Lógica Proposicional

(**sintaxe**, **semântica** e **propriedades**)

Jomi Fred Hübner
jomi@inf.furb.br
FURB / BCC

Lógica **Proposicional**

- **Linguagem** para falar de proposições
  - ⋆ Sintaxe
  - ⋆ Semântica
- **Cálculo** para fazer deduções sobre as proposições
  - ⋆ Sistemas de prova
    - ∗ Dedução Natural
    - ∗ Resolução
    - ∗ ...

Linguagens para **pensar** em Lógica

- Língua portuguesa
  - ⋆ Pequenos cachorros e gatos.
  - ⋆ Quem é pequeno?
  - ⋆ João está vendo a casa em cima do morro.
  - ⋆ Onde está a casa?
  - ⋆ Vacas não gostam de erva.
  - ⋆ Que tipo de erva?
  - ⋆ A língua portuguesa muito expressiva, mas **ambígua**.

- Linguagens de programação
  - ⋆ Permite descrever algoritmos e estruturas de dados que determinam o estado de um computador e como ele se altera durante a execução do algoritmo.
  - ⋆ Mas não é adequado para escrever conhecimento, verdades, argumentos, ...

- **Linguagens lógicas**: procuram ser expressivas e não ambíguas.
  - ⋆ $P \equiv$ pequenos cachorros
    $Q \equiv$ pequenos gatos
    $P \wedge Q$: indica que ambos são pequenos.
  - ⋆ $\texttt{emCima}(\texttt{joao}, \texttt{morro})$.
    $\texttt{emBaixo}(\texttt{casa})$.
    $\texttt{vendo}(\texttt{joao}, \texttt{casa})$.

Tipos de sentenças

- **Imperativas**: `a := a + 1;`
- **Exclamativas**: Que bolo gostoso!
- **Interrogativas**: Está frio?
- **Declarativas**
  - ⋆ Está chovendo.
  - ⋆ `a > 3`

  Às frases declarativas pode-se atribuir um valor **verdadeiro** ou **falso**.
- A Lógica Proposicional estuda esse tipo de sentenças.

Sintaxe

Alfabeto

O alfabeto da lógica proposicional é constituído dos seguintes símbolos:

- símbolos de pontuação: **(**, **)**
- símbolos verdade: $true$, $false$
- símbolos proposicionais: P, Q, R, P_1, ...
- conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Fórmulas

- Os símbolos verdade são fórmulas.
- Os símbolos proposicionais são fórmulas.
- Se α (alpha) e β (beta) são fórmulas da Lógica Proposicional, então também são fórmulas
  - $(\neg\alpha)$ (**negação**)
  - $(\alpha \wedge \beta)$ (**conjunção**)
  - $(\alpha \vee \beta)$ (**disjunção**)
  - $(\alpha \rightarrow \beta)$ (**implicação**, α é o antecedente, β é o consequente)
  - $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ (**bi-implicação**)

Exemplos fórmulas **bem** formadas:

- $(Q \wedge P)$
- $true$
- $\neg P$ (os parênteses mais externos pode ser omitidos)
- $(Q \wedge P) \rightarrow (R \vee (S \wedge Q))$

Exemplos fórmulas **mal** formadas:

- $(QP\wedge)$
- $true \rightarrow$
- $P\neg$

Ordem de **Precedência**

Para simplificar a escrita das fórmulas, utiliza-se a seguinte ordem de precedência entre os conectivos

- (maior precedência) $\neg\ \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ (menor precedência).
- A fórmula
  - $(((Q \wedge P) \vee (\neg S)) \rightarrow Q)$
- pode ser resumida como
  - $Q \wedge P \vee \neg S \rightarrow Q$

Subfórmulas

- Se α é uma fórmula, então α subfórmula de α.
- Se $\alpha = \neg\beta$ é uma fórmula, então β é subfórmula de α.
- Se $\alpha = \gamma \wedge \beta$, $\gamma \vee \beta$, $\gamma \rightarrow \beta$ ou $\gamma \leftrightarrow \beta$, então γ e β são subfórmulas de α.
- Se β é subfórmula de α, então todas as subfórmulas de β também são subfórmulas de α.

