Lógica Proposicional

1. Proposição:

Chama-se sentença ou proposição todo o conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo. Sentença ou proposição se distinguem do nome, o qual designa um objeto.
Exemplos de nomes:
Pedro.
O cão do menino.
4 – 3

Exemplos de proposições:
1. A lua é um satélite da terra.
2. O filho do Presidente do Brasil, em 1970, era médico.
3. 3 x 5 = 5 x 3
4. Onde você mora?
5. Que belo jardim é o desta praça!
6. Escreva um verso.
7. Pedro estuda e trabalha.
8. Duas retas de um plano são paralelas ou incidentes.
9. Se Pedro estuda, então tem êxito na escola.
10. Vou ao cinema se e somente se conseguir dinheiro.

Na lógica, restringimo-nos a uma classe de proposições, que são as declarativas e que só aceitam dois valores: Verdadeiro (**V**) ou r falso (**F**), um excluindo o outro. Assim, excluímos de nossas considerações:
- Proposições exclamativas, como a de nº 5.
- Proposições interrogativas, como a do nº 4.
- Proposições imperativas, como a do nº 6.
São declarativas as de números 1 até 3 e as de 7 até 10.

A lógica matemática adota como regras fundamentais os dois seguintes princípios ou axiomas:
(I) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
(II) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Qualquer proposição é verdadeira ou é falsa, não podendo ser nada mais do que isso.

Por exemplo, as proposições 1 e 3 são ambas verdadeiras, mas as 3 proposições seguintes são falsas:
- Vasco da Gama descobriu o Brasil.
- Dante escreveu os Lusíadas. Obs: Camões escreveu "Os Lusíadas".
- ¾ é um número inteiro.

As proposições são geralmente designadas pelas letras latinas minúsculas p, q, r, s... (sem índices ou acentos).

Exercício:
1) Quais são os nomes e quais são as proposições?
a) O número 3 é maior que o número 5.
b) A terra é um planeta
c) 9-12
d) 9
e) 8*7 = 56
f) O gato da menina
g) Um bom livro de matemática
h) 3 + 5 <> 5 + 3
i) Se chover hoje, então a rua ficará molhada.
j) O sol brilha e queima as plantas.
k) Jorge é gaúcho ou é Catarinense.
l) Um triângulo é retângulo se e somente se tem um ângulo reto.
m) Triângulo equilátero.
n) Se um triângulo é retângulo, então, dois de seus lados são perpendiculares

1.1. Valores Lógicos das Proposições:

Diz-se que o valor lógico de uma proposição p é verdade quando p é verdadeiro e falsidade quando p é falso. Os valores lógicos verdade e falsidade de uma proposição designam-se abreviadamente pelas letras V e F ou pelos símbolos 1 e 0, respectivamente.

Assim, o que os princípios da não-contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

Toda proposição pode assumir um, e somente um, dos dois valores: F ou V (0 ou 1 respectivamente).

Exercício:

2) Dar os valores lógicos das proposições abaixo, isto é, atribua V ou F para cada uma delas.
a) $3+5=8$
b) A lua é um satélite da terra.
c) Colombo descobriu o Brasil.
d) Pedro Álvares Cabral descobriu a Colômbia.
e) o número 11 é primo.
f) $(8-3)^2 = 8^2 - 3^2$
g) Um número divisível por 2 é par
h) 1 e -1 são raízes da equação $x^2-1=0$

1.2 – Proposições simples e Proposições compostas

As proposições podem se classificadas como simples ou compostas. A proposição simples é aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma. A proposição composta é formada pela combinação de duas ou mais proposições simples através de um elemento de ligação denominada conectivo. Ex.:

Proposição simples	**Proposições *compostas***
P : Zenóbio é careca. Q: Pedro é estudante R: O número 25 é um quadrado perfeito	P: Zenóbio é careca **e** Pedro é estudante Q: Zenóbio é careca ou Pedro é estudante R: **Se** Zenóbio **é** careca, **então** é feliz

As proposições compostas são também chamadas de fórmulas proposicionais. Constrói-se uma proposição composta a partir de duas ou mais proposições simples e do uso de conectivos.

