Newton C. A. da Costa
Décio Krause

NOTAS DE LÓGICA

Parte I: Lógicas Proposicionais Clássica e Paraconsistente

CAPÍTULO 1
(Texto Preliminar)

FLORIANÓPOLIS
2004

Conteúdo

Capítulo 1
Sistemas Formais

APÓS DISCUTIR um pouco sobre o método axiomático, apresentamos o conceito de sistema (ou teoria) formal, para então apresentar um sistema formal que denominaremos de Cálculo Proposicional Clássico. Noções sintáticas e semânticas relacionadas a este cálculo (e aos sistemas formais em geral) serão introduzidas, bem como serão apresentados alguns dos principais resultados meta-teóricos (ou seja, resultados *sobre* esses sistemas). Acreditamos que o estudo desta pequena parte da lógica atual tem grande importância, pois fornece excelente oportunidade para que se possam discutir conceitos que se aplicam a sistemas formais em geral e para estudos posteriores envolvendo quantificação, as lógicas de ordem superior, os fundamentos da teoria dos conjuntos, da matemática e mesmo da contraparte matemática das disciplinas das ciências empíricas.

O conceito de sistema formal sedimentou-se a partir do final do século XIX, quando a lógica teve um desenvolvimento enorme, que se ampliou e aprofundou ainda mais no decorrer do século XX. Os sistemas formais, grosso modo, nada mais são do que contrapartes formais de sistemas axiomáticos. Esses sistemas, ao que tudo indica, tiveram origem com os gregos antigos, como Arquimedes, tendo no entanto a obra de Euclides de Alexandria, os *Elementos* se tornado a referência mais popular quanto ao uso do método axiomático. Posteriormente, os sistemas axiomáticos foram sendo utilizados amplamente, como por Issac Newton e por vários outros cientistas. A diferença fundamental para os chamados sistemas axiomáticos *modernos*, originados principalmente com Hilbert, consiste em que os 'tradicionais' visavam tratar, por meio de axiomas, de determinados domínios 'fixos' do conhecimento, sendo que esses axiomas deviam ser tomados, como se pensava à época, como 'verdades evidentes' acerca desses domínios. Hilbert evidenciou que isso não precisa ser assim; dizia que a geometria não se altera em nada se palavras como *ponto*, *reta* e *plano* (que constavam dos axiomas de Euclides) forem substituídas respectivamente por *caneca*, *garrafa de cerveja* e *mesa*.[1] Isso veio indicar que os sistemas axiomáticos não precisam carregar o significado intuitivo dos conceitos que encerram, ainda que esses em geral tenham algum significado quando da proposta do sistema. Esse conteúdo, no entanto, não deve desempenhar qualquer papel na derivação dos teoremas, que é o que fundamentalmente se busca com o uso de sistemas axiomáticos (este assunto, pela sua importância, será abordado na seção seguinte).

Neste texto, veremos uma introdução ao estudo desses sistemas. As explicações iniciais visam unicamente localizar o leitor em um contexto mais amplo, mas uma mais ampla compreensão do papel dos sistemas dedutivos só pode ser alcançada após o leitor ter 'sujado as mãos' em alguma medida, o que será sugerido que se faça o mais breve possível, a partir da seção 0.2.

0.1 Dos sistemas axiomáticos aos sistemas formais

Nos *Primeiros Analíticos*, Aristóteles comenta que "o objetivo de nossa investigação (...) é a demonstração" [Ari49, 24a10]. A concepção de ciência de Aristóteles, calcada na idéia de 'ciência dedutiva', na qual o conceito de demonstração (ou de 'prova') desempenha papel fundamental, exerceu uma influência secular em toda a teoria do conhecimento tradicional (para ele, a metafísica visaria o estudo dos princípios primeiros da demonstração [Ros95, p. 166]). O modo de operar com uma tal concepção faz uso do chamado *método axiomático*, originado com os antigos gregos, e ainda hoje amplamente utilizado em praticamente todas as disciplinas científicas. Porém, foi somente a partir do final do século XIX que houve um perfeito entendimento de seu alcance e limitações, tendo inclusive o uso deste método sofrido uma ampla reestruturação. A partir dessa época (notadamente a partir de David Hilbert (1862-1943)), e sedimentando-se no decorrer do século XX, apareceu a distinção entre 'axiomáticas concretas' e 'axiomáticas abstratas' (ou 'modernas').

Falando sem muito rigor, uma teoria (axiomática), já como possivelmente a entendia Aristóteles, consiste num conjunto de 'verdades' acerca de

[1] Para maiores detalhes e referências, consultar [Kra02].

uma determinada realidade, organizado de tal forma que todos os conceitos são definidos a partir de alguns poucos conceitos básicos (ditos conceitos primitivos), os quais não se define, e que seriam conhecidos intuitivamente (para ele, já era claro que não de pode definir tudo sem se cair em uma regressão infinita). Esses conceitos eram então articulados por meio de algumas proposições primitivas (os postulados),[2] que não se demonstram, pois sua veracidade seria evidente pela intuição que temos acerca do domínio em estudo. As demais proposições (os teoremas) eram então obtidas a partir dos postulados por demonstração.

A partir de uma certa época, percebeu-se que os conceitos primitivos não necessitam ter uma 'interpretação fixa', podendo assumir variadas interpretações.[3] Em outras palavras, o chamado 'método axiomático *moderno*' não mais estabelece axiomáticas *de conteúdo*, nas quais os conceitos primitivos vêm já dotados de uma interpretação fixa, intuitiva. Ainda que em sua apresentação os conceitos primitivos (o mesmo podendo se dar com os demais) que utiliza tenham conotações que nos remetam a dar-lhes alguma 'interpretação pretendida',[4] eles devem ser entendidos como sendo todos explicitamente introduzidos e definidos unicamente pelas relações que se estabelecem entre eles pelos postulados, sem que se façam referências a propriedades que não estejam dadas pelos postulados. Estes, por outro lado, não são mais considerados como 'evidentes por si mesmos', mas sua veracidade é hipotetizada com a finalidade de se verificar o que deles se pode deduzir; de certo modo, as teorias axiomatizadas tomaram o alcance de sistemas hipotético-dedutivos [Lad69, p. 35].

Importante salientar que, na derivação dos teoremas no escopo da prática matemática usual, bem como na formulação das definições e dos postulados, raramente é feita referência ao tipo de linguagem utilizada ou aos princípios lógicos que permitem as derivações. O matemático (e o cientista em geral) usa formas de inferência de modo informal e intuitivo, sem que tenha sido

[2] À época, fazia-se a distinção entre 'axiomas' e 'postulados'; aqueles consistiam basicamente em 'verdades' aplicáveis a todas as ciências, como a de que o todo é maior do que qualquer de suas partes, enquanto que estes eram 'verdades' acerca da particular disciplina em estudo, como a geometria. Essa distinção não é feita mais hoje em dia.

[3] Acertadamente, a literatura salienta o papel preponderante de Hilbert nesta questão, mas na verdade houve pensadores que mesmo antes dele já se exprimiam da mesma forma, como M. Pash em 1882 ([Wil65, p. 7]) ou o matemático português José Anastácio da Cunha; ver [Kra02, Cap. 1] para referências.