Semântica

Semântica da Lógica Proposicional

- Para cada fórmula da Lógica Proposicional é associado ou o valor v ou o valor f (*princípio do terceiro excluído*)
  - ⋆ (não confundir com o símbolo sintático $true$ e $false$)
- Nenhuma fórmula é simultaneamente verdadeira e falsa (*princípio da não contradição*)

Função de **Interpretação**

A associação de um valor verdade (v ou f) a uma fórmula é feita pela função de interpretação

$$I : Formulas \rightarrow \{v, f\}$$

- $I[true] = v$: a interpretação da fórmula $true$ é v.
- $I[false] = f$: a interpretação da fórmula $false$ é f.
- $I[P] =$?

  depende ao que o símbolo P se refere. Se $P \equiv$ "está chovendo", $I[P] = v$ se for o caso de estar chovendo.

- Nos casos de fórmulas com conectivos, a interpretação da fórmula é dada pela interpretação de suas subfórmulas juntamente com a semântica dos conectivos

P	Q	$\neg P$	$P \land Q$	$P \lor Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
v	v	f	v	v	v	v
v	f	f	f	v	f	f
f	v	v	f	v	v	f
f	f	v	f	f	v	v

Em outras palavras:

$I[P \land Q] = v$ se $I[P] = v$ e $I[Q] = v$.

Tipos de implicação

lógica se Sócrates é homem e todos os homens são mortais, então Sócrates é moral.

definição se Carlos é solteiro, então ele não é casado.

causal se chover, então o telhado fica molhado.

decisão se o BEC perder, então eu como o meu chapéu.

discurso se Hitler era um gênio, então eu sou tio de um chimpanzé.

O que todas essas implicações têm em comum?

Não pode acontecer de o antencedente ser verdadeiro e o consequente ser falso. (**implicação material**)

Exemplo de implicação - **D3**

Considere um jogo com cartas, onde cada carta tem em um lado uma letra e no outro um número, que tem apenas uma regra:

> Se um lado da carta tem a letra "D", o outro lado deve ter o número "3".

Supondo que as seguintes cartas estão "sobre a mesa"

`D F 3 7`

Quantas cartas precisam ser viradas para saber se as quatro estão respeirando a regra acima?

Equivalência lógica

- Se duas fórmulas α e β têm os mesmos valores para qualquer interpretação (têm a mesma tabela verdade)
- Estas fórmulas são equivalentes

$$\alpha \equiv \beta$$

- Exemplo: $\neg P \lor Q \equiv P \rightarrow Q$

Exemplo: **Expressões booleanas**

A expressão booleana (em pascal)

`(a > 0) or ((a > 0 and (b = 3))`

Pode ser simplificada

- $P \equiv$ `a > 0`, $Q \equiv$ `b = 3`
- Traduzindo para a lógica proposicional

  $(P \vee (P \wedge Q))$
- Utilizando a equivalência $(P \vee (P \wedge Q)) \equiv P$
- podemos escrever a expressão booleana como

  `(a > 0)`

Propriedades

Tautologias

- Uma fórmula α é uma tautologia (ou é **válida**) se e somente se, para qualquer interpretação I, $I[\alpha] = v$. (denota-se $\models \alpha$)

- Exemplo: a fórmula $P \vee \neg P$ pode ter duas interpretação possíveis (I ou J):
  - ⋆ Uma onde $I[P] = v$, neste caso $I[P \vee \neg P] = v$
  - ⋆ outra onde $J[P] = f$, neste caso $J[P \vee \neg P] = v$

- Como cada linha de uma tabela verdade é uma interpretação possível, se uma fórmula tem o valor v em todas as linhas, esta fórmula é uma **tautologia**.

Fórmula **contraditória**

- Uma fórmula α é contraditória (ou **insatisfatível**) se e somente se, para qualquer interpretação I, $I[\alpha] = f$.
- Exemplo: a fórmula $P \wedge \neg P$ pode ter duas interpretação possíveis (I ou J):
  - ⋆ Uma onde $I[P] = v$, neste caso $I[P \wedge \neg P] = f$
  - ⋆ outra onde $J[P] = f$, neste caso $J[P \wedge \neg P] = f$
- Como cada linha de uma tabela verdade é uma interpretação possível, se uma fórmula tem o valor f em todas as linhas, esta fórmula é uma **contradição**.