1.3 – Conectivos

Definição: Chamam-se conectivos as palavras usadas para formar proposições compostas a partir de proposições simples. Temos 1 conectivo unário e 4 conectivos binários. Ex.:

P: O número 6 é par **e** o número 8 é o cubo do número 2
Q: O triângulo ABC é retângulo **ou** o triângulo ABC é isósceles
R: **Não** está chovendo
S: **Se** Jorge é engenheiro, **então** sabe matemática
T: O triângulo ABC é equilátero **se e somente se** é equiângulo (subentende .. o triângulo ABC...)

Podemos considerar como conectivos usuais da lógica as palavras grifadas, isto é:
E, Ou, Não, Se ... Então..., ... Se e somente se... (sse)

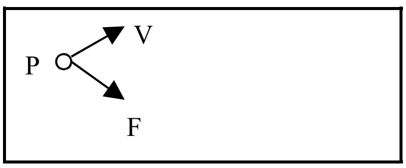
Exercício:
3) Dentre as proposições do exercício 1, quais são:
a) Simples: b) Compostas:

1.4 – Tabela-Verdade

***Construção das tabelas - verdades*:**

Segundo o princípio do **terceiro excluído**, toda proposição simples *p* é verdadeira ou é falsa, isto é, tem o valor lógico V (verdade) ou o valor lógico F (falsidade).

P
V F



O valor lógico de uma expressão composta depende unicamente dos valores lógicos das expressões simples que compõem a mesma. Admitindo isso, recorre-se a um dispositivo denominado **tabela – verdade** para aplicar este conceito na prática.

Na **tabela – verdade** figuram todos os possíveis valores lógicos da proposição correspondentes a todas as possíveis atribuições de valores lógicos às proposições simples componentes. Assim, por exemplo, uma proposição composta cujas proposições simples componentes são **p** e **q** pode ter as possíveis atribuições:

	p	q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Neste caso, as combinações entre os elementos são: VV, VF, FV e FF. As tabelas - verdade são construídas como arranjos dos elementos componentes, e como um elemento pode receber somente os valores V ou F, o tamanho de uma tabela é dado pela quantidade de elementos combinados:

No caso de uma proposição composta com **3 elementos**, teríamos **8 combinações possíveis**:
VVV, VVF, VFV, VFF, FVV, FVF, FFV, FFF.

	p	q	r
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Observação 1: a ordem das letras pode ser diferente e a combinação entre as letras também pode ser dirente da apresentada acima. ***Deve-se somente tomar o cuidado de não repetir duas combinações*** (2 linhas c/ VVF, por exemplo).

Observação 2: Para construirmos as tabelas – verdade podemos usar as seguintes regras. O número de linhas **sempre** depende do número de elementos combinados, e como uma preposição pode assumir os valores **V** ou **F**, o número de linhas de uma tabela – verdade é dado por 2^n.

1 elemento : 2^1linhas = 2 linhas
2 elementos: 2^1linhas = 4 linhas
3 elementos: 2^1linhas = 8 linhas
4 elementos: 2^1linhas = 16 linhas

Para construir a tabela inicia-se sempre atribuindo V, F,V, F,... para o elemento mais à direita da tabela, V, V, F, F,... para o segundo elemento da direita para a esquerda, V, V, V, V, F, F, F, F, ... para o terceiro elemento à partir da esquerda e assim, sucessivamente.
Exercício: construa uma tabela – verdade para 4 elementos: p, q, r, s.

1.5. Notação

O valor lógico para uma proposição simples p indica-se por V(p). Assim, exprime-se que **p** é **verdadeiro** escrevendo: **V (p) = V**.