[4] Mais à frente, daremos exemplos de sistemas formais nos quais não há essa 'conotação incicial'.

feita qualquer análise prévia desses procedimentos. Isso no entanto tem a sua razão de ser, pois exigiria do cientista que aplica o método axiomático a uma determinada área, como a física ou a biologia (ou mesmo à matemática), uma regressão que em muito o desviaria de seus propósitos. Assim, quando se fala acima que *nada* é pressuposto que não tenha sido explicitamente declarado nos postulados, deve-se fazer certas concessões. Tomemos um exemplo.

Considere um sistema axiomático cujos conceitos primitivos sejam *ponto* e *reta*.[5] Os postulados são: (1) Toda reta é uma coleção (conjunto) de pontos; (2) Há pelo menos dois pontos; (3) Se p e q são pontos distintos, então há uma e somente uma reta que os contém; (4) Se r é uma reta, então há pelo menos um ponto que não pertence a r.

Obviamente, temos aqui uma idéia intuitiva do que ponto e reta signifiquem, o que provavelmente trazemos de nossas aulas de geometria da escola elementar. Com efeito, dando a esses conceitos precisamente esses significados ou *interpretações*, pode-se verificar sem muita dificuldade que os postulados (1) a (4) são 'verdades geométricas', o que significa que podem ser derivados dos postulados da geometria euclidiana. No entanto, no espírito do método axiomático moderno ou abstrato, podemos dar a esses conceitos outras interpretações. Por exemplo, imagine uma universidade, que chamaremos de U, que tenha pelo menos dois alunos, de tal forma que cada um dos alunos de U cursa pelo menos uma disciplina, mas de sorte que, para cada p em U, há uma e uma só disciplina que ele cursa. Agora deixe 'ponto' significar 'aluno de U' e 'reta' significar 'disciplina que os alunos de U cursam'. Isso posto, os postulados (1) a (4) tornam-se igualmente 'verdadeiros'.

Exercício 0.1 (a) Verifique o que foi dito acima, ou seja, que os postulados (1) a (4) são verificados para a interpretação envolvendo U e seus alunos. (b) Acrescente ao sistema acima o seguinte postulado: (5) Se r é uma reta e p um ponto que a ela não pertence, então existe uma e somente uma reta contendo p e que é paralela a r. Convença-se que os postulados (1) a (5) do texto são teoremas da geometria euclidiana. No entanto, tendo em vista a segunda interpretação (a dos alunos e disciplinas), (5) falha. Explique porquê.

Os exemplos dados acima mostram que, ainda que possamos dar aos conceitos primitivos de um sistema axiomático variadas interpretações, há coisas que ainda ficam subentendidas, como (nos postulados (1) a (5) acima), os conceitos de *conjunto*, *dois*, *distintos*, *contém*, *pertence* e *paralela*. Alguns

[5] Este exemplo é adaptado de [Wil65, Cap. 1].

desses conceitos, como o de *retas paralelas*, obviamente dizem respeito ao próprio sistema axiomático que se está utilizando, e podem ser introduzidos a partir dos conceitos primitivos do sistema (por exemplo, podemos colocar a seguinte definição: 'duas retas são *paralelas* se não há ponto que pertença a ambas'). Outros, no entanto, como os demais acima referidos, pertencem a um outro nível de discurso, o da lógica (e da matemática) subjacentes ao sistema axiomático. Conceitos como 'todo', 'algum', 'distintos', 'iguais', 'pertence' etc., se os quisermos especificar (e entender), exigem que tratemos como um sistema axiomático tanto a lógica (que determina os modos pelos quais realizamos as demonstrações nos nossos sistemas) quanto a matemática utilizadas.

Se fossemos exigir explicações detalhadas acerca desses 'demais conceitos', o matemático ou o filósofo diria que tratam-se de conceitos da lógica e da teoria de conjuntos 'clássicas', que veremos em algum detalhe no que se segue. O que nos interessa é precisamente estudar (ou iniciar o estudo) dessa parte conceitual básica à matemática e às disciplinas científicas, o que exigirá um passo adicional rumo à abstração relacionada aos sistemas axiomáticos (já saímos dos sistemas 'concretos' para os 'abstrato', e agora iremos para um outro patamar, ainda mais abstrato, o dos *sistemas formais*). Para darmos esse passo adicional rumo à crescente abstração, devemos a razão pela qual a própria lógica (e a matemática) subjacente a um sistema dedutivo devem ser tornadas explícitas. Por exemplo, quando se deseja saber quais são os princípios básicos de inferência de determinda disciplina, qual a capacidade de expressão, ou as limitações da linguagem que utiliza, ou então simplesmente porque deseja-se fundamentar um determinado sistema em uma lógica distinta daquela que, hoje, denominamos de 'clássica' ou 'tradicional'. Isso ficará claro à frente. Este passo adicional no sentido da abstração ruma para o que se denomina de *sistema formal*; grosso modo, trata-se da contraparte formal de um sistema axiomático.

Como veremos abaixo, a própria lógica pode ser tratada como um sistema dedutivo, e isso somente pode ser feito por meio de sistemas formais. Antes porém de ver em que consistem esses sistemas, vamos analisar um outro exemplo a fim de reforçar alguns pontos mencionados acima.

Exemplo 0.1 Considere então o seguinte exemplo de sistema axiomático, que objetiva sistematizar as regras usuais de adição e de multiplicação de números inteiros, ou seja, do conjunto

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Os axiomas são obtidos a partir do conhecimento de algumas das propriedades básicas, como o fato de que $3 + 5 = 5 + 3$. A partir de fatos como este, que pretendemos aceitar, somos levados a generalizar para inteiros arbitrários m e n, postulando por exemplo que, para quaisquer inteiros m e n, se tem $m + n = n + m$.

Admitindo então que em $\mathbb{Z}$ possamos realizar duas operações, a adição $m + n$ e a multiplica ção mn, os postulados ou axiomas são os seguintes:

(1) Para todos m e n em $\mathbb{Z}$, tem-se que $m+n = n+m$ e $mn = nm$(comutatividade da adição e da multiplicação)

(2) Para todos m, n e k em $\mathbb{Z}$, tem-se que $m + (n + k) = (m + n) + k$ e $m(nk) = (mn)k$ (associatividade da adição e da multiplicação).

(3) Para todos m, n e k em $\mathbb{Z}$, tem-se que $m(n + k) = mn + mk$ (distributividade da multiplicação em relação à adição)

(4) Existe um inteiro 0 em $\mathbb{Z}$ tal que, para todo m em $\mathbb{Z}$, tem-se que $m+0 = m$ (existência de um elemento neutro aditivo)

(5) Existe um inteiro 1 em $\mathbb{Z}$ tal que, para todo m em $\mathbb{Z}$, tem-se que $m1 = m$ (existência de um elemento neutro multiplicativo)

(6) Para todo inteiro m, existe um inteiro k em $\mathbb{Z}$ tal que $m + k = 0$.

