A Lógica Proposicional

Uma vez que a validade dos argumentos depende apenas da sua forma lógica, uma teoria lógica deve incluir uma maneira de representar a forma lógica das frases (premissas e conclusão) que compõem cada argumento. Isso é feito através de uma *linguagem formal*.

Os estudantes de lógica deverão adquirir a seguinte competência: dada uma frase declarativa (verdadeira ou falsa) em português (ou em qualquer outra língua natural), 'traduzir' essa frase para a linguagem formal do sistema de lógica estudado. A 'tradução' para uma linguagem formal é muito diferente da tradução para outra língua natural; preferimos por isso chamar-lhe *formalização* (ou *simbolização*). Na tradução propriamente dita, procuramos na língua-alvo uma frase que 'diga o mesmo', ou que tenha o mesmo conteúdo, que a frase de partida (por exemplo, traduzimos «Ernesto é alto» para inglês por «Ernesto is tall»). Mas as 'frases' das linguagens formais da lógica *não dizem nada*, não têm conteúdo: elas são apenas esqueletos de frases possíveis, concebidos com o único objectivo de representar a sua forma lógica; aliás, por essa razão, em vez de 'frases', preferimos chamar-lhes *fórmulas*. Na formalização, quando encontramos duas frases que dizem coisas diferentes (como, por exemplo, «Ernesto é alto» e «Rute é simpática»), mas que têm a mesma forma lógica, fazêmo-las corresponder à mesma fórmula.

A linguagem da lógica proposicional contém apenas os seguintes símbolos:

- letras esquemáticas (em número indefinido): p, q, r, s, p', q', r', s', p'', q'', r'', s'', ...
- cinco conectivas lógicas: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- um par de parêntesis curvos: (,).

Tal como em português nem todo o conjunto de palavras forma uma frase (*e.g.*, «Ernesto Rute gordo corre é» não é uma frase portuguesa), também na linguagem da lógica proposicional existem regras que determinam quando é que uma sequência de símbolos constitui uma fórmula. A fixação dessas regras compete à *sintaxe*.

As letras esquemáticas p, q, r, s, ... servem para representar frases declarativas atómicas, quer dizer, frases que sejam verdadeiras ou falsas (*i.e.*, que tenham um valor de verdade) e que não contenham outras frases mais simples como seus elementos componentes. Por exemplo, a frase «Amanhã vou à praia, se não chover» não é atómica, pois contém a frase «Amanhã vou à praia» como seu elemento componente; mas já esta última é uma frase atómica, pois não é possível encontrar no seu seio uma outra frase que a componha. As frases que não são atómicas (ou simples) são moleculares (ou complexas).

Ao representar uma frase declarativa portuguesa por uma letra esquemática, a lógica está a desinteressar-se do seu conteúdo, daquilo que ela diz. Numa frase atómica, interessa-lhe apenas que é algo que é verdadeiro ou falso (mas não ambos). Pois isso é quanto basta para determinar a validade ou invalidade dos argumentos nos quais a frase ocorre.

As conectivas $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ são os símbolos *lógicos* da linguagem da lógica proposicional. Do ponto de vista sintáctico, eles aplicam-se a fórmulas dadas para gerar fórmulas mais complexas. Semanticamente, diz-se que cada um destes símbolos expressa uma certa *função de verdade*. Essas funções de verdade são o principal objecto de estudo da lógica proposicional.

Os parêntesis curvos funcionam como sinais de pontuação. Tal como as vírgulas e os pontos na língua portuguesa, eles indicam quando é que um certo elemento de uma frase termina e outro começa.

O Essencial sobre Conjunções, Negações e Disjunções

1 - Conjunção

Considere-se a frase «Rui é criativo e Ana é inteligente» e imagine-se que, na realidade, Rui *é* criativo, mas Ana *não é* inteligente. É aquela frase verdadeira ou falsa? O que seria preciso para que ela fosse verdadeira?

Regra semântica: uma conjunção é verdadeira se as frases que a compõem forem ambas verdadeiras; mas se alguma delas for falsa (ou se ambas o forem), então a conjunção é falsa.

