Resolução

Nessa seção é apresentado o algoritmo de resolução para realizar deduções automática em lógica proposicional.

1 Resolução proposicional

O algoritmo de resolução é uma técnica de prova por refutação. Seja Δ um conjunto de fórmulas e α um fórmula. Para provar $\Delta \models \alpha$, tentamos provar que $\Delta \cup \{\neg\alpha\}$ é inconsistente. Para conseguir isso, transformamos o conjunto de fórmulas (após o adição de $\neg\alpha$) em forma conjuntiva normal e aplicamos o algoritmo de resolução até obtenção de uma cláusula vazia. Eis o algoritmo:

Algoritmo de Resolução: Seja S um conjunto de fórmulas. Utilizaremos o símbolo $\Box$ para representar a cláusula vazia.

Enquanto $\Box \notin S$:

- Escolher duas cláusulas $s_1, s_2 \in S$, tais que uma contém um literal l e a outra o literal $\neg l$.
- Calcular a cláusula resolvente, isto é, $r = s_1 \cup s_2 - \{l, \neg l\}$
- Substituir o conjunto S por $S \cup \{r\}$

Consideremos por exemplo as seguintes fórmulas:

$$\begin{array}{ll} (1) & P \vee Q \\ (2) & \neg P \supset R \\ (3) & \neg(Q \wedge R) \end{array}$$

Podemos provar que P é uma consequência lógica desse conjunto de fórmulas. Acrescentamos $\neg P$ ao conjunto e transformamos em forma conjuntiva normal:

(1) $[P, Q]$
(2) $[P, R]$
(3) $[\neg Q, \neg R]$
(4) $[\neg P]$

Aplicando o algoritmo de resolução, obtemos a cláusula vazia:

(1)	$[P, Q]$	
(2)	$[P, R]$	
(3)	$[\neg Q, \neg R]$	
(4)	$[\neg P]$	
(5)	$[Q]$	(1,4)
(6)	$[\neg R]$	(3,5)
(7)	$[P]$	(2,6)
(8)	$\square$	(4,7)

O princípio que explique porque é suficiente provar a inconsistência de $\Delta \cup \{\alpha\}$ para provar $\Delta \models \alpha$ é o seguinte. Se $\Delta \models \alpha$, temos direito de acrescentar α no conjunto, obtendo assim $\Delta \cup \{\alpha\}$. Se, além disso, acrescentamos também $\neg\alpha$, obtemos $\Delta \cup \{\alpha\} \cup \{\neg\alpha\}$, que é evidentemente inconsistente.

É muito importante saber que o algoritmo de resolução é incompleto para provar a consequência lógica. Por exemplo, é fácil ver que não é possível provar $(P \wedge Q) \models (P \vee Q)$, usando somente o algoritmo de resolução. É por isso que para provar um fato, acrescentamos a negação desse fato na base de conhecimento, e provamos a inconsistência da base resultante. Para provar a inconsistência de uma base de conhecimento, o algoritmo de resolução é **completo**, isto é, se a base é inconsistente, existe uma prova que produz a cláusula vazia.

Exercício 1 Seja Δ a seguinte base de conhecimento:
1) $P \vee \neg Q \supset R \vee W$
2) $Q \supset (\neg P \supset W)$
3) $(\neg W \supset P) \supset R$

Utilize a resolução para provar $\Delta \models R$.

Exercício 2

1) Se todos os seres inteligentes são alunos, então os não inteligentes são professores.
2) Todo mundo é aluno ou professor, mas não os dois.
3) Se existe um ser não inteligente, então todos os seres inteligentes são alunos.
4) Marta é inteligente.
5) Michel não é inteligente.

a) Traduza esses fatos em fórmulas da lógica de primeira ordem.
b) Utilize o algoritmo de resolução para provar que existe um professor.

Exercício 3

> Se a licorne é um animal mítico, então ela é imortal. Se ela não é um animal mítico, então ela é um mamífero mortal. Se a licorne é imortal ou um mamífero, então ela tem um chifre. A licorne é mágica se tem um chifre.

Com esses fatos, é possível deduzir que a licorne é um animal mítico? Que ela é mágica? Que ela tem chifre?

Exercício 4
Ana, Marta e Clara trabalham em computação, engenharia e contabilidade (não necessariamente nessa ordem). Ana deve R$10 à analista de sistema. O marido da contadora não aceita que ela se endivide. Marta não é casada.
Identifique a profissão de cada um. *Dicas:* Vai ser necessária utilizar nove proposições para representar todas as relações possíveis pessoa/profissão. É bom fazer algumas abstrações. Por exemplo não é preciso representar o valor do dinheiro que alguém está devendo. É suficiente representar que esta pessoa está endividida.