(7) Para todos m, n e k em $\mathbb{Z}$, se $k \neq 0$, então $km = kn$ implica $m = n$ (lei do cancelamento).

Partindo desses axiomas, que caracterizam o que os matemáticos chamam de *domínio de integridade*, pode-se obter por demonstração (usando-se as leis da lógica clássica, que veremos abaixo) todas as demais propriedades da aritmética dos inteiros. Como exemplo, derivaremos umas delas (como se faz nos textos usuais de matemática):

Teorema 0.1 *Para todos m, n e k em $\mathbb{Z}$, se $k + m = k + n$, então $m = n$.*

Demonstração: Assuma que $k + m = k + n$ (abaixo, veremos com algum detalhe este tipo de procedimento, que consiste na prova 'direta' de um condicional). Do axioma (1), obtemos $m + k = n + k$. Seja r um número inteiro tal que $k = r \neq 0$, que existe pelo axioma (6). Adicionando r a ambos os membros da equação precedente, obtemos $(m+k)+r = (n+k)+r$. Então, pelo axioma (2), obtemos $m+(k+r) = n+(k+l)$. Mas então, devido á escolha de r, ficamos com $m+0 = n+0$ e então, fazendo uso do axioma (4), obtemos finalmente $m = n$. ▮

Exercício 0.2 Pense um pouco no que foi feito. O que justifica podermos somar r a ambos os membros da equação $m+k = n+k$?

O exemplo precedente merece alguma explicação adicional. Os axiomas (1)-(7) evidentemente não surgiram do nada. Não há método geral a seguir para se estabelecer um conjunto de postulados. Os axiomas acima foram postulados para dar conta das propriedades usuais dos inteiros, e vieram da experiência e habilidade dos matemáticos. No fundo, isso é o que conta.

Os axiomas acima, originados a partir da aritmética dos inteiros, têm outros *modelos*, outras interpretações possíveis, isto é, há outros domínios de integridade além de $\mathbb{Z}$ (com as operações usuais). Por exemplo, os racionais, os reais e os números complexos, munidos das respectivas operações, são igualmente domínios de integridade. Isso quer dizer que os axioma acima, quando transcritos para a linguagem de cada uma dessas estruturas, tornam-se proposições verdadeiras nessas estruturas, como é fácil perceber. Aliás, como já dito, este é um dos trunfos do método axiomático. Um dado conjunto de axiomas pode ter mais de um modelo, ou seja, as axiomáticas não são mais 'concretas', mas 'abstratas'. Segundo Bourbaki, a constatação deste fato caracteriza o nascimento da 'matemática moderna' (ver [Kra02, p. 7]).

Podemos agora proceder pelo caminho inverso da seguinte maneira. Dizemos que um conjunto não vazio A, munido de duas operações binárias (que se aplicam a dois de seus elementos, originando um elemento que ainda pertence ao conjunto), digamos $*$ e $\bullet$ é um *domínio de integridade* se os seguintes axiomas forem satisfeitos:

(1') Para todos m e n em A, tem-se que $m * n = n * m$ e $m \bullet n = n \bullet m$ (comutatividade das operações)

(2') Para todos m, n e k em A, tem-se que $m * (n * k) = (m * n) * k$ e $m \bullet (n \bullet k) = (m \bullet n) \bullet k$ (associatividade das operações)

(3') Para todos m, n e k em A, tem-se que $m \bullet (n * k) = (m \bullet n) * (m \bullet k)$ (distributividade de $\bullet$ em relação a $*$)

(4') Existe um elemento e em A tal que, para todo m em A, tem-se que $m * e = m$ (existência de um elemento neutro relativo à operação $*$)

(5') Existe um elemento p em A tal que, para todo m em A, $m \bullet p = m$ (existência de um elemento neutro relativo a $\bullet$)

(6') Para todo m em A, existe um elemento k em A tal que $m * k = e$.

(7') Para todos m, n e k em A, se $k \neq e$, então $k \bullet m = k \bullet n$ implica $m = n$ (lei do cancelamento).

Fica claro agora o que significa dizer que $\mathbb{Z}$, munido das operações de adição e de multiplicação, é um domínio de integridade: é um *modelo* da axiomática precedente. De modo mais geral, podemos então entender quando uma certa estrutura $\langle A, *, \bullet \rangle$ o é (esta notação quer dizer, em resumo, que se está considerando o conjunto A munido de duas operações $*$ e $\bullet$) é um domínio de integridade. O teorema acima (devidamente adaptado) pode agora ser derivado a partir dos axiomas (1')-(7'), valendo para *todos* os domínios de integridade.

Exercício 0.3 Nem todas as estruturas formadas por um conjunto não vazio munido de duas operações binárias, no entanto, são modelos da axiomática acima (ou seja, há estruturas matemáticas que não são domínios de integridade, aliás, a maioria delas). Você pode citar algumas?

Exercício 0.4 Formule e demonstre o teorema 0.1 para um domínio de integridade arbitrário.

Os exemplos precedentes, em especial a demonstração do teorema 0.1 deixa claro que há várias questões que são de grande relevância e que não foram mencionadas no decorrer da demonstração. Por exemplo, o significado da igualdade em cada uma das equações que expressam os axiomas (1)-(7), ou a justificativa para cada passagem da demonstração do teorema. O que as justifica? A resposta, como já deve ser esperado, é que elas obedecem as regras da lógica clássica, que o matemático, mesmo que inconscientemente, tem em mente. Porém, para certo tipo de estudo, importa conhecer que regras são essas e quais são os procedimentos de inferência, principalmente se estivermos dispostos a aceitar que há lógicas distintas da clássica, que determinam regras que diferem das regras 'clássicas' (veremos alguns exemplos oportunamente).

Para tanto, é preciso partir para um nível de abstração ainda maior, o dos sistemas formais.

0.2 Sistemas Formais

Um *sistema formal* $\mathcal{S}$ é uma tripla ordenada

$$\mathcal{S} = \langle \mathcal{F}, A, R \rangle,$$

onde:

(i) $\mathcal{F}$ é um conjunto não vazio cujos elementos são chamados de *fórmulas*, e denotados por letras gregas minúsculas α, β, ... (eventualmente com sub-índices). Letras gregas maiúsculas (como Γ e Δ) denotarão conjuntos de fórmulas.

(ii) A é um sub-conjunto de $\mathcal{F}$ cujos elementos são chamados de *axiomas* de $\mathcal{S}$.

(iii) R é um sub-conjunto de $\mathcal{P}(\mathcal{F}) \times \mathcal{F}$ cujos elementos são chamados de *regras de inferência* de $\mathcal{S}$. As regras que nos interessarão aqui são tais que seus elementos são pares ordenados do tipo $\langle \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \beta \rangle$ para algum número natural n. Tais regras são ditas *finitárias*. O número n é o *rank* da regra. Se o par $\langle \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \beta \rangle$ pertence a uma regra R_i, escrevemos

$$\frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}{\beta} \ (R_i),$$

e diremos que β é *conseqüência direta*, pela regra R_i, das *premissas* ou *hipóteses* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Em geral (como nos casos que aqui nos interessam), exige-se que se possa determinar por um processo efetivo (em resumo, que possa ser programado em um computador) se uma dada fórmula é ou não conseqüência direta de um conjunto de premissas por uma certa regra.

