ (ou seja, às constantes de tipo i associam-se elementos de D)

(b) $\phi(A^\tau) \in e(\tau)$, para $\tau \neq i$.

Por exemplo, $e(\langle i, i\rangle) \subseteq \mathcal{P}(e(i) \times e(i)) = \mathcal{P}(D)$, é portanto uma coleção de pares ordenados de elementos de D. Pode-se estender a definição de modo a abranger símbolos definidos (usaremos a mesma letra ϕ para essa extensão). Assim, tem-se por exemplo, para o predicado de identidade de tipo $\langle \tau, \tau\rangle$, $\phi(=) = \Delta(e(\tau))$. Por exemplo, se $\tau = i$, então $\phi(=) = \Delta(e(i)) = \Delta(D)$, que já sabemos ser a diagonal de D.

Uma *interpretação* para L_ω baseada em D é um par $\mathcal{A} = \langle e, \phi\rangle$, onde e é um frame para L_ω baseado em D e ϕ é uma denotação com respeito a e. A interpretação é *principal* se o frame é standard.

Dada uma interpretação $\mathfrak{A} = \langle e, \phi\rangle$ para L_ω baseada em D, uma *avaliação de variáveis* υ_ϕ relativa a $\mathfrak{A}$ é uma função cujo domínio é a coleção das variáveis de L_ω, definida do seguinte modo:

(a) $\upsilon(X^i) \in D$

(b) $\upsilon(X^\tau) \in e(\tau)$, para $\tau \neq i$.

Uma *avaliação* para L_ω com respeito a $\mathfrak{A}$ é uma função υ com domínio na coleção dos termos de L_ω, definida do seguinte modo, para T termo qualquer:

(a) $\upsilon(T) = \phi(T)$ se T for uma constante

(b) $\upsilon(T) = \upsilon_\phi(T)$ se T for uma variável.

Dadas uma interpretação $\mathfrak{A} = \langle e, \phi\rangle$ e uma avaliação υ com respeito a $\mathfrak{A}$, seja α uma fórmula de L_ω. Definimos $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \alpha$ (que se lê υ *satisfaz* α relativamente a $\mathfrak{A}$) do seguinte modo:

(a) Se α é $F(T_1, \ldots, T_n)$, então $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \alpha$ se e somente se $\langle \upsilon(T_1), \ldots, \upsilon(T_n)\rangle \in \upsilon(F)$, e $\mathfrak{A}, \upsilon \nvDash \alpha$ (não satisfaz α) em caso contrário.

(b) As demais cláusulas são análogas às correspondentes às lingugens de primeira ordem, uma vez que se respeitem as restrições sobre os tipos.

Pode-se mostrar que a noção se satistatibilidade independe da particular valoração escolhida, desde que elas concordem com respeito a todas as variáveis livres de α, ou seja, se υ_1 e υ_2 são avaliações com respeito a $\mathfrak{A}$, tais que para toda variávei X livre em α se tenha $\upsilon_1(X) = \upsilon_2(X)$, então $\mathfrak{A}, \upsilon_1 \vDash \alpha$ se e somente se $\mathfrak{A}, \upsilon_2 \vDash \alpha$.

Uma interpretação $\mathfrak{A}$ é *apropriada* se para toda avaliação υ com respeito a $\mathfrak{A}$, tem-se que $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \theta$, onde θ é o axioma da separação, da axtensionalidade, do infinito ou da escolha. Uma interpretação é *correta* se $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \alpha$ onde α é um axioma de $\mathcal{L}_\omega$ ou é derivada de fórmulas $\beta_1, \ldots, \beta_n$, com $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \beta_j$, $(j = 1, \ldots, n)$. Saliente-se que o conceito sintático de dedução, $\vdash$, é análogo ao visto para a lógica elementar.

Toda interpretação principal é correta, mas será que existem interpretações que sejam corretas e que não sejam principais? E princípio, nada implica que essas interpretações, chamadas de *secundárias*, existam, mas elas existirão em casos particulares, como quando todas as $e(\tau$ forem enumeráveis. Com efeito, intepretações secundárias só podem ocorrer nessa situação, pois se fossem principais e D fosse enumerável, então $e(i) = \mathcal{P}(D)$ não seria enumerável.

Temos então as seguintes definições:

<u>Verdade</u> Uma fórmula α é *verdadeira* relativamente a uma interpretação $\mathfrak{A}$ se e somente se $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \alpha$ para toda υ relativa a $\mathfrak{A}$.

<u>Validade</u> Uma fórmula α é *válida* se e somente se é verdadeira para toda interpretação.

<u>Fórmula Satisfatível</u> Uma fórmula α é *satisfatível* (abreviadamente, sat) se e somente se existe uma intepretação principal relativamente à qual ela é verdadeira. Caso contrário, escreveremos α é não-sat.

<u>Fórmula Secundariamente Válida</u> Uma fórmula α é *secundariamente válida*, ou 2-val, se e somente se é verdadeira relativamente a toda interpretação correta. Caso contrário, escrevemos não-2-val

<u>Fórmula Secundariamente Satisfatível</u> Uma fórmula α é *secundariamente satisfatível*, ou 2-sat, se e somente se existe uma interpretação correta relativamente à qual ela seja verdadeira. Caso contrário, escrevemos não-2-sat.

Pode-se então provar que (a) α é val se e somente se $\neg\alpha$ é não-sat; (b) α é 2-val se e somente se $\neg\alpha$ é não-2-sat, dentre outros resultados.

Seja Γ um conjunto de fórmulas de L_ω. Um *modelo* para Γ é uma interpretação correta $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}, \upsilon \vDash \alpha$ para toda $\alpha \in \Gamma$ e toda avaliação υ relativa a $\mathfrak{A}$. Se a interpretação for principal, o modelo é um *modelo principal*, e é um *modelo secundário* (ou *modelo de Henkin*) se a interpretação for secundária.

[Teorema da Correção] Todos os teoremas de $\mathcal{L}_\omega$ são 2-val, ou seja, verdadeiros em todas as interpretações corretas (logo, são válidos).

> [Teorema da Completude Generalizada de Henkin] Toda fórmula α que seja 2-val (ou seja, verdadeira em todas as interpretações corretas) é um teorema.

Este resultado não pode ser confundido com o que seria uma 'completude relativa a modelos principais', que não vale, ou seja, não há coleção efetiva de postulados que forneça como teoremas todas as fórmulas verdadeiras em todos os modelos principais. A razão disso é que $\mathcal{L}_\omega$ satisfaz as condições de aplicabilidade dos teoremas de incompletude de Gödel. Outros resultados relevantes que valem apenas restritamente (ou seja, com respeito unicamente a modelos secundários) são os teoremas da compacidade e de Löwenheim-Skolem. Sem muitos detalhes, vamos dar uma idéia de porque isso acontece.

Como o leitor recorda, o teorema da compacidade pode ser assim formulado: dado um conjunto Γ de fórmulas de uma teoria T, se todo subconjunto finito de Γ tiver modelo, então Γ tem modelo. Definamos o seguinte conjunto de fórmulas de L_ω. Chamaremos de $\exists!n$ a expressão

$$\exists X_1^i \ldots \exists X_n^i (X_1^i \neq X_2^i \wedge X_1 \neq X_3^i \ldots X_{n-1}^i \neq X_n^i),$$

que asserta existirem exatamente n elementos distintos de tipo i. Seja agora R uma variável de tipo $\langle i, i\rangle$, X, Y e Z variáveis de tipo i. Chamaremos de (*) a fórmula seguinte:

$$\exists R(\forall X \neg R(X,X) \wedge \forall X \forall Y(R(X,Y) \to \neg R(Y,X)) \wedge \forall X \forall T \forall Z(R(X,Y) \to (R(Y,Z) \to R(X,Z))).$$

A fórmula (*) afirma que existe VER VER VER

A não validade do teorema de Löwenheim-Skolem pode ser atestada mostrando-se uma fórmula de L_ω que não seja verdadeira em qualquer modelo contável. Por exemplo, consideremos a fórmula que é a conjunção dos axiomas `CO1` a `CO17` da teoria elementar dos corpos ordenados completos (página 96). Os modelos dessa nova sentença são estruturas isomorfas à dos números reais (serão corpos ordenados completos). Se trocarmos os símbolos $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $+$, $\times$ e $<$ (que é definido a partir de $\leq$ assim: $x < y =_{\mathsf{def}} x \leq y \wedge x \neq y$) que nela figuram por variáveis apropriadas da linguagem L_ω, as quais quantificamos universalmente, obtemos uma sentença que é verdadeira unicamente em uma estrutura que tenha domínio de cardinalidade $2^{\aleph_0}$.

A definição de identidade dada anteriomente (página 109), ligada aos modelos secundários da nossa teoria, apresenta situações que intuitivamente são paradoxais. Recorde que, falando informalmente, a dita definição (Lei de Leibniz) permite dizer que x e y são iguais se e somente se partilham de exatamente as mesmas propriedades. Admita que nossa linguagem tenha somente duas constantes de tipo i, digamos a e b, que sejam interpretadas em um domínio D que tenha somente dois elementos, 1 e 2, de forma que

$\phi(a) = 1$ e $\phi(b) = 2$, todas os demais símbolos recebendo intepretações padrão, de forma que as propriedades e relações dos elementos do tipo i, ou seja, as variáveis e constantes de tipo $\langle i \rangle$ $\langle i, i \rangle$, etc., denotem subconjuntos de D^n (ou seja, são formados pelo conjunto vazio e por *todas* as n-uplas de elementos de D). É claro que uma tal interpretação define um modelo secundário para L_ω, e temos a seguinte situação intuitivamente estranha: nessa estrutura, $\models a = b$, pois $\phi(a)$ e $\phi(b)$ pertencem a exatamente os mesmos conjuntos, mas $\phi(a) \neq \phi(b)$. A lei de Leibniz continua valendo, ou seja, do ponto de vista de nossa linguagem, $a = b$, ainda que 'no mundo real' eles denotem objetos distintos. Ou seja, a linguagem não distingue entre os objetos denotados por a e b, ainda que eles não sejam idênticos. Por isso, em muitos contextos, fala-se em 'modelos que respeitam a igualdade', o que não é o caso do exemplo dado (ver Robbin 1969, pp. 144-5).

6.3 Conjuntos

De acordo com Russell, tudo o que há são indivíduos, proposições (fórmulas) e predicados (relações). Na matemática em particular, não haveria necessidade de se empregar conjuntos, ou classes. Podemos falar em classes no âmbito de $\mathcal{L}\omega$ mas qualquer referência a elas pode ser eliminada por meio de definições contextuais. Vejamos como isso ocorre.

Inicialmente, para ficarmos mais próximos da linguagem de ZF usada anteriormente, vamos usar letras minúsculas para denotar as variáveis, e admitiremos que as expressões que escrevermos são fórmulas de L_ω, mesmo que omitamos a referência aos tipos; assim, se escrevermos $y(x)$, subentendemos que se x tem tipo τ, então y tem tipo $\langle \tau \rangle$. Uma definição: $x \in y =_{\mathsf{def}} y(x)$. Dizemos que x *satisfaz* y, ou (na linguagem conjuntista), que é elemento da *classe* y.

Seja $\alpha(x)$ uma fórmula. Neste caso, dizemos que $\widehat{x}\alpha(x)$ a classe de todos os x que satisfazem α. Alternativamente, poderíamos escrever $\widehat{x}\alpha(x) =_{\mathsf{def}} \{x : \alpha(x)\}$, uma vez que tivéssemos introduzido a terminologia do segundo membro. Seja C uma fórmula qualquer (um 'contexto') que faz uma asserção acerca da classe de todos os x que satisfazem $\alpha(x)$. Então, pomos

$$C(\widehat{x}\alpha(x)) =_{\mathsf{def}} \exists F(\forall x(F(x) \leftrightarrow \alpha(x)) \wedge C(x)).$$

Isso mostra que o discurso sobre classes (ou seja, a fórmula $C(\widehat{x}\alpha(x))$) pode ser dispensada (eliminada contextualmente) em prol de uma expressão adequada de L_ω. Esta é a razão pela qual Russell dizia que sua teoria era uma *no class theory* (teoria na qual não ocorre o conceito de classe, ou conjunto).

Estabelecendo alguns fatos básicos sobre o uso de expressões como $\widehat{x}\alpha(x)$, podemos introduzir todos os conceitos básicos sobre conjuntos. Vejamos esses fatos primeiro, e alguns dos conceitos depois. Temos então:

(1) $x \in \widehat{y}\alpha(y) \leftrightarrow \exists F(\forall x(F(x) \leftrightarrow \alpha(x)) \wedge F(y))$

(2) $\widehat{y}\alpha(y) \in x \leftrightarrow \exists F(\forall y(F(y) \leftrightarrow \alpha(y)) \wedge F(x))$

(3) $\widehat{x}\alpha(x) \in \widehat{y}\beta(y) \leftrightarrow$??????????????

(4) $\widehat{x}\alpha(x) = \widehat{y}\beta(y) \leftrightarrow$??????????

Os conceitos típicos da teoria de conjuntos são os seguintes. O leitor deve notar que as fórmulas do *definiens* podem ser transformadas em expressões envolvendo predicados por força do axioma da separação.

(1) [Classe unitária] $\{x\} =_{\mathsf{def}} \widehat{y}(y = x)$

(2) [Par] $\{x, y\} =_{\mathsf{def}} \widehat{z}(z = x \vee z = y)$

(3) [Par ordenado] $\langle x, y\rangle =_{\mathsf{def}} \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

(4) [n-upla ordenada] $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle =_{\mathsf{def}} \langle\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle, x_n\rangle$

(5) [União] $x \cup y =_{\mathsf{def}} \widehat{z}(z \in x \vee z \in y)$

(6) [Interseção] $x \cap y =_{\mathsf{def}} \widehat{z}(z \in x \wedge z \in y)$

(7) [Complemento] $\overline{x} =_{\mathsf{def}} \widehat{y}(y \notin x)$

(8) [Subconjunto] $x \subseteq y =_{\mathsf{def}} \forall z(z \in x \to z \in y)$

(9) [Partes] $\mathcal{P}(x) =_{\mathsf{def}} \widehat{y}(y \subseteq x)$

(10) [Classe universal] $\bigvee =_{\mathsf{def}} \widehat{x}(x = x)$

(11) [Classe vazia] $\bigwedge =_{\mathsf{def}} \widehat{x}(x \neq x)$

6.4 Desenvolvimento da matemática

Na verdade, deveríamos mais uma vez qualificar o que estamos considerando e dizer: desenvolvimento *de uma* matemática, pois, como se verá, ela apresenta diferenças sustanciais para aquela que é desenvolvida por exemplo em ZF.

Nesta seção, daremos uma idéia de como se pode desenvolver a aritmética na teoria simples de tipos.

6.5 Críticas à teoria de tipos

A versão original apresentada por Russell era bem mais complicada que a acima. Ver o capítulo.....

As definições acima são, na verdade, uma para cada tipo. Há portanto uma proliferação de classes universais (há uma de cada tipo), classes vazias, etc. Deveríamos portanto escrever $\bigvee^{\tau}$, $\bigwedge^{\tau}$, $x^{\tau} \cup^{\langle\tau,\tau\rangle} y^{\tau}$, etc. O complemento de x, $\overline{x}$, não é a classe de todos os objetos que não pertencem a x, mas a classe dos objetos *de um certo tipo* que não pertencem a x.

Mendelson 287, Copi

6.6 Notas e complementos

I. Mereologia Ou 'teoria das partes', um dos sistemas elaborados pelo filósofo polonês S. Lesniewski (os outros dois eram a *prototética* e a *ontologia*). Esses sistemas visavam servir de fundamentação para a matemática clássica, sendo comparáveis em escopo e potência ao sistema dos *Principia Mathematica* (Luschei 1962, p. 28). Há várias mereologias (na verdade, potencialmente uma infinidade delas). Para um apanhado geral, ver Simons 1987. Abreviadamente, um mereologia descreve as relações lógicas entre o *todo* e as suas *partes*, via relações distintas da pertinência conjuntista por exemplo.

Capítulo 7

Metamatemática da lógica elementar clássica

NESTE CAPÍTULO, comentaremos sobre alguns dos principais resultados relativos à lógica elementar clássica e às teorias elementares. Não faremos todas as demonstrações, mas indicaremos literatura adequada para quem desejar verificar os detalhes técnicos.

7.1 O teorema da completude e algumas de suas conseqüências

Vimos anteriormente os conceitos de *conseqüência lógica*, sintetizado na expressão $\Gamma \vDash \alpha$ e de dedução a partir de um conjunto de premissas, ou seja, $\Gamma \vdash \alpha$. Qual a relação entre esses dois conceitos? Já vimos que, para o cálculo proposicional clássico, vale um *teorema da completude* (página 28), que assevera que $\Gamma \vDash \alpha$ se e somente se $\Gamma \vdash \alpha$; veremos agora que um resultado similar vale para a lógica de primeira ordem.

Este resultado, um dos mais importantes da lógica atual, foi apresentado por Kurt Gödel (1906-1978) em 1930. Em sua tese de doutorado, Gödel demonstrou um fato que acarreta no seguinte: se $\mathcal{L}^1$ for a lógica elementar clássica de primeira ordem, então as noções de conseqüência lógica e de dedução se equivalem. Este resultado denomina-se *teorema da completude* da lógica elementar e como vimos se aplica também ao cálculo proposicional clássico, bem como a vários outros sistemas dedutivos, inclusive não-clássicos. Intuitivamente, ele diz que uma conclusão β pode ser deduzida a partir das premissas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se e somente se esta conclusão é conseqüência lógica dessas mesmas premissas. Em outras palavras, chamando de Γ um conjunto de fórmulas e α é uma fórmula de $\mathcal{L}^1$, então o resultado de Gödel estabelece que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\Gamma \models \alpha$. Em particular, α é logicamente válida ($\models \alpha$) se e somente de for um teorema formal da lógica elementar ($\vdash \alpha$). Este resultado, é bom frisar desde já, não vale em geral. Para as lógicas de ordem superior, vale apenas uma forma mais fraca, dita *completude generalizada*, que será comentada oportunamente.

Sejamos um pouco mais precisos. Por *modelo* de uma teoria T (ou de um conjunto de fórmulas da linguagem de $\mathcal{L}^1$), deve-se entender uma interpretação (em geral uma estrutura conjuntista, ou seja, elaborada em uma teoria de conjuntos como ZF) relativamente à qual os axiomas não-lógicos de T (as fórmulas de Γ) são verdadeiros (no sentido de Tarski). Como os axiomas lógicos de $\mathcal{L}^1$ são logicamente válidos, serão verdadeiros em qualquer interpretação. Assim, para ser um modelo para T, é suficiente que a interpretação seja tal que, nela, os axiomas específicos de T sejam verdadeiros, já que por hipótese T se fundamenta em $\mathcal{L}^1$.

Uma teoria T é *inconsistente* (sintaticamente) se existe uma fórmula α de sua linguagem tal que $T \vdash \alpha$ e $T \vdash \neg\alpha$; caso contrário, T é *consistente* (sintaticamente). Obviamente, se a lógica subjacente a T é a lógica clássica, se T é inconsistente então $\alpha \wedge \neg\alpha$ é teorema de T, para alguma α. Alguns resultados relevantes são os seguintes:

Teorema 7.1.1 *Uma teoria T é inconsistente se e somente se toda fórmula da linguagem de T é teorema de T.*

Demonstração: Se T é inconsistente, seja α tal que $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$. Se β é uma fórmula qualquer, temos que $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$, pois $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$ é logicamente válida (é uma instância de uma tautologia). Assim, obtemos $T \vdash \beta$ por MP. Reciprocamente, se toda fórmula α da linguagem de T é teorema de T, então $\alpha \wedge \neg\alpha$ é teorema de T.▮

Este teorema mostra que em uma teoria inconsistente, que tenha por base a lógica clássica, *tudo* (que for exprimível em sua linguagem) pode ser demonstrado. Ou seja, inconsistência (à luz da lógica clássica) implica trivialidade. A recíproca é evidente: se *tudo* pode ser demonstrado, em particular o pode uma contradição. Um segundo resultado importante é o do

Teorema 7.1.2 *Se T é inconsistente, então T não tem modelo.*

Demonstração: Seja T inconsistente. Então $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$ para alguma α. Mas $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ é uma instância de uma tautologia (princípio da contrdição), e portanto é logicamente válida. Mas $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ é verdadeira se e somente se $\alpha \wedge \neg\alpha$ é falsa. Portanto, $\alpha \wedge \neg\alpha$ é falsa relativamente a toda interpretação, e assim é falsa em todo modelo de T, se houver algum. Mas como por hipótese $\alpha \wedge \neg\alpha$ é um teorema de T, isso origina uma contradição. Logo, T não pode ter modelo.▮

Resulta como corolário que se T tem modelo, é consistente.

Para mencionarmos outros resultados, alguns conceitos adicionais são necessários. Esses conceitos podem ser desenvolvidos adequadamente em ZF, mas serão aqui tomados em seu sentido intuitivo. Informalmente, o *cardinal* de um conjunto A é o número de elementos desse conjunto, denotado $\overline{\overline{A}}$. Todo conjunto tem um cardinal, que é único; todo cardinal tem um cardinal sucessor, e não há um maior número cardinal. Se o conjunto é finito, seu cardinal é um número natural; se for infinito, é um cardinal *transfinito*. O primeiro cardinal transfinito é o cardinal do conjunto dos números naturais, denotado por $\aleph_0$. Este é o cardinal de todos os conjuntos enumeráveis. Já o conjunto dos números reais, que não é enumerável, tem cardinal $\mathfrak{c}$ (o cardinal do *continuum*), e sabemos que $\mathfrak{c} > aleph_0$. Dois conjuntos A e B têm o mesmo cardinal se existe uma bijeção de A em B, e $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ se e somente se há uma bijeção entre A em um sobconjunto de B. O chamado teorema de Schröder-Bernstein assegura que se $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ e $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$, então $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Uma teoria elementar T é *completa* (em sentido sintático) se para toda sentença α de sua linguagem, tem-se que $T \vdash \alpha$ ou $T \vdash \neg\alpha$. Pode-se provar então o teorema fundamental seguinte:

Teorema 7.1.3 (Teorema da Completude –Gödel 1930) *Se T é uma teoria elementar com identidade consistente, então T tem modelo contável (finito ou enumerável).*

A partir desse resultado, podemos provar os seguintes, igualmente relevantes, também denominados 'teoremas de completude', lembrando que a lógica elementar (cálculo de predicados de primeira ordem) é uma teoria elementar a qual não tem símbolos não-lógicos, e conseqüentemente, nem postulados específicos. Os significados dos termos abaixo são fáceis de se entender, tendo em vista a simbologia introduzida acima:

(C1) As fórmulas válidas da lógica de primeira ordem são exatamente os seus teoremas.

(C2) Sendo Γ um conjunto de fórmulas de uma teoria elementar T e α uma fórmula de T, então $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\Gamma \models \alpha$

(C3) $\vdash \alpha$ se e somente se $\models \alpha$

Muitas vezes é conveniente 'desmembrar' o *se e somente se* do teorema da completude apontado acima na conjunção de dois condicionais (o mesmo pode ser feito no caso da lógica proposicional); o primeiro é chamado de *teorema da correção*, e é o seguinte:

$\Gamma \vdash \alpha \Rightarrow \Gamma \vDash \alpha$. A recíproca é o *teorema da completude*: $\Gamma \vDash \alpha \Rightarrow \Gamma \vdash \alpha$. Usaremos no entanto a expressão 'teorema da completude' para a conjunção desses resultados, exceto quando for absolutamente necessário distinguí-los.

Para o teorema seguinte, necessitamos do seguinte lema:

Lema 7.1.1 *Seja α uma fórmula da linguagem de T. Então, se α é verdadeira em todo modelo de T, α é teorema de T.*

Teorema 7.1.4 (Teorema*) *Uma teoria T é completa se e somente se toda sentença da linguagem de T que é verdadeira em um modelo de T é verdadeira em todos os modelos de T.*

Demonstração: Suponha que T é completa e seja α uma sentença que é verdadeira em um modelo $\mathfrak{A}$ de T. Mostraremos que α é verdadeira em todo modelo de T. Por absurdo, suponha que exista um modelo $\mathfrak{A}'$ de T relativamente à qual α não é verdadeira. Então α não é teorema de T, uma vez que todos os seus teoremas são verdadeiros em todos os seus modelos. Pelo mesmo motivo, $\neg\alpha$ não é teorema de T, pois $\neg\alpha$ não é verdadeira em $\mathfrak{A}$. Portanto, nem α e nem $\neg\alpha$ são teoremas de T, o que contradiz a hipótese de que T é completa. Reciprocamente, suponha que toda sentença que seja verdadeira em um modelo de T seja verdadeira em todos os seus modelos. St T é inconsistente, então é completa. Se T é consistente, pelo teorema da completude, tem modelo, digamos $\mathfrak{A}$. Logo, α ou $\neg\alpha$ é verdadeira nesse modelo. Mas pela hipótese, resulta então que α ou $\neg\alpha$ é verdadeira em todo modelo de T e assim, pelo Lema anterior, é teorema de T. Como α é arbitrária, T é completa.∎

Usando este teorema, podemos provar facilmente que a teoria dos grupos não é completa. Com efeito, a sentença $\forall x \forall y(x = y)$ é verdadeira somente em um modelo que tenha um único elemento (cujo domínio é $D = \{e\}$), mas é falsa em qualquer outro.

7.1.1 Compacidade e Löwenheim-Skolem

Uma das conseqüências mais importantes do teorema da completude é o *teorema de Löwenheim-Skolem*, que pode ser assim resumido, desde que estejamos atentos para os conceitos de teoria elementar e de modelo de uma teoria elementar dados antes:

Teorema 7.1.5 (Teorema de Löwenheim-Skolem) *Toda teoria elementar que tenha um modelo tem um modelo contável (ou seja, seu domínio é finito ou enumerável).*

Este resultado traz conseqüências interessantes, como a seguinte. Suponha então que estejamos considerando a teoria elementar que acima denominamos de Zermelo-Fraenkel (ZF). Nela, podemos provar a existência de um conjunto que denominamos de ’conjunto dos números reais’, denotado por $\mathbb{R}$, que como provou Cantor é infinito e não é enumerável (ver as Notas e Complementos deste capítulo), logo seu cardinal é estritamente maior do que $\aleph_0$. Ora, se ZF tiver modelo, terá que ter um modelo enumerável por força do teorema de Löwenheim-Skolem. Neste modelo, os objetos, ou seja, os conjuntos, definidos pela teoria não poderão ter cardinalidade maior do que a do seu domínio, logo, o ’representante’ de $\mathbb{R}$ em tal modelo terá que ser contável, o que origina uma aparente contradição dada a prova de Cantor.

Dizemos ’aparente’ porque não se trata de uma contradição estrito senso, ou seja, da derivação, no âmbito da teoria, de duas proposições contraditórias, mas de algo que simplesmente vai de encontro à nossa intuição. Este fato é conhecido como ’paradoxo’ de Skolem, e tem uma explicação simples, porém sutil, dada pelo próprio Thoraf Skolem, que o descobriu por volta de 1922: a prova de que $\mathbb{R}$ não é eumerável é feita *no interior* de ZF, ou seja, segue-se dos seus axiomas (supostos consistentes) que não há nenhum conjunto que possa fazer o papel de uma função um a um (uma bijeção) entre o conjunto dos números naturais e $\mathbb{R}$. No entanto, uma tal bijeção pode existir ’fora’ de ZF, como algo que, dito em outras palavras, não pertença ao seu modelo enumerável. Assim, não há contradição alguma, ainda que o resultado pareça estranho, principalmente para o iniciante.

Teorema 7.1.6 (Teorema de Löwenheim-Skolem Ascendente) *Se um conjunto de fórmulas tem um modelo de cardinalidade infinita, então terá modelos de cardinalidade λ para todo cardinal infinito λ.*[1]

Este teorema tem também conseqüências importantes, que serão apresentadas na seção seguinte.

Uma outra conseqüência importante do teorema da completude é o *teorema da compacidade*. Podemos formulá-lo assim:

Teorema 7.1.7 (Teorema da Compacidade) *Se todos os subconjuntos finitos de um dado conjunto de sentenças de uma teoria de primeira ordem têm modelo, então o conjunto dado tem modelo. Equivalentemente (como se pode provar), tem-se a seguinte versão do teorema da compacidade: se $\Gamma \vdash \alpha$, então existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$.*

[1] Os números naturais $0, 1, \ldots$ são os cardinais finitos (também são or ordinais finitos). Os cardinais infinitos (ou transfinitos) são denotados assim: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$. Como já vimos, $\aleph_0$ é o cardinal do conjunto dos números naturais (e de todos os conjuntos enumeráveis). O cardinal $\mathfrak{c}$ dos números reais é um dentre $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$; se aceitarmos a Hipótese do Contínuo, de Cantor, ele é precisamente $\aleph_1$.

Demonstração: Um esboço de demonstração do teorema da compacidade é o seguinte, que mostra como ele segue quase que de imediato do teorema da completude. Provaremos que se Γ *não tem modelo*, então existe um subconjunto finito de fórmulas desse conjunto que não tem modelo, o que é equivalente ao enunciado do teorema. Pelo teorema da completude, um conjunto Γ de fórmulas tem um modelo se e somente se é consistente. Suponha então que Γ é um tal conjunto e que não tem modelo. Então há uma prova de uma contradição a partir de Γ, e cada fórmula nessa prova é um axioma, um elemento de Γ ou segue de fórmulas precedentes por uma das regras de inferência. Posto que uma prova é uma coleção finita de fórmulas, somente um número finito de fórmulas de Γ pode ocorrer nessa prova. Assim, temos uma prova de uma contradição a partir de um conjunto finito de fórmulas de Γ, e então esse conjunto finito não pode ter modelo. ▮

7.1.2 Aplicação do teorema da compacidade: modelos não standard da aritmética elementar

Admita que Γ é o conjunto dos axiomas da aritmética elementar. Vimos acima que os axiomas 'lógicos' têm modelo, pois são eles exatamente os axiomas do cálculo de predicados de primeira ordem com igualdade, que se pode provar ser consistente. Com efeito, se este não fosse o caso, então haveria uma fórmula β tal que tanto β quanto sua negação $\neg\beta$ seriam teoremas deste cálculo. Mas então, pela forma C3 do teorema da completude acima, tanto β quanto $\neg\beta$ seriam logicamente válidas, o que é impossivel. Portanto, para o que pretendemos agora, podemos nos preocupar unicamente com os axiomas não lógicos `A1-A10` da aritmética. Os números naturais $0, 1, 2, 3, \ldots$ são definidos assim: $0 =_{\text{def}} \circledcirc$, $1 =_{\text{def}} S\circledcirc$, $2 =_{\text{def}} SS\circledcirc$, $3 =_{\text{def}} SSS\circledcirc, \ldots$.

Suponha que obtenhamos uma extensão da linguagem $\mathcal{L}_{AR}$ pela introdução de uma constante individual a. Há regras para se fazer isso, mas o leitor deve acreditar que as estamos obedecendo em nossa argumentação. Erigimos então uma nova teoria, $\mathcal{AP}'$, uma extensão de AP, cujos postulados são exatamente aqueles de $\mathcal{AP}$ mais os seguintes, que dizem respeito ao novo símbolo não lógico: (1) $a \neq \circledcirc$, (2) $a \neq S\circledcirc$, (3) $a \neq SS\circledcirc$, etc.

Ora, como todo subconjunto finito de tais axiomas tem modelo (por exemplo, tomemos os axiomas que vão de (1) a (123); então defimos uma interpretação de tal forma que à constante a associamos um número natural qualquer não mencionado pelos axiomas de (1) a (123). Obviamente que os postulados de $\mathcal{AP}'$ são satisfeitos, logo resulta pelo teorema da compacidade que *todo* o conjunto de postulados tem modelo. Isso implica que deve existir um 'número natural' (que na linguagem é representado por a) que não é nenhum dos nossos conhecidos 0, 1, 2, 3, etc. Um tal modelo é também modelo de

$\mathcal{AP}$, e é dito ser um *modelo não-standard* de $\mathcal{AP}$. Repare o leitor que não é necessário dizer que número natural é esse; a sua existência segue do teorema da compacidade. Da mesma maneira, podemos obter novas extensões e conseqüentemente novos 'naturais' $b, c, \ldots$.