Analogamente, pode-se exprimir que a proposição p tem o valor falso utilizando-se **V(p) = F**.
Considerando, por exemplo, as seguintes proposições simples:
p: O Sol é verde
q: um hexágono tem 6 lados
r: 2 é um número ímpar
s: um triângulo tem 4 lados

Temos:
V(p)=F V(q)=V V(r) =F V(s) =F

2. Operações lógicas sobre as Proposições

Quando pensamos, efetuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas operações lógicas. Estas obedecem a regras de um cálculo, denominado **Cálculo Proposicional**, semelhante ao da aritmética sobre números. Serão apresentadas, a seguir, as operações lógicas fundamentais do cálculo proposicional.

2.1 Negação (~)

Definição: chama-se **negação de uma proposição** p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é verdade (V) quando p for Falso e falsidade (F) quando valor de p é verdadeiro. Assim, "não p" tem o valor oposto do valor de p. A negação de p indica-se com a notação "~p", e é lido como "não p".

O valor lógico da negação de uma proposição é definido por uma tabela – verdade muito simples:

	p	~p
1	V	F
2	F	V

Ou seja: ~V = F, ~F = V e V (~P) = ~ V(P)

Exemplos:

(1) p: 2 + 3 = 5 (V) e ~p: ~(2 + 3 = 5) (F)
V (~p) = ~V(p) = ~V = F

(2) q: 7 < 3 (F) e ~q: ~(7 < 3) (V)
V (~p) = ~V(q) = ~F = V

(3) r: Roma é a capital da França (F)
V (~r) = ~V(r) = ~F = V

Na linguagem comum a negação efetua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio "não" ao verbo da proposição dada. Assim, por exemplo, considerando a proposição:
p : O Sol é uma estrela

sua negação é :
~p : O Sol não é uma estrela

Outra maneira de efetuar a **negação** consiste em antepor à proposição dada expressões tais como "não é verdade que", "é falso que". Assim, por exemplo, considerando a proposição:
q : Carlos é mecânico

sua negação é :
~q : Não é verdade que Carlos é mecânico

Deve-se tomar um pouco de cuidado com a negação, porque, por exemplo a negação de "Todos os homens são elegantes" é "Nem todos os homens são elegantes" e a de "Nenhum homem é elegante" é "Algum homem é elegante".

2.2. Conjunção (. , ^)

Definição: chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por "p e q", cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras a falsidade (F) nos demais casos.

Simbolicamente, a conjunção de duas proposições p e q indica-se com a notação: "p . q", que se lê: "p e q".
O valor lógico da conjunção de duas proposições é, portanto, definido pela seguinte tabela – verdade:

p	q	p . q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ou seja, pelas igualdades:

V . V = V,   V . F = F,   F . V,   F . F = F   e
(p ^ q) = V (p) ^ V (q)

Exemplos:

(1) $\left\{\begin{array}{l} p: A\,neve\,é\,branca(V) \\ q: 2<5(V) \end{array}\right\}$

p . q: A neve é branca e 2 < 5   (V)
V (p . q) = V(p) . V(q) = V . V = V

(2) $\left\{\begin{array}{l} p: O\,enxofre\,é\,verde(F) \\ q: 7\,é\,um\,número\,primo(V) \end{array}\right\}$

p ^ q : O enxofre é verde e 7 é um número primo (F)
V (p ^ q) = V(p) ^ V (q) = F ^ V = F

(3) $\left\{\begin{array}{l} p: CANTOR\,nasceu\,na\,Rússia(V) \\ q: FERMAT\,era\,médico(F) \end{array}\right\}$

p ^ q : CANTOR nasceu na Rússia e FERMAT era médico (F)
V (p ^ q) = V(p) ^ V(p) = V ^ F = F

2.3. Disjunção (v , +)

Definição: chama-se **disjunção de duas proposições** p e q a proposição representada por "p ou q", cujo **valor lógico** é a **verdade(V)** quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a **falsidade (F)** quando as proposições p e q são ambas falsas.