O modo usual de se descrever um sistema formal é o seguinte. Primeiramente, especifica-se a *linguagem* $\mathcal{L}$ do sistema $\mathcal{S}$. Isso se faz fornecendo-se: (1) o *vocabulário básico* de $\mathcal{L}$, que em geral consta de uma quantidade contável (finita ou enumerável) de *símbolos primitivos* de $\mathcal{L}$. Uma *expressão* de $\mathcal{L}$ é uma seqüência finita de símbolos de $\mathcal{L}$, e convenciona-se que são escritos na horizontal, da esquerda para a direita etc., seguindo nossas convenções usuais de escrita; (2) é fornecida a *gramática* de $\mathcal{L}$, ou seja, um conjunto de prescrições que permitem determinar, em geral por um procedimento efetivo, quais dentre as expressões de $\mathcal{L}$ serão as 'bem formadas', que serão as *fórmulas* de $\mathcal{S}$ (na verdade, da linguagem $\mathcal{L}$ de $\mathcal{S}$).

Mais à frente, veremos alguns exemplos. Exemplos de regras de inferência 'classicas' (válidas na lógica clássica) são o Modus Ponens (MP), o Modus Tolles (MT) e a Redução ao Absurdo (RA), dentre outras, que serão apresentadas à frente. Situações envolvendo inferências usando-se essas regras serão dadas abaixo na seção **??**.

No caso das fórmulas serem dadas como acima, ou seja, sendo erigidas a partir de certos símbolos básicos de uma dada linguagem, as regras de inferência referem-se apenas à estrutura sintática dessas fórmulas, e não ao que eventualmente elas signifiquem. Esta é a principal característica da palavra 'formal' usada acima. O papel da intuição é tornado mínimo, de forma que as derivações realizadas no âmbito de um sistema $\mathcal{S}$ não utilizem nada além do que explicitamente é declarado na descrição de $\mathcal{S}$.

Quando há um procedimento efetivo para se saber se uma dada fórmula de $\mathcal{L}$ é ou não um axioma de $\mathcal{S}$, então o sistema S é dito ser uma *teoria axiomática*.[6]

O objetivo principal do estudo dos sistemas formais é o de dar um siginificado preciso à noção de *prova*, ou *demonstração*. Aqui, seguiremos o jargão usual e denominaremos o conceito a ser dado abaixo no âmbito de um sitema formal de *prova*, reservando o termo 'demonstração' para argumentos elaborados na linguagem coloquial, eventualmente suplementada por símbolos adequados, que estabelecem algum resultado. Os casos exemplificados abaixo deixarão essa distinção clara.

0.2.1 O conceito formal de *prova*

Uma *prova* em $\mathcal{S}$ é uma sequência finita $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de fórmulas (da linguagem de $\mathcal{S}$)[7] tal que cada uma delas é ou um axioma de $\mathcal{S}$ ou é conseqüência direta, por meio de uma das regras de inferência, de fórmulas precedentes da seqüência. Um *teorema* (dito também *teorema formal*) de $\mathcal{S}$ é uma fórmula

[6]Mais precisamente, uma teoria axiomática é um sistema formal cujo conjunto de axiomas é *recursivo*, e uma teoria é *axiomatizável* se o conjunto de seus axiomas for *recursivamente enumerável*. Para detalhes sobre esses conceitos, ver [Men87, p. 211].

[7]Isso ficará sempre pressuposto no que se segue.

α para a qual existe uma prova tal que a última fórmula da sequência (de tal prova) é precisamente α.

Para facilitar, muitas vezes escreveremos uma prova dispondo as fórmulas em seqüência do seguinte modo:

1. β_1
2. β_2

$\vdots$

n. β_n $(= \alpha)$

Quando isso ocorre, escrevemos

$$\vdash_{\mathcal{S}} \alpha,$$

ou simplesmente $\vdash \alpha$, se não houver risco de confusão. Se $\mathcal{S}$ é um sistema formal no sentido acima, em geral não há um procedimento efetivo (um algoritmo) para se determinar (em um número finito de etapas) se uma dada fórmula é ou não um teorema de $\mathcal{S}$. Sistemas para os quais há um tal procedimento são ditos *decidíveis*. O Sistema MAIS exemplificado a seguir é decidível, ainda que não façamos a prova deste fato aqui. O Cálculo Proposicional Clássico que veremos à frente também é decidível. Muitos sistemas importantes não têm esta propriedade, como a aritmética usual e mesmo a lógica usual de primeira ordem. Importa notar aqui que o maior uso dos sistemas formais não é exatamente na obtenção de provas (e teoremas) *dentro* de seu escopo, mas servem para provar fatos *acerca* de outros sistemas. Aos poucos, isso vai se tornando claro.

Um sistema formal é *não-trivial* quando há pelo menos uma fórmula de sua linguagem que não é um teorema, e *trivial* em caso contrário. Este conceito desempenhará papel relevante mais à frente.

0.3 O Sistema MAIS

Vamos dar um exemplo de sistema formal.[8] Chamaremos de MAIS o sistema cuja linguagem tem como símbolos primitivos unicamente $+$, $=$ e $*$. Uma fórmula é uma expressão do tipo $x+y = z$, onde x, y e z são seqüências finitas

[8] Conforme [Hod95, pp. 8ss].

de $*$'s. Por exemplo, $** + ** = *****$ é uma fórmula, mas $** ++ ==$ não é.

O único axioma de MAIS é a fórmula $* + * = **$. As regras de inferência (ambas com uma única premissa) são

$$\frac{x + y = z}{x * + y = z*}\ (R1) \quad \text{e} \quad \frac{x + y = z}{y + x = z}\ (R2).$$

É fácil ver que $*** + *** = ******$ é um teorema de MAIS. Com efeito, temos a seguinte prova:

1.	$* + * = **$	Axioma
2.	$** + * = ***$	1, R1
3.	$*** + * = ****$	2, R1
4.	$* + *** = ****$	3, R2
5.	$** + *** = *****$	4, R1
6.	$*** + *** = ******$	5, R1

Na coluna da direita, indica-se de onde e por que as derivações foram realizadas. O que importa relativamente aos sistemas formais não é unicamente o que se pode realizar no seu interior, mas em discussões *sobre* esses sistemas. Por exemplo, a respeito do sistema MAIS, podemos dizer várias coisas, como se exemplifica a seguir com o conceito de *verdade* em MAIS (M-verdade).

Pode-se definir o seguinte conceito de *verdade* em MAIS da seguinte forma. Dizemos que uma fórmula $x + y = z$ é M-verdadeira se o número total de ocorrências de $*$ do lado esquerdo da igualdade é igual ao número de ocorrências deste mesmo símbolo do lado direito da igualdade; caso contrário, diremos que ela é M-falsa. Por exemplo, $** + ** = ****$ é M-verdadeira, enquanto que $** + * = *$ é M-falsa. Podemos então mostrar que todos os teoremas de MAIS são M-verdadeiros. Para tanto, usamos uma técnica bastante comum e importante, conhecida como *Indução sobre Teoremas* de um sistema formal, e que consiste basicamente no seguinte.