Fato análogo pode ser realizado com a teoria elementar dos números reais. O estudo de modelos não-standard dessas teorias é de grande importância inclusive na ciência aplicada, e somente pode ser alcançado devido ao desenvolvimento da lógica.

7.1.3 Categoricidade

Dois modelos $\mathfrak{A} = \langle D, \rho \rangle$ e $\mathfrak{A}' = \langle D', \rho' \rangle$ de uma teoria T são *isomorfos* se existe uma função bijetiva $h : D \mapsto D'$ tal que, para $x_1, \ldots, x_n \in D$: (1) para cada constante individual a da linguagem de T, $h(\rho(a)) = \rho'(a)$; (2) para cada predicado n-ario P da linguagem de T, $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in \rho(P)$ se e somente se $\langle h(x_1), h(x_2), \ldots h(x_n) \rangle \in \rho'(P)$, e (3) para cada símbolo funcional f de aridade n, $h(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \rho'(f)(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n) \rangle$. Esta função h chama-se um *isomorfismo* de $\mathfrak{A}$ em $\mathfrak{A}'$. Como toda função bijetiva é inversível, a existência de h implica na existência de sua inversa, h^{-1}, que é um isomorfismo de $\mathfrak{A}'$ em $\mathfrak{A}$, como se pode mostrar facilmente.

O fato de que a função h, quando existe, ser bijetiva, faz com que os domínios de modelos isomorfos de T tenham a mesma cardinalidade. Pode-se mostrar sem dificuldade que para toda fórmula α da linguagem de T, $\mathfrak{A} \models \alpha$ se e somente se $\mathfrak{A}' \models \alpha$. Se T é consistente e todos os seus modelos são isomorfos, então T é *categórica*. Neste caso, dizemos que T tem um único modelo *a menos de um isomorfismo*, pois todos os seus modelos 'coincidem em estrutura', diferindo unicamente quanto à natureza dos elementos de seus domínios.

Vejamos um exemplo. Vamos chamar de TG2 a teoria que se obtém acrescentando-se aos axiomas da teoria de grupos abelianos (página 94) o axioma seguinte, que diz que só há dois elementos (Margaris 1990, p. 174):

`TG2` $\exists x \exists y (x \neq y \land \forall z (z = x \lor z = y))$

Podemos provar que TG2 é categórica do seguinte modo: Seja $\mathfrak{A} = \langle D, \rho \rangle$ modelo de TG2 definido assim: $D = \{0, 1\}$e seja $\rho(e) = 0$, $\rho(')(e) = 0$, $\rho(')(1) = 1$, $\rho(\star)$ é a operação, que denotaremos $\circ$, definida pela tabela seguinte:

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

Seja agora $\mathfrak{A}_1 = \langle D_1, \rho_1 \rangle$ outro modelo *qualquer* de TG2. Então $D_1 = \{a, b\}$ (para $a \neq b$), pois pelo axioma de TG2, o domínio deve ter somente dois elementos. Seja $\rho_1(e) = a$. Sejam ainda $\rho_1(')$ denotada por $*$ e $\rho_1(\star)$ denotada por $\bullet$. Então, $a \bullet a = a$ (por G2 –cf. página 5.6.2) e $b \bullet a = b$ por TG2. Mas $a \bullet b = b \bullet a$ por G4, logo, pela transitividade da igualdade, $a \bullet b = b$. Por fim, afirmamos que $b \bullet b = a$. Com efeito, se fosse $b \bullet b = b$, não haveria nenhum y tal que $b \bullet y = a$, o que vai contra o axioma G3. Assim, temos a tabela seguinte:

•	a	b
a	a	b
b	b	a

Seja agora $h : D \mapsto D_1$ definida por $h(0) = a$ e $h(1) = b$. É fácil ver que h é bijetora, e que $h(x \circ y) = h(x) \bullet h(y)$ e que $h(\rho(1)(x)) = \rho_1(h(x))$, assim h é um isomorfismo.

Se no entanto chamarmos de $TG4$ a teoria que se obtém acrescentando aos axiomas da teoria dos grupos abelianos o axioma TG4 que afirma que sé existem quatro elementos, a teoria resultante não é categórica (basta exibir dois modelos não isomorfos, ou uma sentença que seja verdadeira em um modelo mas falsa em algum outro, o que deixamos como exercício para o leitor).

Qual a relação entre a categoricidade e a completude?

Teorema 7.1.8 (Teorema) *Se T é categórica, é completa.*

Demonstração: Suponha que T é categórica. Logo, toda sentença verdadeira em um modelo é verdadeira em qualquer modelo, pois todos são isomorfos. Portanto, T é completa pelo Teorema* da página 122.∎

Temos ainda os seguintes fatos, aqui só enunciados.

(1) Se uma teoria T tem modelo infinito (ou seja, tal que seu domínio é um conjunto infinito), então para todo cardinal transfinito λ, T tem um modelo cujo domínio tem cardinal maior ou igual a λ. Isso se aplica às teorias elementares $\mathcal{AP}$, $\mathfrak{G}$, ZF e a teoria das categorias, exemplificadas anteriormente

(2) Há teorias elementares (com identidade) que têm apenas modelos finitos e que são categóricas, como a teoria TG2 exemplificada acima. Outras, como TG4, não são.

(3) Nenhuma teoria elementar que admita modelos infinitos é categórica.

(4) (Teorema de Łos-Vaught, de 1954) Se T é uma teoria que tem um modelo de cardinal infinito $\mathfrak{m}$, então se todos os modelos de T de cardinalidade $\mathfrak{m}$ forem isomorfos, T é categórica.

As teorias elementares que consideramos aqui têm todas uma quantidade contável de símbolos primitivos. No entanto, há *teorias de primeira ordem generalizadas*, que podem ter uma quantidade não contável de símbolos primitivos. Nessas teorias, a noção de fórmula não é efetiva, ou seja, falando informalmente, não é possível construir um programa de computador que decida quais expressões da linguagem são fórmulas. Pode-se estender o teorema da completude para tais teorias, bem como alguns de seus corolários. Ficaremos no entanto restritos a considerar teorias como as exemplificadas anteriormente.

7.2 Limitações dos formalismos

No início dos anos 1920, David Hilbert referiu-se à crise nos fundamentos da matemática, ocasionada pela descoberta dos paradoxos da teoria intuitiva de conjuntos*. Contrariamente à tese do matemático holandês L. E. J. Brouwer, para quem os paradoxos mostravam uma inadequação da matemática, que segundo ele deveria ser substituída pela matemática intuicionista que propunha, Hilbert visava estabelecer de modo rigoroso que as disciplinas matemáticas particulares eram viáveis; isso significava basicamente o seguinte.

Inicialmente, a estrutura linguística das diversas disciplinas, as definições, os axiomas e princípios lógicos a serem utilizados em um domínio particular, deveriam ser explicitados, descritos unicamente em termos desses objetos linguísticos, sem apelo a qualquer coisa que não estivesse completamente especificado em termos dos objetos iniciais previamente escolhidos. Em outras palavras, os diversos domínios deveriam ser *formalizados*, ou seja, inseridos em sistemas formais. Como vimos acima, em um sistema formal S, temos uma lista, escolhida *in advance*, de símbolos primitivos; certas seqüências finitas de símbolos são definidos para serem as fórmulas da linguagem de S e certas seqüências finitas de fórmulas são as provas (ou demonstrações), a última de cada uma delas sendo uma fórmula demonstrável em S, ou um teorema de S.

Uma vez formalizada, as provas de uma determinada porção da matemática poderiam então ser analisadas mediante manipulações puramente mecânicas (Hilbert dizia 'finistas'), sem que se desse atenção ao significado dos termos envolvidos. Isso feito, Hilbert visava provar que os sistemas S assim constituídos, e que refletiriam as disciplinas matemáticas particulares, eram consistentes (em sentido sintático, ou seja, que não se poderia derivar em S duas proposições contraditórias).

Além da consistência dos sistemas S particulares, Hilbert ainda visava as provas de sua completude e decidibilidade. Um sistema S é completo, recordemos, se para qualquer sentença α da linguagem de S (ou seja, uma fórmula sem variáveis livres), ou α ou sua negação $\neg\alpha$ (mas não ambas!) pode ser derivada em S. A decidibilidade de S significa que, dada uma fórmula particular α da linguagem de S, podemos 'decidir' por tais processos finitistas (que à época não haviam ainda ganhado uma definição satisfatória) se α é ou não um teorema (formal) de S. Este era, de forma muito resumida, o célebre Programa de Hilbert, que veio ruir com os resultados de Gödel de 1931.

Os *teoremas de incompletude* de Gödel estão entre os fatos mais expressivos jamais alcançados no campo da lógica. Esses teoremas dizem respeito a teorias formalizadas que cumpram certas condições bem específicas, que aqui não teríamos como descrever sem introduzir uma porção significativa de informação técnica. Portanto, o que apresentaremos a seguir carece de rigor.

Informalmente, essas condições que os sistemas (teorias) devem cumprir podem ser resumidas dizendo-se que (i) as linguagens de tais teorias devem ser capazes de expressar uma quantidade mínima de matemática elementar (é suficiente que nessas teorias se possa exprimir uma parte da aritmética usual que se denomina de <u>aritmética de Robinson</u>* -obviamente que a própria aritmética usual –o sistema $\mathcal{AP}$ visto acima– satisfaz esta condição) e (ii) sua linguagem é tal, e seus axiomas são formulados de tal forma, que os conjuntos dos símbolos da linguagem, das suas fórmulas (seqüências finitas de símbolos satisfazendo as regras gramaticais da linguagem) e dos axiomas resultam 'reconhecíveis por uma máquina' (são *decidíveis* por como processo efetivo, que envolve um número finito de passos). De modo abreviado, podemos dizer que isso equivale a supor que no sistema em questão se possa exprimir as *funções recursivas primitivas*. Isto posto, Gödel provou que em tais teorias, desde que elas não sejam contraditórias, sempre haverá proposições que se reconhecem como verdadeiras, mas que não podem ser nem provadas e nem refutadas pelos axiomas da teoria (ou seja, não há igualmente prova para a sua negação). Tais proposições são *indecidíveis* no sistema em questão. O interessante é que Gödel ainda provou que, por mais que se 'reforce' o sistema (por exemplo, acrescentando as proposições indecidíveis como novos axiomas), sempre haverá novas proposições indecidíveis nos sistemas resultantes. Esses sistemas, bem como as teorias matemáticas neles assentadas, portanto, são incompletas e 'incompletáveis' (diz-se que são *essencialmente incompletas*).

Os sistemas ou teorias formalizadas, para cumprirem as condições (i) e (ii) acima, devem , dentre outras coisas, ser consistentes e capazes de exprimir a sua própria metalinguagem. Vamos chamar uma de tais teorias de S e ver isso com um pouco mais de detalhe. Gödel inventou um processo (conhecido como *numeração de Gödel*) pelo qual pode-se atribuir um número natural específico a cada símbolo da linguagem de S. Esta técnica, conhecida como 'gödelização', pode ser estendida de modo a se obter um número (único) para cada fórmula de S, para cada demonstração em S (prova formal) e assim por diante. Resulta ainda que, dado um número natural qualquer, pode-se saber efetivamente (grosso modo, por meio de uma 'máquina') se este número é o 'número de Gödel' de uma variável, de uma fórmula, de uma demonstração ou de outro objeto pertencente à sintaxe da linguagem de S e, ainda mais, pode-se identificar que específico objeto é este. A isto denomina-se *aritmetização da linguagem*, pois a linguagem do sistema S é 'mapeada' na linguagem da aritmética. Com isso, ele mostrou como é possível definir equivalentes aritméticos a várias relações e funções de S, o que significa dizer que, para cada uma de tais relações ou funções, há uma relação ou função definida na linguagem da aritmética que reflete o que se passa com tais relações e funções em termos dos números de Gödel dos correspondentes objetos. Ou seja, as relações e funções valem para certas entidades sintáticas (da linguagem da teoria S) se e somente se as correspondentes relações e funções aritméticas valem para os números de Gödel de tais entidades.

Assim, por exemplo, as propriedades sintáticas 'ser uma variável', 'ser um axioma' ou 'ser derivável a partir dos axiomas', encontram expressão em termos de predicados aritméticos. Isso posto, Gödel mostrou de que forma é possível definir certos predicados aritméticos (formulados na linguagem da aritmética) que expressam fatos *sobre* os sistemas formais considerados, desde que eles cumpram as condições indicadas acima. Por exemplo, é possível considerar um predicado aritmético binário '$Dem(x,y)$' que informalmente diz o seguinte: x é o número de Gödel de uma prova (demonstração) em S de uma fórmula que tem número de Gödel y. Se isso for o caso, ou seja, se pudermos derivar $Dem(x,y)$ na aritmética, então estamos afirmando que a fórmula (do sistema S) com número de Gödel y é demonstrável em S. Em síntese, os fatos acerca do sistema formal S estão agora sendo descritos na linguagem da aritmética, e os fatos 'verdadeiros' sobre S obtidos como teoremas da aritmética.

7.2.1 O primeiro teorema de incompletude de Gödel

Gödel mostrou então como se pode construir, na linguagem da aritmética, uma fórmula G (que supomos tem número de Gödel k) que representa o enunciado (metalingüístico) "a fórmula de S com número de Gödel k não é demonstrável em S". Usando o simbolismo acima, podemos escrever G como $\forall x \neg Dem(x,k)$ para expressar que não existe x que seja o número de Gödel da fórmula com número de Gödel k. Ou seja, de certo modo, G fala de si mesma, dizendo que ela própria não é demonstrável. A seguir, mostrou que

G é demonstrável se e somente se a sua negação também o for. Ora, segue-se então que, se a aritmética for consistente, nem G e nem a sua negação podem ser deriváveis (pois neste caso teríamos a derivação de uma contradição, contrariando a consistência da aritmética). Tem-se portanto uma proposição do sistema S (à qual corresponde a sentença G) que é indecidível em S. Além disso, a fórmula G, ainda que não seja demonstrável e nem 'refutável' (ou seja, não se prova tampouco a sua negação), é intuitivamente verdadeira, pois seus equivalentes aritméticos refere-se a fatos que claramente se vê valerem na aritmética. Resulta, portanto, que os axiomas de S são incompletos (não provam todas as suas 'verdades'). Isso é, em linhas muito gerais, o que diz o *primeiro teorema da incompletude de Gödel*, mas deve-se atentar que as teorias devem cumprir as condições especificadas acima para que o 'fenômeno Gödel' se manifeste.

É claro que o resultado de Gödel se aplica em particular à própria aritmética (que foi, aliás, o sistema por ele considerado inicialmente). Os matemáticos, no entanto, sempre desejaram encontrar uma 'real' sentença aritmética que fosse intuitivamente verdadeira mas que fosse indecidível por meio seus axiomas, já que a sentença de Gödel, que se trata de uma fórmula que fala de sua própria não derivabilidade, parecia ser algo artificial. Isso foi conseguido em 1977 por Jeff Paris e Leo Harrington, que exibiram uma sentença que é considerada 'matematicamente simples e interessante' (ainda que suficientemente técnica para ser aqui mencionada), indecidível pelos axiomas da aritmética usual.[2]

O matemático norte-americano Gregory Chaitin (1947–) obteve uma versão algorítmica do primeiro teorema da incompletude de Gödel, a qual, falando por alto, pode ser descrita como se segue. Qualquer mensagem e qualquer teoria da matemática ou das demais ciências pode, segundo Chaitin, pelo menos em princípio, ser codificada na linguagem da aritmética por seqüências finitas de zeros e uns, isto é, seqüências binárias. No tocante a uma teoria, quanto mais curta for a seqüência correspondente, tanto melhor, sobretudo para seu entendimento ao ser decodificada. Dentre as descrições de uma teoria pode-se tratar de obter uma que tenha comprimento mínimo. Uma tal seqüência mínima, que se prova sempre existir, tem comprimento que se denomina de *grau de complexidade* da teoria. Quando uma seqüência binária não pode ser descrita por outra mais curta, ela se diz *algoritmicamente aleatória*: neste caso, não há meios mais simples de tratá-la do que lidar com ela própria. As diversas teorias padrão, em particular da matemática, são basicamente seqüências binárias ou podem ser nelas convertidas, consistindo, em derradeira instância, em programas computacionais; possuem, portanto, um grau de complexidade algorítmica.

A versão de Chaitin do teorema de Gödel pode então ser enunciada assim: nenhum

[2]Ver o artigo desses dois autores, 'A mathematical incompleteness in Peano arithmetics', na coletânea editada por Jon Barwise, constante da Bibliografia.

sistema de axiomas matemáticos, satisfazendo certas condições padrão (que refletem as condições (i) e (ii) enunciadas acima), possuindo grau de complexidade k (por ser uma teoria) pode demonstrar que seqüências binárias de grau de complexidade maior do que k, têm, de fato, grau de complexidade maior do que k. É claro que o leitor deve parar para pensar um pouco a respeito. Mas vale a pena.

Chaitin também conseguiu definir um número real entre 0 e 1, que ele batizou de Ω, cujo desenvolvimento binário é algoritmicamente aleatório. As várias seqüências binárias finitas que se obtém ao calculá-lo aproximadamente não são nem em princípio previsíveis, tudo se passando como se fossem geradas por meio de um jogo aleatório de cara ou coroa. As investigações de Chaitin, que exploram os limites da matemática, conduzem a questões relevantes e profundas como, por exemplo, as seguintes: há verdades matemáticas devidas ao puro acaso? Como o acaso algorítmico se relaciona, segundo Chaitin, com o acaso probabilístico? As naturezas da matemática e da física, no fundo, são idênticas? Deus, que parece jogar dados no âmbito da mecânica quântica,[3] joga dados também no seio da matemática pura? Essas são questões importantes que devem ocupar a mente de pelo menos alguns filósofos da matemática.

7.2.2 Extensões do primeiro teorema

Posteriormente, resultados análogos aos de Gödel foram alcançados para certas teorias físicas. Aqui apenas indicaremos os principais resultados; o leitor curioso deve consultar a bibliografia indicada para maiores detalhes. Na teoria dos sistemas dinâmicos, da Costa e Francisco Antonio Doria mostraram que uma tese de Roger Penrose, expressa no livro *A mente nova do rei*, qual seja, de que a natureza produz problemas não computáveis somente a nível microscópico, não se sustenta. Mostraram eles que é possível considerar uma família de sistemas que exibem comportamento não computável também a nível clássico.

Este resultado pode parecer artificial, mas na verdade explora os limites da computabilidade em diversas áreas e, em particular, em sistemas dinâmicos caóticos, trazendo à discussão uma dimensão filosófica extremamente importante, relacionada aos fundamentos da matemática e das ciências naturais. Com efeito, os modelos de computação e em especial o modelo usual de computação, que segue os moldes propostos por Alan Turing, pode simular todos os processos computacionais conhecidos, bem como provar que existem processos (funções) não computáveis. Vimos que os teoremas de incompletude de Gödel, dito de modo breve, mostram que em qualquer sistema formal que

[3]Uma célebre frase de Einstein, contestando a versão probabilística da mecânica quântica, indagava de Deus joga dados com o universo.

seja consistente e que satisfaça algumas condições bastante precisas, uma das quais que incorpore (pelo menos parte da) a aritmética elementar, há proposições verdadeiras que não podem ser demonstradas e nem refutadas pela teoria.

Da Costa e Doria, entre seus resultados, mostraram que várias questões importantes neste contexto são indecidíveis. Dentre as questões resolvidas por eles, merecem destaque, por exemplo, o chamado Problema de Hirsch, que diz respeito à existência de um método recursivo (um algoritmo) para se determinar se um sistema dinâmico é ou não caótico (eles provaram que não há um tal algoritmo). Além desta questão, as técnicas desses dois autores levaram-nos a outras, como ao chamado problema da integrabilidade de sistemas Hamiltonianos, que também incorpora um resultado negativo nos moldes do caso anterior. Esses resultados respondem a questões que foram formuladas nos fundamentos da física ainda no século XIX.

Da Costa e Doria vão mais longe, indagando se problemas de indecidibilidade não surgiriam também em outras disciplinas que têm alicerce matemático, como a economia. Suas investigações, expostas em um livro a ser publicado, intitulado *A Metamatemática da Física*, explora precisamente esse tipo de questão, dentro do que denominam de Tese de Casti-Traub, referindo-se a dois pesquisadores que têm igualmente se ocupado de questões similares, e que pode ser assim enunciada: se as ciências são apresentadas em uma certa forma axiomática que inclua a aritmética, então, se forem consistentes, o fenômeno dos teoremas de incompletude de Gödel aparece mesmo nas questões mais simples. Esses resultados mostram que o alcance dos teoremas de Gödel abrange bem mais do que sistemas matemáticos. Os filósofos da mente, e os cientistas que de dedicam à inteligência artificial, vêm há tempo explorando a questão das implicações que tais teoremas teriam (se é que teriam) para impor certas limitações à capacidade mental humana ou à possibilidade de se construir uma máquina (um computador) que fosse capaz de raciocinar como um ser humano. O livro de Penrose mencionado acima é uma das mais importantes referências a este respeito, explorando a questão de um certo ponto de vista.

Gostaríamos no entanto de dizer que há mais a ser considerado na discussão sobre o assunto, e que às vezes foge ao olhar do filósofo. No livro de Penrose, por exemplo, bem como nos textos em geral que discutem o assunto, supõe-se que o termo 'computação' refere-se ao que se pode chamar de *computação à la Turing*. Em outras palavras, um 'computador' seria uma espécie de 'máquina de Turing'. Porém, há várias outras formas de 'computação' hoje em dia bastante exploradas na literatura, e para sermos realmente precisos, seria necessário dizer, em tais discussões, de que tipo de computação estamos falando. Assim, ainda que venhamos um dia provar que a tese de Penrose, qual seja, de que o cérebro humano não é uma máquina de Turing, ou seja, que nenhum computador pode 'pensar' como um ser humano, isso não implica que não venhamos a construir outras formas de máquina que simulem as nossas formas de raciocínio empregando outras formas de computação. O tema no entanto, ainda que instigante, não pode ser desenvolvido neste livro.

7.2.3 O segundo teorema de incompletude de Gödel

Vejamos agora, de novo em linhas gerais, o *segundo teorema de incompletude* de Gödel. Para isso, voltemos à nossa fórmula G acima, que expressa que ela mesma não é demonstrável. Gödel mostrou como se pode construir uma fórmula na linguagem da aritmética que expresse "O sistema S (satisfazendo as já conhecidas condições) é consistente". Em síntese, isso é feito por meio de uma fórmula aritmética que expresse que "existe uma fórmula de S que não é demonstrável em S", que denotaremos por $Con(S)$. Com efeito, se todas as fórmulas da linguagem de S fossem demonstráveis em S, teríamos que, em particular, uma contradição seria demonstrável em S e então, mediante seus equivalentes aritméticos, derivaríamos uma contradição na aritmética, o que feriria a sua consistência. Então, ele provou que $Con(S) \to \mathsf{G}$ é demonstrável na aritmética, o que acarreta que $Con(S)$ não pode ser, pois em caso contrário, por Modus Ponens, obteríamos uma prova de G, o que já sabemos não ser possível. Assim, segue-se do fato de que se a aritmética é consistente, a sua consistência não pode ser provada com um argumento capaz de ser internalizado em sua sintaxe, resultado que pode ser generalizado para sistemas formais S satisfazendo as condições já especificadas. Ou seja, como se diz informalmente, "a consistência (*a la* Gödel) do sistema S (e em particular, da aritmética) não pode ser provada com os recursos dele mesmo". Este resultado, como o do primeiro teorema, valem para teorias axiomáticas em geral que cumpram as condições das quais já falamos antes.

Cabe no entanto um alerta. É preciso algum cuidado quando dizemos, por exemplo, e de forma abreviada, que "segundo Gödel, não se pode provar a consistência de uma teoria nela mesma", e foi por isso que colocamos o adendo "*a la* Gödel" na frase entre aspas do final do parágrafo anterior. Como vimos, para que isso aconteça a teoria em questão deve cumprir os requisitos enfatizados acima, mas isso ainda não é tudo. Há várias formas de exprimir a consistência de um teoria, e isso também precisa ser devidamente qualificado. Sabemos que se m é o número de Gödel de uma contradição, como $0 = 0 \land 0 \neq 0$, então $\forall x \neg Dem(x, m)$ diz informalmente que não há uma prova na aritmética dessa contradição. Gödel mostrou que $\forall x \neg Dem(x, m)$ (que é a fórmula de Gödel para exprimir a consistência da aritmética) não é derivável na aritmética (ou seja, se admitida consistente, não se pode provar que não há uma prova de uma contradição nessa mesma aritmética). Essa é maneira de exprimir a consistência *a la* Gödel da qual falávamos. No entanto, lógicos como Solomon Feferman (1928–) e Andrzej Mostowski (1913-1975) mostraram que há sentenças aritméticas, representáveis na linguagem da aritmética, que igualmente expressam a propriedade de ser o número de Gödel de uma prova de uma contradição. Por exemplo, a sentença $\neg(Dem(x,y) \wedge \neg Dem(x,m))$ também representa a propriedade de que x é o número de Gödel de uma prova da fórmula como $0 = 0 \wedge 0 \neq 0$. Mas então a fórmula $\forall x \neg(Dem(x,m) \wedge \neg Dem(x,m))$, igualmente expressa a consistência da aritmética, e ela é derivável na aritmética, pois a fórmula que segue o quantificador é uma instância de uma tautologia, e portanto um teorema da lógica de primeira ordem.

Assim, a interpretação correta do segundo teorema da incompletude de Gödel é de que ele mostra que *certas fórmulas* expressando a consistência dos sistemas formais que cumprem as condições mencionadas não são prováveis com o recurso desses sistemas; outras, no entanto, podem sê-lo. Ademais, o próprio Gödel (e, independentemente, Gentzen) provaram com recursos extra-aritméticos a consistência da aritmética. Assim, mais uma vez, é preciso cuidado quando se fala sobre a consistência de sistemas matemáticos. Qualificar devidamente as asserções é algo que às vezes escapa ao discurso filosófico.

7.2.4 Verdade e indecidibilidade

Um outro resultado limitador dos formalismos é o teorema da *indefinibilidade do conceito de verdade*. Voltemos a considerar as teorias que cumprem as condições (i) e (ii) especificadas acima (página 128). Em particular, consideremos o caso da aritmética elementar como sendo o nosso sistema S (logo, a aritmética estará aqui desempenhando um duplo papel). Devido ao que se viu acima sobre a possibilidade de se 'falar' de certos fatos acerca do sistema S na linguagem da aritmética, que a linguagem da aritmetica tem a peculiaridade de que, nela podemos falar 'dela mesma', ou seja, ela envolve a sua própria sintaxe. Alfred Tarski (1901-1983) perguntou: pode uma tal linguagem exprimir o seu próprio conceito de verdade? Nas linguagens naturais, como o português, podemos falar da verdade e da falsidade das sentenças em português. Por exemplo, posso dizer (em português) que a sentença "O Brasil fica na Europa"é falsa, pois a sentença "A sentença 'O Brasil fica na Europa' é falsa"é uma frase em português. Mas isso traz inconvenientes, como expressa o famoso (desde a antiguidade grega) *paradoxo do mentiroso*. Por exemplo, em português eu posso formular a seguinte sentença: "Eu estou mentindo". Admitindo que esta sentença é verdadeira, então (como se presume) ela expressa aquilo que é, ou seja, algo 'verdadeiro'. Mas este 'fato' é que eu estou mentindo, ou seja, dizendo uma falsidade. Como o que eu disse foi precisamente essa sentença, ela tem que ser falsa. Por outro lado, se a sentença é falsa, então ela afirma aquilo que é, e ela deve conseqüentemente ser verdadeira. Em resumo, a sentença em questão é verdadeira se e somente se for falsa, e disso facilmente se deriva uma contradição.

Tarski percebeu que tais linguagens, que chamava de 'semanticamente fechadas' (ou seja, que expressam alguns de seus conceitos semânticos como verdade e denotação), dão origem a contradições, se assumirmos os pressupostos da lógica (e da semântica) clássica. Mas, o que acontece com a linguagem da aritmética? A analogia entre a existência de sentenças indecidíveis e o paradoxo do mentiroso já havia sido mencionada pelo próprio Gödel em seu trabalho de 1931. Com efeito, a sentença G diz dela mesma que ela não é demonstrável (em um adequado sistema S), enquanto que no paradoxo do mentiroso o que se diz é que uma certa sentença não pode ser verdadeira. Assim, se os conceitos de demonstrabilidade e de verdade se equivalessem, da sentença G de Gödel derivaríamos uma contradição na aritmética. Portanto, se assumimos que a aritmética é consistente, *verdade* e *demonstrabilidade* não podem ser conceitos equivalentes.

Em outros termos, suponha que temos uma enumeração de todas as sentenças da linguagem de S, digamos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$. Os números de Gödel dessas sentenças sendo respectivamente $1, 2, \ldots$. Tarski mostrou que se houvesse uma fórmula $T(x)$, com uma única variável livre x, exprimível na linguagem da aritmética, que expresse que a sentença com número de Gödel x é demonstrável, então tendo em vista o critério de adequação material do conceito de 'verdade' (que ele expresse o que de fato ocorre), poderíamos formar a seguinte sentença an linguagem do nosso sistema:

$$(\mathsf{T}) \quad T(n) \leftrightarrow \alpha_n.$$

Então, usando as técnicas de Gödel de seu trabalho de 1931, Tarski mostrou que existe um número n tal que $\alpha_n \leftrightarrow \neg T(n)$ é um teorema da aritmética. Ou seja, existe uma sentença, dada pelo seu número de Gödel, que expressa que ela própria não é verdadeira, o que juntamente com a expressão (T) acima dá $T(n) \leftrightarrow \neg T(n)$, uma contradição.

Isso mostra, como evidenciou Tarski, que o predicado T somente pode ser definido na metalinguagem do sistema S.

Disso resulta que há, portanto, uma outra forma de incompletude da aritmética (e de certos outros sistemas formais em geral), além daquela que afirma que nem todas as sentenças verdadeiras são demonstráveis, a saber, aquela que diz que nem todos os conceitos relevantes podem ser definidos na sua linguagem, como o conceito de verdade.

Assim, podemos resumir o resultado de Tarski da seguinte forma: se tivermos um sistema formal S que cumpra certas condições (essencialmente, aquelas acima), se S for consistente, não há nenhuma fórmula da linguagem de S que expresse a noção de sentença verdadeira de S (em uma dada interpretação), e o mesmo ocorre com outros conceitos semânticos, como o de satisfação.

O interessante é que se pode obter (demonstrar) os teoremas de Gödel a partir desse resultado de Tarski, se este for convenientemente modificado. É discutível se Gödel conhecia o resultado de Tarski antes deste tê-lo publicado. Aparentemente, este é o caso, como se pode ver pelas leituras das suas obras (Gödel 1986), mas este é um ponto histórico ainda não devidamente exclarecido. Uma conjectura a este respeito é a que Gödel não usou o conceito de verdade por este ser demasiadamente controverso. Sendo um lógico extremamente cauteloso, Gödel não queria deixar dúvidas sobre a validade de seus resultados, em especial abrindo a possibilidade de uma discussão acerca do nebuloso conceito de verdade. De fato, esta tese é defensável tendo em vista a polêmica gerada pelo trabalho de Tarski acerca da sua 'definição' do conceito de verdade entre os membros do Círculo de Viena, do qual Gödel fazia parte.[4]

Dentre os resultados mais expressivos relativos à lógica clássica desse período, é preciso ainda nos referirmos à decidibilidade da lógica elementar. Lembremos que, informalmente, um sistema S é *decidível* se existe um procedimento efetivo (em suma, um algoritmo) que permita dizer, dada uma fórmula de S, se ela é ou não teorema de S. O sistema é *indecidível* se não houver tal algoritmo. O lógico norte-americano Alonso Church provou em 1936 que a lógica de primeira ordem (com ou sem igualdade) é indecidível. Ou seja, não há um tal algoritmo e, mais forte ainda, ele não poderá ser construído. Esses resultados se estendem a vários outros sistemas lógicos, não-clássicos e de ordem superior. A lógica proposicional clássica, no entanto, é decidível, como vimos; o chamado 'método das tabelas de verdade' é um *método de decisão* para esta lógica. De fato, dada uma fórmula qualquer A, fazemos a sua tabela-verdade. Como A por hipótese é formada por um número finito de símbolos (devido à definição de fórmula anteriormente vista), conterá um número finito de variáveis proposicionais, e assim a tabela-verdade conterá um número finito de linhas. Um programa de computador pode então checar se a dada fórmula é ou não uma tautologia. Se for, pelo teorema da completude, será um teorema de tal cálculo; caso contrário, não é teorema. Um outro sistema decidível é a lógica *monádica* de primeira ordem, ou seja, a lógica elementar que encerra unicamente predicados de aridade 1. Não é difícil tornar suficientemente precisas essas palavras.

