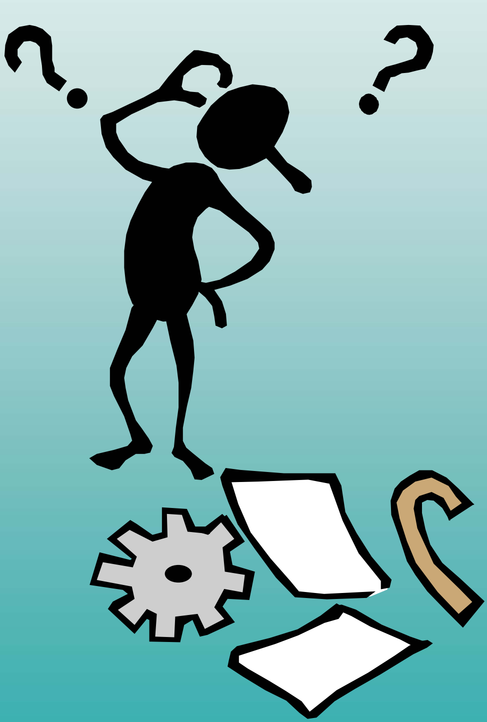
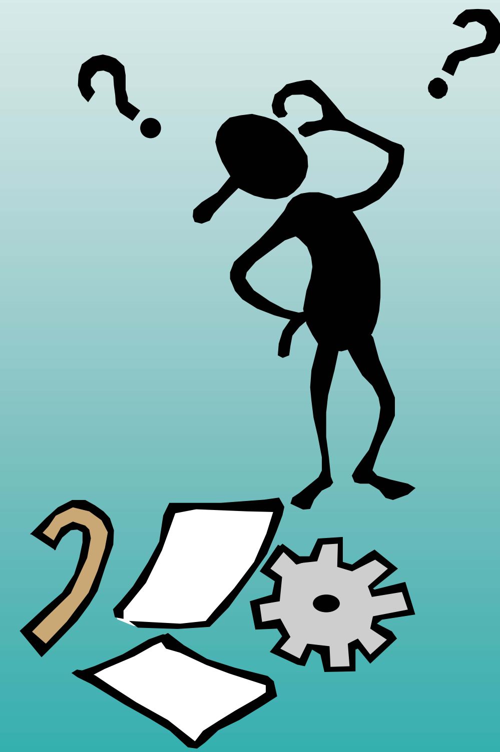
Lógica



Cálculo Proposicional

Prova por Resolução



Prova por Resolução (1 de 2)

- É um método de resolução geral, que emprega apenas uma regra de inferência
- Podem ser aplicadas a wwf que consistem de uma disjunção de literais: as cláusulas.
- O processo de resolução é aplicado a um par de cláusulas e resulta em uma cláusula derivada.

Prova por Resolução (2 de 2)

- Regra de Resolução:

  de $p \lor \cancel{q}$

  e $r \lor \cancel{\neg q}$

  deduz-se $p \lor r$

- Esta regra permite combinar duas fórmulas através da eliminação de átomos complementares. No exemplo, eliminou-se os átomos q e ¬q.

Procedimento da Resolução (1 de 3)

Usa-se redução ao absurdo, negando a conclusão:

1. Achar, para cada premissa e para cada conclusão negada (adotada como premissa), a FNC correspondente, da seguinte maneira:
   - Remover $\Leftrightarrow$ e $\rightarrow$: $q \Leftrightarrow p \equiv (q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow q)$
     $q \rightarrow p \equiv \neg q \vee p$
   - Aplicar De Morgan: $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
     $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
   - Usar distributiva: $q \vee (p \wedge r) \equiv (q \vee p) \wedge (q \vee r)$

Procedimento da Resolução (2 de 3)

2. Cada premissa é agora uma conjunção de uma ou mais cláusulas em uma linha diferente (cada uma delas é **v**, uma vez que a conjunção de todas é **v**).

3. Cada cláusula contém uma disjunção de um ou mais literais; estão na forma correta para se aplicar a resolução. Procurar então por duas cláusulas que contenham o mesmo átomo, com sinais opostos, por exemplo, uma cláusula com p e outra cláusula contendo ¬p, eliminando ambos.

Procedimento da Resolução (3 de 3)

4. Continuar este processo até que se tenha derivado p e ¬p. Ao se aplicar resolução nestas duas cláusulas, obtém-se a cláusula vazia, denotada por □, o que expressa a contradição, completando então o método de redução ao absurdo:

$$p, \neg p \text{ deduz-se falso}$$

- Pode-se também usar a resolução através da negação do teorema. Neste caso aplicam-se os mesmos passos anteriores.

Exemplos do Uso de Resolução

- Dois exemplos usando prova por redução ao absurdo
  - Através da negação da tese
  - Através da negação do teorema

Negação da Tese (1 de 3)

- Para provar que $r \vee s$

  é conseqüência lógica de $p \vee q$, $p \rightarrow r$, $q \rightarrow s$

- Deve-se mostrar que

$$((p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)) \rightarrow (r \vee s)$$

é uma tautologia (teorema).