Simbolicamente, a **disjunção de duas proposições** p e q indica-se com a notação: "p + q", que se lê: "p ou q".
O valor lógico da **disjunção** de duas proposições é, portanto **definido** pela seguinte tabela – verdade:

p	q	p + q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

V (p + q) = V (p) + V (q)

Exemplos:

(1) $\left\{\begin{array}{l} p: Paris\,é\,a\,capital\,da\,França(V) \\ q: 9-4=5(V) \end{array}\right\}$

p + q: Paris é a capital da França ou 9 – 4 = 5   (V)
V (p + q) = V(p) + V(q) = V + V = V

(2) $\left\{\begin{array}{l} p: Camões\,escreveu\,os\,Lusíadas(V) \\ 2+2=3(F) \end{array}\right\}$

p + q : CAMÕES escreveu os Lusíadas ou 2 + 2 = 3   (V)
V (p + q) = V(p) + V(q) = V + F = V

(3) $\left\{ \begin{array}{l} p: Roma\ é\ a\ Capital\ da\ Rússia\,(F) \\ 5/7\ é\ uma\ fração\ própria\,(V) \end{array} \right\}$

p + q : Roma é a capital da Rússia ou 5/7 é uma fração própria (V)
V (p + q) = V(p) + V(p) = F + V = V

(4) $\left\{ \begin{array}{l} p: Pelé\ nasceu\ na\ Bahia\,(F) \\ 2-2=1\,(F) \end{array} \right\}$

p + q: Pelé nasceu na Bahia ou 2-2 = 1 (F)
V (p + q) = V (p) + V(q) = F + F = F

2.4. Disjunção Exclusiva (⊕, ±)

Na linguagem comum a palavra "ou" tem **dois sentidos**. Assim, p. ex., consideremos as duas seguintes proposições compostas:
P : Carlos é médico ou professor
Q: Mário é alagoano ou gaúcho

Na proposição P se está a indicar que uma pelo menos das proposições "Carlos é médico", "Carlos é professor" é verdadeira, podendo ser ambas verdadeiras: "Carlos é médico e professor". Mas, na proposição Q, é óbvio que uma e somente uma das proposições "Mário é alagoano", "Mário é gaúcho" é verdadeira, pois, não é possível ocorrer "Mário é alagoano e gaúcho".

Na proposição P diz-se que "ou" é **inclusivo**, enquanto que, na proposição Q, diz-se que "ou" é **exclusivo**.

Em Lógica Matemática usa-se habitualmente o símbolo "+" para "ou" **inclusivo** e os símbolos "±, ⊕" para "ou" **exclusivo.** Assim sendo, a proposição P é a **disjunção inclusiva** ou apenas **disjunção** das proposições simples "Carlos é médico", "Carlos é professor", isto é:

P: Carlos é médico + Carlos é professor

A proposição Q é a **disjunção exclusiva** das proposições simples "Mário é alagoano", "Mário é gaúcho", isto é:

Q: Mário é alagoano ⊕ Mário é gaúcho

De um modo geral, chama-se **disjunção exclusiva** de duas proposições p e q a proposição representada simbolicamente por "p ⊕ q", que se lê: "ou p ou q" ou "p ou q, mas não ambos", cujo **valor lógico** é **verdade (V)** somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e **falsidade(F)** quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.

O valor lógico da **disjunção exclusiva** de duas proposições é definido pela seguinte tabela – verdade:

p	Q	p ⊕ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

2.5 Condicional (→):

Definição: chama-se **condicional** uma proposição representada por "se p então q" cujo valor lógico é falsidade **(F)** quando p é verdadeira e q é falsa e verdade **(V)** nos outros casos.