Saliente-se mais uma vez que os teoremas de incompletude e suas conseqüências acham-se sujeitos a certas qualificações, que procuramos expressar pelas condições (i) e (ii) mencionadas anteriormente, mas se tratarmos de aritméticas baseadas em lógicas não-clássicas (aritméticas hererodoxas, como a aritmética relevante), esses resultados

[4]Quanto à receptividade do trabalho de Tarski, isso é bem claro na sua biografia Feferman & Feferman 2004, pp. 92ss.

nem sempre permanecem aplicáveis.[5]

7.3 Metamatemática da aritmética elementar

A aritmética elementar é uma teoria que merece atenção especial. Em virtude do axioma `AP3` ser na realidade um esquema de axiomas, a teoria $\mathcal{AP}$ não é finitamente axiomatizável (ou seja, não pode ser axiomatizada por um número finito de postulados definidos efetivamente). Os teoremas de incompletude de Gödel mostram que a aritmética elementar não é completa; assim, se consistente, a aritmética elementar apresenta sentenças que são verdadeiras relativamente ao modelo standard, mas que não podem ser demonstrados ou refutados (ou seja, a sua negação seja demonstrada) por seus postulados. Mais ainda, $\mathcal{AP}$ é *essencialmente incompleta*, no sentido de que nenhuma extensão efetiva de $\mathcal{AP}$ (uma extensão de uma teoria elementar T é uma teoria T' tal que todo teorema de T seja teorema de T') é completa (para provar este fato, é preciso assumir a chamada Tese de Church*).

Alonso Church provou também em 1936 que $\mathcal{AP}$ é *indecidível*, ou seja, o conjunto de seus teoremas é um conjunto indecidível (isso significa que não há, e nem pode haver, procedimento efetivo para se determinar se uma dada fórmula de $\mathcal{AP}$ é um teorema de $\mathcal{AP}$, e B. Rosser depois provou que o mesmo se dá para qualquer extensão consistente de $\mathcal{AP}$. Em outras palavras, $\mathcal{AP}$ é *essencialmente indecidível*.

Um outro resultado notável sobre $\mathcal{AP}$, já mencionado anteriormente, é que ela é uma teoria que *não é categórica*, ou seja, nem todos os seus modelos são isomorfos. Para vermos isso de modo breve, procedemos da seguinte maneira. Sabemos que $\mathcal{AP}$, suposta consistente, admite um modelo infinito, o modelo standard por exemplo. Considere agora a teoria $\mathcal{AP}'$ que é obtida de $\mathcal{AP}$ acrescentando-se uma nova constante individual a à sua linguagem, junto com os seguintes novos axiomas não lógicos: $a \neq ◎$, $a \neq S(◎)$, $a \neq SS(◎)$, etc. Suponha agora que $\mathcal{AP}$ é consistente. Ora, se tomarmos um conjunto *finito* qualquer de axiomas de $\mathcal{AP}'$, é fácil ver que ele tem modelo; por exempo, tomamos (ademais dos axiomas de $\mathcal{AP}$), os três primeiros novos axiomas de $\mathcal{AP}'$. Podemos exibir um modelo para este conjunto de axiomas tomando por exemplo $a = SSS(◎)$ (ou qualquer outro objeto não mencionado pelos axiomas escolhidos).

Mas, se todo subconjunto finito de de um conjunto infinito de fórmulas (os axiomas de $\mathcal{AP}'$) tem modelo, pelo teorema da compacidade, o conjunto infinito todo tem modelo. Portanto, há um modelo de $\mathcal{AP}'$ (que será também modelo de $\mathcal{AP}$) no qual há um

[5] A aritmética relevante é baseada em uma lógica não-clássica denominada de 'lógica relevante'. Como mostraram Meyer e Routley, embora ela seja incompleta, nela se pode provar que nem todas as suas fórmulas são teoremas -ela não é *trivial*. Esses assuntos, no entanto, extrapolam o alcance deste livro.

a tal que $a \neq \circledcirc$, $a \neq S(\circledcirc)$, $a \neq SS(\circledcirc)$, etc. Note-se que nesse modelo estarão também os objetos $S(a)$, $SS(a)$, etc. Claro que esse modelo não é isomorfo ao modelo standard. É chamado de *modelo não-standard* de $\mathcal{AP}$. Na verdade, há infinitos outros, pois podemos construir $\mathcal{AP}''$ acrescentando à linguagem de $\mathcal{AP}'$ uma nova constante $b \neq a$, etc. O estudo desses modelos é chamada de *aritmética não-standard*.

A existência dos modelos não-standard se deve fundamentalmente ao fato de que para a lógica de primeira ordem vale o teorema da compacidade.

7.4 Discussão adicional sobre modelos

Os modelos das teorias elementares que temos apontado acima, como por exemplo o modelo standard da aritmética elementar, são estruturas que podem ser obtidas a partir dos postulados de uma teoria de conjuntos como ZF. Em outras palavras, são *conjuntos* de um certo tipo (na verdade, são formados por conjuntos, relações e operações entre os elementos desses conjuntos, etc., mas não deixam de ser *conjuntos*). Vimos por outro lado que pelo teorema da completude, qualquer teoria elementar consistente tem um modelo, e que o segundo teorema de incompletude diz, em resumo, que não podemos provar a consistência de uma teoria (que satisfaça certas condições) com os recursos dela mesma.

Ora, suponha agora que estamos interessados em ZF, na formulação dada acima, que é uma teoria elementar. Suponha que ZF é consistente. Logo, terá modelo. Porém, se um tal modelo for um conjunto de ZF, como o caso acima, estaremos construindo um modelo (logo, provando a consistência) de ZF *em* ZF, violando o segundo teorema da completude. Como sair disso? A resposta é que não se pode sair disso, apenas aceitar o fato de que a consistência de ZF não pode ser provada a não ser *relativamente* a outras teorias (por exemplo, construindo-se um modelo de ZF nessas teorias), mas fica-se sempre na dependência da consistência dessas outras teorias. De maneira *absoluta* (isto é, sem ser relativamente a outra teoria), a consistência de ZF não pode ser demonstrada. Apenas para mencionar, anteriormente provamos a *consistência absoluta* do cálculo proposicional clássico sem recorrer a qualquer outra teoria, simplesmente mostrando (na metamatemática, que pode ser ZF) que existe uma fórmula da linguagem de $\mathbb{P}$ que não é teorema de $\mathbb{P}$, mas não podemos fazer isso com a própria ZF.

Filosoficamente, este resultado é deveras interessante. Como em ZF podemos 'construir' toda a matemática padrão (desde que se qualifique devidamente isso, como o caso envolvendo categorias exemplifica), conclui-se que não pode haver garantia de que a matemática usual é consistente (no sentido de que um dia não se vá derivar uma contradição). No entanto, há um resultado que, por assim dizer, nos dá a devida tranquilidade de que podemos operar com a matemática usual sem este tipo de medo. Resumidamente, é o seguinte: definindo-se adequadamente o *tamanho* de uma prova (formal) em ZF por meio de um número natural, pode-se mostrar que, se for derivada uma contradição em ZF, o tamanho dessa prova será tão grande que ela não poderá ser obtida mesmo que façamos uso dos mais potentes computadores. De certo modo, este resultado diz ao matemático que ele pode ir trabalhando. Se a matemática padrão for inconsistente, ele não vai mesmo constatar este fato durante a sua vida. Para mais detalhes técnicos sobre este ponto, ver Corrada 1990.

O fato descrito aponta para uma dificuldade adicional relativamente ao conceito de verdade, já antecipado anteiormente. Podemos construir seeqüências de conjuntos para usar a noção de satisfatibilidade, mas a expressão 'a seqüência *s satisfaz* uma dada fórmula' só pode ser expressa na metamatemática de ZF (recorde que, em essência ela *era* a matematemática das outras teorias elementares). No entanto, ainda que a metalinguagem de ZF possa ser formalizada em ZF, logo o conceito de satisfatibilidade de uma fórmula pode ser formalizado, o domínio de uma interpretação para a linguagem de ZF não pode ser um conjunto. No mínimo, seria uma *classe própria*, um objeto de outra teoria, como a teoria de conjuntos de von Neumann, Bernays e Gödel (chamada de NBG).[6]

Assim, é preciso perceber que o conceito de verdade para uma teoria como ZF não coincide com aquele para teorias formulávei *em* ZF, como a aritmética elementar ou a teoria de grupos. Problema semelhante ocorre com a teoria das categorias. Um *modelo* para a teoria elementar das categorias teria que comportar objetos como 'a coleção de todos os grupos', ou 'a coleção de todos os conjuntos' (que são as categorias). Ora, tais totalidades não existem como conjuntos de ZF (não podem ser obtidos de seus axiomas). Porém, como já dito, é possível obter certas extensões de ZF, incorporando *universos*, que permitam construir modelos para a teoria de categorias. Este assunto, no entanto, não será tratado aqui (ver Brignole & da Costa 1971).

7.5 Notas e complementos

<u>I. Aritmética de Robinson (AR)</u> A linguagem do sistema AR consta das seguintes categorias de símbolos: um conjunto infinito enumerável de variáveis individuais, símbolos auxiliares (parênteses e vírgula), conectivos lógicos, quantificadores, igualdade, duas constantes individuais 0 e 1, um símbolo funcional unário S (sucessor) e dois símbolos funcionais + e $\cdot$ Os conceitos de termo e de fórmula são introduzidos como de hábito. Os axiomas de AR são os seguintes, que valem para todos x e y: (1) $0 \neq Sx$, (2) $Sx = Sy \to x = y$, (3) $x \neq 0 \to \forall y(x = Sy)$, (4) $x + 0 = x$, (5) $x + Sy = S(x + y)$, (6) $x \cdot 0 = 0$, (7) $x \cdot Sy = x \cdot y + x$. Em suma, é um subsistema

[6]Uma exposição de NBG acha-se no capítulo 5 de Krause 2002.

da aritmética de primeira ordem (esta última ainda incorpora ainda o princípio da indução). AR é recursivamente axiomatizável, e todas as funções e relações recursivas são representáveis em AR, cumprindo, assim os requisitos do primeiro teorema de Gödel. Como AR é consistente, este teorema se aplica, de forma que AR é essencialmente indecidível.

II.Paradoxos da teoria intuitiva de conjuntos A teoria de conjuntos, como formulada por Georg Cantor, é contraditória. No final do século XIX e no início do século XX, varios paradoxos foram exibidos, o que incentivou a busca por uma base mais sólida dessa teoria, via a sua axiomatização, realizada por Ernst Zermelo em 1908. O interessante é que se percebeu que a teoria de Cantor podia ser reconstruída de várias formas, que resultavam não equivalentes entre si. Resulta daí que não há *a* teoria de conjuntos, motivo pelo qual é recomendável, em certas discussões, que se especifique com qual delas se está trabalhando. Um outro tipo de 'solução' ao problema dos paradoxos foi proposta originalmente por Bertrand Russell, a teoria dos tipos. Tanto nas versões axiomatizadas da teoria de conjuntos como na teoria dos tipos de Russell, os paradoxos conhecidos não podem ser derivados.

III. O conjunto dos números reais não é enumerável É suficiente provar que o intervalo aberto $(0, 1)$ não é enumerável. Para isso, recorremos ao fato de que todo número real deste intervalo pode ser escrito na forma $0, x_1x_2x_3\ldots$, a sequência depois da vírgula sendo infinita. Por exemplo, $0, 5$ *é o mesmo número* que $0, 4999\ldots$. Isso posto, admita por absurdo que haja uma enumeração dos números reais desse intervalo (ou seja, estamos admitindo que o intervalo *é* enumerável). A lista poderia ser então assim:

$$\begin{array}{l} 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ 0, a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ \vdots \end{array}$$

Portanto, de acordo com nossa hipótese, nesta lista deverão estar *todos* os números reais pertencentes ao intervalo (0,1). Vamos mostrar que isso não é verdade, exibindo um número desse intervalo que *não está* na lista acima. O tal número, que chamaremos de b, será da forma $0, b_1b_2b_3\ldots$, definido do seguinte modo: se $a_{11} = 1$, faça $b_1 = 2$, e faça $b_1 = 1$ em caso contrário. Assim, $b \neq 0, a_{11}a_{12}a_{13}\ldots$, pois $b_1 \neq a_{11}$ por definição. Depois, fazemos $b_2 = 1$ se $a_{22} = 2$ e $b_2 = 1$ em caso contrário. Portanto, $B \neq 0, a_{21}a_{22}a_{23}\ldots$ pois $b_2 \neq a_{22}$. Procedendo deste modo, chegamos a um número real que pertence ao intervalo e que não é nenhum dos números da lista. Logo, o conjunto (0,1) não é enumerável. Este processo é conhecido como *argumento diagonal*, devido a Cantor, e tem inúmeras aplicações em matemática.

IV. A hipótese do contínuo Vimos anteriormente que o conjunto dos números reais não é enumerável. Logo, o seu cardinal, denotado $\mathfrak{c}$, é maior do que $\aleph_0$. Na teoria de conjuntos ZF, pode-se provar que há cardinais cada vez maiores, $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots$. A hipótese do contínuo (HC) diz que $\mathfrak{c}$ é precisamente $\aleph_1$. Intuitivamente, isso significa que não há conjunto de números naturais que tenha cardinalidade *entre* $\aleph_0$ e $\aleph_1$. A prova de que HC é independente dos postulados de ZF (supostos consistentes) foi feita por P. J. Cohen em 1963 e por K. Gödel em 1938.

Capítulo 8

Algumas lógicas importantes

NESTAS NOTAS, APRESENTAREMOS alguns sistemas lógicos (ou simplesmente *lógicas*) importantes do ponto de vista histórico e que no entanto ainda têm destacada importância tanto no aprendizado quando para a disciplina lógica em sí (como a lógica intuicionista de Brouwer-Heyting).

Iniciamos com uma pequena revisão histórica que motivará a introdução dos sistemas que nos interessam. No final do século XIX, a teoria de conjuntos, criada por Georg Cantor a partir de interesses matemáticos que o levaram a estudar conjuntos com infinitos elementos como totalidades acabadas (infinito *atual*), foi vista como um alicerce sobre o qual a teoria dos números (aritmética) podia ser edificada. Em suma, os conceitos básicos da Aritmética de Peano, a saber, número natural, zero e sucessor de um número natural, podiam ser definidos a partir da noção de conjunto, o que mudava, por assim dizer, a base da matemática, que se buscava à época. Com efeito, a necessidade de se definir adequadamente coisas como número real, função, conjuntos finitos e infinitos etc., levou os matemáticos a perceber que esses conceitos fudamentais da Análise Matemática (algo como a teoria do Cálculo Diferencial e Integral) dependiam de um adequado entendimento do conceito de número natural. Esse tipo de estudo originou um movimento, que foi denominado de Aritmetização da Análise. Ora, se o conceito de conjunto se mostrava ainda mais básico que o de número, isso deveria ser investigado.

Porém, matemáticos influentes e importantes como Leopold Kronecker e Henri Poincaré, dentre outros, não concordavam com essa redução do conceito de número ao de conjunto. Kronecker, por exemplo, é lembrado por ter dito que Deus nos deu os números naturais: todo o restó seria produto humano. Ou seja, ele não aceitava que se pudesse encontrar algo ainda mais básico que a idéia de número natural. Poincaré, na mesma linha, considerava a indução matemática (um dos axiomas de Peano) como a intuição básica da matemática, sobre a qual essa disciplina deveria ser erigida. Porém, a teoria de conjuntos não recebia restrições apenas do ponto de vista conceitual e filosófico: ela era contraditória. O surgimento de vários paradoxos puseram a teoria de Cantor em cheque. Mesmo assim, a sua capacidade redutora era relevante, a ponto de Hilbert dizer que, apesar dessas objeções, ninguém nos expulsaria do paraíso criado por Cantor.

O matemático holandês L. E. J. Brouwer endossou as críticas de Krnonecker à matemática cantoriana e a defesa de Poincaré da indução matemática como instrumento irredutível do raciocínio matemático. Em 1912, apresenta em sua tese de doutorado os fundamentos do *intuicionismo*, que desenvolveria nos anos subsequentes. Em linhas gerais, as principais idéias envolvidas, de grande importância para a história da lógica e do pensamento do século XX, são as seguintes.

A concepção brouweriana, pode-se dizer, comporta três fases. A primeira, inicial e crítica das concepções vigentes, vai até a década de 20. A segunda, que se inicia nos anos 20, é a fase construtiva, na qual inicia a reconstrução da matemática nos moldes idealizados pela filosofia intiocionista. A terceira, da década de 30, é a fase mais filosófica. Para entrender o pensamento de Brouwer, é preciso primeiro saber que, na matemática usual, quando desejamos provar que existe um objeto x que tem uma certa propriedade P, o que em símbolos escreve-se $\exists x P(x)$, via de regra admitimos que *não exista* um tal objeto, ou seja, assumimos a negação daquilo que estamos tentando provar (em símbolos, supomos $\neg\exists x P(x)$). A partir dessa hipótese, e com os recursos da teoria na qual estamos trabalhamos (seus postulados), derivamos duas proposições contraditórias (uma sendo a negação da outra), digamos Q e $\neg Q$. No âmbito da lógica clássica, isso nos permite afirmar que derivamos uma contradição $Q \wedge \neg Q$ em nosso sistema (uma contradição é a conjunção –simbolizada por $\wedge$– de uma proposição e sua nega ção). Ora, supõe-se que nenhuma proposição verdadeira possa implicar uma contradição, logo, a nossa hipótese tem que ser falsa e, consequentemente, a proposição original, que queríamos provar, é verdadeira.

Esse tipo de argumento, chamado de *redução ao absurdo*, remonta à antiguidade. Euclides, nos seus *Elementos*, fazia uso sistemático de tais 'provas indiretas'. Por exemplo, provou que existem infinitos números primos usando esse recurso. Por curiosidade, vejamos como se dá a prova que remonta a Euclides, já que ela é simples e nos ajudará a explicar as objeções de Brouwer. Suponha por absurdo que existam finitos números primos (um número primo é um número inteiro maior do que 1 e que é divisível unicamente por ele mesmo e pela unidade). Seja a o maior número primo, que existe pela nossa hipótese, e definamos $b = (2.3.5.7.\ldots.a) + 1$. Obviamente, b é maior do que a. Será que q é primo? Ser for, haverá um número primo maior do que a, que supusemos ser o maior deles, logo não poderá haver tal maior primo e a prova será alcançada. Mas b é primo ou não é primo (terceiro excluído). Se não é primo, é *composto*, e portanto é divisível por algum primo menor do que ele –todo número composto é produto de primos elevados a certas potências, como $90 = 2.3^2.5$. Porém, dividindo b sucessivamente pelos primos $2, 3, 5, \ldots, a$, sempre encontramos resto 1. Portanto, b não é composto e então tem que ser primo, e é maior do que a.

Bouwer não aceitava esse tipo de demonstração. Se chamarmos a nossa afirmativa de que existem infinitos primos de A, o que provamos acima, diria ele, é que a negação de A, que assumimos como hipótese, é falsa, ou seja, provamos que $\neg\neg A$ é verdadeira. Mas isso, para Brouwer, não implica A. Ou seja, para ele, não seria lícita uma das formas da Lei da Dupla Negação, que vale na lógica clásssica, a saber, $\neg\neg p \to p$. O motivo seria o de que para aceitarmos que uma prova de $\neg\neg A$ fornecesse uma prova de A temos que aceitar que ou sempre se tem uma prova para A ou para a sua negação, $\neg A$. Por essa hipótese, uma vez que não chegamos a uma prova de $\neg A$ (ou seja, que não existem finitos números primos), somos obrigados a reconhecer que A é que tem que ser o caso (ou seja, que existem infinitos deles). Mas essa suposição é exatamente o Princípio do Terceiro Excluído. Brouwer, no entanto, não o aceitava tampouco. Sua crença na impossibilidade de se admitir o infinito atual (que remonta, como vimos, a Kronecker e outros), conduzia-o a supor que, uma vez que não podemos 'esgotar' um conjunto infinito, nunca saberemos se A é ou não o caso. Portanto, o terceiro excluído tampouco pode valer.

Para Brouwer, a matemática era uma atividade essencialmente mental. O formalismo matemático e a lógica seriam decorrentes dessa atividade, e não precisavam, ou não poderiam, ser devidamente explicitados, ainda que ele tenha se referido à validade da lei $\neg p \to \neg\neg\neg p$ (intuitivamente, se temos uma prova da negação de P, então é falso que não tenhamos uma prova da negação de p). O que há, segundo ele, é uma intuição fundamental da unidade, do 1. Ou seja, temos a intuição do que seja *um* objeto. Essa intuição, aplicada iteradamente, nos dá as intuições do dois (dois objetos), do três e etc., mas nunca de uma totalidade infinita como algo acabado (infinito atual). O que há em matemática é o aquilo que pode ser 'construído' pela inteligência humana a partir dessa intuição básica, e toda intuição de totalidades (conjuntos) infinitos é ilusória. O infinito, para ele, só existe *em potência*, pois podemos construir (nesse sentido) tantos objetos quantos quisermos, mas nunca uma totalidade infinita deles.

Por exemplo, podemos aceitar que exista um número natural maior do que qualquer número natural dado, pois temos a intuição de como alcançar esse número, bastando somar *uns* à unidade para alcançá-lo, ainda que isso demande um tempo consideravelmente longo. Mas isso não importaria para Brouwer; o que seria relevante é que temos a intuição de como proceder a 'construção' do número desejado. Acentuemos a diferença dessa concepção para com a matemática clássica com mais um exemplo.[1] Admita a decomposição decimal do número π. Geralmente escrevemos $\pi = 3,14159192\ldots$. Haverá uma seqüência de cem 9s na decomposição de π? Para um matemático 'clássico', ainda que não tenhamos como saber se há ou não uma centena de noves, essa afirmativa é verdadeira ou é falsa (terceiro excluído). Brouwer não aceitava esse fato, dizendo que a matemática clássica tem pressupostos errados. O que existe, para ele, é o que pode ser 'construído' pela inteligência humana, e não podemos fazer isso no caso dos cem noves. A lógica clássica, portanto, só se aplicaria para totalidades finitas; para conjuntos finitos como $X = \{0, 1, \ldots, n\}$, podemos sempre saber, para os elementos de X, se $\exists x P(x)$ ou $\neg\exists x P(x)$, onde P é uma propriedade que se aplica a números naturais, qualquer que seja o n, bastando que procedamos uma inspeção caso a caso, o que sempre podemos (idealmente) fazer por ser X um conjunto finito.

Assim, podemos resumir o ponto de vista brouweriano com as seguintes teses: (1) o que existe (em matemática) é aquilo que pode ser 'construído' pela mente humana; (2) a lógica tradicional está errada, não traduzindo a concepção científica da matemática, e (3) a intuição é a chave para se testar a validade de qualquer afirmação. Essa intuição ou é *direta*, como por exemplo, que $2 \neq 1$, ou pode ser construída uma prova na qual cada passo seja intuitivo. Assim, não se pode afirmar coisas como a irracionalidade de $\sqrt{2}$, pois uma tal prova não é construtiva (usa a redução ao absurdo). Para Brouwer, não temos qualquer intuição de π ou de $\sqrt{2}$ nos moldes como temos de 1, 2 ou 5. Números como π e $\sqrt{2}$ são meras abstrações, não pertencem à nossa experiência.

As críticas do matemático holandês são mais contundentes. Por exemplo, admita que pretandamos edificar a aritmética a partir da lógica, como apregoava o *logicismo*. Ora, se começamos dizemos que temos dois conectivos lógicos, estamos pressupondo que sabemos o que é *dois*, logo, a própria aritmética que queremos edificar. Assim, como podemos fundamentar a aritmética na lógica, se esta pressupõe aquela? Para Brouwer, o próprio uso de uma linguagem pressupõe a aritmética, e somente a intuição pode justificar as passagens que fazemos, como quando afirmamos que, de uma prova de α e de uma prova de β, temos uma prova da conjunção $\alpha \wedge \beta$. A matemática, a começar pela aritmética, para ele não tem qualquer *base*; ela é autosuficiente, a única coisa que independe de todas as outras.

Assim, para edificar a matemática, parte do 1 (da unidade), do qual dizia termos

[1] O leitor deve entender que a descrição dada aqui da filosofia brouweriana é superficial.

a intuição, que abstraímos da experiência concreta (de *uma* coisa). Podemos repetir a criação dessa unidade, obtendo qualquer número natural que desejarmos, mas nunca a totalidade deles. Brouwer procede edificando os números inteiros e os racionais da forma usual, como se faz na matemática padrão (ver Enderton 1977). Quanto aos números reais, no entando, a coisa muda de figura. As construções usuais, por meio de cortes de Dedekind, seqüências de Cauchy ou outra são *impredicativas*, assumindo coisas que são contrárias à filosofia intuicionista (veja em Notas e Complementos a este capítulo: Impredicatividade). Assim, o que faz é erigir o que chama de números reais, que não vai coincidir com os reais que conhecemos da matemática padrão. Por exemplo, na matemática intuicionista toda função real de variável real é contínua (no sentido intuicionista).[2]

Exercício 8.0.1 *Acompanhe o esquema de demonstração abaixo (lícita na matemática usual) de que existem números irracionais a e b tais que a^b é racional. Em seguida, destaque quais seriam os passos que Brouwer reprovaria.*
Demonstração: Suponha que $a = b = \sqrt{2}$. Então a^b é racional ou é irracional (ou seja, não é racional). Se a^b for racional, temos aí os dois números solicitados. Se a^b for irracional, faça $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$. Então, como para tais novas escolhas se tem que $a^b = 2$ (que é racional), temos os dois números pedidos, exatamente os dessa nova escolha.∎

Exercício 8.0.2 *Justifique o motivo pelo qual $\alpha \vee (\alpha \to \beta)$, que é uma tautologia clássica, não é válida intuicionisticamente. (ver da Costa 1980, p. 141)*

8.1 A idéia básica da lógica intuicionista

Chamaremos de *suposição* intuicionista, contrariamente a uma *proposição* na lógica clássica, que sempre é verdadeira ou falsa, a uma declaração que pode ou não ser provada ou refutada por meio de uma construção mental. No caso de haver uma prova construtiva para uma suposição α, ela será verdadeira (intuicionisticamente), e se houver uma prova construtiva para sua negação, ela será falsa (intuicionisticamente), e então teremos $\neg\alpha$ como intuicionisticamente verdadeira. Designaremos por α, β etc. as suposições e usaremos símbolos de pontuação de modo habitual. Então, uma conjunção $\alpha \wedge \beta$ será verdadeira (intuicionisticamente)[3] se e somente se ambas forem verdadeiras, ou seja, se

[2] O desenvolvimento é demasiadamente técnico para ser aqui apresentado. Sugerimos ao interessado uma primeira leitura do capítulo 2 de da Costa 1992. Para detalhes mais técnicos, ver ....

[3] Omitieremos este fato grande parte das vezes doravante.

há provas construtivas tanto para uma quanto para a outra, e será falsa quando tivermos uma construção para $\neg\alpha$ ou para $\neg\beta$ ou ambas. Do mesmo modo, $\alpha \vee \beta$ será (intiocionisticamente) verdadeira se temos uma prova construtiva para α ou uma prova para β, ou ambas, e falsa se tivermos provas para ambas as negações. Um condicional $\alpha \to \beta$ é verdadeiro em sentido intuicionista se temos um método construtivo tal que, de uma prova construtiva para α, podemos obter uma prova construtiva para β. A equivalência $\alpha \leftrightarrow \beta$ é interpretada de modo óbvio. Como se pode ver facilmente, não há tabelas-verdade, e os conectivos não podem ser definidos uns a partir dos outros como na lógica clássica (exceto $\leftrightarrow$, como mostrou McKinsey).

8.1.1 O cálculo minimal e a lógica intuicionista de Brouwer-Heyting

O primeiro a propor uma lógica visando dar conta das intuições brouwerianas foi o matemático russo A. Kolmogorov, em 1925. Seu sistema aparecerá abaixo. Depois dele, vieram outros como Johansson e, principalmente Heyting, que propôs um sistema em 1930 que veremos abaixo. Como essas lógicas nos interessam, vê-las-emos com algum detalhe, elaborando adequados sistemas formais.

Os sistemas que nos interessam têm como primitivos os conectivos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ e $\leftrightarrow$, e modus ponens como única regra de inferência. Os axiomas a serem considerados são os seguintes:

a) Axiomas 1-3 da lógica proposicional implicativa intuicionista

$(\to_1)$ $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

$(\to_2)$ $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$

P) Axioma P: lei de Peirce, $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$. Os axiomas a) mais a lei de Peirce e modus ponens dão a lógica proposicional implicativa clássica.

b) Axiomas 4-6 da equivalência, que com a) dão a lógica intuicionista implicativa com equivalência. Se acrescentarmos a lei de Peirce, obtemos a lógica implicativa com equivalência clássica.

$(\leftrightarrow_1)$ $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha \to \beta)$

$(\leftrightarrow_2)$ $(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\beta \to \alpha)$

$(\leftrightarrow_3)$ $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to (\alpha \leftrightarrow \beta))$

c) Axiomas 7-9 da conjunção. Os postulados a) e c) (mais modus ponens) dão a lógica proposicional intuicionista implicativa conjuntiva.

$(\wedge_1)\quad \alpha \wedge \beta \to \alpha$

$(\wedge_2)\quad \alpha \wedge \beta \to \beta$

$(\wedge_3)\quad \alpha \to (\beta \to \alpha \wedge \beta)$

d) Axiomas 10-12 da disjunção. Os postulados a), c) e d) (mais modus ponens) dão a lógica intuicionista positiva.

$(\vee_1)\quad \alpha \to \alpha \vee \beta$

$(\vee_1)\quad \beta \to \alpha \vee \beta$

$(\vee_1)\quad (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

Na lógica intuicionista positiva, podemos definir a equivalência e mostrar que as fórmulas em b) são teoremas dessa lógica. A lei de Peirce não é teorema. O curioso é que, apesar de não figurar nenhum símbolo $\neg$ nessa lei, a sua prova depende de um fato envolvendo a negação que ainda não pode ser derivado até aqui, a saber, $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

e) Axioma 13 da negação, dito negação ao absurdo intuicionista: $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

De a) a e), exceptuando-se a lei de Peirce, (definindo-se ou não a equivalência), temos a lógica intuicionista minimal de Johansson-Kolmogorov, denotada K. Esse sistema tem uma propriedade interessante, pois nele de duas fórmulas contraditórias não se segue qualquer fórmula, mas a negação de qualquer fórmula. Assim, como teremos oportunidade de comentar posteriormente, K é um sistema paraconsistente.

f) Axioma 14 da negação, lei de Scotus: $(\neg_1)\quad \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ ou $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$. Os axiomas a)-f), exceptuando-se a lei de Peirce, mais modus ponens, dão a lógica proposicional intuicionista de Brouwer-Heyting, BH.