0.3.1 Indução sobre teoremas

Seja $\mathcal{S}$ um sistema formal e P uma propriedade que se aplica às fórmulas do sistema. Por exemplo, sendo $\mathcal{S}$ o sistema MAIS, P poderia ser a propriedade

de ser M-verdadeira. Dada uma propriedade P, o que queremos é mostrar que todos os teoremas de $\mathcal{S}$ têm esta propriedade (no caso, de serem M-verdadeiros, no sentido acima, em se tratando de MAIS). Isso se faz do seguinte modo :
(1) Inicialmente provamos que todos os axiomas de $\mathcal{S}$ têm a propriedade P.
(2) Em seguida, para todas as regras de inferência de $\mathcal{S}$, provamos que se as premissas das regras têm a propriedade P, então suas conclusões também a têm (a propriedade é *hereditária*).

Se essas duas condições ocorrem, é fácil perceber que todos os teoremas de $\mathcal{S}$ têm a referida propriedade, bastando que se atente para a definição de teorema dada acima.

No caso exemplificado, é fácil ver que o único axioma de MAIS é M-verdadeiro, e que se as premissas das regras (R1) e (R2) são M-verdadeiras, suas conclusões também o são. Assim, todos os teoremas de MAIS são M-verdadeiros, como queríamos provar.

Exercício 0.5 Refaça com detalhes o argumento que justifica serem todos os teorema de MAIS M-verdadeiros.

Exercício 0.6 Mostre que $* + * = **$ é um teorema de MAIS.

Este último exercício tem um significado interessante. Ele mostra um fato geral acerca de sistemas axiomáticos: todo axioma de um sistema formal é um teorema desse sistema. Isso pode parecer estranho, pois podemos ter sido acostumados com a idéia de que os teoremas seguem-se dos axiomas por demonstração, e que axiomas não se demonstram. Isso de certo modo tem a sua razão de ser, e remonta à própria origem dos sistemas axiomáticos. Já Aristóteles dizia que "Toda ciência demonstrativa deve iniciar com princípios indemonstráveis pois, de outro modo, os passos da demonstração não teriam fim".[9] No entanto, tendo em vista a definição dada de 'prova', para obtermos uma *prova* de um axioma de $\mathcal{S}$, basta que o escrevamos, ou seja, a prova constará de uma única linha contendo o próprio axioma. Isso não contraria o dito de Aristóteles, pois o axioma não foi obtido de 'outros princípios'.

Exercício 0.7 Mostre que $** + *** = *****$ é um teorema de MAIS, mas que $** + * = *****$ não é.

[9] Citado em [Wil65, p. 3].

0.3.2 Teoremas e metateoremas

Perceba o que está envolvido no exercício 0.7: no primeiro caso, basta encontrar uma prova para a fórmula que é um teorema. No segundo caso, o fato de não encontrarmos uma prova não indica que ela não exista. No entanto, face a um resultado estabelecido anteriormente, podemos notar que a segunda fórmula não é M-verdadeira na acepção definida e que portanto não é um teorema. É claro que este mesmo procedimento poderia ser usado para a primeira fórmula, mostrando que ela é M-verdadeira. O resultado que afirma que "Todo teorema de MAIS é M-verdadeiro"é um teorema *sobre* (acerca) do sistema MAIS, mas a demonstração dada para ele não foi do tipo 'construir uma prova' tal como caracterizado acima. Trata-se de um *metateorema* do sistema, e em sua demonstração foram utilizados recursos mais potentes que aqueles exprimíveis em MAIS. Essa distinção entre *teorema* e *metateorema* dos sistemas formais é importante e será enfatizada novamente abaixo.

Exercício 0.8 Construa um sistema formal MULT nos mesmos moldes que MAIS que reflita a multiplicação de números naturais não nulos de modo que, por exemplo, $** \times *** = ******$ seja teorema desse sistema. (Dica: parta do sistema MAIS e acrescente mais um símbolo à sua linguagem: $\times$. Redefina o conjunto das fórmulas de modo que $x \times y = z$ também seja fórmula se x, y e z são seqüências de $*$s; considere um axioma adicional, $* \times * = *$ e as regras adicionais (R3) $x \times y = z \,/\, x * \times y = z + y$ e (R4) $x \times y = z \,/\, y \times x = z$). O que poderia ser um conceito de verdade em MULT?

Exercício 0.9 [*O sistema MIU*] Um exemplo interessante de sistema formal foi apresentado por Douglas Hofstadter em seu livro *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*. O alfabeto de MIU consiste dos seguites símbolos: M, I, U. As fórmulas são ocorrências não vazias de símbolos do alfabeto. O único axioma é MI e há quatro regras de inferência: (Regra I) A qualquer fórmula terminada com I, pode-se acrescentar um U no final (ou seja, se xI é um teorema, então xIU é um teorema); (Regra II) Dada qualquer fórmula do tipo Mx, pode-se duplicar a parte após o M inicial, obtendo-se Mxx; (Regra III) Se três I ocorrem consecutivamente em uma fórmula, eles podem ser substituídos por um U; (Regra IV) Dois U consecutivos podem ser deletados de qualquer teorema. Um exemplo de um metareorema é o seguinte exercício:[10] mostre que MUIU é um teorema deste sistema, mas que MU não é.

[10] Para uma detalhes, ver [Hof80, pp. 260-1], [Cam00, pp. 57-8]. O livro de Cameron tem um site associado: `www.maths.qmw.ac.uk/ ~ pjc/slc`.

Aqui vai um resumo da solução: a primeira parte é bastante simples; quanto à segunda, basta verificar que as quatro regras de inferência 'preservam a multiplicidade por 3': a primeira e a quarta não alteram o número de I's em um teorema. Quanto à segunda e à terceira, verifica-se que ambas, uma vez iniciando-se com um número múltiplo de 3 em um teorema, este número não é alterado pela aplicação das regras (elas não 'criam' I's, mas apenas mudam em múltiplos de 3 os já existentes). Trata-se de mais um exemplo de aplicação da indução sobre teoremas. O número de ocorrências de I's em qualquer teorema não é divisível por 3, e em particular não pode ser zero. Como corolário (na verdade, um 'meta-corolário'), segue que em qualquer teorema deve haver pelo menos um I.