Simbolicamente, a condicional de duas proposições p e q indica-se com a notação "p→q" e pode ser lida das seguintes formas:
I. p implica q
II. se p então q

III. p é condição suficiente para q
IV. q é condição necessária para p

Na condicional "p→q" , diz-se que p é o antecedente e o q o conseqüente. O símbolo "→" é chamado de implicação.
Considere o seguinte exemplo:

João trabalha em uma estação meteorológica e faz a seguinte afirmação no dia 03 de março:
Se a umidade subir acima de 90 %, então choverá em menos de 24 horas
p: A umidade sobe acima de 90 % **q: Choverá em menos de 24 horas.**

Até o dia 05, embora a umidade estivesse a 95 % durante as últimas 48 horas, não choveu. Isso significa que a afirmação feita anteriormente era falsa, ou seja:
V(p → q) : F | V(v → f): F

☞ Isso significa que sempre que o antecedente for verdadeiro, o conseqüente **deve** ser verdadeiro para que o resultado de toda a proposição seja verdadeira. *O condicional não afirma a veracidade do antecedente e do conseqüente, mas a relação existente entre eles.*

Ex2.: Se João é Engenheiro, então sabe matemática.

A tabela – verdade da condicional de duas proposições é, portanto:

	P	q	p→q
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

2.6 Bicondicional (↔):

Definição: chama-se **bicondicional** uma proposição representada por "**p se e somente se q**" cujo valor lógico é verdade (**V**) quando p e q são ambas, verdadeira ou falsas.

Simbolicamente, a bicondicional de duas proposições p e q indica-se com a notação "p↔ q" e pode ser lida das seguintes formas:
i. p é condição necessária e suficiente para q
ii. q é condição necessária e suficiente para p
iii. **p se e somente se q** (será mais utilizado) podendo ter a abreviação "**p sse q**".

A tabela – verdade da bicondicional de duas proposições é, portanto:

	P	q	P ↔ q
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	V

Quando se tem uma bicondicional p ↔ q, na verdade implicamos p → q, e q → p ao mesmo tempo, ou seja, só é verdade quando as duas condicionais são verdadeiras.

Considerando que p ↔ q só é verdade quando as duas condicionais p→q e q→p são verdades, temos falsidade nos casos:
p→q sendo v(p)= V e V(q) = F e,
q→p sendo v(q)= V e V(p) = F e,
correspondentes às linhas 2 e 3 da tabela verdade.

Ex: João é careca, sse João não tem cabelo. Isso na verdade implica:
i) Se joão é careca, então João não tem cabelo e
ii) Se João não tem cabelo, então João é careca.

Obrigatoriamente, as duas proposições simples que compõem cada uma das proposições condicionais i e ii devem ser: ambas verdadeiras ou falsas, para a bicondicional ser verdadeira.

Exercícios:

4) Classifique cada uma das proposições compostas do exercício 1:

a) conjunção:
b) disjunção:
c) disjunção exclusiva:
d) condicional:
e) bicondicional:

5) Seja p a proposição "Está frio" e q a proposição "Está chovendo". Traduzir, para a linguagem corrente, as seguintes proposições:

a) ~p
b) p.q
c) p+q
d) q <-> p
e) p -> ~q
f) q v ~p
g) ~p ^ ~q
h) p -> ~q
i) ~~q

6) Seja p a proposição "Jorge é rico" e q a proposição "Carlos é feliz". Traduzir, para a linguagem corrente, as seguintes proposições:

a) p+q
b) q->p
c) pv~q
d) q<->~p
e) ~p->q
f) (~p.q)->p

7) Traduza para a linguagem comum, sabendo que p: os preços são altos e q: os estoques são grandes.

a) (p.q) ->p
b) (p.~q) ->~p
c) ~p . ~q
d) p+~q
e) ~(p.q)
f) ~(p+q)
g) ~(~p+~q)

8) Seja p a proposição "Jorge é alto" e q a proposição "Jorge é elegante". Traduzir, para a linguagem simbólica, as seguintes proposições:

a) Jorge é alto e elegante.
b) Jorge é alto mas não é elegante.
c) Não é verdade que Jorge é baixo ou elegante.
d) Jorge não é baixo e nem é elegente.
e) Jorge é alto, ou é baixo e elegante.
f) Não é verdade que Jorge é baixo ou que não é elegante.