Com esse novo axioma, de duas proposições contraditórias derivamos qualquer proposição.

g) Axioma 15: terceiro excluído, $\alpha \vee \neg\alpha$. Acrescentando este novo axioma, obtemos a lógica proposicional clássica. Aqui, a lei de Peirce é teorema, bem como $\neg\neg\alpha \to \alpha$.

Alternativamente, para obter a lógica clássica, poderíamos ter usado $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ no lugar de $\alpha \vee \neg\alpha$, que agora poderia ser derivado como teorema.

Mostraremos a seguir alguns fatos sobre esses sistemas, alguns já apontados entremeio os axiomas. O primeiro é que, no cálculo minimal K, podemos derivar o Princípio da Contradição na forma $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. A derivação é a seguinte: (1) $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \alpha$ pelo axioma $\wedge_1$; (2) $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$, idem; (3) $(\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$, pelo axioma $\rightarrow_1$; (4) $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, por (2),(4) e modus ponens.

Um segundo fato é o que já afirmamos acima, de que em K não podemos derivar uma fórmula qualquer (de sua linguagem), mas a negação de uma fórmula qualquer. Com efeito, provaremos primeiro que $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \neg\beta$ para α e β quaisquer, o que dá a última afirmativa. O esquema da derivação é o seguinte: (1) $\alpha, \neg\alpha, \beta \vdash \alpha$, já que $\vdash$ é monotônico; (2) $\alpha, \neg\alpha, \beta \vdash \neg\alpha$, pelo mesmo motivo; (3) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta \rightarrow \alpha$, pelo Teorema da Dedução, que vale em K; (4) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta \rightarrow \neg\alpha$, idem; (5) $\neg\beta$, pela aplicação de modus ponens duas vezes.

Para a primeira afirmativa, devemos mostrar que $\nvdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$. Para isso, utilizaremos as matrizes de Gödel, apresentadas em (Gödel 1932), que são as seguintes. Escolhemos um conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ de valores-verdade, com 1 como valor distinguido. Então, os valores verdade de $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$ e $\neg\alpha$ são dados do seguinte modo, onde a é o valor de α e b é o valor de β: $\min\{a, b\}$, $\max\{a, b\}$, 1 se $a \geq b$ e 0 se $a < b$, e n se $a \neq n$ e 1 se $a = n$. Basta agora constatar que todos os axiomas do cálculo K assumem valor distinguido para quaisquer escolhas de valores-verdade para as letras que neles aparecem, que modus ponens preserva esse valor e que $\alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$ não tem valor distinguido para pelo menos uma atribuição de valores-verdade. Por exemplo, tome $a = 1$ e $b = 2$.

Exercício 8.1.1 *Faça os detalhes do argumento acima de que* $\nvdash \alpha \wedge \neg\alpha \rightarrow \beta$.

Em 1929, Glivenko havia provado duas coisas que se relacionam ao cálculo proposicional intuicionista BH: (i) se α é demonstrável no cálculo proposicional clássico, então $\neg\neg\alpha$ é teorema de BH. Em outras palavras, BH prova a negação de qualquer tautologia clássica, e (ii) se $\neg\alpha$ é demonstrável no cálculo clássico, então $\neg\alpha$ é demonstrável em BH.

Na verdade, o que se disse no parágrafo anterior necessita qualificação. A rigor, não se pode provar *a mesma* proposição α em cálculos diferentes. O que há é uma *tradução* da linguagem de um na linguagem do outro, de modo que, quando se fala que α é demonstrável em ambos os cálculos, tratam-se na verdade de α e de sua tradução. No entanto, uma vez que se saiba disso, podemos continuar com o nosso linguajar mais simplificado.

Kolmogorov deu uma interpretação 'clássica' para os axiomas do sistema BH, imaginando que α, β etc. denotam problemas e que objetivamos resolver problemas. Então, $\alpha \rightarrow \beta$ diz que, se temos uma solução para α, a partir dela podemos obter uma solução para β. Os outros conectivos recebem uma interpretação evidente. Da Costa dsu uma outra interpretação, a partir da idéia de que temos hipóteses em ciência representadas por α, β, etc. Assim, $\alpha \rightarrow \beta$ di que da veracidade da hipótese α, obtemos evidência da veracidade de β. Obiamente, outras interpretações são possíveis.

8.1.2 Quantificação

Antes de prosseguir mencionando alguns resultados relevantes (principalmente) relativos à lógica intiocionista, vamos dar uma idéia de como se pode estender os sistemas acima aos correspondentes cálculos de predicados. Para tanto, a llinguagem básica é aumentada com novos símbolos $\forall$ e $\exists$ (que não podem ser interdefinidos) e com variáveis, que denotaremos por $x, y, \ldots$, e eventualmente com constantes individuais. O conceito de fórmula é o mesmo que já conhecemos.

Vem agora a questão. Intuicionisticamente, o que significam $\forall x\alpha(x)$ e $\exists x\alpha(x)$? Claro que x percorre uma determinada coleção de indivíduos, como na lógica clássica. Então, $\forall x\alpha(x)$ é verdadeira (ou válida) intuicionisticamente se há um método construtivo para provar que, seja qualquer que seja o elemento a do domínio, prova-se $\alpha(a)$. Do mesmo modo, $\exists x\alpha(x)$ é intuicionisticamente se há um processo construtivo para se obter um objeto a do domínio tal que $\alpha(a)$ pode ser demonstrado. Os postulados são os seguintes:

($\forall_1$) $\forall x\alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$ onde t é um termo qualquer ou uma variável distinta de x.

($\forall_2$) $\alpha \rightarrow \beta(x) \,/\, \alpha \rightarrow \forall x\beta(x)$

($\exists_1$) $\alpha(t) \rightarrow \exists x\beta(x)$ onde t é um termo qualquer.

($\exists_1$) $\alpha(x) \rightarrow \beta \,/\, \exists x\alpha(x) \rightarrow \beta$, onde x não figura livre em β.

Os axiomas acima, acrescentados aos cálculos proposicionais apresentados anteriormente, originam os correspondentes cálculos de predicados de primeira ordem. Se além deles acrescntarmos os axiomas seguintes, obtemos os correspondentes cálculos de predicados de primeira ordem com igualdade (nesses casos, a linguagem deve comportar ainda um símbolo primitivo de igualdade, =, e a noção de fórmula deve ser estendido adequadamente):

($=_1$) $\forall x(x = x)$

$(=_2)$ $x = y \rightarrow (\alpha(x) \rightarrow \alpha(y))$, onde $\alpha(y)$ resulta de $\alpha(x)$ após a sunstituição de algumas ocorrências livres de x por y, sendo y uma variável distinta de x.

Com o cálculo de predicados intuicionista, podemos edificar a aritmética intuicionista, ou aritmética de Heyting. A álgebra de Lindenbaum associada a este cálculo não é, como no caso clássico, uma álgebra de Boole, mas uma outra estrutura, conhecida como *álgebra de Heyting*.[4]

Mencionar os resultados de Gödel e Gentzen

[4]O leitor interessado pode ver um bom estudo introdutório em Miraglia 1987, ou o capítulo 8 de Goldblatt 1986.

Capítulo 9

Lógicas não-clássicas

UMA VEZ CARACTERIZADA, ainda que de modo bastante esquemático e geral, o que entendemos por lógica *clássica*, vamos voltar nossa atenção neste capítulo para as lógicas não-clássicas. Seriam elas 'verdadeiras lógicas'? Acreditamos que hoje em dia não há mais sentido em tal indagação, tendo em vista o volume amplo de sistemas, com o estatuto de 'lógicas', que se conhecem, e das importantes aplicações que têm sido realizadas de tais sistemas. Assim, não discutiremos aqui este tipo de (nos dias de hoje) 'pseudo-questão'. Assumimos como uma questão de fato que há várias (na verdade, uma infinidade) de lógicas não-clássicas possíveis.

O que caracterizaria uma lógica como não-clássica? Obviamente, alguma forma de diferenciação relativamente à lógica clássica. Primeiramente, é preciso ter em conta que não há *a* lógica classica. Na verdade, há vários sistemas que podem ser considerados 'clássicos', com o o cálculo proposicional (clássico), o cálculo de predicados de primeira ordem (com ou sem igualdade), os diversos sistemas de ordem superior (teorias de tipos) e até mesmo as variadas teorias de conjuntos que têm por base algum desses sistemas anteriormente citados. Portanto, quando se fala em sistemas não-clássicos, é conveniente explicitar de quê sistema(s) clássico(s) há divergência, e em que sentido. De qualquer forma, hoje em dia não há mais razão para sustentar como Quine, que por 'lógica' devemos entender unicamente a lógica elementar (de primeira ordem) clássica (e ainda sem igualdade). Como temos salientado, a *lógica*, hoje, é uma área do conhecimento vastíssima, como se pode ver na seção Logic and Foundations, de *Mathematical Reviews*,[1] e não se confunde mais com lógica de primeira ordem somente ou com estudo

[1] Ver em `www.ams.org/msc`.

de argumentos válidos.

Para divergirmos desse grande grupo de sistemas que qualificamos coletivamente como 'lógica clássica', podemos proceder de diferentes modos, como os seguintes: admitir sistemas que apresentem linguagens mais ricas em capacidade de expressão, permitindo que se tratem de conceitos que não são formalizáveis no escopo dos sistemas clássicos. Tal é o caso das lógicas modais, que incorporam os conceitos de necessidade e possibilidade, ou das lógicas deônticas, que tratam do obrigatório, do permitido, bem como das lógicas temporais, e assim por diante (mais sobre esses sistemas abaixo), porém isso tudo sem que os princípios basilares da lógica clássica sejam questionados ou alterados. Em outras palavras, em qualquer desses sistemas há versões válidas dos princípios clássicos.

Um outro tipo de lógica não-clássica é o das chamadas lógicas *heterodoxas*, ou 'rivais' da clássica. É preciso algum cuidado aqui, como procuraremos deixar claro na seqüência, mas esta caracterização serve como uma primeira aproximação. Em tais sistemas, pelo menos um dos princípios que alicerçam a lógica clássica é violado, ou restringido. Dentre esses 'princípios clássicos', os mais famosos historicamente são os princípios da identidade, da contradição e do terceiro excluído, ainda que eles não sejam os únicos que balizam a lógica clássica; por exemplo, a 'dupla negação', que diz que a negação da negação de uma proposição é equivalente a esta mesma proposição, é outro dos princípios fundamentais da lógica clássica. Outro 'princípio clássico' importante, se pensarmos na grande lógica (teoria de conjuntos), é o princípio (ou axioma) da extensionalidade, que diz que dois conjuntos são iguais se e somente se tiverem os mesmos elementos. Vamos falar de cada um deles mais abaixo. Assim, nos sistemas heretodoxos, algum ou alguns princípios (logo, teoremas) clássicos não valem, e obviamente haverá outros que eles admitem e que não o seriam 'classicamente'.

Uma terceira forma de se alcançar sistemas que podem ser considerados não-clássicos é por meio da definição de semânticas alternativas à usual, por exemplo, fundadas em teorias de conjuntos distintas das usuais. Falaremos sobre isso abaixo.

Chamaremos aqueles sistemas que apresentam linguagens mais ricas, porém sem alterar as leis válidas da lógica clássica, de *complementares* (ou *suplementares*, como prefere S. Haack). Os 'rivais' serão chamados de sistemas heretodoxos. Há ainda uma variedade relativamente grande de sistemas que não se encaixam bem nem em um e nem em outro desses esquemas. Por exemplo, as chamadas lógicas *fuzzy*, que visam tratar de conceitos vagos e da incerteza, as lógicas intensionais, várias das lógicas quânticas, e assim por diante. Portanto, qualificar um sistema não-clássico de complementar ou de heterodoxo deve ser visto apenas como uma primeira aproximação, servindo mais para finalidades didáticas do que propriamente para estabelecer uma classificação das diversas lógicas. Cientes disso, não há porque não continuarmos a utilizar a terminologia sugerida. Vamos prosseguir deste modo, portanto.

9.1 Lógicas complementares à clássica

As lógicas complementares à clássica são aquelas que, sem violar ou restringir os seus princípios básicos, permite uma maior capacidade de expressão por meio de linguagens mais ricas. Na seqüência, daremos uma idéia, ainda que sem os detalhes mais técnicos, de alguns desses sistemas.

9.1.1 Lógicas modais e deônticas

As lógicas modais, abreviadamente, tratam dos conceitos de necessidade e possibilidade, bem como de outros que possam ser definidos a partir desses, como a impossibilidade. As lógicas deônticas tratam do permitido, do obrigatório, do permitido, etc. Nesta seção, daremos uma idéia geral de alguns sistemas proposicionais modais e deônticos, e indicaremos como os correspondentes sistemas quantificacionais podem ser erigidos.

Inicialmente os sistemas modais. Para motivá-los, vamos distinguir, entre as proposições verdadeiras e as falsas, aquelas que são *necessárias* e aquelas que são *contingentes*, do seguinte modo:

(i) proposições verdadeiras

(i.1)necessariamente verdadeiras (por necessidade lógica): "No modelo standard da aritmética, 1+1=2".

(i.2) contingentemente verdadeiras: "A França é uma república".

(ii) proposições falsas

(ii.1) impossíveis (falsas por necessidade lógica): "No modelo standard da aritmétia, 1+1=5".

(ii.2) contingentemente falsas: "O Brasil é uma monarquia".

Aristóteles elaborou uma teoria envolvendo frases declarativas modais e de silogismos envolvendo essas frases, ou seja, frases que contenham as palavras 'necessário' ou 'possível' ou equivalentes. No entanto, é problemático dizer que o sentido aristotélico de necessidade e possibilidade sejam capturados pelas modernas lógicas modais. Não assumimos isso aqui. Porém, a motivação para o tratamento 'lógico' desses conceitos, deve-se registrar, vem do estagirita.

As lógicas modais (no sentido atual) podem ser obtidas a partir da lógica clássica pelo enriquecimento de sua linguagem através da introdução de certos operadores intensionais*, ditos operadores aléticos, para expressar os conceitos de necessidade e possibilidade. O mesmo ocorre com as lógicas deônticas, cuja linguagem incorpora operadores para exprimir os conceitos de obrigação e proibição. Em geral, escrevermos $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ para exprimir que α é necessário e α é possível respectivamente, e se usarmos $O\alpha$ e $P\alpha$ para α é obrigatório e α é proibido respectivamente. Alguns autores usam uma simbologia diferente: $L\alpha$ para $\Box\alpha$ e $M\alpha$ para $\Diamond\alpha$.

Para obter um sistema modal proposicional, acrescentamos à linguagem do cálculo proposicional clássico, vista no capítulo 1, digamos, o símbolo $\Box$. Redefinimos o conceito de fórmula, acrescentando a cláusula de que expressões da forma $\Box\alpha$ também são fórmulas, desde que α seja uma fórmula. Aos postulados (axiomas e regras de inferência) do cálculo proposicional clássico (CPC), acrescentamos postulados específicos para o operador $\Box$. A natureza desses postulados é o que vai diferenciar um sitema modal de outro. Para facilitar, introduzimos por definição o operador $\Diamond$ assim: $\Diamond\alpha =_{\mathsf{def}} \neg\Box\neg\alpha$.[2] Da mesma forma, sistemas deônticos são obtidos enriquecendo-se a linguagem do cálculo proposicional clássico acrescentando-se, por exemplo, o operador O e admitindo agora que, se α é uma fórmula, então $O\alpha$ é uma fórmula. Por definição, pomos $P\alpha =_{\mathsf{def}} \neg O\neg\alpha$ para dizer que α é permitido. Postulados convenientes caracterizam os variados sistemas deônticos proposicionais.

Vejamos um caso simples de cada sistema. O sistema modal $\mathbb{K}$ (nomeado assim após Saul Kripke) tem como postulado específico o seguinte, para α e β fórmulas quaisquer: (K) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$. Este postulado é bastante intuitivo: se é necessário que, desde que eu case, que eu cuide de meus filhos, então se necessariamente eu me casar, necessariamente terei que cuidar de meus filhos. Um regra de inferência, dita regra de Gödel, ou regra da necessitação, é acrescentada ao modus ponens do cálculo proposicional clássico para se obter o sistema $\mathbb{K}$, que é a seguinte: se α é um teorema, então $\Box\alpha$ é um teorema. Em outras palavras, de α, derivamos $\Box\alpha$. Intuitivamente, esta regra nos diz ser esperado que qualquer instância de um teorema não seja unicamente verdadeiro, mas necessariamente verdadeiro.

Neste sistema, já podemos provar algumas coisas, as quais têm forte conteúdo intuitivo; por exemplo, é um teorema de $\mathbb{K}$: $\vdash_{\mathbb{K}} (\Box\alpha \wedge \Box\beta) \leftrightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$. Para ilustrar, vejamos como se prova isto (o conceito de 'prova' é exatamente o mesmo dado no capí-

[2] Alternativamente, se usássemos $\Diamond$ como primitivo, então usaríamos a seguinte definição para o outro operador: $\Box\alpha =_{\mathsf{def}} \neg\Diamond\neg\alpha$.

tulo 1, somente que agora temos mais postulados a considerar). A seguinte seqüência de fórmulas (da linguagem) de $\mathbb{K}$ é uma *prova*, incialmente, de $\Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$: (1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$ (é tautologia do cálculo proposicional clássico). Aplicando a regra de Gödel, temos (2) $\Box(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$. Agora usamos o postulado específico de $\mathbb{K}$ para obter (3) $\Box\alpha \rightarrow \Box(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta))$ e (4) $\Box\alpha \rightarrow (\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta))$. Então, como no caso clássico, podemos obter (5) $\Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Quanto à recíproca, temos o seguinte: como $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ é um teorema do cálculo clássico, aplicando a regra de Gödel temos (6) $\Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha)$. Então, do axioma específico de $\mathbb{K}$, vem (7) $\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha$. Da mesma forma, temos (8) $\Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta)$ e (9) $\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha$. Portanto, (10) $\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

De modo análogo, temos que $\vdash_{\mathbb{K}} \Box(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\Box\alpha \vee \Box\beta)$, cuja prova deixamos como exercício.[3] Repare que no segundo caso, não vale a recíproca. Intuitivamente, pode ser necessário que vamos à festa ou à missa, sem ser necessário qualquer das duas isoladamente. No entanto, a seguinte fórmula vale em $\mathbb{K}$: $\vdash_{\mathbb{K}} \Diamond(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\Diamond\alpha \wedge \Diamond\beta)$.

Um sistema mais elaborado é o sistema $\mathbb{T}$. Para obtê-lo, acrescentamos aos postulados de $\mathbb{K}$ o seguinte postulado: (T) $\Box\alpha \rightarrow \alpha$, chamado de Axioma da Necessidade (tudo o que é necessariamente verdadeiro, é verdadeiro). Alguns teoremas deste sistema: $\vdash_{\mathbb{T}} \alpha \rightarrow \Diamond\alpha$; $\vdash_{\mathbb{T}} \Box(\alpha\wedge\beta) \rightarrow (\Box\alpha\wedge\Box\beta)$, $\vdash_{\mathbb{T}} \Box\alpha\vee\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha\vee\beta)$, mas não reciprocamente, etc.

O próximo sistema famoso é chamado de $\mathbb{S}4$. Nele, há 'redução de modalidades', o que não é possível nos sistemas anteriores. Grosso modo, trata-se do sistema $\mathbb{T}$ ao qual se acrescenta o postulado $(\mathsf{S4})$ $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$. Informalmente, se α é necessária, sua necessidade é necessária. Pode-se provar que acaba valendo $\Box\alpha \leftrightarrow \Box\Box\alpha$. Em $\mathbb{S}4$, uma seqüência de modalidades de mesma espécie (ou seja, todas $\Box$ ou todas $\Diamond$) se reduzem a uma delas somente: $\Box\Box\ldots\Box$ equivale a $\Box$ e $\Diamond\Diamond\ldots\Diamond$ equivale a $\Diamond$.

O sistema $\mathbb{B}$ ('brouweriano', em honra a Brouwer) é obtido a partir de $\mathbb{T}$ acrescentando-se-lhe o postulado (B) $\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$. Em palavras, se algo é verdadeiro, então não é somente possível, mas a sua possibilidade é necessária. No sistema $\mathbb{B}$, resulta como teorema que $\Diamond\Box\alpha \rightarrow \alpha$, ou seja, se α é possivelmente necessária, então deve ser o caso, o que parece estranho. $\mathbb{B}$ é um sistema que suscita discussões interessantes quando relacionado às expressões ambíguas da linguagem quotidiana.

O sistema $\mathbb{S}5$ pode ser obtido de duas maneiras: acrescentando ao sistema $\mathbb{T}$ o postulado $(\mathsf{S5})$ $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$ (a possibilidade de algo possível é necessária) ou então olhando-o como uma 'fusão' dos sistemas $\mathbb{B}$ e $\mathbb{S}4$. Em $\mathbb{S}5$, temos redução de modalidades 'misturadas', ou seja, neste sistema, resulta que uma seqüência $\heartsuit\heartsuit\ldots\Box$ equivale a $\Box$, enquanto que $\heartsuit\heartsuit\ldots\Diamond$ equivale a $\Diamond$, onde os $\heartsuit$ podem ser tanto $\Box$ quanto $\Diamond$. [[CONTRAPARTE

[3] Para mais detalhes, sugerimos o livro de Hughes & Cresswell *A new introduction to modal logic*.

ALGÉBRICA/TOPOLÓGICA??]]

Um resumo dos sistemas acima pode ser visto na figura seguinte. O leitor deve entender a enorme simplificação feita; por exemplo, não se está mencionando a Regra de Gödel, que se supõe valer em todos os sistemas, etc.

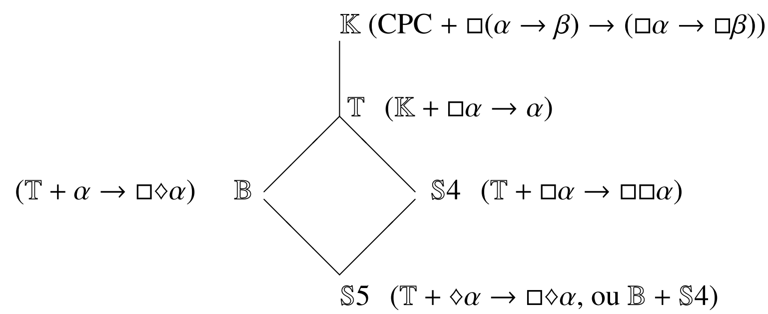

Figura 9.1: Os sistemas modais básicos

A implicação estrita

Uma das razões que levaram C. I. Lewis a edificar seus sistemas modais foi a insatisfação com a implicação material. Como já vimos, na lógica clássica um condicional $\alpha \to \beta$ é verdadeiro sempre que o antecedente seja falso, independentemente da veracidade do consequente. Isso parece nada ter a ver com a noção intuitiva de que α *acarreta* β. A *implicação estrita*, introduzida por Lewis, é algo diferente; simbolizamos por $\alpha{-}{-}{-}3\beta$ a expressão $\neg\Diamond(\alpha \wedge \neg\beta)$, e se este for o caso, dizemos que α *implica estritamente* β. Como o leitor pode verificar por si mesmo, isso equivale a $\Box(\alpha \to \beta)$. Dizemos ainda que α e β são *estritamente equivalentes*, e escrevemos $\alpha \equiv \beta$, se e somente se $(\alpha - - - 3\beta) \wedge (\beta - - - 3\alpha)$.

Usando a implicação estrita em vez da material, evitamos certas 'interpretações indevidas' da palavra *implica*, como dizia Lewis ocorrer quando obtemos os paradoxos da implicação material na lógica tradicional (como vimos no capítulo anterior). Lewis pretendia interpretar $- - -3$ como 'acarretamento' (*entails*), no sentido de que se temos $\alpha - - - 3\beta$, então α *acarreta* β (ver abaixo). Com efeito, substituindo a implicação material $\to$ pela estrita $- - -3$ em $\alpha \to (\beta \to \alpha)$, $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ e em $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$, as expressões resultantes não mais são teoremas já no sistema $\mathbb{K}$. O que vale em $\mathbb{K}$, no entanto, são coisas como $\Box\alpha \to (\beta - - - 3\alpha)$ e $\Box\neg\alpha \to (\alpha - - - 3\beta)$, que são conhecidas como 'paradoxos da implicação estrita'.

Como se vê, a implicação estrita tem papel importante para a análise da noção de 'acarretamento' (*entailment*). Dizemos que uma proposição α *acarreta* uma proposição β se β segue logicamente de α, ou seja, se $\alpha \to \beta$ é logicamente válida. Resultam então os seguintes teoremas (em $\mathbb{K}$): (i) $\alpha \wedge \neg\alpha - - - 3\beta$, (ii) $\beta - - - 3\alpha \vee \neg\alpha$, (iii) $\neg\Diamond\alpha \to (\alpha - - - 3\beta)$, (iv) $\Box\beta \to (\alpha - - - 3\beta)$.[4] Isso significa, intuitivamente falando, que uma contradição *acarreta* qualquer proposição, que uma 'verdade' é *acarretada* por qualquer proposição, que de uma proposição impossível qualquer proposição pode ser derivada e que uma proposição necessária pode ser deduzida de qualquer proposição.

A idéia presente na asserção de que uma proposição β é dedutível a partir de uma proposição α (no escopo de um dado sistema lógico L), é que deve ser impossível que α seja verdadeira mas que β seja falsa. Assim, como salientam Hughes e Cresswell, os 'paradoxos' acima são princípios corretos de dedutibilidade, e seria a sua ausência nos sistemas dedutivos, e não a sua presença, que atestaria para uma inadequação da implicação estrita como refletindo a noção de *entailment*. Com efeito, (i)-(iv) acima refletem essa idéia; de acordo com (i), é impossível que $\alpha \wedge \neg\alpha$ seja verdadeiro e β seja falsa, e assim por diante com as demais expressões ou 'paradoxos'. Deixemos no entanto o estudo dos sistemas modais para outra hora.

Lógica deôntica

A lógica deôntica surgiu em 1926 com Ernst Mally, no tratamento de expressões como 'quero que ...'.[5] Mais tarde, A. Hofstadter e J. C. C. McKinsey trataram da lógica dos imperativos, que se relaciona com a lógica deôntica. No entanto, foi somente com o trabalho 'Deontic Logic', de G. H. von Wright, em 1951, é que a lógica deôntica despertou maior interesse e teve maior desenvolvimento.

Sistemas deônticos são obtidos de modo bastante similar aos sistemas modais. Por exemplo, por meio do postulado $O(\alpha \to \beta) \to (O\alpha \to O\beta)$ e da regra que de α permite inferir $O\alpha$, acrescentados aos postulados do cálculo proposicional clássico, obtemos o sistema deôntico $\mathbb{KD}$. Definimos então $P\alpha =_{\text{def}} \neg O\neg\alpha$ para dizer que α é *permitido*, e $F\alpha =_{\text{def}} O\neg\alpha$ para α é *proibido* ('forbidden', em inglês).

[4] Hughes & Cresswell, p. 203.

[5] Uma boa exposição introdutória encontra-se em Puga 1985.

Semântica de mundos possíveis. Validade

Nesta seção, falaremos unicamente dos sistemas modais. A noção de validade em sistemas modais é mais complicada que no caso clássico. Intuitivamente, podemos raciocinar da seguinte forma (essa idéia se deve a Saul Kripke, mas a noção de mundo possível, ao que parece, vem de Leibniz). Kripke usou essa idéia para dizer (abreviadamente) que $\Box\alpha$ é válida se for verdadeira em todos os mundos possíveis, e $\Diamond\alpha$ é verdadeira se existe pelo menos um mundo possível no qual α seja verdadeira. Assim, tendo em vista o postulado (K), não pode haver um mundo no qual $\alpha \to \beta$ seja verdadeira e que α seja verdadeira sem que β também o seja.

De modo mais preciso, uma *estrutura de Kripke* é uma tripla ordenada $\mathcal{K} = \langle W, R, \upsilon \rangle$, onde: (i) W é um conjunto não vazio, cujos elementos $w \in W$ são chamados 'mundos'; (ii) R é uma relação binária entre mundos (ou seja, um conjunto de pares ordenados de elementos de W) dita *relação de acessibilidade* (entre mundos), e (iii) υ é uma função (chamada de *valoração*) que associa a cada proposição α e a cada mundo w um dos valores-verdade, 0 (falso) ou 1 (verdadeiro). Em outras palavras, υ é uma função de $\mathfrak{F} \times W$, onde $\mathfrak{F}$ é o conjunto das fórmulas (da linguagem) de uma lógica modal L, em $\{0, 1\}$, definida do seguinte modo, onde α e β pertencem a $\mathfrak{F}$ e $w \in W$:

(a) Se p é uma variável proposicional (ou uma fórmula atômica), então para cada mundo $w \in W$, tem-se que $\upsilon(p, w) = 0$ ou $\upsilon(p, w) = 1$.

(b) $\upsilon(\neg\alpha, w) = 0$ see $\upsilon(\alpha, w) = 1$.

(c) $\upsilon(\alpha \to \beta, w) = 1$ see $\upsilon(\alpha, w) = 0$ ou $\upsilon(\beta, w) = 1$.

(d) $\upsilon(\Box\alpha, w) = 1$ see para cada mundo w' tal que wRw', tem-se que $\upsilon(\alpha, w') = 1$

Necessidade da verdade

Ainda falando informalmente, podemos indagar se algo verdadeiro deve ser necessariamente verdadeiro. Em nossa simbologia, representaríamos isso por $\alpha \to \Box\alpha$. Vamos chamar provisoriamente esta expressão de (*). Inicialmente, verificamos que (*) não é teorema de qualquer sistema modal como os acima. É fácil ver que não é um teorema de $\mathbb{S}5$. Com efeito, seja W um conjunto com dois elementos somente (dois mundos possíveis) e tal que a relação de acessibilidade seja (pelo menos) reflexiva e simétrica. Então, seja α verdadeira em um mundo mas falsa no outro. Obviamente, em tal sistema de Kripke, $\alpha \to \Box\alpha$ é falsa.

Ora, já em $\mathbb{T}$, se acrescentarmos (*) como novo postulado, resulta que $\alpha \leftrightarrow \Box\alpha$, ou seja, o operador $\Box$ torna-se completamente dispensável, o que certamente não é algo interessante. Por outro lado, teremos igualmente que $\neg\alpha \leftrightarrow \Box\neg\alpha$ é teorema deste novo sistema (ou seja, de $\mathbb{T}$ + (*)). Suponha que definamos 'α é impossível' por $i\alpha =_{\mathsf{def}} \neg\Diamond\alpha$. Então, em nosso sistema, teremos $\neg\alpha \leftrightarrow i\alpha$, o que parece insensato.

Em outras palavras, se desejarmos trabalhar formalmente com operadores como $\Box$ e $\Diamond$ sem que os sistemas resultantes colapsem no clássico, então não é conveniente supor que algo verdadeiro tenha que ser necessariamente verdadeiro, ou seja, que tenhamos $\alpha \rightarrow \Box\alpha$ como teorema.

Aplicações ao Direito e à Ética

Os sistemas quantificacionais correspondentes, tanto modais como deônticos, podem ser obtidos sem dificuldade. Nesses sistemas, algumas discussões interessantes podem ser levadas em conta. Vejamos algumas delas.

Vamos admitir que tenhamos erigido sistemas modais e deônticos suficientemente fortes para exprimir tudo aquilo que escrevermos abaixo (com eventual redução de modalidades). Podemos interpretar os predicados O e P pelo menos de duas formas: obrigatoriedade (e permissividade) legal e moral. Ou seja, algo pode ou não ser obrigatório ou permitido de acordo com normas legais (respaldadas na legislação jurídica) ou de acordo com algum sistema ético. Para distinguir esses casos, podemos escrever $O_l\alpha$ e $O_m\alpha$ para dizer que α é obrigatório legalmente e moralmente. O mesmo pode ser feito com respeito a P_l e P_m, obviamente. Podemos então colocar as seguintes questões: (i) tudo o que é proibido moralmente deve ser proibido legalmente? O conceito de proibido pode ser definido assim: $V\alpha =_{\mathsf{def}} \neg P\alpha$ (ou seja, α é proibido –ou 'vedado', se não é permitido). Em símbolos, devemos aceitar $V_m\alpha \rightarrow V_l\alpha$? Por exemplo, segundo os nossos sistemas éticos, é vedado matar. Logo, se acitarmos a validade da fórmula anterior, matar deve ser vedado legalmente em todos os mundos possíveis. Mas, e a legítima defesa? Se quisermos admití-la, parece que $V_m\alpha \rightarrow V_l\alpha$ não deve ser uma tese (teorema) de um sistema moral/legal razoável. Outra questão: (ii)

Outra questão interessante é aquela que diz respeito ao livre arbítrio. Simplificadamente: se tivermos um sistema no qual resulte como teorema algo como $\Diamond\alpha \wedge \Diamond\neg\alpha$, o que não ocorre em nenhum dos sistemas vistos anteriormente, então teremos razões para dizer que podemos 'escolher' entre α e sua negação. Pode um sistema legal (ou moral) ter uma tal fórmula como teorema? Caso contrário, teremos sempre que 'optar' entre uma das possibilidades?