A origem desse sistema está ligada ao desejo de Hofstadter de ensinar a distinção entre teorema e metateorema, fazendo referência a um *koan* do Zen Budismo, o Mu de Joshu, que é o seguinte: Um monge perguntou a Joshu, um mestre Zen chinês: "Pode um cão ter a natureza de Buda?".[11] Joshu respondeu simplesmente: "Mu". Segundo os comentarios de Cameron, a resposta corresponde a uma negativa em chinês, mas não significa que Joshu tenha respondido "Não". Na verdade, sua resposta não teria sido nem "Sim"e nem "Não", mas algo como "A questão errada foi formulada, ou foi formulada por por uma mente mal formada". Uma resposta "Sim"ou "Não", diz Cameron, seria uma resposta dada *no* sistema (formal) no qual o monge estaria operando; 'Sim' se a frase fosse um teorema do sistema, e 'Não' em caso contrário, mas Joshu está comentando *sobre* o sistema, de uma posição *externa* a ele. Assim são os metateoremas; são formulados para afirmar fatos *sobre* os sistemas formais, mas via de regra são formulados e demonstrados com recursos *externos* a eles, em geral usando-se o aparato matemático da teoria de conjuntos. Hofstadter chama a questão acima mencionada de se saber se MU é um teorema de MIU de 'o quebra-cabeças de Mu', pondo-o da seguinte forma (ibid, p. 259): "Será que MU tem a *natureza* de um teorema?"('Has MU theorem-nature, or not?').

[11] O poema é o seguinte, e é mencionado no contexto do estudo de proposições indecidíveis em sistemas formais:
"Has a dog Buddha-nature?
This is the most serious question at all.
If you say yes or no,
You lose your own Buddha-nature."[Hof80, p. 272].

0.3.3 Provas, demonstrações e outras coisas

Antes de prosseguirmos, uma explicação importante. Repare que no teorema demonstrado à página 12, referente ao sistema MAIS, foi apresentada uma prova *formal*, no sentido discutido na seção 0.2.1, ao passo que, para o teorema 0.1, foi apresentada uma demonstração informal (lembre que estamos até usando palavras distintas, a saber, 'prova' e 'demonstração' para distinguir entre provas formais e informais). Na verdade, se abrirmos um livro de matemática, o que encontraremos serão demonstrações (para empregar o nosso jargão), ou seja, provas informais. Os matemáticos, raramente, ou quase nunca, produzem provas formais de seus teoremas. Isso tem uma explicação, e aponta para uma questão interessante. Primeiro, claro está que apresentar uma prova formal de um teorema em análise matemática, por exemplo algum resultado sobre integração, seria algo praticamente inviável, por longa e tediosa que seria. Basta ver que, nos *Principia Mathematica*, de Whitehead e Russell, a demonstração de que $1 = 1 = 2$ é alcançada após mais de 360 páginas!

O fato de se *conhecer* o conceito formal de prova, entender como funciona, ter visto algums exemplos, o que sem dúvida constitui fato deveras importante, não faz com que se pretenda sugerir que se deva proceder deste modo em todos os momentos. O significado do conceito formal de prova, que deve ser bem entendido, deve ser colocado como um ideal, podendo em princípio ser alcançado em certas situações particulares, ou quando houver necessidade, como em alguns casos que veremos abaixo, principalmente no âmbito dos sistemas formais. Porém, insistamos, não é assim que o cientista praticante procede em geral. Para ele, uma 'prova' é mais um argumento informal que convence seus pares de um certo resultado. Se for o caso, o matemático saberá (pelo menos em princípio) fornecer os detalhes pertinentes. Há muito do argumento da autoridade aqui, e essa é a questão interessante à qual nos referimos acima. Com efeito, em geral usam-se os resultados das teorias matemáticas sem que, em princípio, eles tenham sido verificados. Já imaginaram termos que checar cada resultado da aritmética, ou da mecânica de Newton antes de usá-los? *Acreditamos* na autoridade, nos matemáticos e demais cientistas que nos antecederam, e procedemos da mesma forma que eles, ou seja, informalmente, exceto quando absolutamente necessário.

Por exemplo, o maior sistematizador da matemática depois de Euclides é sem dúvida Nicolas Bourbaki (trata-se do pseudônimo de um grupo de matemáticos, principalmente franceses, que produziu, e vem produzindo, uma obra magistral de sistematização e desenvolvimento de várias áreas da matemática). Pois bem: o livro de Bourbaki, que deveria fundamentar todos os demais, é aquele sobre teoria de conjuntos [Bou68]. Nele, a teoria Zermelo-Fraenkel, a mais conhecida entre os matemáticos, é apresentada formalmente. Em princípio, seria seguindo tais métodos e sobre um tal alicerce que o restante do edifício da matemática deveria ser construído. Porém não é isso o que acontece de fato. De uma altura em diante, Bourbaki simplesmente abandona o procedimento formal que exibe e passa a proceder como o matemático praticante, informalmente. Pode-se dizer que há uma lacuna entre o *Théorie des Ensembles* e o restante de sua obra no que concerne ao modo de proceder. No entanto, o que deve ser entendido é que Bourbaki nos mostra, no livro de teoria de conjuntos, qual é a base lógica e matemática que sustenta todo o resto, mas não pede que procedamos de tal modo em geral.

Nas ciências empíricas o modo de proceder é ainda mais flexível. Não se pode dizer que não haja *precisão*, por exemplo em física, que sem dúvida é a ciência mais rigorosa depois da matemática, mas praticamente não se encontram nos textos de física 'demonstrações' no sentido dos matemáticos (enunciados de teoremas e suas subseqüentes demonstrações), mas apenas uma exposição informal de fatos que se encadeiam na medida em que pressupostos, definições e outras coisas vão sendo introduzidos. O físico procede ainda mais informalmente que o matemático.

O interessante é notar que sempre há um notável grau de comprometimento, ou de consentimento, em tudo isso. Os cientistas estabelecem resultados nos quais passamos a acreditar por um momento, estabelecendo o que seguindo as idéias de Thomas Kuhn poderíamos chamar de 'patamar de normalidade', no qual passamos a trabalhar, até que alguém venha a mostrar que certos resultados (ou hipóteses) não são válidos e precisam ser revisados. Por exemplo, trabalhava-se no 'paradigma newtoniano', caracterizado pela física de Newton, até o advento da teoria da relatividade e da mecânica quântica, que passaram a ser usadas em certos contextos. Nesse momento, o desenvolvimento da física encontrou um novo rumo, caracterizado, diga-se de passagem, por duas correntes incompatíveis (a saber, a física quântica e a relatividade geral), que os físicos ainda hoje tentam unificar. O que há em tais situações é uma espécie de ponto de inflexão na trajetória histórica da evolução de uma certa disciplina, como a física, e não propriamente ruptura, ou 'quebra de paradigma', como queria Kuhn [Kuh78]. O que aparece são novos rumos, novas direções de pesquisa, mas não há perda de continuidade histórica: a física de hoje é *a mesma disciplina* de Newton e Maxwell, porém a física de Newton, por exemplo, contrariamente ao que se pensa, não foi revogada; ainda vigora perfeitamente dentro de certos limites de aplicabilidade (como na engenharia comum), apenas que não é mais uma teoria que vige universalmente.[12]

Da mesma forma, com o desenvolvimento das lógicas não clássicas, houve a percepção de que havia vários outros caminhos a serem trilhados, além daquele ditado pela lógica de tradição aristotélica. Houve igualmente um ponto de inflexão na trajetória da evolução da lógica com o surgimento das lógicas não-clássicas. No entanto, a lógica tradicional ainda persiste de certo modo na maioria dos sistemas não-clássicos (exceções há, como no caso da lógica intuicionista, como indicaremos no Apêndice C), somente que agora se vê que ela não vale universalmente, mas deve ficar restrita ao seu particular domínio de aplicabilidade (algo sobre isto será visto no caso particular das lógicas paraconsistentes, no capítulo final). Porém, para que se possa apreciar esses desenvolvimentos e modos de proceder, é necessário que se tenha uma boa idéia acerca dos conceitos formais que estamos vendo nessas seções.