Nas línguas naturais há muitas maneiras de formar a conjunção de duas frases dadas (a mais frequente, em português, é ligar as duas frases por meio de um «e»). Na linguagem da lógica proposicional, a conjunção de duas fórmulas forma-se sempre da mesma maneira: escreve-se a conectiva $\wedge$ entre as duas fórmulas e envolve-se o resultado num par de parêntesis. Por exemplo, a conjunção de p e de q é a fórmula

$$(p \wedge q)$$

Neste exemplo, as duas fórmulas que compõem a conjunção são ambas atómicas. Mas nada obriga a que o sejam. A conjunção de *quaisquer* duas fórmulas, simples ou complexas, forma-se exactamente da mesma maneira. Por exemplo, a conjunção de p e de $(p \wedge q)$ é a fórmula

$$(p \wedge (p \wedge q))$$

2 - Negação

A negação de «Rui é gordo» é a frase «Rui não é gordo». Mas a negação de «Rui é estudante de geografia» não é «Rui é professor de geografia», pois estas duas frases podem ser ambas falsas – como aconteceria se, na realidade, Rui fosse juiz do supremo tribunal de justiça.

Regra semântica: a negação inverte o valor de verdade. Quer dizer, se uma frase for verdadeira, a sua negação será falsa; e se ela for falsa, a sua negação será verdadeira.

Em português, nem sempre é fácil gerar a negação de uma frase dada. Como exercício, negue as seguintes frases:

- *Tudo o que luz é ouro.*
- *Alguns gatos são brancos.*
- *Alguns lógicos não são filósofos.*
- *Algumas coisas não têm preço.*
- *Este relógio às vezes atrasa-se.*
- *Rui é gordo, mas o irmão é magro.*

- *Fui a Lisboa sem passar por Setúbal.*

Na linguagem da lógica proposicional, a negação de uma qualquer fórmula X gera-se sempre da mesma maneira: escreve-se o símbolo $\neg$ imediatamente antes de X.

Se X for uma fórmula atómica como, por exemplo, p, a negação será

$$\neg p$$

Mas X também pode ser uma fórmula complexa, como por exemplo $(p \wedge (p \wedge q))$. A regra mantém-se a mesma, pelo que a sua negação será

$$\neg(p \wedge (p \wedge q))$$

3 - Disjunção

Considere-se a frase «Rui está doente ou esqueceu-se da festa» (dita como explicação para o facto de ele não ter vindo). Em que circunstâncias seria esta frase verdadeira? E em que circunstância seria falsa? E se foi a doença que o fez esquecer-se da festa?

Sintacticamente, a disjunção funciona do mesmo modo que a conjunção, com a única diferença de que muda o símbolo lógico: forma-se a disjunção de duas fórmulas (simples ou complexas) escrevendo a conectiva $\vee$ entre elas e envolvendo o resultado num par de parêntesis. A disjunção de p e de q, por exemplo, é

$$(p \vee q)$$

E a disjunção de $\neg p$ e de $(p \wedge q)$ é

$$(\neg p \vee (p \wedge q))$$

Regra semântica: uma disjunção é falsa se as frases que a compõem forem ambas falsas; mas se alguma delas for verdadeira (ou se ambas o forem), então a disjunção é verdadeira.

Exercícios de formalização

Formalize as seguintes frases na linguagem da lógica proposicional. Comece por apresentar um dicionário, fazendo corresponder uma letra esquemática a cada frase atómica diferente.

(1) *Os quadros de Van Gogh são os mais valiosos do mundo e, no entanto, não são os mais profundos*.

(2) *Os quadros de Van Gogh não são os mais valiosos do mundo, mas são os mais profundos.*

(3) *Os quadros de Van Gogh nem são os mais valiosos do mundo nem são os mais profundos.*

(4) *Não é verdade que os quadros de Van Gogh sejam os mais valiosos do mundo e os mais profundos.*

(5) *Nem os computadores digitais nem as redes neuronais são capazes de simular todos os aspectos da inteligência humana, embora cada um deles consiga simular alguns.*

(6) *Ainda que a inflação esteja a descer, o governo não consegue conduzir bem a economia e ao mesmo tempo recuperar a sua popularidade.*

(7) *Silva, Barroso e Ribeiro são políticos e, no entanto, são os três honestos.*

(8) *Silva, Barroso e Ribeiro são convincentes, embora nenhum deles seja honesto.*

(9) *Silva, Barroso e Ribeiro são advogados – ainda assim, pelo menos dois deles são honestos.*

(10) *Silva, Barroso e Ribeiro são filósofos morais, mas só um deles é honesto.*

(11) *O favorito não vencerá, mas não por falta de esforço.*

(12) *Um mal nunca vem só.*[1]

[1] Exercícios adaptados de Forbes (1994), p. 19.