9.1.2 Lógica temporal

9.2 Lógicas heterodoxas

Ressalte-se mais uma vez que a distinção entre sistemas complementares e sistemas heterodoxos, ou rivais, à lógica clássica, não é muito preciso. Por exemplo, as lógicas paraconsistentes, aqui colocadas como heterodoxas, são igualmente complementares, como deixaremos claro abaixo.

9.2.1 Lógica intuicionista

Nos sistemas fundamentados na lógica clássica, como por exemplo aqueles típicos da matemática padrão, um dos procedimentos de prova mais comuns é a redução ao absurdo. Assim, por exemplo para provarmos que existe um certo objeto matemático (digamos, um número real) satisfazendo uma certa propriedade, podemos (à luz da lógica clássica) raciocinar 'indiretamente' do seguinte modo: assumimos que não há tal número (ou seja, admitimos a negação daquilo que desejamos demonstrar) e mostramos (usando o aparato dedutivo da lógica subjacente à teoria que estamos considerando) que esta hipótese conduz a uma contradição. Isso posto, podemos inferir por redução ao absurdo que a nossa proposição original é verdadeira.

Para o matemático holandês L. E. J. Brouwer, o pai do intuicionismo, este procedimento seria insensato, pois admite que a totalidade dos números (de acordo com o nosso exemplo) já esteja constituída de alguma forma, deste modo pressupondo uma espécie de platonismo. Para Brouwer, não se pode assumir a totalidade dos números, ou seja, uma coleção infinita como algo *acabado* (infinito 'atual'); para provar que há um certo número satisfazendo uma dada propriedade, devemos ser capazes de exibir alguma forma de construção mental que nos permita obter este número. Grosso modo, para Brouwer 'existir' em matemática significa 'ser construído pela mente humana'. Assim, a noção de conjunto infinito (como uma totalidade acabada) seria ilusória; totalidades infinitas só existiriam *em potência* (infinito 'potencial').

Para o matemático holandês, temos a *intuição* do número 1, como quando afirmamos que há um objeto assim e assim, e igualmente do que seja 2, quando repetimos a nossa intuição básica do um, etc.. Deste modo, podemos construir quantos objetos quisermos, mas nunca uma totalidade infinita. Para Brouwer, se não aceitarmos isso, caímos no domínio da metafísica, estando portanto fora da ciência propriamente dita. Na matemática clássica, no entanto, isso não é assim.

Consideremos um exemplo curioso. Admita a seguinte afirmação: "Existem números irracionais a e b tais que a^b é racional". Sabemos que todo número real é racional ou irracional. Tomemos $a = b = \sqrt{2}$, que é irracional. Ora, pelo princípio do terceiro excluído ($\alpha \vee \neg\alpha$, lembremos) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é racional ou é irracional. Se for racional, a afirmação fica demonstrada, e os números são exatamente iguais a $\sqrt{2}$. Se for irracional, façamos então $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$. Assim, obviamente $a^b = 2$ que é racional, e então os números procurados são $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $b = \sqrt{2}$, ambos irracionais.

De acordo com a matemática clássica, fundada na lógica clássica, não há qualquer problema com essa prova, ainda que nunca venhamos a saber se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ é ou não racional. Para um intuicionista como Brouwer, uma prova desse tipo não é aceitável. Para ele, algo é falso se a suposição de sua existência (ou seja, de que há uma construção mental que permita obter o dito objeto) leva a um absurdo. Assim, sustentava, a lógica clássica tem suposições erradas, como a admissibilidade do princípio do terceiro excluído. Os princípios clássicos, erigidos para se tratar de totalidades finitas, conduziriam a erros quando usados com totalidades infinitas. Para Brouwer, a matemática é uma ciência radical; se falamos que para basear o cálculo proposicional clássico podemos usar *dois* conectivos (como fizemos, usando $\neg$ e $\vee$), isso pressupõe a aritmética, em particular o número 2. A matemática e, assim, ela não pode estar baseada em nada mais fundamental, em especial em nenhuma lógica. O próprio estabelecimento de uma linguagem, nos moldes como fizemos no texto, pressupõe a matemática, de acordo com o matemático holandês. Para ele, somente a intuição poderia justificar as passagens que realizamos em matemática. Há algumas leis que verificamos serem lícitas, como por exemplo a seguinte: se provamos α e provamos β, então provamos $\alpha \wedge \beta$. As demais regras básicas (ainda que não todas) são obtidas deste modo. Ou seja, a lógica seria um produto subsidiário da atividade matemática, enquanto que a linguagem seria algo como que o estudo de certos invariantes lingüísticos, igualmente pressupondo a matemática, assim como toda atividade intelectual. A matemática, em especial a aritmética, seria a única atividade que não pressuporia qualquer outra: seria autosuficiente.

Assim, para Brouwer, ainda que falemos de conjuntos infinitos, na verdade essas entidades não existem (não há processo mental que permita construí-los temporalmente). A partir dos números naturais, vamos para os inteiros, para os racionais e assim por diante, de um modo similar ao que se faz na matemática clássica, chegando inclusive àquilo que chama de números reais, que não coincide com os reais da análise matemática clássica. A matemática intuicionista, no entanto, tem propriedades interessantes; por exemplo, toda função de reais (a la Brouwer) em reais é contínua, o que não se dá com as funções reais de variável real 'clássicas'. No entanto, não prosseguiremos com a matemática intiuocionista aqui.

O que nos interessa é que, para os intuicionistas, uma *proposição* não é algo que seja verdadeira ou falsa, mas uma suposição que pode ou não ser provada ou refutada por uma construção mental. Se $\alpha, \beta, \ldots$ são *suposições*, então $\alpha \wedge \beta$ é uma suposição que é verdadeira se e somente se ambas forem verdadeiras (na acepção de Brouwer, ou seja, algo como 'construtivamente verdadeira'). O mesmo vai se dar para $\alpha \vee \beta$, $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$ e $\neg\alpha$. Se α é verdadeira nesta acepção, vamos escrever C_α, o $'C'$ vindo de 'construtivo'. Assim, $C_{\alpha\rightarrow\beta}$ se, tendo-se C_α, pode-se obter C_β, ao passo que $C_{\neg\alpha}$ se C_α conduz a um absurdo (algo como $C_{\beta\wedge\neg\beta}$).

Deste modo, a redução ao absurdo não pode ser usada, pois admita que a hipótese H implica a tese T ($H \rightarrow T$) e que queremos provar isso. Pelo método usual, acrescentamos à hipótese H a negação de T, mostrando que $H, \neg T \vdash \beta \wedge \neg\beta$ (implica uma contradição). Assim, como vimos, por redução ao absurdo, obtemos $H \rightarrow T$. Para os intuicionistas, juntar $\neg T$ a H é um absurdo, uma configuração impossível.

Em 1925, A. Kolmogorov procurou axiomatizar parte do que seria a lógica do intuicionismo de Brouwer procurando a rejeição das provas indiretas. Para vindicar essa idéia, era preciso rejeitar princípios que valem na lógica clássica, como as leis da dupla negação ($\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$) e do erceiro excluído ($\alpha \vee \neg\alpha$). A lógica intuicionista (ao nível do cálculo de predicados de primeira ordem), foi axiomatizada pela primeira vez por Heyting na década de 1930, contrariando Brouwer, o criador do intuicionismo, para quem como vimos a lógica é *posterior* à matemática (mas depois a lógica de Heyting foi aceita por ele). Posteriormente, I. Johansson tratou do cálculo elaborado por Kolmogorov, definindo de vez a lógica que ficou, desde então, conhecida como *lógica intuicionista minimal*.

Ainda que não estejamos fazendo uma apanhado detalhado, podemos ter uma idéia dessas lógicas considerando os seguintes esquemas e regras, que podem ser devidamente formalizados em adequados sistemas formais $\mathcal{S}$ no sentido dos capítulos anteriores. Os diferentes cálculos originar-se-ão a partir de quais esquemas e regras adotarmos como postulados.

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

2. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

Até aqui, acrescentando-se (MP), tem-se a Lógica Proposicional Implicativa Intuicionista

3. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$

4. $\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$

5. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha \wedge \beta)$

6. $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

7. $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

8. $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma))$

Até aqui, acrescentando-se (MP), tem-se a Lógica Proposicional Positiva Intuicionista

9. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

Até aqui, com (MP), tem-se a Lógica Proposicional Intuicionista Minimal, ou lógica de Kolmogorov-Johansonn. O postulado 9 chama-se Redução ao Absurdo Intuicionista.

10. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$, ou $\alpha \wedge \neg\alpha \to \beta$

De 1 a 10, mais (MP), tem-se a Lógica Proposicional Intuicionista de Brouwer-Heyting.

11. $\alpha \vee \neg\alpha$

(MP) $\alpha,\ \alpha \to \beta \,/\, \beta$

Os postulados 1 a 11, mais (MP), caracterizam a Lógica Proposicional Clássica.

9.3 Os fundamentos da teoria de conjuntos

A teoria dos conjuntos, da qual já falamos antes, ganhou muito sucesso no final do século XIX, mas não sem severas críticas. O grande matemático alemão Leopold Kronecker (DATAS), que celebrizou a frase "Deus nos deu os números naturais, todo o resto é obra do homem", rejeitou o uso de totalidades infinitas acabadas (o chamado *infinito atual*) que resultava da teoria de conjuntos de Cantor, mantendo que a matemática não deveria admitir, e não precisaria, da existência de tais entidades. Para Kronecker, somente poderia ser aceito em matemática aquilo que de alguma forma pudesse ser *produzido*, *construído* pelo matemático, se bem que seja preciso que tomemos enorme cuidado com o uso livre dessas palavras.

Os números (naturais) e as operações entre eles eram, para Krnonecker, fundamentados intuitivamente, e as definições e provas que se dão sobre eles deveriam ser 'construtivas'. Vejamos um exemplo.

A álgebra de Heyting

9.3.1 Lógica polivalente

Em *Da Interpretação*, Aristóteles discute a questão de se uma proposição que asserte sobre o futuro pode ser verdadeira ou falsa. Por exemplo, tomando a sua célebre proposição "Amanhã haverá uma batalha naval", parece intuitivo (de acordo com a lógica bivalorada usual) que ela ou a sua negação terá que ser verdadeira, e a outra falsa. Porém, se for verdadeira, então *deverá* ocorrer uma batalha naval amanhã, e o futuro estará por assim dizer determinado. A interpretação adequada do que tal proposição e sua correspondente análise significam na obra do estagirita não será aqui apontada, pois trata-se de questão para especialistas. Cabe observar no entanto que Aristóteles apontou para a possibilidade de se considerar um terceiro valor-verdade para tais proposições. Está aí a origem da lógica polivalente.

9.3.2 Lógica quântica

O filósofo Hilary Putnam argumenta sobre a 'necessidade' da lógica quântica fazendo uma comparação entre a relatividade geral e a necessidade de uma geometria não-euclidiana (no caso, a riemanniana) e amecânica quântica com uma 'nova lógica'. A 'equação' de Putnam é a seguinte:

$$\frac{\text{Rel. Geral}}{\text{Geom. Não-Euclid.}} = \frac{\text{Mec. Quânt.}}{\text{Lóg. Quânt.}}.$$

A idéia de que a mecânica quântica implicaria uma nova lógica vem de J. von Newmann na década de 1930. Após ter fornecido o aparato matemático mais usado desde então para se formular a física quântica (ou *as* mecânicas quânticas, como iremos salientar), a saber, o chamado formalismo dos espaços de Hilbert, von Newmann constatou que a álgebra dos subespaços de um espaço de Hilbert não forma uma álgebra de Boole, como ocorria com a mecânica clássica (e com a lógica proposicional clássica, que algebricamente reduz-se a uma álgebra de Boole), mas um reticulado ortomodular complementado. Vamos explicar um pouco isso tudo.

A álgebra dos observáveis da mecânica clássica

Uma teoria física, grosso modo, lida basicamente com três tipos de entidades: os *sistemas físicos*, que representam os sistemas dos quais queremos falar, como o sistema solar, uma partícula ou as moléculas de um gás em um certo recipiente. Os sistemas físicos estão semore em certos *estados*. O conjunto desses estados é o que se chama de *espaço de* *fase*. As informações que obtemos desses sistemas físicos em certos estados são dadas por meio de certos *observáveis*, os quais podemos 'medir' e obter determinados valores. Isso não é tudo; queremos ainda saber como os sistemas fisicos evoluem no tempo. Para isso, necessitamos das *equações dinâmicas*, que nos dizem dessa evolução.

Na mecânica clássica, os estados dos sistemas físicos são pontos em $\mathbb{R}^6$, ou seja, sextuplas de números reais, da forma $\langle x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 \rangle$. Os três primeiros formam as coordenadas de posição do sistema físico no espaço tridimensional, enquanto que os três últimos números dão as componentes da velocidade do sistema físico no ponto em questão.

Os observáveis são funções de $\mathbb{R}^6$ em $\mathbb{R}$. Medir

9.4 Lógicas não-reflexivas

Como já tivemos oportunidade de mencionar anteriormente, há várias formas de se enunciar o chamado princípio da identidade, dependendo da linguagem empregada e dos postulados que se adota. Uma delas, empregando-se a linguagem da lógica elementar apresentada anteiormente, pode ser posta pela seguinte expressão: $\forall x(x = x)$, onde x é uma variável individual. Informalmente, lemos esta expressão como dizendo que "todo objeto (do domínio percorrido pela variável x) é idêntico a si mesmo". É preciso cuidado com uma tal 'interpretação', pois antes é preciso dizer o que se entende por identidade. A expressão em questão é precisamente um das expressões que, na lógica de primeira ordem, é usada como um dos axiomas da identidade, e é chamada de Lei Reflexiva da Identidade (axioma `E7` da página 88). A outra é a chamada Lei da Substitutividade (axioma `E8` da mesma página). A terminologia 'não-reflexiva' vem do fato de que os primeiros sistemas propostos ofereciam alguma limitação ao princípio da identidade dado pela expressão acima. Hoje, ainda que mantendo a terminologia, dizemos que uma lógica é não-reflexiva se restringe a teoria tradicional da identidade de alguma forma, em particular violando, ou restringindo, o referido princípio da identidade.

O que geralmente se aceita como 'teoria da identidade' na lógica tradicional é uma forma de entender esse conceito que remonta a Leibniz e o seu Princípio da Identidade dos Indiscerníveis (PII, visto à página 109), ainda que certamente essa mesma forma de conceber a identidade tenha origens mais antigas, e esteja fortemente respaldada na intuição. Em contextos atuais, deixando de lado o problema da análise exegética dos textos de Leibniz, aceita-se que o PII assevera que não podem haver duas entidades (objetos físicos, digamos) que difiram *solo numero*, ou seja, somente por um ser um e o outro ser o outro. Se são dois, dizia ele, tem que haver uma propriedade (ou qualidade) que os distinga; objetos distintos têm que ter algum traço distintivo, como alguma marca, diferença de cor, etc. A lógica e a matemática tradicionais incorporam essa idéia, ou seja, não podem haver entidades distintas que partilhem de todas as suas propriedades ou relações. Se isso ocorrer, não serão duas entidades, mas uma só; em outras palavras, els serão idênticas, a mesma coisa. Portanto, há dois conceitos envolvidos: a identidade, entendida como identidade numérica, significando a mesma coisa e a indistinguibilidade, ou indiscernibilidade, que significa partilhamento de propriedades, atributos e relações.

Na teoria tradicional, esses dois conceitos se fundem, já que entidades idênticas obviamente partilham das mesmas qualidades. Com efeito, a recíproca do PII, que informalmente diz que entidades idênticas têm todas as mesmas propriedades, é o já visto de Princípio da Indiscernibilidade dos Idênticos (página 109), ou, em linguagem de primeira ordem, de Lei Substitutiva da Identidade; grosso modo, diz que se x e y são nomes de um mesmo objeto, o que se exprime dizendo que x é idêntico a y, então eles satisfazem todas as mesmas fórmulas. Informalmente, essa idéia parece bem posta e ser de aceitação imediata, porém quando se tenta descrevê-la formalmente, por meio de linguagens formalizadas, no âmbito de algum sistema lógico, aparecem dificuldades.

A primeira dificuldade diz respeito ao conceito de propriedade, ou qualidade. Seriam relações com outros objetos aceitáveis como uma qualidade de um indivíduo, ou deveríamos nos ater unicamente às chamadas 'propriedades monádicas', de um só lugar, que aqui chamaremos de atributos? Immanuel Kant contestava Leibniz, que dizia ser impossível encontrar dois objetos, como duas folhas no jardim (em qualquer jardim) que sejam absolutamente idênticas, dizendo que entre duas gotas de água, se abstraírmos totalmente as suas qualidades, bastará que estejam em lugares diferentes para que possam ser consideradas distinta (Kant 1980, p. 164). Seria então a localização no espaço-tempo uma 'propriedade' aceitável? Isso é controverso, principalmente no tocante à física atual, posto que as entidades quânticas podem se apresentar nos chamados 'estados de superposição', nos quais nem mesmo uma distinção espaço-temporal é possível.

Há ainda filósofos que contestam a 'auto-identidade', aquela propriedade que um indivíduo teria consigo próprio e com mais nenhum objeto, como sendo uma legítima 'propriedade'. Essas considerações dão origem a várias formas do PII, dependendo do que se coloque no domínio do quantificador que expressa 'todas as propriedades'. Deve-se ressaltar no entanto que essas discussões filosóficas ficam vagas se não se especificar a linguagem e a lógica que se está utilizando. Com efeito, se a lógica for a lógica clássica (de primeira ordem ou de ordem superior), o quantificador universal é interpretado de forma a não se poder excluir objetos do seu domínio: 'para todo' significa para todo, e não 'para alguns'.

De qualquer modo, na teoria tradicional, a identidade é definida por meio da indistinguibilidade no sentido mencionado de Leibniz, como vimos por exemplo na lógica de ordem superior que apresentamos; a teoria tradicional da identidade é portanto leibniziana em certo sentido. Este modo de encarar a identidade permite que se considere as entidades como *indivíduos* de uma certa forma, se entendermos um *indivíduo* como algo que possa sempre ser distinguido de outros (mas a discussão sobre este conceito demanda muito mais do que isso). Com efeito, intuitivamente flanado, uma vez que todo objeto se distingue de qualquer outro por pelo menos uma propriedade, o conceito de identidade parece estar fortemente vinculado ao de indistinguibilidade, e conseqüentemente o de diferença com o de distinguibilidade.

Em outras palavras, uma coisa é um indivíduo se pode ser distinguido, discernindo, de todos os demais, se tiver *identidade*, se puder ser tratado como *um*. Este tipo de identidade é denominado de identidade numérica: ele é um, em distinção com os demais de uma pluralidade. É preciso no entanto discernir entre a impossibilidade de se distinguir entre dois objetos no âmbito de alguma teoria ou contexto, por exemplo quando se diz que 2 e 3 são indiscerníveis relativamente aos atributos 'ser número natural' e 'ser número primo', ainda que sejam números distintos, e uma possível 'indiscernibilidade metafísica', que poderíamos admitir, pelo menos teoricamente, desde que estivéssmos dispostos (contra Leibniz) a admitir que possam haver obejetos indiscerníveis. Para Leibniz, essa indiscernibilidade metafísica não existiria, e a lógica e a matemática tradicionais incorporam esse seu modo de pensar, pelo menos em parte.

Uma outra forma de considerar a questão da identidade, a qual ocupou muitos filósofos, mas da qual não trataremos aqui, diz respeito à identidade temporal, que concerne ao modo pelo qual identificamos um objeto, digamos um nosso amigo de infância, como sendo o mesmo objeto (a mesma pessoa) que conhecemos há tanto tempo. Estes dois conceitos estão evidentemente imbricados, mas não falaremos mais sobre isso neste texto. Voltando ao problema original, porque dois objetos, como duas canetas, ou duas maçãs, não podem partilhar todas as suas propriedades? Se levarmos Kant a sério, podemos invocar a localização espaço-temporal, dizendo que dois objetos não podem ocupar o mesmo lugar no espaço ao mesmo tempo. Mas, porque não? Esta suposição está calcada em um princípio básico que podemos denominar de *impenetrabilidade* dos corpos físicos, e tem respaldo (mais uma vez) na nossa experiência com os objetos que nos cercam. De certo modo, essa concepção influenciou tanto a matemática como a lógica no seu percurso 'leibniziano' rumo à teoria da identidade. No entanto, a física quântica moderna vem trazer a possibilidade de se discutir até mesmo princípios como este, desde que se considere a possibilidade de que as entidades fundamentais da matéria são 'objetos' de algum tipo (alguns têm sugerido a expressão *quase-objetos*).

Expliquemos isso melhor. Em se tratando de objetos físicos, podemos aprofundar a questão da sua individualidade procurando por algum fundamento para essa impenetrabilidade na matéria, ou substância, da qual esses objetos são, em algum sentido, 'constituídos'. Isso conduz a uma resposta diferente à nossa questão inicial: a individualidade dos objetos deve ser então entendida não em termos de alguma propriedade ou de algum conjunto de propriedades que os fariam distinguíveis, mas em alguma coisa além, que subjaz às propriedades, alguma forma de 'substratum', famosamente caracterizado por John Locke como um "eu não sei o que é"(uma vez que não pode ser descrito em termos das propriedades que sustentaria; ver Locke 1988, cap. 23).

A literatura filosófica sobre as várias tentativas de se responder essa e outras questões relacionadas, e de procurar por um (como é usualmente referido) 'princípio' de individualidade, é vasta. Uma questão que parece relevante á a seguinte: em que medida podem (se é que podem) as colocações acima acerca da identidade leibniziana serem estendidas para os objetos fundamentais tratados pelas teorias físicas, tais como elétrons, prótons, neutrons etc.? Da mesma forma, que implicações lógicas, ontológicas e metafísicas estariam envolvidas no caso de querermos levar avante a possibilidade, como alguns sustentam ser sugerida pela física quântica, de que as entidades básicas da matéria não teriam qualquer forma de individualidade como acima caracterizada? Para que isso possa ser feito de modo a não redundar em mera especulação, é conveniente que se estudem sistemas lógicos e matemáticos (teorias de conjuntos, lógicas de ordem superior e eventualmente teorias de categorias) não-clássicos, que questionem a teoria tradicional da identidade de alguma forma.

Há várias possibilidades de se fazer isso. Uma delas, talvez a mais sensata em uma primeira instância, parece ser a de seguir as indicações de vários autores relevantes, como Erwin Schrödinger, Max Born, Niels Bohr, Hermann Weyl e outros, que manifestaram a opinião de que as entidades quânticas seriam *não-indivíduos* de algum tipo, ou seja, careceriam de qualquer critério de individualidade como os postos acima.

Em resumo, a questão pode então ser abreviada do seguinte modo: podem as 'entidades quânticas', como elétrons,prótons, neutrinos, serem tratadas como indivíduos, assim como pessoas, canetas e maçãs? Ou então seriam elas (como tem sido sugerido) algo como quantidades de água ou de dinheiro em um banco (que não têm em princípio 'individualidade', no sentido de que, se temos R $ 100,00 em nossa conta bancária, não há sentido em indagar pelos particulares reais que nos pertencem)? Como podemos começar a responder a essas questões? O que há envolvido? Que tipos de pressupostos ou compromissos lógicos, epistemológicos e ontológicos há? Em vários trabalhos temos lidado com essas questões, partindo do pressuposto de que para iniciar qualquer tentativa de resposta, devemos nos voltar para as teorias físicas, em especial para a teoria quântica e, em particular, devemos considerar o que essas teorias físicas nos dizem acerca do comportamento das coleções de tais entidade: será que elas se comportam, coletivamente, (ou seja, estatisticamente) como rochas ou pessoas, ou então como quantidades de água ou de dinheiro em um banco?

Os desenvolvimentos alcançados deram origem a várias lógicas não-reflexivas, dentre elas as chamadas de Lógicas de Schrödinger, e certas teorias de conjuntos, ditos quase-conjuntos. Na seção seguinte, daremos uma idéia das lógicas de Schrödinger de primeira ordem, para exemplificar um caso de uma lógica não-clássica polissortida.

9.4.1 Um estudo de caso: a lógica de Schrödinger

Uma das formas de se erigir sistemas lógicos alternativos aos clássicos (como explicaremos com mais detalhes no capítulo 2), é olhar em particular para as ciências empíricas. Esta seção apresenta um caso que tem relação com algumas opiniões do grande físico Erwin Schrödinger, prêmio Nobel de 1933, e um dos principais articuladores da física quântica. Suas idéias motivaram a elaboração de uma lógica bissortida (na verdade, de uma classe de sistemas).

A posição filosófica de Schrödinger relativamente à física quântica mudou ao longo de sua vida (um estudo detalhado da contraparte filosófica de sua obra acha-se em Bitbol 1996). No início dos anos 1950, defendia que o conceito de identidade carece de sentido para as partículas elementares. Dizia que não se pode falar da identidade (logo, nem da diversidade) de partículas elementares, exceto como abuso de linguagem. Não obstante, duas partículas elementares de mesma espécie, como dois elétrons, em determinadas situações podem partilhar de todas as suas propriedades: os físicos dizem que nessas situações elas são *idênticas*, ainda que não acreditem que elas são *a mesma* entidade. Como para os lógicos a palavra *identidade* é usada em outra acepção (no sentido de que se duas coisas são idênticas elas não são na verdade *duas* coisas, mas uma só), é melhor empregar o jargão filosófico e dizer, nessas circunstâncias, que elas são *indiscerníveis*, ou *indistinguíveis*.

Motivado por esta posição de Schrödinger, o primeiro dos autores deste livro propôs, em 1980 (da Costa 1980) um sistema bissortido de primeira ordem que batizaou de 'lógica de Schrödinger'. Mais tarde, esse sistema foi estendido a um sistema de ordem ω (ver o capítulo 6) pelo segundo dos autores (Krause 1990; ver da Costa & Krause 1994, 1996). Nesta seção, como aplicação do que se viu acima, descreveremos sem muitos detalhes o sistema de primeira ordem de da Costa, aproveitando para, mais uma vez, enfatizar alguns pontos relevantes sobre a semântica dos sistemas lógicos em geral. Como o leitor perceberá, na descrção do sistema abaixo haverão algumas diferenças, facilmente perceptíveis, relativamente ao que foi dito para os sistemas polissortidos acima. Isso é feito de propósito. As diferenças são facilmente percebidas, e serão apontadas, e mostra ainda a flexibilidade que se tem na apresentação desses sistemas.

Chamaremos de $\mathcal{S}$ uma lógica de primeira ordem bissortida, que contém as seguintes categorias de símbolos primitivos: (a) connectivos: $\neg$ e $\vee$ (os demais são definidos como usual); (b) o quantificador universal: $\forall$ (o existencial é definido como de hábito. Veja aqui que não usamos quantificadores de diferentes gêneros, ainda que poderíamos ter feito isso); (c) parenteses e vírgula; (d) um conjunto enumerável de variáveis de primeiro gênero $x_1, x_2, \ldots$ e um conjunto qualquer de constantes desse mesmo gênero: $a_1, a_2, \ldots$; (e) uma coleção enumerável de variáveis de segundo gênero, $X_1, X_2, \ldots$ e uma coleção qualquer de constantes desse gênero, $A_1, A_2, \ldots$; (f) o símbolo de igualdade, = (aqui também não usamos uma possível distinção entre identidades de diferentes gêneros. O motivo é que o conceito de fórmula dado abaixo fará a restrição que precisamos); (g) para cada natural $n > 0$, uma coleção não vazia de predicados n-ários.

Um termo é uma variável ou uma constante (não há símbolos funcionais); portanto, temos termos de primeiro e de segundo gêneros, que chamaremos de m-termos e de M-termos respectivamente. Intuitivamente, os m-termos representarão as partículas elementares, enquanto que os m-termos representarão os objetos usuais de nossa escala. As fórmulas são definidas de modo óbvio, com a ressalva de que consideraremos como fórmula apenas as expressões da forma $S = T$, com S e T termos de segundo gênero. Assim, expressões como $t = T$, $s = t$ etc., ou seja, envolvendo termos de primeiro gênero, não são bem formadas.

Deste modo, por intermédio da linguagem de $\mathcal{S}$, não podemos falar da identidade (nem da diversidade) de objetos de primeiro gênero. Os postulados de $\mathcal{S}$ são os seguintes:

(S0) Postulados análogos aos da lógica proposicional clássica.

(S1) $\forall x \alpha(x) \rightarrow \alpha(t)$, onde x é uma variável e t um termo de mesmo gênero que x, livre para x em $\alpha(x)$.

(S2) $\beta \rightarrow \alpha(x) / \beta \rightarrow \forall x \alpha(x)$ onde x não figura livre em β.

(S3) $\forall X(X = X)$ onde X é uma variável de segundo gênero.

(S4) $S = T \rightarrow (\alpha(S) \leftrightarrow \alpha(T))$ com as restrições usuais, sendo S e T termos de segundo gênero. M-terms.

(S5) Regra de generalização.

As noções de teorema, de dedução a partir de um conjunto d epremissas, etc., são definidas de modo habitual. Uma semântica 'clássica' (ou seja, fundamentada em uma teoria de conjuntos como ZF) pode ser dada da seguinte forma. A linguagem de $\mathcal{S}$ é interpretada em uma estrutura que tem dois domínios não vazios, D_m e D_M, com $D_m \cap D_M = \emptyset$. As constantes de primeiro gênero são associadas a elementos de D_m, e as de segundo gênero a elemetos de D_M. Os predicados n-arios associam-se a subconjuntos de $(D_m \cup D_M)^n$. O símbolo de igualdade é interpretado na diagonal de D_M. Os resultados semânticos usuais, como um teorema de completude, podem ser então provados.

Tecnicamente, a semântica delineada acima não apresenta dificuldades, mas filosoficamente ela é bem controversa. Com efeito, se quisermos que a semântica reflita em alguma medida a intuição prevalescente em $\mathcal{S}$, qual seja, que não podemos falar nada sobre a identidade ou a diversidade dos objetos denotados pelos m-termos, então D_m não deveria ser um *conjunto* estrito senso. Com efeito, seja qual for a teoria de conjuntos adotada (ZF, NBG ou outra), um conjunto, intuitivamente falando é, como dizia Cantor, "uma coleção de objetos distintos de nossa intuição ou pensamento", ou seja, para quaisquer dois conjuntos a e b (ou para quaisquer dois elementos de um conjunto dado), sempre vale a seguinte instância do princípio do terceiro excluído: $a = b$ ou $\neq b$. Em suma, não há objetos indiscerníveis; se partilham das mesmas propriedades, ou se pertencem aos mesmos conjuntos, eles são idênticos. Isso é o que diz a matemática usual e, de certo modo, a lógica tradicional.

Portanto, se desejamos dar um sentido semântico às lógicas de Schrödinger, devemos elaborar uma semântica em uma teoria mais geral, que envolva os conjuntos usuais como casos particulares, e que possa admitir coleções de objetos que sejam indiscerníveis, ainda que não idênticos. Essa teoria existe, e se chama teoria de quase-conjuntos, mas não é nosso objetivo desevolvê-la aqui (ver os artigos citados acima, e também Krause 1992).