9) Determinar o valor lógico (V + F) de cada uma das seguintes proposições compostas:

a) Se 1 + 2 = 5, então 3 + 3 = 6
b) Não é verdade que 2 + 2 = 7 se e somente se 4 + 4 = 9
c) DANTE escreveu os Lusíadas ou 5 + 7 < 2
d) Não é verdade que 1 + 1 = 3 ou $2^0 = 1$
e) É falso que , se Lisboa é a capital da França, então Brasília é a capital da Argentina.

10) Escrever simbolicamente para p: João é esperto, q: José é tolo.

a) João é esperto e José é tolo.
b) João é esperto ou José é tolo.
c) Ou João é esperto ou José é tolo.
d) João é esperto e José não é tolo

11) Seja p: Vanda é aluna e q: Sílvia é professora.
Escreva simbolicamente: Vanda é aluna ou não é verdade que Sílvia seja professora e Vanda seja aluna.

12) Símbolo para: Vanda tem 5 anos ou se Vanda é bonita, então, é tagarela.

13) Dar os valores das proposições abaixo:

a) (8 > 2) . (4 <=4)
b) (6 < 10) . (6 > 3/2)
c) (6 < 2) + ((4-3) >=1)
d) (5 > 8) $\oplus$ (4>3)
e) (4 < 2) + (2<4)
f) (8-3= 5) -> (2 <= 2)
g) (8>10) -> (6-2 = 4)
h) (8>10) -> (6 < 5)
i) (4 < 2) <-> (8-2 = 15)

14) Dar o valor da proposição *p* nos casos adiantes:

a) $V(p \rightarrow q) = V$ e $V(q) = V$
b) $V(q \rightarrow p) = V$ e $V(q) = F$
c) $V(q+p) = F$ e $V(q) = F$
d) $V(q+p) = V$ e $V(q) = V$

15) Considerando $V(p) = F$, $V(x) = F$ e $V(y) = V$

a) $V(((p + q) . (x + y)) \rightarrow p) =$
b) $V(x . y \rightarrow p) =$
c) $V(p . y . p . x) =$

16) Verificar se a informação dada é suficiente para determinar o valor da expressão:

a) $(p \rightarrow s) \rightarrow r$, onde r tem o valor V
b) $(p+r)+(s \rightarrow q)$, onde q tem valor F
c) $((p+q) \leftrightarrow (q.p)) \rightarrow ((r.p)+q)$, onde o valor de q é V.
d) $((p \leftrightarrow q) \rightarrow p$, onde o valor de q é V.
e) $((p \leftrightarrow q \leftrightarrow p)\rightarrow p+q$, onde o valor de q é V.
f) $(p+q \rightarrow r.p+q)$, onde o valor de q é F.

3. Tabelas-verdades de proposições compostas:

Dadas várias proposições simples p,q,r,..., podemos combiná-las mediante o uso dos conectivos:
~, ., +, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

e construir proposições compostas, tais como:
$(p.(\sim q \rightarrow p)). \sim((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q+p))$

Com o emprego das tabelas-verdades das operações lógicas fundamentais é possível construir a tabela-verdade correspondente a qualquer proposição composta dada. Logicamente, o valor-verdade final depende dos valores lógicos das proposições componentes.

Exercício:

17) Construir as tabelas-verdades:

a) $(q.r) + m$
b) $(q+r) \rightarrow ((q+s) \rightarrow (p+s))$
c) $(p \rightarrow r) \rightarrow p$
d) $(p \rightarrow r) \oplus p$
e) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
f) $\sim (p + q) \leftrightarrow (\sim\sim p + \sim q)$

4. Tautologia, contradição e contingência (indeterminada)

As fórmulas proposicionais podem apresentar os seguintes casos quanto às suas tabelas-verdades:

a) Última coluna da tabela-verdade apresenta somente V(s) ➔ Fórmula tautológica ➔ Tautologia
b) Última coluna da tab. - verdade apresenta somente F(s)➔Fórmula contra-válida➔Contradição
c) Última coluna da tabela-verdade apresenta V(s) e F(s) ➔ Fórmula indeterminada