Fórmula **satisfatível**

- Uma fórmula α é satisfatível (ou **factível**) se e somente se existir pelo menos uma interpretação I tal que $I[\alpha] = v$.
  (denota-se $\models_I \alpha$)
- Sendo que cada linha de uma tabela verdade é uma interpretação possível, se uma fórmula tem o valor v em pelo menos uma das linhas, esta fórmula é **satisfatível**.
- Para qualquer fórmula α é possível construir uma tabela verdade e portanto verificar suas propriedades. (apesar deste processo ser tedioso)

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \rightarrow Fumar$	sim	
$Fumar \lor \neg Fumar$	sim	
$Fumar \rightarrow Fogo$	satisfatível	I[Fumar] $= v$ e I[Fogo] $= f$
$(S \rightarrow P) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg P)$	satisfatível	I[S] $= f$ e I[P] $= v$
$P \lor Q \lor \neg P \lor \neg Q$	sim	

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - ⋆ é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - ⋆ pode ser satisfatível ou
  - ⋆ pode ser contraditória
- Se uma fórmula **é** satisfatível então ela
  - ⋆ não é uma contradição
  - ⋆ pode ser tautologia
- Se uma fórmula **não é** satisfatível então ela
  - ⋆ é uma contradição
  - ⋆ não é tautologia

- Se uma fórmula **é** contraditória ela
  - ⋆ não é satisfatível e
  - ⋆ não é tautologia
- Se uma fórmula **não é** contraditória ela
  - ⋆ é satisfatível e
  - ⋆ pode ser tautologia
- Se uma fórmula não é tautologia nem contraditória então ela
  - ⋆ é satisfatível

Refutação

Método da **Refutação**

- O método da refutação permite verificar se uma fórmula é **tautologia**.
- Baseado em provas por **contra-exemplo** – não precisa fazer toda a tabela verdade, só achar um contra exemplo.

Algoritmo para o Método da Refutação

- Para verificar se a fórmula α é tautologia,
  - ⋆ nega-se α
  - ⋆ são utilizadas deduções sobre α para concluir um fato absurdo
  - ⋆ se se chegar a um absurdo em **todas** as possibilidades de encaminhamento das deduções, a negação de α é um absurdo, logo α é uma tautologia.
  - ⋆ senão, não é tautologia.

Exemplo

Verificar se $((P \to Q) \land (Q \to R)) \to (P \to R)$ é válido

	$((P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$R))$	$\to$	$(P$	$\to$	$R)$
1.								f			
2.				v						f	
3.		v				v			v		f
4.	v						f				
5.			v								
6.					f						

Chegou-se a um absurdo, pois $I[Q]$ não pode ser v e ao mesmo tempo f (princípio da não contradição).

Outros exemplos

- $P \vee \neg P$
- Ausência de absurdo:
  - $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$
  - $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Método da refutação para provar a **contradição** de uma fórmula

- O método da refutação é usado para provar que α é uma tautologia mostrando que é impossível uma interpretação $I[\alpha] = f$.
- De forma análoga, o método da refutação pode ser usado para provar que α é uma contradição mostrando que é impossível uma interpretação $I[\alpha] = v$.
- Se o fato de α ter valor v implicar em um absurdo, então α não pode ter esse valor, portanto é uma contradição.

Exemplos

Verificar se $(P \wedge \neg P)$ é uma contradição

	$(P$	$\wedge$	$\neg$	$P)$
1.		v		
2.	v		v	
3.				f

Chegou-se a um absurdo, pois $I[P]$ não pode ser v e ao mesmo tempo f (princípio da não contradição).

	$\neg$	$((P$	$\vee$	$(P$	$\wedge$	$Q))$	$\leftrightarrow$	$P)$	
1.	v								
2.							f		
3.1			v					f	1.possibilidade
3.2		f		f					
3.3					v				
3.4				v		v			absurdo
4.1			f					v	2.possibilidade
4.2		v							absurdo

Material de **consulta**

- NEWTON-SMITH, W.H. **Lógica: um curso introdutório**. Gradiva, 1998.
- SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002. **Capítulos 1 - 4**.
- ABE, Jair Minoro; et. at. **Introdução à Lógica para a Ciência da Computação**. 2. ed. São Paulo: Arte & Ciência, 2002. **Capítulo 1**.
- MENDELSON, Elliott. **Introduction to Mathematical Logic**. 4. ed. Chapman & Hall, 1997. **Capítulo 1**.