0.4 Dedução a partir de um conjunto de premissas

Um conceito muito importante é o seguinte. Sejam Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que α é *conseqüência sintática* das fórmulas de Γ (ou simplesmente, conseqüência de Γ), e escrevemos

$$\Gamma \vdash \alpha$$

(veja que estamos subentendendo o sistema formal $\mathcal{S}$) se existe uma seqüência $\beta_1, \ldots, \beta_n$ de fórmulas tais que β_n é α e cada uma das demais β_j ($j = 1, \ldots, n-1$) é um axioma de $\mathcal{S}$, ou pertence a Γ ou é consequência direta, por meio de uma das regras de inferência de $\mathcal{S}$, de fórmulas precedentes da seqüência. Uma tal seqüência é dita ser uma *dedução* de α a partir das *premissas* (ou *hipóteses*) em Γ.

Para exemplificar, na teoria (que pode ser devidamente formalizada) das matrizes, podemos obter uma prova da sentença 'A matriz A é inversível'

[12] O desenvolvimento mais detalhado desta concepção pode ser visto em [Cos97, Cap. 1].

a partir das premissas (e demais axiomas da lógica e da matemática subjacentes) 'A é quadrada' e 'o determinante de A é distinto de zero'. Ou então, da hipótese de que uma determinda função é diferenciável em um ponto, deduzimos que ela é contínua nesse ponto.[13]

Se houver necessidade de enfatizar o sistema $\mathcal{S}$ na qual se está efetuando as deduções, pode-se escrever

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha.$$

Se $\Gamma = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ é um conjunto finito, escreve-se

$$\beta_1, \ldots, \beta_n \vdash \alpha$$

ao invés de

$$\{\beta_1, \ldots, \beta_n\} \vdash \alpha$$

Se $\Gamma = \emptyset$, escreve-se simplesmente

$$\vdash \alpha$$

ao invés de

$$\emptyset \vdash \alpha$$

e neste caso α é um teorema (formal) de $\mathcal{S}$, conforme definição dada anteriormente.

Exercício 0.10 Justifique esta afirmativa: porque $\emptyset \vdash \alpha$ indica que α é um teorema de $\mathcal{S}$?

Algumas das principais propriedades do operador $\vdash$ são as seguintes, aqui somente enunciadas:

(1) [Autodedutibilidade] Para toda $\alpha \in \Gamma$, tem-se que $\Gamma \vdash \alpha$.

(2) [Monotonicidade] Se $\Gamma \subseteq \Delta$ e se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Delta \vdash \alpha$. Informalmente, se algo é dedutível a partir de um certo conjunto de premissas, continua sendo dedutível de qualquer conjunto obtido do anterior quando a ele agregamos premissas adicionais.

(3) [Compacidade] $\Gamma \vdash \alpha$ see existe um subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que $\Delta \vdash \alpha$. (Falaremos mais sobre este resultado abaixo)

(4) [Regra do Corte] Se $\Delta \vdash \alpha$ e de $\Gamma \vdash \beta$ para cada $\beta \in \Delta$, então $\Gamma \vdash \alpha$.

[13]O leitor não deve ficar preocupado com esses exemplos, que requerem alguma matemática, mas unicamente atentar para o fato de que se está inferindo certos fatos a partir de outros, dados como hipóteses ou que tenham sido deduzidos anteriormente.

0.4.1 Raciocínios Derrotáveis

A monotonicidade acima exemplificada não se dá em todos os contextos; de grande importância para a ciência da computação (e para a filosofia) são as chamadas 'lógicas não monotônicas' e os raciocínios derrotáveis (*defeasible reasonings*) em geral, que ferem esse requisito.[14] Falando por alto, a idéia intuitiva é a seguinte: um racionício não monotônico é aquele em que, digamos, há uma certa derivação a partir de determinadas premissas, mas a introdução de uma nova premissa faz com que a conclusão não mais se siga (como se, no ato de condenar um prisioneiro por um crime realizado no metrô, o juiz recebesse uma nova prova atestando que o réu estava na missa, realizada na catedral da cidade, na hora do crime).

É patente que este tipo de raciocínio tem importância nas ciências empíricas e humanas. Por exemplo, em todos os contextos nos quais o acréscimo de uma informação causa o efeito de que conclusões que haveriam de ser tiradas tenham que ser revistas (como no direito, na medicina e nas demais áreas), é não-monotônico. Há várias lógicas que lidam com essas formas de inferência. Estes tópicos são relevantes, como se pode perceber, mas ultrapassam os objetivos destas Notas.

[14]Pode-se ver o No. 4, Vol. 1 (1991) da revista *Minds and Machines*, dedicado ao *defeasible reasoning*.

Bibliografia

[Ari49] Aristóteles, *Prior and Posterior Analytics*, introduction, text and commentary by W. D. Ross, Oxford, 1949.

[Arr90] Arruda, A. I., *N. A. Vasiliev e a Lógica Paraconsistente*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência da Universidade de Campinas, 1990 (Coleção CLE Vol. VII).

[BenPut96] Benacerraff, P. and Putnam, H. (eds.), *Philosophy of Mathematics: selected readings*, 2nd. ed., Cambridge Un. Press, 1996.

[Bon06] Bonola, R., *La geometria non-euclidea: esposizione storico-critica del sul sviluppo*, Bologna, Ditta Nicola Zanichelli, 1906, (`http://historical.library.cornell.edu`)

[Bou68] Bourbaki, N., *Theory of sets*, Hermann & Addison-Wesley, 1968.

[Boy74] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Edgard Blucher-EdUSP, 1974.

[Cam00] Cameron, P. J., *Sets, Logic and Categories*, Springer Verlag, 2nd. ed., 2000.

[Cig94] Cignoli, R. L. O., DÓttaviano, I. M. L. e Mundici, D., *Álgebra das Lógicas de Łukasiewicz*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Coleção CLE no. 12, 1994.

[Coh89] Cohen, D. W., *An introduction to Hilbert spaces and quantum logic*, New York, Springer-Verlag, 1989.

[Col03] Colyvan, M., 'Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL

= <http://plato.stanford.edu/archives/fall2003/entries/mathphil-indis/>.

[Cor73] Corcoran, J., ‘Meanings of implication’, *Dialogos* **25** (1973), 59–76. Reproduzido como ‘Significados de la implicacion’, *Agora*, **5** (1985), 279–294.

[Cos63] da Costa, N. C. A., *Sistemas Formais Inconsistentes*, NEPEC, Rio de Janeiro, 1963 (reeditado pela Editora da Universidade Federal do Paraná, 1993).

[Cos82] da Costa, N. C. A., ’Statement of purpose’, *J. Non-Classical Logic* **1** (1), 1982, pp. i-v.