Exercício:

18) Verificar quais fórmulas são contradições, tautologias ou indeterminadas.
a) $p \leftrightarrow p+p$
b) $(a \rightarrow b) \rightarrow ((b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c))$
c) $(a \rightarrow b) . (b \rightarrow a)$
d) $\sim a \rightarrow a \oplus b$
e) $a. (\sim a + b)$
f) $\sim(\sim p . q) \leftrightarrow \sim p + \sim q$

5. Implicação Lógica e Equivalência Lógica

5.1. **Relação de implicação:** uma proposição *p* implica uma proposição *q* se e somente se $p \rightarrow q$ for uma tautologia.
Obs.: o símbolo $\rightarrow$ é de operação lógica e o símbolo $\Rightarrow$ é de relação.
Ex.: $p . q \Rightarrow p \leftrightarrow q$ uma vez que a operação condicional $\rightarrow$ gera uma tautologia.
Tabela-Verdade:

Exercício:

19) Verificar as implicações.
a) $p \Rightarrow p + q$
b) $p . q \Rightarrow p$
c) $(p + q) . \sim p \Rightarrow q$
d) $(p \leftrightarrow q) . p \Rightarrow q$
e) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Rightarrow q \rightarrow (p \rightarrow r)$

5.2. **Relação de Equivalência:** uma proposição *p* é equivalente a uma proposição *q* se e somente se $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia.
Obs.: o símbolo $\leftrightarrow$ é de operação lógica e o símbolo $\Leftrightarrow$ é de relação.

Ex.: “$p \rightarrow q$” e “ $\sim p + q$ “ são proposições logicamente equivalentes pois possuem a mesma tabela-verdade. Então dizemos:
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p+q$

Tabela-Verdade:

Exercício:

20)Verificar as equivalências.
a) $\sim(p.\sim p) \Leftrightarrow (p+\sim p)$
b) $p.(\sim p+q) \Leftrightarrow (p.q)$
c) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \Leftrightarrow q \rightarrow (p\rightarrow r)$

Argumentos

Chama-se de argumento toda a afirmação de que várias proposições (p1, p2, ..., pn) têm por conseqüência uma outra proposição q. As proposições **p1, p2, ..., pn** são as **premissas**, e a proposição **q** é a conclusão do argumento. Um argumento é escrito da seguinte forma: $p, p \to q, q \to r \vdash r$ onde:

$$\underbrace{p, p \to q, q \to r}_{\text{Premissas}} \vdash \underbrace{r}_{\text{conclusão}}$$

Validade de um argumento através da Tabela-verdade: Um argumento é valido quando para todas as linhas da tabela verdade onde as premissas forem verdadeiras, a conclusão também é verdadeira.

Exemplo: comprove a validade dos seguintes argumentos:

a) $p, p \to q \vdash q$
b) $p \to q, q \vdash p$
c) $p \leftrightarrow q, q \vdash p$

Exercícios

a) $\sim p \rightarrow q, \sim p \vdash q$
b) $\sim p \rightarrow (q \rightarrow r), \sim p, q \vdash r$

c) $t \rightarrow \sim\sim p, p \rightarrow \sim q, t \vdash \sim q$
d) $\sim p \rightarrow \sim\sim q, \sim\sim\sim p \vdash q$

e) $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p, r \vdash q . s$

f) $p \rightarrow (q . r), p \vdash p . q$
g) $p . q \vdash q . p$
h) $(p . q) \rightarrow (r . s), \sim\sim p, q \vdash s$
i) $p \vdash p . p$
j) $\sim p . q \rightarrow u, \sim\sim\sim p, s \rightarrow q, x \rightarrow r.s, x \vdash u$
k) $s \rightarrow ((p.q) \rightarrow \sim\sim r), p.q, t.s \vdash r.t$