As observações acima corroboram o que dizemos em outras partes deste livro: há que se atentar para a contraparte metamatemática dos sistemas lógicos e dos distemas dedutivos em geral, a qual via de regra é negligenciada principalmente em discussões filosóficas.

9.5 Notas e Complementos

<u>Automorfismos de uma estrutura.</u> Dada uma estrutura $\mathfrak{A} = \langle D, R_i \rangle$, onde D é um conjunto não vazio e as R_i são relações n-árias sobre D (funções ou operações sobre D podem ser vistas como casos particulares de relações), um automorfismo de $\mathfrak{A}$ é uma aplicação bijetiva f de D em D tal que se elementos de D estão relacionados por alguma das relações R_i, então suas imagens por f também estarão nas mesmas relações. Por exemplo, se R for uma relação binária, isso é expresso assim: se $R(x, y)$, então $R(f(x), f(y))$. Os automorfismos de $\mathfrak{A}$ podem ser compostos; se f e g são dois de tais automorfismos, podemos formar um outro automorfismo de $\mathfrak{A}$, denotado $f \circ g$. O conjunto dos automorfismos de $\mathfrak{A}$, munido desta operação, forma um grupo, dito *grupo dos automorfismos* de $\mathfrak{A}$, cujo elemento neutro é a função identidade.

<u>Operadores intensionais.</u> Os conectivos lógicos usuais, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ são *extensionais* no seguinte sentido. ??????????

Capítulo 10

Tópicos variados

NESTE CAPÍTULO, falaremos de modo breve de vários tópicos filosoficamente relevantes referentes à lógica em geral. Ainda que os assuntos não sejam explorados em profundidade, pois cada um deles demandaria um texto específico, acreditamos que a sua abordagem pode proporcionar ao leitor uma visão mais acurada da lógica de hoje e de sua problemática. Iniciaremos com a questão da utilidade das provas formais.

10.1 Usam-se provas formais?

Acima, vimos em que consiste uma prova formal no âmbito de um sistema dedutivo (formal) S. Trata-se de uma certa seqüência finita de fórmulas satisfazendo determinadas condições, como exemplificado (ver a página 27). Vem no entanto a pergunta óbvia: se isso é assim, porque nunca encontramos este tipo de 'prova' nos livros de matemática? As provas, ou demonstrações, que encontramos quanso abrimos um livro de matemática são argumentos feitos na linguagem natural, apoiada em símbolos matemáticos, mas em nada se parecem com uma seqüência de fórmulas, cada uma sendo uma hipótese, um axioma ou conseqüência de precedentes por meio de uma das regras de inferência. Aliás, nem mesmo as regras de dedução em são explicitas no início da maioria dos livros de matemática. Se, como dissemos, um dos objetivos da formalização foi a busca por maior rigor, pode-se então ser rigoroso sem que se proceda como se estivéssemos em um sistema formal?

Primeiro, é preciso constatar que apresentar uma prova em um assunto de matemática que fosse uma seqüência de fórmulas como a definição de prova formal exige, seria entediante e faria a demonstração demasiadamente longa e cheia de detalhes que, muitas vezes, não precisariam ser explicitados para a compreensão do argumento principal. Por exemplo, se em alguma passagem fazemos uso de que $p \to p$, parece sensato não ser preciso acrescentar à demonstração a prova deste fato, podendo ele ser suposto conhecido. É suficiente que saibamos que, pelo menos em princípio, qualquer prova relevante em matemática *pode ser* colocada na forma como exige a definição de prova formal. Uma *prova informal*, na qual apenas se exibem informalmente os principais raciocínios envolvidos, em é geral suficiente. O importante para o matemático é que ele tenha um conceito preciso de 'prova' (em geral, guardado nos livros de lógica de sua biblioteca) e que, se for necessário (e ele se contenta com isso), ele sabe que é possível transformar a 'demonstração' (informal), que geralmente apresenta, em uma prova formal (pelo menos é isso que se espera dos matemáticos). Isso não quer dizer que ele não esteja sendo rigoroso. Aliás, o grande lógico norte-americano Georg Kreisel (1923-) tem um trabalho célebre, denominado de 'rigor informal', no qual argumenta que podemos ser rigorosos mesmo procedendo informalmente em matemática (ou seja, sem que tenhamos que elencar todos os detalhes dos argumentos utilizados).

Por exemplo, uma das provas elementares mais célebres e elegantes da matemática é a de Euclides de que existem infinitos números primos (um número primo é aquele número natural maior do que 1 e que é divisível unicamente por ele mesmo e pela unidade). Reconstruindo a prova que remonta a Euclides, iniciamos assumindo por absurdo que não há infinitos números primos. Portanto, há um maior deles, digamos p. Seja então n o produto de todos os primos, ou seja, $n = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times p$. Este número é obviamente maior do que p. Consideremos então o número $n + 1$. Vamos provar que $n + 1$ é primo. Fazendo isso, teremos mostrado que há um primo maior do que p e que portanto não pode haver um maior deles. Com efeito, se $n + 1$ não fosse primo, seria divisível por algum primo, digamos q (que é menor ou igual a p pela definição de p).[1] No entanto como q divide n, o resto da divisão de $n + 1$ por q tem que dar resto 1, pois q divide n também. Assim, chegamos a uma contradição: $n + 1$ é primo, pois o resto da divisão por q dá resto 1, mas também dá zero, pois por hipótese $n + 1$ é divisível por q. Conseqüentemente, a hipótese original de que há unicamente um número finito de números primos não pode ser aceita, uma vez que ela (juntamente com os demais pressupostos da aritmética usual) acarreta uma contradição.

Esta 'prova' é informal, ou seja, não foi apresentada como uma prova formal no sentido da definição da página 27, tendo sido feita no que se pode chamar de matemática intuitiva, porém não deixa de ser rigorosa. Não 'provamos', por exemplo, que $n = 1 \times 2 \times$

[1]Um número que não é primo é *composto*, e pelo Teorema Fundamental da Aritmética, é produto de primos. Por exemplo, $56 = 2^3 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$.

$3 \cdots \times p$ é maior do que p, supondo que ninguém duvidaria disso. Se necessário, podemos iternalizar a demonstração dada na linguagem da aritmética, ainda que a correspondente alcançada ficasse bem mais deselegante e certamente longa. É por isso, em essencia, que os matemáticos recebem dos lógicos a tolerância em suas provas: elas *podem* (pelo menos em princípio) ser adequamente formalizadas. Em resumo, ainda que nos textos usuais de matemática não apareçam provas formais no sentido definido anteriormente, parte-se do pressuposto de que elas podem ser dadas, caso necessário.

Os lógicos no entanto têm a obrigação de estar constantemente lembrando os matemáticos de que há uma lógica subjacente, ainda que não explicitada, em suas demonstrações. A rigor, uma demonstração, ou prova (aqui estamos tomando as duas palavras como sinônimas) só tem sentido no escopo de um sistema axiomático adequado, sempre *módulo* uma determinada lógica. No exemplo dado acima, usou-se o célebre argumento de redução ao absurdo, que é lícito na lógica clássica. Um matemático intuicionista, no entanto, não aceitaria a prova dada.

Fica então patente que, se quisermos ser algo rigorosos, devemos deixar claro qual lógica se está utilizando, qual o conceito de dedução, que axiomas são assumidos, etc. Hoje em dia porém está entrando em cena um outro aspecto relacionado às provas, que tem tirado o sono dos filósofos da matemática: trata-se das 'provas' realizadas com o auxílio de computadores. Um célebre exemplo é o do chamado Teorema das Quatro Cores.[2] A questão foi colocada em 1852, mas somente na década de 1970 é que o problema foi completamente resolvido. Dito de modo abreviado, é questão é a seguinte: quantas cores no mínimo são necessárias para se colorir um mapa de forma que países adjacentes não sejam pintados com uma mesma cor? A resposta de que bastavam quatro cores já era conhecida, mas a demonstração deste fato foi alcançada com o recurso de um programa de computador. Devemos aceitar como lícita uma 'prova' como essa, que não é fruto unicamente da mente de um matemático e que não pode ser checada à mão?

Problemas como este tendem a aparecer cada vez mais, tendo em vista a complexidade cescente da matemática, onde as demonstrações chegam quase que a fugir do alcance da mente dos matemáticos; tome-se como exemplos a prova recente do chamado último teorema de Fermat* ou então a prova do teorema da classificação dos chamados grupos simples, conhecido como *teorema enorme*. Se fosse reunida em uma só publicação, acredita-se que a prova (informal) teria algo em torno de 15.000 páginas.[3] Imagine-se o que seria se uma tal prova fosse escrita como uma prova formal.

Em resumo, quase não se usam *explicitamente* provas formais no sentido que as

[2] Um interessante endereço contendo a história desse teorema é `http://www.math.gatech.edu/ thomas/FC/fourcolor.html`.

[3] Ver `http://mathworld.wolfram.com/EnormousTheorem.html`, ou em Gorenstein, D. 'The Enormous Theorem' *Sci. Amer.* **253**, pp. 104-115, Dec. 1985.

defimos acima, mas elas estão presentes *implicitamente* no trabalho do matemático e de qualquer um que se ocupe com deduções.

10.2 O significado da lógica

O papel da lógica como alicerce de sistemas dedutivos (e mesmo daqueles que envolvem outras formas de inferência) é patente, ainda que nem sempre devidamente apreciada e compreendida. Há no entanto outras questões envolvidas com a própria compreensão dessa matéria, bem como do seu papel para o conhecimento como um todo.

O surgimento das lógicas não-clássicas, muitas delas motivadas pelos desenvolvimentos das ciências empíricas, faz muitos pensarem que seus proponentes advogam que a lógica clássica está errada em alguma medida, ou que é insuficiente, e que precisa ser substituída por outra em alguns ou em todos os campos do conhecimento. Esta não é a nossa opinião. A lógica clássica constitui um campo fantástico de estudo, permanecendo válida em seu particular domínio de aplicações, não precisando, pelo menos por enquanto, ser substituída por qualquer outro sistema. Ela foi e continuará por muito tempo sendo um formidável campo de investigação. Acontece aqui algo semelhante ao que ocorreu com a física. Como se sabe, a mecânica clássica foi suplantada pelas mecânicas relativista e quântica, mas o engenheiro continua a usá-la entre limites. As demais mecânicas têm seu particular campo de aplicação, e devem ser requisitadas quando necessário. Ainda que presentemente os físicos estejam ocupados em buscar uma *teoria de tudo*, não é certo que ela seja alcançada, e no momento as variadas 'teorias' que compõem este todo são desconexas e carecem de fundamento adequado.

Com a lógica, podemos nos aventurar a dizer que acontece algo semelhante, mas talvez mais radical; enquanto que na física *pode ser* que se chegue, em futuro próximo, a uma teoria de tudo, no nosso campo podemos dizer que não há *uma* lógica verdadeira. Distintos sistemas lógicos podem ser úteis na abordagem de diferentes aspectos dos vários campos do conhecimento. É razoável se aceitar, presentemente, alguma forma de pluralismo lógico, no qual vários sistemas (mesmo que incompatíveis entre si) possam conviver, cada um se prestando ao esclarecimento ou fundamentação de um determinado conceito ou área do saber, sem que isso se apresente qualquer problema envolvendo contradições, pois pode-se fundamentar a *meta*lógica que rege tudo isso, que é paraconsistente.

10.3 Historicidade da lógica

Quais as relações entre a lógica e o passar do tempo? Como qualquer disciplina viva, a lógica, vista como uma disciplina, muda com o tempo. A afirmativa de Kant, de que Aristóteles teria dado a palavra definitiva neste campo, se mostrou equivocada. Com efeito, até o final do século XIX, havia por assim dizer uma só lógica, aquela que denominamos hoje de 'clássica' e cujas origens remontam a Aristóteles. Porém, a descoberta dos paradoxos na teoria de conjuntos por um lado, e a criação das lógicas não-clássicas por outro, ocasionaram uma ruptura radical do paradigma estabelecido pela lógica clássica.

Assim, a lógica, como qualquer outra disciplina, como a geometria, se constitui pela sua evolução histórica. Isso ainda faz com que não se possa prever o futuro a lógica. Novos sistemas podem surgir, seja pelo interesse da investigação 'pura', seja pelas eventuais 'necessidades' de sistematização ou desenvolvimento de novos campos da investigação. O matemático Yuri Manin sugeriu que o século XX nos ensinou muito sobre os formalismos, mas que é hora de "olhar o mundo novamente", pois o surgimento de novas áreas (ele estava pensando na física quântica), ou novas abordagens aos tradicionais, podem estar sugerindo o desenvolvimento de novos sistemas lógicos e matemáticos. Este ponto de vista implica uma visão historicista da lógica, como a que defendemos, que tira o caráter *a priori* dessa disciplina. A lógica não é: se faz na sua história, e sofre mudanças, como o deus grego Proteus.

10.4 Grandes temas da lógica atual

Como dito anteriormente, a lógica atual deixou de ser o mero estudo das formas válidas de inferência. Para uma visão geral das subdivisões dessa disciplina, o leitor pode consultar a seção Logic and Foundations de *Mathematical Reviews*, onde se pode notar a existência de XXXX. Dentre outros, os seguintes campos parecem ser os mais destacados da lógica de hoje.

10.4.1 Sintaxe Lógica

Nesta área da lógica, estudam-se as linguagens formalizadas, nas quais são traduzidos muitos dos problemas lógicos referentes às linguagens naturais, da matemática e mesmo das ciências humanas e empíricas. Como exemplo de problemas típicos desta área, pode-se mencionar os teoremas de incompletude de Gödel e suas extensões a tais disciplinas. Como vimos, decorre desses teoremas que a maior parte das teorias matemáticas não podem ser provadas consistentes com os recursos delas próprias. Tais provas de consistência só podem ser realizadas por meio de teorias mais fortes, e portanto de certo modo mais inseguras que a teoria inicial. Isso significa que em grande medida não se pode legitimar a matemática de modo absolutamente seguro. TEORIA DA PROVA????

10.4.2 Teoria dos Modelos

Na teoria dos modelos, ou semântica lógica, investigam-se as relações existentes entre as linguagens fomalizadas e as estruturas às quais essas linguagens se referem. A teoria dos modelos, em sua fase atual, foi edificada por Alfred Tarski (1901-1983) e Abraham Robinson (DATAS). Um dos primeiros e mais profundos resultados foi a matematização, realizada por Tarski em 1933, do conceito tradicional de verdade como correspondência*. FALAR DE MODELOS SATURADOS???

10.4.3 Teoria da recursão

ESCREVER ALGO SOBRE A ÁREA

10.4.4 Computação e lógica

Uma artigo recente da revista REVISTA???? questionava quem teria sido o cientista teórico do século XX cuja contribuição foi supostamente aquela que mais influenciou o dia a dia das pessoas. Algumas restrições foram feitas, como por exemplo excluir a medicina e a tecnologia. Fala-se aqui em contribuição *teórica*. É fato que não se pode descartar como extremamente relevante a contribuição da química, por exemplo, como no caso do plástico, da radioatividade ou dos estudos que culminaram nos remédios sintéticos, ou então na descoberta da estrutura do DNA. No entanto, essas são em geral obras de mais de uma pessoa, e redundam em uma série de conceitos interligados, que dificilmente se poderia dizer que se resultam de *um determinado conceito teórico* (mesmo no caso do plástico, que foi uma descoberta extremamente importante). Assim, pode-se sustentar que um grande candidato a ser o cientista teórico que mais influencia teve na vida das pessoas (e certamente terá ainda mais daqui para frente) foi o matemático inglês Alan Turing (1912-1954). Não deixa de ser surpreendente que, ao que tudo indica, a contribuição que mais se acercou da vida diária das pessoas tenha vindo do campo da lógica.[4]

[4] Por curiosidade, é interessante citar que uma reportagem recente do jornal The New York Times listou aqueles que foram considerados (por especialistas) como os dez maiores cientistas do século XX, todas as áreas incluídas. Na lista, figuravam dois matemáticos, Gödel e Turing. O primeiro da lista era Albert

Alan M. Turing foi um matemático brilhante. Ingressou no Kings College, da Universidade de Cambridge, em 1931, um dois maiores centros e matemática da época. Turing ficou impressionado com os resultados de Gödel de 1931, e perguntava se poderia haver um procedimento mecânico (como um algoritmo) para se determinar se uma dada fórmula era ou não demonstrável em um sistema formal S satisfazendo certas condições. Para isso era necessário realizar alguns 'cálculos'. Mas, o que significaria 'calcular'? Poderia o processo de cálculo ser seguido por uma máquina, que seguisse regras fixas e bem determinadas (um algoritmo) e que realizasse tudo isso em um número finito de passos? Tomemos por exemplo o processo (método) de achar o máximo divisor comum (m.d.c.) entre dois números naturais. O m.d.c. entre dois números A e B é o maior número que divide ambos. Por exemplo, o m.d.c. entre 32 e 56 é 8. O processo a ser seguido, já conhecido pelos gregos antigos e conhecido como *algoritmo de Euclides*, é o seguinte: divida o maior número pelo menor e observe o resto. O resto é zero? Se for, então o menor número é o m.d.c. Caso contrário, divida o menor número pelo resto encontrado, o que dá um novo resto; se este novo resto for zero, o primeiro resto é o m.d.c., caso contrário, continue o processo até encontrar resto zero. O número pelo qual dividimos um dos restos de modo a obter resto zero é o m.d.c. procurado. No nosso exemplo, dividimos 56 por 32, obtendo resto 24 (que é diferente de zero). Dividimos então 32 por 24, obtendo resto 8 (ainda diferente de zero). Dividimos agora 24 por 8, obtendo resto 0. Portanto, 8 é o m.d.c. entre 32 e 56.

O conceito de algoritmo, se bem que conhecido desde a antiguidade (o nome 'algoritmo' viria de Al-Khowarizmi, matemático árabe que viveu por volta do ano 800), teve uma formulação satisfatória somente no século XX. Uma das formulações mais precisas é em termos de um conceito matemático conhecido como *máquina de Turing*, formulado por Turing em 1935-1936. É bom firsar que trata-se de um conceito matemático; não há uma 'máquina de Turing' *real*.

O conceito de máquina de Turing fundamenta a idéia usual que temos de computação. Há no entanto outras formas de 'computação' que não são *a la* Turing. Um exemplo é o desenvolvido pelo matemático Steve Smale, e trata-se de uma espécie de 'computação sobre os (números) reais'. (ALGUNS DETALHES) O que importa para nós aqui é que a Turing-computação não é a única possível, e portanto as discussões envolvendo por exemplo a possibilidade de se construir um computador que simule a forma humana de raciocinar deve levar em conta que talvez a nossa forma de pensar e fazer inferências não seja computável a la Turing, mas isso não quer dizer que não possa sê-lo de um outro modo, ou seguindo uma outra forma de 'computação'. (DESENVOLVER UM POUCO??)

Einstein.

Ademais, hoje em dia os computadores entraram definitivamente em nossas vidas. Áreas como a elaboração de sistemas especialistas, a inteligência artificial, a robótica, etc. fazem hoje em dia parte de nosso quotidiano. No capítulo 3, falaremos algo sobre as interconexões entre algumas lógicas e a computação.

10.4.5 Lógicas não-clássicas

Um dos feitos mais importantes da ciência do século XX foi o desenvolvimento das lógicas não-clássicas. O surgimento dessas lógicas ocasionou uma verdadeira ruptura no paradigma da lógica clássica. O estudo dos sistemas não-clássicos, sobre os quais falaremos com mais detalhes no capítulo **??**, adquiriram enorme importância sobretudo em virtude as variadas aplicações que têm sido encontradas (das quais falaremos no capítulo **??**.

10.4.6 Lógica aplicada

Antes, porém, um comentário ainda geral sobre a lógica. Como ocorre com a matemática, podemos entender a lógica hoje dos pontos de vista puro ou aplicado. A lógica 'pura', pode-se dizer, ocupa-se do estudo de determinadas estruturas, os sistemas lógicos, independentemente de suas possíveis aplicações. Assim, podemos estudar a lógica intuicionista ou as lógicas paraconsistentes pelo interesse em aprofundar nossos conhecimentos nesses domínios. É importante frisar que este tipo de estudo pode ter conseqüências importantes. Com efeito, foi justamente a partir do desenvolvimento 'puro' da lógica que surgiram áreas novas da matemática que não poderiam ter sido vislumbradas de outro modo, como as matemáticas não-cantorianas e quântica por exemplo ou, de certo modo, a própria teoria da recursão.

Do ponto de vista 'aplicado', a lógica ocupa-se do estudo das estruturas que subjazem a determinados domínios do conhecimento, como, dentre outros, a física, a biologia, a ciência da computação, a filosofia do direito, a psicanálise, a ética, a antropologia, a medicina, a argumentação em geral, a tecnologia e, obviamente, a matemática.

Deste prisma 'aplicado', pode-se proceder em lógica basicamente de dois modos: pode-se aplicar um sistema lógico conhecido, mesmo não-clássico, a um desses domínios, visando sua sistematização e estudo de seus fundamentos, ou pode-se alternativamente indagar a viabilidade de se desenvolver sistemas lógicos a partir do modo como essas áreas se articulam, os quais, depois, evidentemente, podem ser estudados de um ponto de vista 'puro'. Segundo o primeiro caminho, não deixa de ser surpreendente que uma disciplina da natureza da lógica, tal como vista originalmente (como estudo de inferências válidas), encontre atualmente tantas aplicações, inclusive em tecnologia, o que vem acontecendo por exemplo com algumas lógicas não-clássicas, como as paraconsistentes. Com efeito, tem havido aplicações dessas lógicas no controle de tráfego aéreo e urbano, na robótica, no planejamento de sistemas especialistas, na química, especialmente na química orgânica, no reconhecimento computacional de assinaturas, e até mesmo no diagnóstico médico. Por essa razão, hoje em dia a lógica vem sendo ensinada não unicamente nos departamentos de filosofia, computação e matemática, como já é tradicional, mas até mesmo em algumas escolas de engenharia, de direito e de medicina.

O segundo ponto de vista, qual seja, o de se estudar o desenvolvimento de sistemas lógicos e matemáticos a partir de determinados campos da investigação, abre ao filósofo e ao cientista uma enorme variedade de possibilidades. Por exemplo, alguns pensam que a mecânica quântica demanda um tipo de lógica distinta da clássica, como vem sendo sustentado desde os trabalhos pioneiros de Birkhoff e von Neumann da década de 1930. Sob esta ótica, a lógica se aproxima bastante da concepção do filósofo suíço Ferdinand Gonseth, para quem essa disciplina apresenta uma faceta empírica, abrangendo o estudo dos objetos e de suas relações, tais como se apresentam às nossas formas de entendimento dentro de algum campo do saber e sob algum ponto de vista. Esta linha de pensamento tem originado sistemas lógicos e teorias de conjuntos alternativas, cujo estudo ainda está por se fazer em detalhes, inclusive do ponto de vista filosófico. ă

Não discorreremos sobre a história da lógica em detalhes aqui, para o que recomendamos o excelente livro de Kneale & Kneale indicado na bibliografia. Apenas salientaremos alguns aspectos relevantes na ecolução dessa disciplina, de forma a podermos observar de modo mais abrangente o seu panorama atual.

De uma maneira geral, vamos denominar de *lógica clássica* o usual cálculo de predicados de primeira ordem (com ou sem igualdade), que esboçamos nos capítulos precedentes, ou qualquer de suas extensões, como as lógicas de ordem superior usuais (teorias de tipos), as teorias de conjuntos (os sistemas Zermelo-Fraenkel, von Neumann-Bernays-Gödel ou Kelley-Morse são os mais conhecidos), ou subsistemas desse cálculo, como o cálculo proposicional clássico, todos eles em alguma de suas possíveis formulações. Claro que isso não caracteriza a lógica clássica de modo preciso e, conseqüentemente, um mesmo grau de imprecisão estará presente relativamente às lógicas não-clássicas, das quais nos ocuparemos posteriormente.

ver ver ver

Como na matemática, podemos considerar como relevante a questão da aplicação da lógica (ou melhor, das lógicas, ou dos sistemas lógicos). Há dois modos básicos de proceder. Pode-se simplesmente *aplicar* uma determinada lógica a um particular domínio sob investigação com finalidades variadas, ou pode-se tentar *desenvolver* sistemas lógicos inspirados no estudo desses domínios. Esses sistemas, uma vez elaborados, podem ser estudados do ponto de vista 'puro', como sistemas abstratos, ou podem por sua vez ser novamente aplicados àquele domínio inicial ou eventualmente a outros.

No capítulo **??** teremos chance de falar sobre algumas das aplicações da lógica.

Teoria da Argumentação

Uma das áreas mais tradicionais de aplicação da lógica, e que no início chegou a ser identificada com essa disciplina, pode ser denominada de Teoria da Argumentação. Além da sua importãncia em geral, esta parte da lógica tem destacado interesse em filosofia do direito, mas hoje em dia está se expandindo para outras áreas (ver abaixo). É obviamente possível tratar de argumentação em geral no escopo de sistemas formais específicos, e na verdade é isso o que deve ser feito mas, para finalidades didáticas, podemos proceder informalmente visando unicamente dar uma idéia do que se trata e para apontar fatos relevantes nesta área.

Como já dito, um argumento é, grosso modo, uma coleção de sentenças, proferidas em uma certa linguagem, de forma que uma ou mais dessas sentenças são reconhecidas como conclusão(ões) do argumento. As demais são as suas premissas. Um dos principais assuntos da Teoria da Argumentação é o de reconhecer argumentos não-válidos, em particular os falaciosos. No entanto, é bom que lembremos o que já vimos acima, ou seja, que o que é ou não um argumento válido depende do particular sistema que se está considerando. Porém, aqui podemos assumir que a lógica subjacente é a clássica, que por assim dizer rege a nossa forma usual e mais intuitiva de pensar.

O estudo das falácias (relativas á lógica tradicional) é bastante explorado nos livros de lógica informal, como em Copi 1981 e Nolt & Rohatyn 1988, para citar dois livros que têm tradução em português, de forma que não vamos falar disso aqui. Desejamos porém falar sobre alguns cuidados que pensamos devem estar presentes na mente do filósofo quando se ocupa dessas questões, principalmente tendo em vista algumas 'tendências' recentes.

Atualmente, tem havido interesse por parte de alguns filósofos no estudo de 'formas particulares de raciocínio' (ou de argumentação) em determinadas áreas do conhecimento, como a biologia ou a medicina. Que tipos de inferência faz o biólogo? O que caracteriza o 'pensar biológico'? (o mesmo valeria para outras áreas). Se é que há de fato sentido falar nisso (e aqui colocamos a questão de que primeiro seria necessário dizer em que sentido essas áreas procederiam argumentações assim tão particulares que lhes seriam próprias), viria então a questão de se esclarecer essas formas de argumentação, a sua 'lógica'. Isso é, pelo menos, e de forma muito resumida, o que pretendem alguns.

Afirmamos que esse procedimento é falacioso. Parte da premissa errônea de que ciências particulares têm métodos próprios de argumentação, logo 'lógicas' distintas.

Se aceitarmos essa premissa, não escaparemos de um relativismo extremado, em muito distinto da visão pluralista da lógica (e da matemática) que defendemos, e corremos o risco de tornar o campo da ciência uma Torre de Babel de linguagens e procedimentos de inferência distintos. Desse modo, praticamente não poderá haver interação entre disciplinas, e sempre se poderá achar a desculpa de que 'não estou sendo entendido', por mais estúpida que possa parecer a minha forma de argumentar e de defender minhas idéias. Uma tal atitude vai de encontro a tudo o que a ciência já conquistou com o uso e disseminação de um método objetivo.

A existência de várias lógicas não implica que as formas de argumentação das diversas áreas sejam diferentes. A argumentação (de forma mais precisa, a metodologia) é essencialmente a mesma. O que mudam são as premissas e as regras que se aceitam para se fazer inferências. As formas válidas de inferência podem depender de uma u outra lógica, mas o aspecto 'racional' do conhecimento, pelo menos do conhecimento científico, deve se pautar pelo uso de uma lógica (ou de mais de uma) que esteja devidamente explicitada, além de ser crítica e pautada em aplicações relevantes. Talvez aqui devessemos resgatar o sentido original que Alfred Tarski dava à palavra *metodologia*: para ele, metodologia era sinônimo de metamatemática. Para Tarski, a metodologia dos sistemas dedutivos consistia em seu estudo metateórico, como bem ilustra o título de seu célebre livro *Introdução à Lógica e à Metodologia dos Sistemas Dedutivos*.

Assim, não acreditamos que haja 'formas distintas de pensar', ou de argumentar (pelo menos não na ciência ocidental). O que pode haver são peculiaridades de cada campo, que podem demandar 'lógicas' distintas, no sentido sugerido por Manin, conforme vimos acima, mas o 'metodo' é um só. Porém mesmo isso é discutível, pois ainda não se tem uma prova cabal de que uma disciplina como a física quântica, por exemplo, *necessite* de uma lógica distinta da clássica, exceto se partirmos de alguns pressupostos de natureza mais filosófica (como admitir a existência de 'objetos' para os quais o conceito de identidade usual, dado pela lógica e pela matemática tradicionais careceria de sentido), mas que quase nada intereferem na *física* propriamente dita, que pode ser feita toda dentro do escopo da lógica clássica e da matemática padrão.

Cabe então à Teoria da Argumentação, nessa nova forma, primeiro justificar a origem das 'várias formas e argumentar'.

10.4.7 Lógica indutiva

10.5 Notas e complementos

<u>I. O último teorema de Fermat</u> Sabemos, pelo menos desde os pitagóricos, que a equação $x^2 + y^2 = z^2$ tem várias soluções em inteiros. Os números que a satisfazem são chamadas de *triplas*

pitagóricas. Por exemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$, $5^2 + 12^2 = 13^2$. Há cerca de 350 anos atrás, lendo um livro de Diofanto, o matemático francês Pierre de Fermat foi levado a pensar numa generalização desse resultado, quando as potências fossem 3, 4, etc. Em linguagem atual, a questão é: será que a equação $x^n + y^n = z^n$ admite solução em inteiros quando $n > 2$? Fermat escreveu na margem do livro que tinha uma "demonstração maravilhosa" para o fato de que a resposta é negativa, mas que a margem do livro era demasiadamente pequena para contê-la. Ele nunca escreveu a tal demonstração, e a questão tornou-se célebre, conhecida como 'último teorema de Fermat'.[5] A prova definitiva deste fato foi feita pelo matemático inglês Andres Wiles na década de 1980, e é acessível somente a uns poucos iniciados, pela sua extrema complexidade.

[5] A história toda acha-se em `http://fermat.workjoke.com/`.

Capítulo 11

A abordagem algébrica

A abordagem algébrica à lógica tem em Leibniz um dos precursores, mas foi com De Morgan e Boole, principalmente, em meados do século XIX, que uma 'visão algébrica' da lógica surgiu efetivamente. Boole teve a idéia de representar as operações lógicas (conectivos) por meio de operadores algébricos, usando os símbolos $+$, $\cdot$, $-$, 0 e 1 (a notação aqui não segue exatamente a de Boole) para ligar variáveis e interpretar as leis lógicas. Pode-se dar variadas interpretações às variáveis; se supusermos que elas percorrem *proposições* que podem ser ou verdadeiras (têm valor 1) ou falsas (têm valor 0), então $+$, $\cdot$ e $-$ podem ser interpretadas respectivamente como a disjunção, a conjunção e a negação de proposições. Assim, algumas das leis lógicas básicas podem ser expressas por meio desse simbolismo de modo fácil. Algumas, como $0 + x = x$ e $1 \cdot x = x$, são similares às leis algébricas usuais, mas outras, como $x + x = x$ e $x \cdot x = x$ não, ainda que tenham uma justificação simples em termos da interpretação dada ($x + x = x$ significa que o valor verdade da conjunção de uma proposição com ela mesma é o mesmo que o dela própria). Podemos também interpretar as variáveis como percorrendo a coleção dos subconjuntos de um conjunto dado. Neste caso, $+$, $\cdot$, $-$, 0 e 1 denotam respectivamente a união, a interseção, o complemento (relativo ao conjunto todo), o conjunto vazio e o conjunto dado, respectivamente. Como é fácil ver, todos os postulados de uma *álgebra de Boole* são satisfeitos.