Negação da Tese (2 de 3)

- Converter as premissas para FNC, escrevendo em linhas separadas:

  (a) $p \vee q$

  (b) $\neg p \vee r$

  (c) $\neg q \vee s$

- Negar a conclusão e convertê-la para FNC: $\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$

  (d) $\neg r$

  (e) $\neg s$

Negação da Tese (3 de 3)

- Deduzir a cláusula vazia □ por resolução

(f) ¬p	de	(d)	e	(b)
(g) q	de	(f)	e	(a)
(h) ¬q	de	(e)	e	(c)
(i) □	de	(g)	e	(h)

- a cláusula □ é gerada pela contradição de duas cláusulas na forma: $q \wedge \neg q$

Negação do Teorema (1 de 2)

- Para provar a regra da cadeia:

  $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$

- A negação do teorema é:

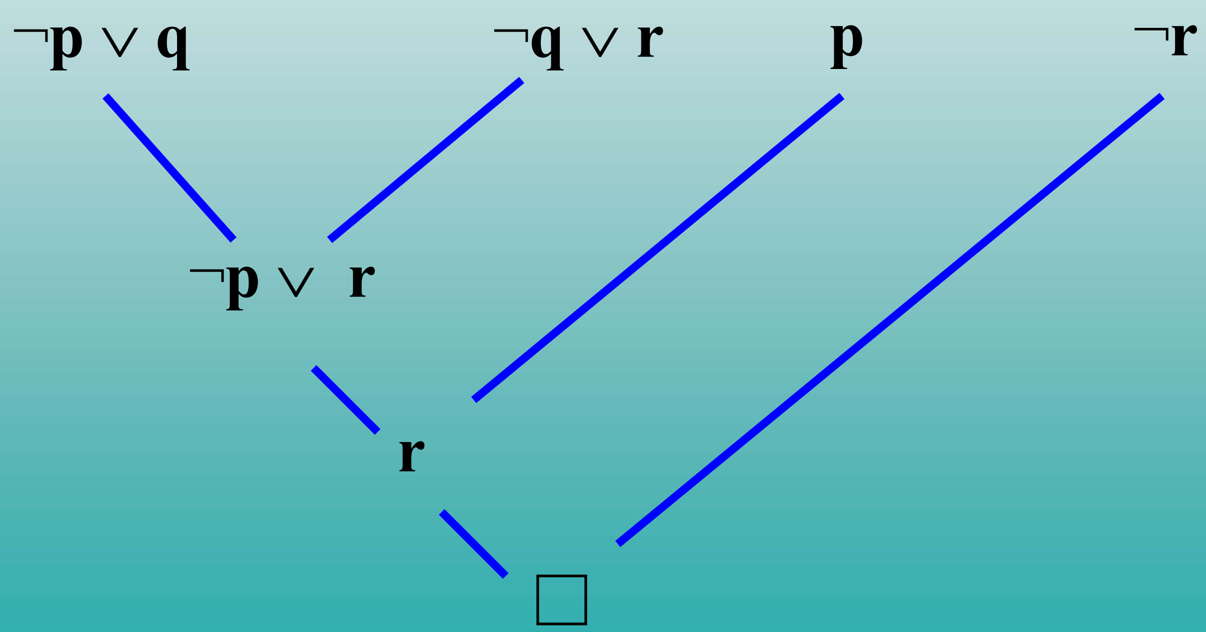
  $\neg((p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r))$

- A FNC do teorema negado é:

  $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee r) \wedge p \wedge \neg r$

Negação do Teorema (1 de 2)

- O passo básico do método de resolução ocorre quando existem duas cláusulas tais que uma proposição p ocorre em uma delas e ¬p ocorre na outra.



Resolução: Vantagens (1 de 3)

- Não é necessário o uso de equivalências para rearranjar $p \vee q$ como $q \vee p$
  - Tudo é colocado na FNC antes da aplicação do método
  - Para o método, a posição (na cláusula) do átomo a ser eliminado é indiferente
- Existe apenas uma regra de inferência para ser lembrada
- Fácil de ser mecanizado

Resolução: Vantagens (2 de 3)

- Entretanto, em provas longas, é possível “andar em círculos”
- Linguagem Prolog está baseada no princípio da resolução aplicado a cláusulas de Horn
  - Usando Busca em Profundidade

Resolução: Vantagens (3 de 3)

- Kowalski mostrou que:

$$A \text{ se } B_1 \text{ e } B_2 \text{ e } \ldots\ B_n$$

pode ser executado por uma linguagem recursiva onde A é a cabeça e os B_i's o corpo

- A é verdade se todos os B_i's são verdade
- Para resolver(executar) A, resolva (execute) B_1, B_2, ..., B_n

Em Prolog: $A \text{ :- } B_1, B_2, \ldots, B_n\,.$

Propriedades do CP (1 de 2)

Embora seja insuficiente para o formalismo do raciocínio lógico, o CP possui propriedades muito importantes:

- O sistema é *consistente:*

  Não é possível derivar simultaneamente uma fórmula Q e sua negação ¬Q

- O sistema é *correto* ou *coerente:*

  Todo teorema é uma tautologia

Propriedades do CP (2 de 2)

- *Completude:*

  Toda tautologia é um teorema

- *Decidibilidade:*

  Há um algoritmo que permite verificar se uma dada fórmula do sistema é ou não um teorema.