[Cos94] da Costa, N. C. A., *Ensaio sobre os fundamentos da lógica*, S. Paulo, Hucitec, 2a. ed., 1994.

[Cos97] da Costa, N. C. A., *O Conhecimento Científico*, Discurso Editorial, 1997.

[CosBez94] da Costa, N. C. A. et Béziau, J. -Y., ’Théorie de la valuation’, *Logique et Analyse* **146**, 1994, pp. 95-117.

[CosKra04] da Costa, N. C. A. and Krause, D., ’The logic of complementarity’, a aparecer (veja `http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00001559`).

[Dal83] Dalla Chiara, M. L., ‘Physical implications in a Kripkian semantical approach to physical theories’, in M. L. Dalla Chiara et al. (eds.), *Logic in the 20th century*, Roma, Scientia, 1983, pp. 37-51.

[DavHer85] Davis, P. J. e Hersh, R., *A Experiência Matemática*, Francisco Alves, 1985.

[Dev93] Devlin, K., *The joy of sets: fundamentals of contemporary set theory*, Springer, 1993.

[Dev97] Devlin, K., *Goodby Descartes: the end of logic and the search for a new cosmology of the mind*, John Wiley & Sons, 1997.

[End72] Enderton, H. B., *A mathematical introduction to logic*, New York and London, Academic Press, 1972.

[End77] Enderton, H. B., *Elements os set theory*, New York, Academic Press, 1977.

[Eve90] Eves, H., *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*, 3rd. ed., Dover Pu., 1990.

[Fer01] Ferreirós, J., 'The road to modern logic -an interpretation', *Bulletin of Symbolic Logic* **7** (4), Dec. 2001, pp. 441-484.

[Fra82] Franco de Oliveira, A. J., *Teoria de conjuntos: intuitiva e axiomática*, Lisboa, Livraria Escolar Editora, 1982.

[Haa74] Haack, S., *Deviant Logic*, Cambridge Un. Press, 1974.

[Hal62] Halmos, P. R., *Algebraic Logic*, Chelsea Pu. Co., 1962.

[Hal74] Halmos, P. R., *Naive set theory*, Springer, 1974. Há tradução para o Português com o título *Teoria Ingênua de Conjuntos*.

[Hal78] Halmos, P. R., *Espaços vetoriais de dimensão finita*, Rio, Campus, 1978.

[Hod95] Hodel, R. E., *An introduction to mathematical logic*, PWS Pu. Co., 1995.

[Hof80] Hofstadter, D. R., *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Penguim Books, 1980.

[Jam74] Jammer, M., *Philosophy of Quantum Mechanics*, New York, John Wiley, 1974.

[Jau68] Jauch, T., *Foundations of quantum mechanics*. New York, Addison-Wesley, 1968.

[Kal98] Kalamara, Fotini M., 'The internal description of a causal set: what the universe looks like from the inside', `http://xxx.lanl.gov/list/gr-qc/9811053`

[KneKne80] Kneale, W. e Kneale, M., *O desenvolvimento da lógica*, Lisboa, Fund. Calouste Gulbenkian, 2a. ed., 1980.

[Kne63] Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*, Van Nostrand, 1963.

[Kra02] Krause, D., *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência*, S. Paulo, EPU, 2002.

[Kri71] Krivine, J.-L., *Introduction to set theory*, Dordrecht, D. Reidel, 1971.

[Kuh78] Kuhn, T. M., *A Estrutura das Revoluções Científicas*, Perspectiva, 2a. ed., 1978 (Col. Debates, 115).

[Lad69] Ladrière, J., *Limitaciones Internas de los Formalismos*, Madrid, Tecnos, 1969.

[Lem71] emmon, E. J., *Beginning Logic*, Thomas Nelson & Sons,1971.

[Lip64] Lipschutz, S. *Theory and problems of set theory and related topics*, New York, Schaum Pu., 1964. Há tradução para o Português.

[Mos94] Moschovakis, Y. N., *Notes on set theory*, Springer, 1994.

[Man88] Mangani, P., *Appunti di logica matematica*, Firenze, C.D.O, 1988.

[Men87] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Monterey, Wadsworth & Brooks/Cole, 3rd. ed., 1987.

[Man88] Mangani, P., *Appunti di logica matematica*, Firenze, C.D.O, 1988.

[Man77] Manin, Yu. I., *A Course in Mathematical Logic*, Springer-Verlag, 1977.

[Mat65] Mates, B., *Elementary Logic*, Oxford Un. Press, 1965.

[Men77] Mendelson, E., *Álgebra booleana e circuitos de chaveamento*, Mc-Graw Hill, 1977 (Col. Schaum).

[Men87] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, Chapman & Hall, 4th. ed., 1997.

[Mir87] Miraglia, F., *Cálculo Proposicional: uma integração da álgebra e da lógica*, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, Coleção CLE no. 1, 1987.

[Mor01] Mortari. C. A., *Introdução à Lógica*, UNESP, 2001.

[Pes99] Pessoa Jr., O., 'A naturalistic review of a tratise on the logic of scientific knowledge', *Manuscrito* XXII (1), 1999, pp. 197-239.

[Pog94] Pogorzelski, W. A., *Notions and theorems of elementary formal logic*, Warsaw Un., Białystok, 1994.

[Pra93] Prawitz, D., 'Remarks on Hilbert's Program for the foundations of mathematics', in G. Corsi *et al.* (eds.), *Bridging the gap: philosophy, mathematics, and physics*, Dordrecht, Kluwer Ac. Pu, 1993, pp. 87-98.

[Rog71] Rogers, R., *Mathematical Logic and Formalized Theories*, North-Holland, 1971.

[Ros95] Ross, D., *Aristotle*, Routledge, 1995.

[Rus48] Russell, B., *Los Principios de la Matemática*, Espasa Calpe, 1948.

[Sch01] Scheibe, E., 'The mathematical overdetermination of physics', in Scheibe, E., *Between Rationalism and Empiricism*, Springer-Verlag, 2001, pp. 571-583.

[Sho67] Shoenfield, J. R., *Mathematical Logic*, Addison Wesley, 1967 (reimpresso pela Association for Symbolic Logic, 2000).

[Sup59] Suppes, P., *Introduction to Logic*, Van Nostrand, 1959.

[Tar66] Taski, A., *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Oxford Un. Press, 2nd. printing, 1966.

[Tar83] Tarski, A., 'Investigations into the sentential calculus', in Tarski, A., *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Pu. Co., 2nd. ed. 1983, pp. 38-59.

[Tar83a] Tarski, A., 'On some fundamental concepts of metamathematics', in Tarski, A., *Logic, semantics, metamathematics*, Hackett Pu. Co., 2nd. ed. 1983, pp. 30-37.

[Tru77] Truesdell, C., *A first course in rational continuum mechanics*, Vol. I: General Concepts. New York, San Francisco and London, Academic Press, 1977.

[Tym86] Tymoczko, T. (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Birkhäuser, 1986.

[Wil65] Wilder, R. L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, John Wiley & Sons, 2nd. ed., 1965.

[Wol03] Wolenski, J., 'Lvov-Warsaw School', *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/lvov-warsaw/>.