A teoria dos silogismos pode ser facilmente transcrita nessa linguagem, e tratada por meios algébricos com enorme facilidade. No entanto, a teoria dos silogismos é restrita a predicados *unários*, como 'x é homem' ou 'x é mortal', não alcançando os propósitos da matemática de tratar de *relações* mais gerais como 'x é maior do que y' ou 'x está entre y e z'. Foi Charles Senders Peirce quem, a partir de 1870, estendeu o escopo da lógica para tratar de relações (predicados de peso maior do que um). Isso orinou a álgebra das relações, de enorme importância em matemática, mais tarde perseguida por Schröder e outros.

No entanto, o grande desenvolvimento da *lógica algébrica*, ou seja, do estudo da lógica por meio da álgebra, veio ocorrer somente no século XX principalmente devido a Alfred Tarski e outros, como Paul Halmos. Em especial, é a abordagem preferida pela escola polonesa de lógica, de enorme influência nesta área. Na seqüência, daremos uma idéia de como se pode abordar os variados sistemas lógicos por meio da álgebra: trata-se do estudo da *lógica abstrata*. Tudo o que se segue pode ser realizado em uma teoria de conjuntos como ZF, e suporemos que o leitor está familiarizado com as operações básicas envolvendo conjuntos.

De um ponto de vista abstrato, uma *lógica*, é um par ordenado $\ell = \langle F, \mathcal{T} \rangle$, onde ℓ é um conjunto não vazio, cujos elementos são chamados *fórmulas* e $\mathcal{T}$ é uma coleção não vazia de subconjuntos de F, ditos *teorias* de ℓ, satisfazendo as seguintes condições:

(i) $F \in \mathcal{T}$

(ii) Se $(A_i)_{i \in I}$ é uma família de elementos de $\mathcal{T}$, então a interseção de todos os A_i pertence a $\mathcal{T}$.

Nesta definição, I é um conjunto de índices, cujos elementos servem para indexar os elementos da família considerada. Lembremos que importa caracterizar uma noção de ℓ-inferência. Isso posto, podemos dar a seguinte definição: seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que α é *dedutível* de Γ (ou das fórmulas de Γ), ou que é *conseqüencia sintática* de Γ, fato que escrevemos $\Gamma \vdash \alpha$, se toda teoria T que contenha Γ (isto é, tal que $\Gamma \subseteq T$), é tal que $\alpha \in T$.[1]

O símbolo $\vdash$ representa a *relação de dedutibilidade* de ℓ, e suas propriedades especificam as formas de inferência que ℓ considera como (dedutivamente) *válidas* (na verdade, deveríamos falar em ℓ-validade, pois é claro que isso depende da particular lógica utilizada). Pode-se provar sem dificuldade que $\vdash$ satisfaz as seguintes propriedades, dentre outras, que são bastante intuitivas: (a) se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha$; (b) se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$ para qualquer conjunto de fórmulas Δ. Esta propriedade é denominada de *monotonicidade* da relação $\vdash$ e intuitivamente significa que se há uma dedução de α a partir de Γ, então α continuará a ser dedutível de qualquer conjunto que suplemente Γ com mais fórmulas; (c) se $\Gamma \vdash \alpha$ para toda $\alpha \in \Delta$.

A partir disso, podemos definir o *fecho dedutivo* do conjunto Γ como sendo o conjunto $\mathsf{Cn}(\Gamma) = \{\alpha \in F : \Gamma \vdash \alpha\}$, composto por aquelas fórmulas que são dedutíveis

[1] O símbolo $\subseteq$ é usado para representar a inclusão de conjuntos; se $A \subseteq B$, dizemos que A é subconjunto de B, o que ocorre quando todo elemento de A for também elemento de B. O símbolo $\cup$, usado abaixo, denota a união de conjuntos: $A \cup B$ é o conjunto cujos elementos pertencem a A ou a B (ou a ambos).

de Γ (Alfred Tarski, que introduziu esta noção, mas tarde escreveu $\overline{\Gamma}$ para denotar o fecho dedutivo de Γ). Facilmente se prova que ele satisfaz as seguintes propriedades: (1) $\mathsf{Cn}(F) = F$, (2) $\Gamma \subseteq \mathsf{Cn}(\Gamma)$, (3) $\mathsf{Cn}(\mathsf{Cn}(\Gamma)) \subseteq \mathsf{Cn}(\Gamma)$ e (4) se $\Gamma \subseteq \Delta$, então $\mathsf{Cn}(\Gamma) \subseteq \mathsf{Cn}(\Delta)$.

Podemos também caracterizar ℓ a partir da noção de dedutibilidade do seguinte modo: pomos $\ell = \langle F, \vdash \rangle$, onde F é um conjunto não vazio como antes, sendo $\vdash$ uma relação entre conjuntos de fórmulas e fórmulas satisfazendo as propriedades (a)-(c) acima mencionadas. Alternativamente, podemos por $\ell = \langle F, \mathsf{Cn} \rangle$, com Cn sendo dado pelas propriedades (1)-(4) acima. Todos esses modos de se especificar ℓ são equivalentes, e podem ser descritos por exemplo na linguagem da teoria de conjuntos. Deste prisma, uma lógica é vista como uma álgebra, ou seja, como uma estrutura composta por um (ou vários) conjuntos e por operações e/ou relações entre os elementos ou subconjuntos desses conjuntos, satisfazendo certas condições.

Resumidamente, para termos ℓ, o que importa é caracterizar um conjunto de objetos que são chamados fórmulas e uma coleção de fórmulas, as teorias de ℓ, satisfazendo condições como as acima. A primeira definição acima toma as teorias diretamente como elementos da estrutura, e por meio delas se definem os conceitos de dedução e de fecho dedutivo de um conjunto de fórmulas. Se por outro lado partirmos de estruturas com $\vdash$, ou com Cn, ou seja, se dissermos que uma lógica é um par da forma $\ell = \langle F, \vdash \rangle$, ou então $\ell = \langle F, \mathsf{Cn} \rangle$, esses símbolos obedecendo as propriedades indicadas, definimos teoria do seguinte modo: uma *teoria* é um conjunto de fórmulas T tal que se $\Gamma \subseteq T$, então $\mathsf{Cn}(\Gamma) \subseteq T$. Em outras palavras, uma teoria é um conjunto de fórmulas fechado por deduções.

Para completar a lógica ℓ, pode-se introduzir determinados operadores nas estruturas acima do seguinte modo. Sejam $\neg$ uma função (operação unária) de F em F, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ operações binárias sobre F, ou seja, funções de $F \times F$ em F ($F \times F$ é o produto cartesiano de F por ele mesmo). Dependendo das propriedades (axiomas) que esses operadores obedecem, teremos as suas variadas caracterizações, que servem para que se especifique variadas lógicas. Os exemplos seguintes ilustram alguns casos.

Dizemos que $\rightarrow$ é uma *implicação intuicionista* se cumpre as seguintes condições: (1) $\{\alpha, \alpha \rightarrow \beta\} \vdash \beta$ e (2) se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Não é difícil provar que o operator $\rightarrow$ é uma implicação intuitionista se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas: (i) $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$, (ii) $\vdash (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$, e (iii) $\vdash \alpha$ and $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ entail that $\vdash \beta$.

O operator $\rightarrow$ acima é uma negação clássica se é uma implicação intuicionista e vale ainda

$(\rightarrow_3)$ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \vdash \alpha$

De forma semelhante, pode-se introduzir na estrutura de uma lógica ℓ outros operadores, como $\leftrightarrow$, $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ satisfazendo condições óbvias. Por exemplo, uma *equivalência clássica* é um operador $\leftrightarrow$ que obedece às seguintes condições:

($\leftrightarrow_1$) $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$

($\leftrightarrow_2$) $\{\alpha \leftrightarrow \beta\} \vdash \beta \leftrightarrow \alpha$

($\leftrightarrow_3$) $\{\alpha \leftrightarrow \beta, \beta \leftrightarrow \gamma\} \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$

($\leftrightarrow_4$) $\{(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma\} \vdash \alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)$

($\leftrightarrow_5$) $\{\alpha \leftrightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$

($\leftrightarrow_6$) $\{\alpha \leftrightarrow \beta, \beta\} \vdash \alpha$

Uma *equivalência intuicionista* obedece ($\leftrightarrow_1$) a ($\leftrightarrow_6$), sem ($\leftrightarrow_4$). Uma *disjunção* é um operador binário $\vee$ que satisfaz

($\vee_1$) $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$

($\vee_2$) $\beta \vdash \alpha \vee \beta$

($\vee_3$) $A \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ and $A \cup \{\beta\} \vdash \gamma$ entails that $A \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$

Uma *conjunção*, por sua vez, é um operador binário $\wedge$ que obedece as condições seguintes:

($\wedge_1$) $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$

($\wedge_2$) $\{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta$

($\wedge_3$) $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$

Podemos distingur entre várias negações, todas sendo operadores unários denotados por $\neg$. A negação *minimal*, ou de Kolmogorov-Johanson, é caracterizada pela condição seguinte: ($\neg_1$) $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ and $A \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ implies that $A \vdash \neg\alpha$.

A negação *intuicionista* odecece ainda ($\neg_2$) $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$, e a negação *clássica* tem em adição a isso o seguinte postulado: ($\neg_3$) $A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ and $A \cup \{\neg\alpha\} \vdash \beta$ entails that $A \vdash \beta$.

Com este esquema, aqui somente delineado, pode-se erigir os sistemas lógicos mais comuns de modo fácil e abrangente. Por exemplo, consideremos a estrutura $\ell = \langle F, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \mathcal{T} \rangle$, e os seguintes postulados:

(1) $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(2) $\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(3) $\vdash \alpha$ and $\vdash \alpha \to \beta$ entails $\vdash \beta$

(4) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

(5) $\vdash (\alpha \wedge \beta) \to \beta$

(6) $\vdash \alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$

(7) $\vdash \alpha \to (\alpha \vee \beta)$

(8) $\vdash \beta \to (\alpha \vee \beta)$

(9) $\vdash (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

(10) $\vdash (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$

(11) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$

(12) $\alpha \vee \neg\alpha$

Temos então, como é fácil perceber, que: (a) $\to$ e $\neg$ são a implicação e a negação clássicas; (b) se (12) é eliminado, então $\to$ e $\neg$ são a implicação e a negação intuitionistas respectivamente; (c) se (11) e(12) são eliminados, então $\to$ e $\neg$ são a implicação intuicionista e a negação minimal respectivamenre.

Uma lógica $\ell = \langle F, \to, \wedge, \vee, \neg, \mathcal{T}\rangle$ é *clássica* se satisfaz (1)-(12). É uma lógica *minimal* se obedece (1)-(9) e é uma lógica intuicionista se é uma lógica minimal satisfazendo (11) (mas não (12). As justificativas para esses postulados é imediata.

A abordagem proporcionada pela lógica abstrata é muito geral, como se pode ver, e pode-se facilmente formular os sistemas lógicos não-clássicos conhecidos deste modo. Por exemplo, os sistemas modais aléticos usuais são estruturas da forma $\ell = \langle F, \to, \wedge, \vee, \neg, \Box, \mathcal{T}\rangle$ (note que acrescentamos mais um operador (unário) $\Box$ à estrutura anterior, satisfazendo (1)-(12) mais os seguintes postulados:

($\Box_1$) $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$

($\Box_2$) De α, inferimos $\Box\alpha$ (regra de Gödel)

($\Box_3$) $\Box\alpha \to \alpha$

($\Box_4$) $\Box\alpha \to \neg\Box\neg\alpha$

($\Box_5$) $\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$

($\Box_6$) $\neg\Box\neg\alpha \rightarrow \Box\neg\Box\neg\alpha$

Se considerarmos ($\Box_1$) e ($\Box_2$), temos o sistema modal K; com ($\Box_1$)-($\Box_3$), temos o sistema T. Com ($\Box_1$)-($\Box_4$), temos o sistema D, com ($\Box_1$)-($\Box_5$) o sistema S4 e com os seis, o sistema S5.

Os sistemas deônticos, que tratam da modalidades deônticas como obrigatório, permitido e proibido. Por exemplo, o sistema deôntico D_0 é um estrutura $\ell = \langle F, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \mathcal{O}, \mathcal{T}\rangle$, satisfazendo (1)-(12) mais

($\mathcal{O}_1$) $\mathcal{O}(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\mathcal{O}(\alpha) \rightarrow \mathcal{O}(\beta))$

($\mathcal{O}_2$) De α, deduzimos $\mathcal{O}(\alpha)$ (regra de Gödel)

($\mathcal{O}_3$) $\mathcal{O}(\alpha) \rightarrow \neg\mathcal{O}(\neg\alpha)$

($\mathcal{O}_4$) $\neg\mathcal{O}(\neg\alpha) \rightarrow \mathcal{O}(\neg\alpha\neg\alpha)$

A interpretação usual de $\mathcal{O}(\alpha)$ é de que α é obrigatório, podendo-se considerar, por exemplo, essa obrigatoriedade no sentido legal (donde a importância dessas lógicas para a filosofia do direito) ou no sentido moral ou ético. Definimos então $\mathcal{P}(\alpha)$ como $\neg\mathcal{O}(\neg\alpha)$ para indicar que α é permitida, bem como os demais operadores deônticos. Os outros sistemas deônticos podem ser definidos de modo óbvio.

As lógicas paraconsistentes C_n podem ser vistas como estruturas $\ell = \langle F, \rightarrow, \wedge, \vee, \neg, ^o, \mathcal{T}\rangle$, onde o operador ^{o} é unário. Dada uma fórmula α em F, definimos α^o como $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, o que indica que α é 'bem comportada'. Se acrescentarmos postulados adequados, obtemos os sistemas C_n (ver da Costa, Krause e Bueno 2005).

Lógicas envolvendo quantificação podem ser também introduzidas deste modo (da Costa 2005), bem como as lógicas polivalentes são facilmente estudadas. Neste último caso, podemos definir, baseados em Pollard (2005), uma lógica *n-valorada* como uma quíntupla $\ell = \langle F, V, D, CON, \diamond\rangle$ de forma que F é o conjunto das fórmulas, V dos valores de verdade, D é um subconjunto de V dos valores distinguidos, CON é um conjunto adequado de conectivos e $\diamond$ uma aplicação que atribui uma função n-valorada a cada membro de CON. Postulados adequados caracterizam essas lógicas (ver Pollard op. cit. e da Costa 2005).

O que importa é que o leitor perceba a potência do mecanismo algébrico. Todos os resultados sintáticos e semânticos relativo a esses sistemas podem ser devidamente interpretados algebricamente e derivados. A abordagem algébrica da lógica constitui, sem sombra de dúvida, uma de suas mais importantes faces.

Com mais espaço, poderíamos detalhar mais o desenvolvimento das lógicas abstratas, chegando a uma versão *topológica* da lógica, que seria como que uma terceira possibilidade de caracterizar os sistemas lógicos, estreitamente relacionada às abordagens lingüística e algébrica (cf. da Costa op. cit.).

———————————————————————————-

Capítulo 12

Lógica Indutiva

O CHAMADO *Problema da Indução* consiste, em linhas gerais, na justificativa das inferências indutivas (Popper 1975, p. 14). No sentido em que empregaremos esta noção, por indução entenderemos informalmente uma inferência realizada a partir de um determinado conjunto de sentenças (as premissas da inferência) de modo que a verdade das premissas não implica necessariamente na veracidade da conclusão, como ocorre com as inferências dedutivamente válidas, mas meramente a torna *plausível*. O problema, certamente, está em mensurar, ou pelo menos em dar algum sentido preciso, para essa 'plausibilidade'. Veremos como podemos fazer isso mais à frente. Por ora, vamos caracterizar de modo mais preciso o nosso conceito de indução, e para isso faremos uso do método algébrico já delineado anteriormente.

A definição seguinte generaliza a de consequência sintática (ver à página (**??**) de modo a englobar o que chamaremos de *consequência sintática indutiva*, ou simplesmente consequência indutiva de um conjunto de sentenças, as premissas da inferência.

Definição 12.0.1 (ℓ-Inferência) *Seja Γ um conjunto de fórmulas de uma adequada linguagem L (de uma lógica ℓ), e seja α uma fórmula de L. Diremos que α é uma ℓ-inferência ou uma ℓ-consequência sintática de Γ, e escrevemos $\Gamma \mid\!\sim \alpha$ (ou $\Gamma \mid\!\sim_\ell \alpha$ se houver necessidade de se explicitar a lógica), se existe uma seqüência finita de fórmulas $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que, para cada $1 \leq i \leq n$, se tenha:*

(i) α_i é um axioma lógico de ℓ, ou

(ii) $\alpha_i \in \Gamma$, ou

(iii) α_i é uma conseqüência dedutiva de fórmulas precedentes da seqüência por uma das regras dedutivas de ℓ, ou

(iv) α_i é uma conseqüência indutiva de fórmulas precedentes da seqüência por uma das regras indutivas de ℓ, e

(v) α_n é α, e

(vi) Qualquer aplicação de uma regra indutiva tendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ como premissas está sujeita a uma restrição γ, então γ deve ser respeitada; em particular, se γ é uma fórmula de L, então $\Gamma \nvdash \gamma$, e

(vii) Para toda Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta \subseteq \{\alpha : \Gamma \mid\!\sim \alpha\}$, segue-se que $\{\delta : \Delta \mid\!\sim \delta\} \subseteq \{\alpha : \Gamma \mid\!\sim \alpha\}$.

Se apenas as regras (i)-(iii), (v) forem consideradas, diremos que α é uma *ℓ-inferência dedutiva* das premissas, e escreveremos $\Gamma \vdash \alpha$. É claro que este conceito equivale ao anteriormente introduzido com a mesma simbologia. Uma lógica ℓ que encerre pelo menos uma regra indutiva é dita ser uma *lógica indutiva*. Se partirmos de uma lógica dedutiva ℓ e acrescentarmos às suas regras de inferência alguma regra indutiva, diremos que o sistema assim obtido é a lógica indutiva associada a ℓ. A seguir, daremos exemplos simples de algumas regras indutivas que podem ser acrescentadas ao aparato dedutivo de algumas lógicas (dedutivas) para obter a sua lógica indutiva associada.

O primeiro exemplo envolve a chamada indução por simples enumeração, ou indução simples.

Apêndice A
Reticulados e Álgebras de Boole

O CONTEÚDO DESTE Apêndice pode ser todo desenvolvido em ZF. Um *r*eticulado é uma 3-upla ordenada $\mathcal{R} = \langle X, \sqcap, \sqcup \rangle$, onde: (1) X é um conjunto não vazio; (2) $\sqcap$ e $\sqcup$ operações binárias sobre X, ou seja, aplicações de $X \times X$ em X. A imagem do par $\langle x, y \rangle$ pela aplicação $\sqcap$ é denotada por $x \sqcap y$, e a imagem do mesmo par por $\sqcup$ é escrita $x \sqcup y$. (3) Para todos x, y e z de X tem-se:

(i) $x \sqcap y = y \sqcap x$ e $x \sqcup y = y \sqcup x$ (comutatividade)

(ii) $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ e $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ (associatividade)

(iii) $x \sqcap x = x$ e $x \sqcup x = x$ (idempotência)

(iv) $x \sqcap (x \sqcup y) = x$ e $x \sqcup (x \sqcap y)x$ (absorção)

Como ocorre normalmente, ao invés de nos referirmos à estrutura $\mathcal{R}$, é comum dizer por abuso de linguagem que X é um reticulado (referido-nos, deste modo, somente ao domínio da estrutura). O elemento $x \sqcap y$ é dito *produto*, *ínfimo* ou *encontro* de x e y, enquanto que $x \sqcup y$ é chamado de *soma*, *supremo*, *junção* de x e y.

O supremo e o ínfimo dos elementos $x_1, \ldots, x_n$ de X são denotados respectivamente por $\bigvee_{i=1}^n x_i$ e $\bigwedge_{i=1}^n x_i$. É fácil provar a sua existência e unicidade.

Por exemplo, seja Y conjunto qualquer e considere $X = \mathcal{P}(Y)$. Então, para x e y em X, poẽ-se: $x \sqcap y =_{\mathsf{def}} x \cap y$ e $x \sqcup y =_{\mathsf{def}} x \cup y$. É facil ver que a estrutura que daí resulta é um reticulado.

Como outro exemplo, tome X como sendo o conjunto dos números naturais não nulos $1, 2, \ldots$ e defina $x \sqcap y =_{\mathsf{def}} mdc(x, y)$ e $x \sqcup y =_{\mathsf{def}} mmc(x, y)$ para quaisquer x e y em tal conjunto. A estrutura assim obtida é um reticulado.

Um *conjunto parcialmente ordenado* (ou 'poset')[1] é um par $\langle X, R\rangle$ constituído por um conjunto não vazio X e uma relação de ordem parcial R sobre X, ou seja, uma relação binária sobre X que é reflexiva, anti-simétrica e transitiva. Em geral, ao invés de xRy, escreve-se $x \leq y$ para se dizer que o par $\langle x, y\rangle$ está na relação R, mas observa-se que nem sempre $\leq$ denota a conhecida relação de 'menor ou igual que' entre números. Nessa situação,

Seja $\mathcal{R}$ um reticulado. Sobre X definimos a relação seguinte, para todos x e y de X:

$$x \leq y \;\text{ see }\; x \sqcap y = x \;\text{ see }\; x \sqcup y = y$$

Considerando o primeiro exemplo dado acima, nota-se que $a \leq b$ se e somente se $a \subseteq b$, ou seja, se a for subconjunto de b. No segundo exemplo, repare que, por exemplo, $1 \leq 3$, $3 \leq 9$, mas $\neg(2 \leq 3)$ pois o mmc entre 2 e 3 não é 3 (nem o mdc entre eles é 2).

É imediato provar que $\leq$ é uma ordem parcial sobre X.

12.1 Reticulados como sistemas ordenados

A definição acima estabeleceu um reticulado como uma 'estrutura algébrica', ou seja, como um certo conjunto dotado de operações e relações entre seus elementos satisfazendo determinadas propriedades. No entanto, um reticulado é uma estrutura tão peculiar que também pode ser visto como uma 'estrutura de ordem'.[2] Para tanto, admita que, ao invés de partirmos do conjunto X munido das duas operações binárias referidas na definição acima, através das quais pudemos definir a ordem parcial como fizemos, partíssemos de um sistema parcialmente ordenado $\langle X, \leq\rangle$ (ou seja, de um conjunto X dotado de uma ordem parcial $\leq$).

Então, munidos tão somente da ordem parcial sobre X, podemos definir as operações $\sqcap$ e $\sqcup$ do seguinte modo: para quaisquer x e y de X, pomos: (1) $x \sqcap y =_{\mathsf{def}} \inf(\{x, y\})$, ou seja, $x \sqcap y$ é aquele elemento elemento $i \in X$ tal que (i) $i \leq x \sqcap i \leq y$ para todos x e y de X e (ii) se $a \leq x \sqcap a \leq y$ para algum $a \in X$, então $a \leq i$. Analogamente, pomos $x \sqcup y =_{\mathsf{def}} \sup(\{x, y\})$, ou seja, $x \sqcup y$ é aquele elemento $s \in X$ tal que (i) $x \leq s \sqcap y \leq s$ para todos $x, y \in X$ e (ii) se $x \leq a \sqcap y \leq a$, então $s \leq a$.

Nada garante que, num sistema ordenado arbitrário $\langle X, \leq\rangle$, exista o supremo ou o ínfimo de dois de seus elementos (na verdade, deveríamos dizer 'supremo e ínfimo do

[1] É comum, mesmo em português, usar a expressão 'poset' (*partially ordered set*) para fazer referência à estrutura da definição.

[2] Essa distinção é fundamental para certos propósitos. Para N. Bourbaki, as estruturas da matemática usual são certas combinações de estruturas de três tipos básicos: algébricas, de ordem e topológicas; por exemplo, os números reais formam um 'corpo (estrutura algébrica) ordenado (ordem) completo (estrutura topológica).

conjunto formado pelos dois elementos'); mas, no entanto, *se* tais elementos existirem, resultam válidas as condições da definição dada de reticulado, de sorte que se pode estabelecer a seguinte definição alternativa à anterior.

Um *r*eticulado é um conjunto parcialmente ordenado X tal que qualquer subconjunto de X que tenha apenas dois elementos tem supremo e ínfimo.

Ou seja, dados quaisquer x e y em X, *existem* o supremo e o ínfimo de x e y (ou melhor, do conjunto $\{x, y\}$).

Um reticulado é *c*ompleto se todo subconjunto de X tem supremo e ínfimo, em particular o próprio X. Em um reticulado completo, o ínfimo de X é denominado *z*ero do reticulado, enquanto que o supremo de X é denominado *u*m (ou *u*nidade) do reticulado. Esses elementos são denotados $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ respectivamente. No caso, tais elementos coincidem com o *menor* e com o *maior* elementos de X respectivamente.[3]

É imediato provar que todo reticulado finito (i.e., tal que X é um conjunto finito) é completo. Um reticulado X com $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ é *complementado* se para cada $x \in X$ existe um elemento $x' \in X$ (dito *c*omplemento de x) tal que $sup(\{x, x'\}) = \mathbf{1}$ (ou seja, $x \sqcup x' = \mathbf{1}$) e $inf(\{x, x'\}) = \mathbf{0}$ (ou seja, $x \sqcap x' = \mathbf{0}$).

O elemento x' da definição precedente é dito *complemento* de x.

Para um reticulado qualquer X, pode-se provar que vale o seguinte, sendo x, y, z elementos arbitrários de X: (i) $(x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z) \leq x \sqcap (y \sqcup z)$; (ii) $x \sqcup (y \sqcap z) \leq (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$. Ou seja, em geral não valem as leis distributivas. Quando isso acontece, o reticulado é dito *d*istributivo.

Como exemplo de um reticulado distributivo, considere qualquer conjunto X, tal que $\langle \mathcal{P}(X), \subseteq \rangle$ é um reticulado completo complementado tal que $\mathbf{0} = \emptyset$ e $\mathbf{1} = X$. O complemento de $A \in \mathcal{P}(X)$ é o conjunto $A' = X - A$.

Daremos agora um exemplo importante de um reticulado que não é distributivo. Para isso, é conveniente saber que um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial $\mathcal{V}$ com produto interno $\langle \, | \, \rangle$ que é *completo* em relação à norma induzida pelo produto interno (ou seja, à norma $\|\alpha\| =_{\mathsf{def}} \sqrt{\langle \alpha | \alpha \rangle}$.[4] Para os propósitos deste exemplo, basta tomar $\mathcal{V}$ como um espaço vetorial *finito* com produto interno, que resulta completo, como se pode mostrar.

Seja então $\mathcal{V}$ um espaço de Hilbert e seja X como o conjunto dos subespaços vetoriais de $\mathcal{V}$, e seja $U^{\perp}$ o complemento ortogonal de $U \in X$, ou seja, o subsepaço $U^{\perp} = \{\alpha \in \mathcal{V} : \langle \alpha | \beta \rangle, \forall \beta \in U\}$.

[3] Seja $\langle X, \leq \rangle$ um sistema parcialmente ordenado e $Y \subseteq X$. Um elemento $a \in Y$ é *m*enor elemento (*m*ínimo, primeiro) de Y se $a \leq x$ para todo $x \in Y$. Analogamente, um elemento $b \in Y$ é *m*aior elemento (*m*áximo, último) elemento de Y se $x \leq b$ para todo $x \in Y$.

[4] Para detalhes, veja por exemplo P. R. Halmos, *Espaços vetoriais de dimensão finita*, Rio de janeiro, Campus, 1978, Apêndice.

Dados U e W em X, definimos $U \sqcap W$ como sendo a interseção $U \cap W$, e $U \sqcup W$ como sendo o subespaço *gerado* por $U \cup W$. A razão de se proceder deste modo é que nem sempre a união de subespaços é um subsepaço vetorial, como se sabe. Isso posto, é fácil perceber que tais operações satisfazem os axiomas correspondentes da definição de reticulado, e além disso o subsepaço trivial O (cujo único elemento é o vetor nulo de $\mathcal{V}$) e o próprio $\mathcal{V}$ desempenham o papel dos elementos zero e um de um reticulado, respectivamente.

Note agora que a operação de associar a cada subsepaço de $\mathcal{V}$ o seu complemento ortogonal satisfaz as cláusulas da operação de complementação em um reticulado. Desse modo, pode-se perceber que temos às mãos um reticulado complementado. No entanto, ele não é distributivo. Com efeito, basta tomar $\mathcal{V}$ como o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno canônico,[5] U, V e W subsepaços definidos respectivamente (e adequadamente) como correspondendo intuitivamente aos eixos OX, OY e à reta $x = y$. Nota-se então que $X \sqcup (Y \sqcap Z) = X$, ao passo que $(X \sqcup Y) \sqcap (X \sqcup Z) = \mathbb{R}^2$.

12.2 Álgebras de Boole

Uma *Álgebra de Boole* ou um *r*eticulado booleano é um reticulado complementado e distributivo.

É fácil constatar que, para qualquer conjunto X, o conjunto $\mathcal{P}(X)$ munido da relação $\subseteq$ é uma álgebra de Boole. As álgebras de Boole podem, alternativamente, ser definidas do modo seguinte:

Uma ´Algebra de Boole é uma sextupla ordenada

$$\mathcal{B} = \langle B, \sqcup, \sqcap, *, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$$

na qual:

(i) B é um conjunto não vazio

(ii) $\sqcup$ e $\sqcap$ são operações binárias sobre B; usaremos a notação habitual $x \sqcap y$ e $x \sqcup y$ em sentido óbvio.

(iii) $*$ é uma operação unária sobre B. Do mesmo modo que no ítem anterior, escreveremos x^* para denotar a imagem do elemento $x \in B$ pela função *.

(iv) $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ pertencem a B

[5]Ou seja, para $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, tem-se $\langle (x_1, x_2) | (y_1, y_2) =_{\text{def}} x_1 y_1 + x_2 y_2$.

Ademais, para quaisquer x, y e z em B, os seguintes axiomas são satisfeitos:

(i) $x \sqcup y = y \sqcup x$ e $x \sqcap y = y \sqcap x$ (comutatividade)

(ii) $x \sqcup (y \sqcup z) = (x \sqcup y) \sqcup z$ e $x \sqcap (y \sqcap z) = (x \sqcap y) \sqcap z$ (associatividade)

(iii) $x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$ e $x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$ (distributividade)

(iv) $(x \sqcup y) \sqcap x = y$ e $(x \sqcap y) \sqcup x = x$ (absorção)

(v) $x \sqcap x = x$ e $x \sqcup x = x$ (idempotência)

(vi) $x \sqcap x^* = \mathbf{0}$ e $x \sqcup x^* = \mathbf{1}$ (complementaridade)

(vii) $x \sqcup \mathbf{1} = \mathbf{1}$, $x \sqcap \mathbf{1} = x$, $x \sqcup \mathbf{0} = x$ e $x \sqcap \mathbf{0} = \mathbf{0}$

A álgebra é dita *d*egenerada se contém um só elemento. Como é comum, abusaremos da notação e denotaremos uma tal álgebra simplesmente por B, fazendo referência tão somente ao domínio da estrutura em questão.

Em uma álgebra de Boole B, definimos uma *r*elação de ordem do mesmo modo como fizemos para reticulados: para todos x e y em B, $x \leq y \leftrightarrow x \sqcap y = x$ ou, equivalentemente, $x \leq y \leftrightarrow x \sqcup y = y$.

É de fácil verificação que para todo $x \in B$ tem-se que $x \leq \mathbf{1}$, que $\mathbf{0} \leq x$ e que $x \leq y$ see $x \sqcap y^* = \mathbf{0}$, ou seja, 0 e 1 tornam-se ínfimo e supremo de B respectivamente.

Por exemplo, sejam X um conjunto qualquer e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto potência de X. Então, tomando $\sqcup$, $\sqcap$, $*$, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ respectivamente como $\cup$, $\cap$, $'$ (complemento de um subconjunto de X relativo a X), $\emptyset$ e X, então $\mathcal{P}(X)$ é uma álgebra de Boole.