l) $p \vdash (p+q) . (p+r)$
m) $p, \sim\sim(p \rightarrow q) \vdash q + \sim q$
n) $p, \sim\sim(p \rightarrow q) \vdash (r.s)+q$
o) $p \vdash p+p$

p) Hoje é Sábado ou Domingo.
q) Se hoje é Sábado, então é fim-de-semana.
r) Se hoje é Domingo, então é fim-de-semana.
s) Conclue-se que hoje é fim-de-semana.
t) $(p+q).(p+r), p \rightarrow s, q \rightarrow s, p \rightarrow t, r \rightarrow t \vdash s.t$
u) $p+p, p \rightarrow (q.r) \vdash r$

v) Hoje é fim-de-semana se e somente se hoje for Sábado ou Domingo. Hoje é Sábado. Então, hoje é fim-de-semana.

w) $p \rightarrow q, (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p) \vdash p \leftrightarrow q$
x) $p \leftrightarrow q \vdash q \leftrightarrow p$
y) $s \rightarrow (r \rightarrow p), a.s, p \rightarrow r \vdash (p \leftrightarrow r) + q$
z) $\sim\sim(p \leftrightarrow x), \sim\sim(q \rightarrow x), x.p \rightarrow k, p+q, k \leftrightarrow u \vdash u$

a) $i, (i.c) \rightarrow \sim s, \sim s \rightarrow \sim a \vdash c \rightarrow \sim a$
b) $p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$
c) $p \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow q$
d) $(p.q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$
e) $p + q \vdash q + p$
f) $(p.q) + (p.r) \vdash p. (q+r)$

g) $p \rightarrow q, \sim q \vdash \sim p$
h) $p \leftrightarrow \sim q \vdash \sim (p.q)$
i) $\sim p \rightarrow p \vdash p$
j) $s \rightarrow \sim\sim v \vdash \sim v \rightarrow \sim s$
k) $(\sim s.v) \rightarrow \sim p, p, v \vdash s$
l) $\sim(\sim p.\sim q), \sim p \vdash q$
m) $\sim p + \sim q \vdash \sim (p . q)$
n) $p \rightarrow q \vdash \sim p+q$
o) $\sim (p . q) \vdash \sim p + \sim q$

Exercícios complementares
g) $(g+n) \rightarrow \sim c \vdash \sim\sim c \rightarrow \sim(g+n)$

1. Formalize e prove os seguintes argumento

C A conclusão deste argumento é verdadeira
P As premissas deste argumento são verdadeiras
S Este argumento é correto
V Este argumento é válido

a) Este argumento não é incorreto. Portanto, este argumento é correto.
h) Este argumento é correto. Portanto, este argumento não é incorreto.
i) Se este argumento for correto, então ele será válido. Ele não é válido.Portanto, ele não é correto.
j) Se este argumento for correto então ele não será inválido. Ele é correto. Daí, ele é válido.
k) Se este argumento for correto então ele não será inválido. Assim, se ele for inválido, então ele será incorreto.
l) Este argumento é correto e válido. Portanto, Ele é correto ou ele é inválido.
m) Este argumento não é, ambos, correto e inválido. Ele é correto. Portanto, ele é válido.
n) Este argumento é correto sse todas suas premissas forem verdadeiras. Suas premissas não são verdadeiras. Portanto, ele é incorreto.
o) Se a conclusão deste argumento for não-verdadeira, então este argumento é incorreto. Assim sendo, não é o caso que este argumento é correto e sua conclusão não-verdadeira.
p) Se este argumento for incorreto e válido, nem todas as suas premissas são verdadeiras. Todas as suas premissas são verdadeiras. Ele é válido. Portanto, ele é correto.
q) Se este argumento for válido e todas as suas premissas forem verdadeiras, então ele será correto. Se ele for correto, então sua conclusão é verdadeira. Todas suas premissas são verdadeiras. Portanto, se este argumento for válido então sua conclusão será verdadeira.
r) Ou este argumento é incorreto ou, caso contrário ele é válido e todas suas premissas são verdadeiras. Então, ele é incorreto ou válido.