Um outro exemplo. Seja $\langle X, \tau \rangle$ um espaço topológico tal que $\overline{x}$ denota o fecho de $x \subseteq X$ e x^o denota o interior de x. Um conjunto $x \subseteq X$ é uma *a*berto regular se $x = (\overline{x})^o$ (ou seja, x é um aberto 'sem buracos'). Denotando por $Ro(X)$ o conjunto de todos os abertos regulares de X, definimos sobre este conjunto as operações seguintes, para todos u e v em $Ro(X)$: $u \sqcup v =_{\mathsf{def}} (\overline{u \cup v})^o$, $u \sqcap v =_{\mathsf{def}} u \cap v$, $u^* =_D X - \overline{u}$. Isto posto, consideramos ainda $0 =_D \emptyset$ e $1 =_D X$. Basta agora comprovar que $Ro(X)$ é uma álgebra de Boole completa, o que pode ser feito como exercício.

Um caso particularmente relevante é o da álgebra de Boole $\mathsf{2}$, que é definida do seguinte modo. O domínio é o conjnto $\{0, 1\}$, $\sqcap$ e $\sqcup$ são definidas como $x \sqcap y =_{\mathsf{def}} \text{ínf}\{x, y\}$ e $x \sqcup y =_{\mathsf{def}} \text{máx}\{x, y\}$ respcetivamente. Ademais, $0^* = 1$ e $1^* = 0$.

Vejamos um exemplo em física. Na axiomatização feita por W. Noll para a mecânica do contínuo.[6] Noll toma um conjunto Ω de 'corpos' (físicos) e uma ordem parcial $\prec$

[6]Descrita no livro de C. Truesdell, *A first course in rational continuum mechanics*, Vol. I: General Concepts. New York, San Francisco and London, Academic Press, 1977, cap. 1.

sobre Ω. Se $a \prec b$, diz-se que o corpo a é *parte* de b. Definindo então 0 como aquele corpo que é parte de todo corpo e ∞ como o corpo do qual todo corpo é parte (admitidos existirem), seja $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{0, \infty\}$. Pondo $a \sqcap b =_{\mathsf{def}} inf\{a, b\}$ e $a \sqcup b =_{\mathsf{def}} sup\{a, b\}$, é fácil ver que a estrutura resultante é uma álgebra de Boole. Aliás, os seis primeiros axiomas de Noll (na versão de Truesdell) são precisamente aqueles que dotam o conjunto $\overline{\Omega}$ de uma estrutura de álgebra de Boole.

O reticulado subjacente à Mecânica Clássica

Seja σ um sistema físico (no domínio do discurso da Mecânica Clássica (MC)). Por exemplo, σ pode ser uma partícula clássica. De acordo com o formalismo matemático standard da MC, podemos associar a σ uma 'representação matemática', chamado de *espaço de fase* Γ, que no caso é identificado com o conjunto de todas as sextuplas de números reais $\langle x_1, \ldots, x_6 \rangle$, onde x_1, x_2 e x_3 são as coordenadas de *posição* e x_4, x_5 e x_6 são as coordenadas de *momento* de σ. Ademais, assume-se que qualquer elemento $p \in \Gamma$ representa um *estado puro* que σ pode assumir (os elementos de Γ são denominados 'pontos').

Uma *variável dinâmica* (um *observável*) $\overline{Q}$ que pode ser medida sobre σ é representada por uma função Q de Γ no conjunto dos reais. O real associado é interpretado como sendo o *valor* da medida do observável $\overline{Q}$ para σ em um determinado estado puro. Uma proposição expressando o resultado de uma medida do observável $\overline{Q}$ para σ num estado $p \in \Gamma$ diz em qual subconjunto $X \subseteq \Gamma$ o objeto ponto p é encontrado com certeza.

Desse modo, a cada proposição sobre o sistema, associa-se um elemento de $\mathcal{P}(\Gamma)$, o conjunto potência de Γ, que pode então ser visto como o sistema de todas as *propriedades possíveis* dos estados puros de Γ. Ou seja, $X \in \mathcal{P}(\Gamma)$ representa a extensão de uma *proposição* P que pode ser verdadeira ou falsa para cada estado puro $p \in \Gamma$: P será verdadeira para p se $p \in X$, e falsa se $p \notin X$, ou seja, se p pertencer ao complemento de X relativo a Γ.

Nota-se aqui uma sutileza importante, que terá consequências relevantes no contexto da física quântica. Trata-se a hipótese acima assumida de que, a cada *propriedade* P, acha-se associado um *conjunto* X, dito 'extensão de P', constituído por aqueles objetos do domínio que têm a propriedade P. Essa hipótese é conhecida por Princípio de Frege. Falaremos mais sobre isso oportunamente, mas repare no pressuposto de se considerar 'conjuntos' como sendo as extensões dos predicados. A dificuldade mencionada relativamente à física quântica, vem do fato de que esta disciplina apresenta-nos casos de predicados que não têm uma extensão bem definida. Não discutiremos este assunto aqui, mas podemos resumir a idéia principal: se concierarmos o predicado "ter spin UP na direção X" (o spin é uma propriedade dos sistemas quânticos –veja abaixo, onde se fala mais sobre o spin), que pode ser aplicada a uma certa coleção de elétrons, então podemos determinar experientalmente quantos são os elétrons da coleção que têm tal propriedade, mas nunca *quais são* eles. Assim, a extensão do predicado não fica bem caracterizada extensionalmente.

Feita a convenção acima de que as proposições acerca do estado de um sistema mecânico clássico podem ser feitas por referência a um espaço de fase Γ, adequado no qual cada estado, é representado por um 'ponto' P. Uma proposição expressando o resultado de uma medida estabelece em qual dos subconjuntos $S \subseteq \Gamma$ o ponto P pode ser encontrado. Assim, cada proposição p que possa ser associada a uma medição experimental corresponde a um subconjunto S_p de Γ e será verdadeira se o ponto P que representa o estado a que p diz respeito está em S_p e falsa em caso contrário. A conjunção $p \sqcap q$ (ou a disjunção $p \sqcup q$) de duas proposições p e q é verdadeira se pertence à interseção $S_p \cap S_q$ (respectivamente, pertence à união $S_p \cup S_q$). Por outro lado, o complemento p^* simplesmente diz que $p \notin S_p$. Se sempre que p é verdadeira q também é verdadeira, então $S_p \subseteq S_q$; este fato é escrito $p \leq q$ e diz-se que p *implica* q. É fácil ver que esta relação é uma ordem parcial; assim, pode-se dizer que p e q são *equivalentes*, e escrever $p = q$ se $p \leq q$ e $q \leq p$.

Isto posto, uma *quantidade física* é definida como sendo a coleção de todas as proposições 'experimentais' equivalentes (no sentido acima) a uma dada proposição; em símbolos, $[p] = \{q : q = p\}$, para dada p.[7] Então, a ordem parcial acima permite definir uma ordem parcial (como se pode provar) sobre tais coleções, pondo $[p] \preceq [q] =_{\mathsf{def}} p \leq q$, o que mostra que as qualidades físicas atribuíveis a um sistema físico (clássico) formam um sistema parcialmente ordenado e, como vale a distributividade e as demais propriedades relevantes, a conclusão de Birkhoff e von Neumann é que o cálculo proposicional da mecânica clássica é uma álgebra de Boole.

O reticulado subjacente à Mecânica Quântica

Daremos aqui apenas idéias bastante gerais, seguindo um exemplo informal que fornece argumentos para que se entenda porque, segundo alguns autores, a lógica subjacente à mecânica quântica não seria clássica. Este argumento, no entanto, tem sofrido objeções por parte dos físicos, como se pode verificar em Pessoa 1999. No entanto, essas objeções não comprometem o que estamos descrevendo aqui, de forma que acreditamos ser lícito mater o exemplo.

---

[7] Esta definição foi dada por Birkhoff e von Neuman; o aqui exposto segue a exposição feita em Jammer 1974, p. 247.

Em física, há certas grandezas que podem ser medidas. Um exemplo é o *spin* de uma determinada partícula, digamos um elétron, que pode ser avaliada segundo uma direção determinada. É um *fato* da física que o spin de um elétron pode assumir apenas um dentres dois valores : 1/2 ou -1/2 (que vamos denotar simplesmente por + e -). Conseqüentemente, chamando de s_e^x o spin do elétron e na direção x, em virtude do que se disse acima, $s_e^x = + \vee s_e^x = -$ é verdadeira. Outro fato aceito pala mecânica quântica é o Princípio de Heisenberg (para spin), que asserta que o spin de uma partícula não pode ser medido simultaneamente em duas direções distintas. Suponha agora que x e y sejam duas direções distintas e que obtivemos $s_e^y = +$ por medição. Então, podemos dizer que

$$s_e^y = + \wedge (s_e^x = + \vee s_e^x = -).$$

Mas então, usando a lógica proposicional (em especial, a Lei Distributiva $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$), obtemos:

$$(s_e^y = + \wedge s_e^x = +) \vee (s_e^y = + \wedge s_e^x = -).$$

No entanto, qualquer uma das espressões dessa disjunção ou é falsa ou sem sentido, em virtude do que se disse acima. Em outras palavras, a Lei Distributiva, uma das mais fundamentais da lógica tradicional, não valeria no contexto da mecânica quântica, como sustentaram von Neumann e Birkhoff e muitos depois deles. Em resumo, o que esses autores verificaram foi que o reticulado subjacente às proposições da mecânica quântica não é uma Álgebra de Boole, como ocorre no caso da MC, em virtude da falha da Lei Distributiva. Na verdade, a estrutura algébrica que se usa é o que se denomina um reticulado *m*odular ortocomplementado. Os detalhes devem ser vistos nos livros acima mencionados. O estudo desse reticulado e de muitos outros que foram elaborados depois constitui o cerne de uma área da lógica denominada de 'lógica quântica' (ver Dalla Chiara et al. 2004).

12.3 A algebrização da lógica

Na seção 4.4, esboçamos a forma de se obter a álgebra de Lindenbaum associada ao cálculo proposicional clássico, que é uma álgebra de Boole, como vimos. Esse exemplo mostra algo deveras importante. No estudo dos sistemas lógicos, aparecem, de modo natural, uma grande variedade de estruturas matemáticas, em particular de sistemas algébricos. Sem muito rigor, um sistema algébrico é algo constituído por conjuntos e por relações e funções entre esses conjuntos. Por exemplo, uma álgebra de Boole, um reticulado, grupos, etc., são sistemas algébricos.[8] O resultado acima evidencia que, do ponto de vista algébrico, o cálculo proposicional clássico nada mais é do que uma álgebra de Boole. Se fossemos considerar a quantificação (o que faremos no segundo volume), entrariam em cena estruturas como as álgebras monádicas e poliádicas de Halmos e as álgebras cilíndricas de Tarski.

A 'algebrização da lógica' não é fenômeno novo, tendo antecedentes em Leibniz, De Morgan e, principalmente, George Boole (para detelhes históricos, recomendamos Kneale & Kneale 1980), mas foi durante o século XX que um novo ramo da lógica, denominado de 'lógica algébrica', se consolidou. Em geral, as estruturas algébricas que ocorrem na grande parte dos sistemas lógicos, como o cálculo proposicional clássico, advêm de certas passagens ao quociente, como feito acima para se obter o conjunto $\mathcal{P}/_\sim$ (ver a página61).

Em linhas gerais, a idéia é a de que, tendo-se um sistema lógico, deve-se procurar uma relação de equivalência adequada, compatível com as noções lógicas do sistema em consideração (ou seja, uma *congruência*) e passar-se o quociente, obtendo-se o sistema que algebriza a lógica em estudo. Isso é o que foi feito no caso sa lógica proposicional clássica, como vimos. Do mesmo modo, pode-se mostrar que, para a lógica intuicionista de Brouwer-Heyting, obtém-se uma estrutura algébrica que no entanto não é uma álgebra de Boole, mas uma 'álgebra de Heyting' (uma exposição introdutória acha-se em Miraglia 1987).

Assim, o filósofo deve perceber que o estudo teórico das linguagens formais pode ser feita também de um ponto de vista algébrico, de forma que os conceitos lógicos adquirem uma significação algébrica. Apenas para exemplifiar, uma *teoria* (ou seja, um conjunto de sentenças de uma determinada linguagem que é fechado para a relação de dedutibilidade) nada mais é do que um certo *filtro* (que é uma estrutura algébrica particular); uma *teoria consistente* é um *filtro próprio*, e uma *teoria completa* é um *ultra-filtro*.[9] Mesmo os metateoremas sobre os sistemas formais adquirem significação algébrica. Por exemplo, o primeiro terema de incompletude de Gödel admite uma versão que diz haver certos filtros próprios que não são ultra-filtros, etc. Um livro clássico sobre lógica algébrica é Halmos 1962; modernos tratamentos de sistemas lógicos (incluindo não clássicos) pode ser acompanhado em Cignole et al. 1994.

No tocante aos sistemas não-clássicos, no entanto, nem sempre o método acima de se achar uma relação de equivalência funciona adequadamente, pois o sistema em estudo pode não apresentar uma relação de congruência significativa para tais propósitos,

[8] Outras estruturas, como as topológicas, por exemplo a de espaço topológico, aparecem igualmente relacionadas de certo modo aos sistemas dedutivos, mas não estenderemos este ponto aqui.

[9] Não daremos todas as definições dos conceitos utilizados aqui. O leitor que tiver dificuldades pode simplesmente pular esta seção.

como sucede, por exemplo, com certos cálculos paraconsistentes. Mesmo no escopo da lógica clássica, porém, a passagem ao quociente pode não permitir um tratamento algébrico adequado de certos conceitos lógicos, como ocorre com o conceito de *tableaux* de Smullyam e de conjunto de Hintikka do cálculo proposicional clássico.

Em virtude disso, usam-se muitas vezes as chamadas *pré-álgebras*, por exemplo quando: (a) não se tem ou não se conhece uma relação de congruência adequada, (b) a passagem ao quociente 'esconde' fatos significativos acerca do sistema em apreço. No primeiro caso, surgem certas estruturas conhecidas como *álgebras de Curry*, introduzidas pelo primeiro autor deste trabalho, e no segundo caso, aparecem as pré-álgebras propriamente ditas.

A noção de álgebra de Curry foi introduzida para sistematizar uma teoria geral da algebrização dos sistemas lógicos. Adaptando-se adequadamente o conceito, obtém-se casos particulares tais como o de matriz lógica, modelo de Kripke e de estrutura da teoria usual de modelos, as quais não estão no entanto diretamente vinculadas ao problema da algebrização.

Apêndice B
Indução e Recursão

12.4 Indução

Um tipo de construção muito útil em lógica e em matemática é aquela que nos permite 'construir' um certo subconjunto de um dado conjunto X partindo de um elemento qualquer de X (ou de alguns elementos) e, aplicando certas operações, exprimir a idéia do "e assim por diante". O conjunto procurado é o 'menor' conjunto que contém o(s) elemento(s) destacado(s) e é fechado para as operações em questão. Qualquer elemento deste subconjunto será um elemento de X que pode ser obtido a partir do(s) elemento(s) inicial(ais) pela aplicação das operações em selecionadas um número finito de vezes.

Por simplicidade, consideremos um caso particular no qual há conjunto inicial

$$B \subseteq X$$

e uma classe F de funções com pelo menos dois elementos f e g, sendo

$$f : X \times X \mapsto X \text{ e } g : X \mapsto X.$$

Sendo $a, b \in B$, o conjunto procurado, que vamos chamar de C, conterá por exemplo

$$b, f(b, b), g(a), f(g(a), f(a, b)), \text{ '}\textit{e assim por diante}\text{'}$$

Dizemos que $S \subseteq X$ é *indutivo* se $B \subseteq S$ e S é fechado para as operações f e g. Seja C a interseção de todos os subconjuntos indutivos de X; é fácil ver que C é indutivo e que é o 'menor' conjunto indutivo, no sentido de estar contido em todos os outros. Este C é dito *gerado* por B mediante f e g. Vem então o seguinte

Princípio de Indução Suponhamos que C seja gerado por B por meio das funções em F. Se S é um subconjunto de C que inclui B e é fechado relativamente às operações de F, então $C = S$.

Como obter este conunto C? Um modo de gerar C a partir de $B \subseteq X$ por meio de funções em F é o seguinte. Chamamos de *seqüência de formação* uma seqüência finita

$$\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$$

de elementos de X tais que, para cada $i \leq n$,

$x_i \in B$ ou

$x_i = f(x_j, x_k)$, com $j, k < i$ ou

$x_i = g(x_j)$, com $j < i$.

Assim, C será o conjunto de todos os x que são o último elemento de uma seqüência de formação. Para obtê-lo, basta consider C_n como o conjunto de todos os x cujas seqüências têm comprimento n. Então vem que

$$C_1 = B \ \text{ e } \ C = \bigcup_n C_n.$$

Um exemplo importante, que explica o próprio sentido da palavra 'indução' (finita) em matemática é o seguinte.[10] Suponha que X é o conjunto dos números naturais, que chamaremos, como é usual, de ω. Sejam ainda $B = \{0\}$ e $f : \omega \mapsto \omega$ a única função em F, dita 'função sucessor', definida assim: para cada $x \in \omega$, $f(x) = x + 1$. Deste modo, as seqüências $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ ficam:

$$\langle 0 \rangle$$

$$\langle 0, 1 \rangle$$

$$\langle 0, 1, 2 \rangle$$

$$\vdots$$

[10] A palavra 'finita' foi colocada aqui entre parênteses porque há outras formas de indução distintas da que estamos considerando, como a indução *transfinita*.

Então, sendo C_n como acima para $n \in \omega$, temos que o conjunto resultante C é o próprio conjunto ω, ou seja,

$$C = \bigcup_n C_n = \omega.$$

Em outras palavras, ω é o 'menor' conjunto indutivo gerado a partir do zero (na verdade, a partir do conjunto cujo único elemento é o zero) por meio da função sucessor. Em outras palavras, como C é o 'menor' conjunto indutivo, então ω é o 'menor' conjunto de números naturais que contém o zero e o sucessor de cada um de seus elementos, ou, como expressamos informalmente,

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Vejamos um outro exemplo utilzando aquilo que já aprendemos antes. Aqui, X é o conjunto de todas as *expressões* da linguagem do Cálculo Proposicional Clássico estudado anteriormente. Queremos caracterizar o conjunto C de suas *fórmulas*. Para isso, vamos considerar um conjunto inicial B de todas as variáveis proposicionais $A, B, C, \ldots$ (que, como você deve lembrar, são fórmulas). Então, para F tomamos o conjunto cujos elementos são as funções abaixo definidas, para α e β fórmulas quaisquer:

$\xi_{\neg}(\alpha) = \neg\alpha$

$\xi_{\wedge}(\alpha,\beta) = \alpha \wedge \beta$

$\xi_{\vee}(\alpha,\beta) = \alpha \vee \beta$

$\xi_{\to}(\alpha,\beta) = \alpha \to \beta$

$\xi_{\leftrightarrow}(\alpha,\beta) = \alpha \leftrightarrow \beta$

Tomamos agora todas as seqüências finitas $\langle x_0, \ldots, x_n \rangle$ com $x_0 \in B$ (ou seja, x_0 é uma variável proposicional) e para cada x_i restante, ou $x_i = \xi_{\neg}(x_j)$, com $j < i$ ou $x_i = \xi_*(x_j, x_k)$, com $j, k < i$ e $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$. O conjunto de todos os x_n assim obtidos é precisamente o conjunto das fórmulas de nosso cálculo. O Princípio da Indução vai dizer que esse conjunto é o *menor* conjunto que contém todas as fórmulas.

12.5 Recursão

Como anteriormente, são dados X e $B \subseteq X$, além de duas funções f e g como acima (como acima, ficaremos restritos a este caso particular mais simples). Seja C o conjunto gerado por B a partir de f e g. O problema agora é definir uma função h sobre C qua aja *resursivamente*. Intuitivamente, isso funciona do seguinte modo: supomos que seja dados

1. Regras para computar $h(x)$, para cada $x \in B$
2. Regras para computar $h(f(x, y))$, fazendo uso de $h(x)$ e de $h(y)$
3. Regras para computar $h(g(x))$, usando-se $h(x)$.

Tomemos um exemplo. Seja B um conjunto qualquer de variáveis proposicionais do nosso cálculo. Vimos que uma *valoração* é uma aplicação $v : B \mapsto \mathbf{2}$; como anteriormente, se $v(P) = 1$, dizemos que P é *verdadeira* para a valoração dada, e P será *falsa* se $v(P) = 0$. Seja agora o conjunto C gerado por B a partir das funções $\xi_\neg, \xi_\wedge, \xi_\vee, \xi_\rightarrow$ e $\xi_\leftrightarrow$ acima.

Vamos agora definir, para cada valoração v, uma aplicação $v' : C \mapsto \mathbf{2}$ como fizemos na seção**??**, ou seja:

(a) Para cada $P \in B$, $v'(P) = v(P)$

(b) $v'(\neg\alpha) = (v'(\alpha))^*$, onde x^* denota o complemento de x na álgebra de Boole **2**

(c) $v'((\alpha \rightarrow \beta)) = (v'(\alpha))^* \sqcup v'(\beta)$, etc.

Como dito naquela oportunidade, a questão agora é provar que há uma única v que preenche as condições acima. O que garante isso é o Teorema da Recursão visto a seguir.

12.6 O Teorema da Recursão

Como deve ter ficado claro acima, a idéia intuitiva da *indução* é a de, por assim dizer, legitimar o 'e assim por diante'. Ou seja, admita que iniciamos com um certo elemento a (em algum conjunto X) e, mediante alguma função h definida sobre X, obtemos $h(a)$, $h(h(a))$, 'e assim por diante'. Ou seja, a função h, tomada reiteradamente, fornece algum modo de 'passar de um elemento de X para outro', e deste para outro ainda, e assim por diante. A partir dessa função h definimos então uma outra função $f : \omega \rightarrow X$ pondo $f(0) = a$, $f(1) = h(a) = h(f(0))$, $f(2) = h(1) = h(f(1))$, e (de novo!!) assim por diante. A função f provê então a idéia de que formamos uma sequência[11] mediante os valores

[11] Uma sequência de elementos de um conjunto X nada mais é do que uma função de ω (o conjunto dos números naturais) em X.

sucessivos da função h; o 'e assim por diante' seria justificado se conseguirmos explicar adequadamente o processo de indução. O artifício da indução (i.e., a sua 'descrição precisa') teria que dizer que faz sentido haver uma função como a f acima, definível a partir de uma tal h. Mas, será que há mesmo uma tal função? A garantia desse fato vem do teorema da recursão dado abaixo.

Antes, uma definição, dada em ZF. Chamaremos de *sistema de Peano* a uma tripla $\mathcal{P} = \langle N, S, e \rangle$, onde (i) P é um conjunto não vazio; (ii) S é uma função de N em N e $e \in N$, tal que os seguintes axiomas são satisfeitos, para todos x, y em N:

(P1) $e \notin ran(S)$, onde $ran(S)$ é a imagem da função S. Em outros termos, Não há nenhum elemento de N que seja associado, pela função S, ao elemento e.

(P2) S é injetiva. Ou seja, $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$.

(P3) Qualquer subconjunto $X \subseteq N$ tal que $e \in X$ e tal que se $x \in X$, segue-se que $S(x) \in X$, coincide com N (ou seja, $X = N$).

Se o leitor prestar atenção, verá que os axiomas acima são análogos aos postulados `AP1`, `AP2` e `AP3` da aritmética elementar (ver página 92). Os demais postulados `AP4-AP7` 'definem' as operações de adição e de multiplicação. Aqui, eles não são necessários. O teorema da recursão abaixo garante a existência das funções representadas por $\oplus$ e $\otimes$, o que não ocorre com a aritmética elementar. O motivo é que a demonstração do teorema usa recursos da teoria de conjuntos que não estão acessíveis às teorias elementares.

[Teorema da Recursão] Seja $\mathcal{P}$ um sistema de Peano e X um conjunto qualquer tal que $a \in X$. Ademais, seja $h : X \rightarrow X$ uma função. Então existe uma única função $f : \omega \rightarrow X$ tal que:

$$f(0) = a$$
$$f(S n) = h(f(n)), \text{ para todo } n \in \omega$$

Demonstração: Uma função de ω em X é um certo conjunto de pares ordenados da forma $\langle n, x \rangle$, com $n \in \omega$ e $x \in X$. Chamemos de C a coleção de todos os subconjuntos A de $\omega \times X$ para os quais $\langle 0, a \rangle \in A$ e que $\langle S n, h(x) \rangle \in A$ sempre que $\langle n, x \rangle \in A$. Evidentemente esta coleção não é vazia, posto que ao menos $\omega \times X$ tem estas propriedades. Seja f a interseção de todos os conjuntos desta coleção, a qual pertence a C, ou seja, tem também as propriedades desejadas. Se mostrarmos que f é uma função, teremos obtido o que solicita o teorema. Faremos a prova por indução, olhando-a do seguinte modo: o que estamos tentando provar é que se $\langle n, x\rangle \in f$ e se $\langle n, y\rangle \in f$, então $x = y$. Ou seja, a 'propriedade' (vamos designá-la 'P') de números naturais a ser investigada ser uma propriedade de todos os números naturais é a seguinte: "para cada $n \in \omega$ existe um único x tal que $\langle n, x\rangle \in f$". Inicialmente veremos que 0 tem esta propriedade. Já temos que $\langle 0, a\rangle \in f$ por definição de f; resta provar que não há outro $b \neq a$ tal que $\langle 0, b\rangle \in f$. Com efeito, se há um tal b, podemos considerar o conjunto $f - \{\langle 0, b\rangle\}$, que ainda contém $\langle 0, a\rangle$ e contém $\langle Sn, h(x)\rangle$ se contém $\langle n, x\rangle$; con efeito, como para todo n tem-se que $Sn \neq 0$, então $\langle 0, b\rangle \neq \langle Sn, h(n)\rangle$, ou seja, o elemento eliminado de f não é por certo $\langle Sn, h(x)\rangle$. Consequentemente, o conjunto $f - \{\langle 0, b\rangle\}$ pertence à coleção C definida acima. mas então há um 'menor' conjunto (a saber, $f - \{\langle 0, b\rangle\}$) que pertence à coleção e tem as propriedades requeridas para f, e f não poderia ser o 'menor' deles (a interseção de todos os conjuntos da coleção C). Logo não pode haver tal b e portanto 0 tem a propriedade acima mencionada. Suponhamos agora que n tem a propriedade P (hipótese de indução). Queremos mostrar que Sn também tem a propriedade P. Para tanto, note que a hipótese de indução indica que existe um único $x \in X$ tal que $\langle n, x\rangle \in f$. Mas então (por definição de f), temos que $\langle Sn, h(x)\rangle \in f$. Se fosse o caso de $Sn \notin f$ (isto é, se Sn não tem a propriedade P), então $\langle Sn, y\rangle \in f$ para algum $y \neq h(x)$. Formemos, em analogia como o que fizemos acima, o conjunto $f - \{\langle Sn, y\}$, o qual contém $\langle 0, a\rangle$ como elemento, posto que $0 \neq Sn$ para todo n e que conjunto diminuído contém $\langle Sm, h(t)\rangle$ sempre que contém $\langle m, t\rangle$. Então, das duas uma: $m = n$ ou $m \neq n$. No primeiro caso, o conjunto diminuído contém $\langle n, h(x)\rangle$ posto que $h(x0 \neq y$ pela imposição que fizemos acima. Se por outro lado $m \neq n$, então como $Sm \neq Sn$ (a função sucessor é injetiva), vem que o conjunto diminuído contém $\langle Sm, h(t)\rangle$. Em outras palavras, o 'conjunto diminuído' acima pertenceria à família C e seria 'menor' que f, contra a hipótese. Logo, Sn tem que ter a propriedade P e f é de fato uma função, como queríamos demonstrar.∎

Bibliografia

[1] Audi, R. (ed.), *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, 2nd. ed., Cambridge Un. Press, 1999.

[2] Bonola, R., *Non-Euclidean geometry*, New York, Dover, 1955.

[3] Boyer, C. B., *História da matemática*, Edgard Blücher-EdUSP, 1974.

[4] Brunschvig, L., *Las etapas de la filosofía matemática*, Buenos Aires, Lautaro, 1945.

[5] Copi, I. M., *Introdução á lógica*, Mestre Jou, S. Paulo, 1978.

[6] da Costa, N. C. A., *Introdução aos fundamentos da matemática*, São Paulo, Hucitec, 1977.

[7] da Costa, N. C. A., *Lógica indutiva e probabilidade*, 2a. ed., Hucitec 1994.

[8] da Costa, N. C. A., 'Abstract logics', pré-publicação, 2005.

[9] da Costa, N. C. A., 'Teoria das valorações', 2005a, notas GLFC.

[10] da Costa, N. C. A., Krause, D. and Bueno, O., 'Paraconsistent Logics and Paraconsistency',

[11] Devlin, K., *Goodbye, Descartes: the end of logic and the search for a new cosmology of the mind*, John Wiley, 1997.

[12] Enriques, F., *The historic development of logic*, New York, Rinehart & Winston, 1929.

[13] Enriques, F., *Problemas de la lógica*, Espasa-Calpe Argentina S.A., Buenos Aires y México, 1947.

[14] Hodel, R. E., *An introduction to mathematical logic*, PWS Pu. Co., 1995.

[15] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguim Books, 1980.

[16] Hughes, G. E. and Cresswell, M. J., *A new introduction to modal logic*, Routledge, 1996.

[17] Kneale, W. and Kneale, M., *O desenvolvimento da lógica*, Lisboa, Fundação Calouste-Gulbekian, 2a. ed., 1980.

[18] Kneebone, G. T., *Mathematical logic and the foundations of mathematics*, Van Nostrand, 1963.

[19] Lakatos, I., *A Lógica da Descoberta Matemática*, RIo, Zahar, 1976.

[20] Lokhorst, G. -J., 'The logic of logical relativism', 1997 (`www.eur.nl/fw/staff/lokhorst`).

[21] Martin, N. M. and Pollard, S., *Closure spaces and logic*, Kluwer Ac. Pu., 1996 (Mathematics and its Applications, Vol. 369).

[22] Mates, B., *Elementary logic*, Oxford Un. Press, 1965. Há tradução para o português.

[23] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, 4th. ed., Chapman & Hall, 1997.

[24] Pollard, S., 'The expressive unary truth functions of n-valued logic', *Notre Dame J. of Formal Logic* 46 (1), 2005, 93-105.

[25] Popper, K. R., *Conhecimento Objetivo*, EdUSP-Itatiaia, São Paulo, 1975.

[26] Rougier, L., 'The relativity of logic', *Phil. and Phen. Research* 2 (2), 1941, 137-158.

[27] Suppes, P., *Introduction to Logic*, North-Holland, 1957.

[28] Szabó, A., 1964, 'The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms', *Scripta Mathematica* 22, 27-49 e 113-139.

[29] Szabó, A., 1967, 'Greek dialectic and Euclid's axiomatics', in Lakatos, I., (ed.) *Problems in the philosophy of mathematics*, Proceedings of the International Colloquium in the Philosophy of Science, Vol. I, London, 1965, Amsterdam, North-Holland, 1-27.

[30] Tarski, A., *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences*, Dover Pu., 1995 (Oxford Un. Press, 1946).

[31] da Costa, N.C.A., *Ensasio sobre os fundamentos da lógica*, Hucitec, 2a. ed., 1994.

[32] Gödel, K., 'Sobre el calculo conectivo intuicionista', in Gödel, K., *Obras completas*, Ed. Jesús Mosterín, Alianza Editoral, 1981, pp. 109-111.

[33] Goldblatt, R., *Topoi: the categorical analysis of logic*, North-Holland 2nd. ed., 1986.

[34] Miraglia, F., *Cálculo proposicional: uma interação da álgebra e da lógica*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Unicamp, 1987 (Col. CLE n.1).

[35] Molina, J.A. e Legris, J., *Lógica intuicionista: uma abordagem filosófica*, Editora da Univ. Católica de Pelotas, 1997.