Modelação Epidemiológica: Simulação Numérica do Modelo SIR

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Diogo Coelho da Silva, Tomás Alexandre Torres Pereira
Projeto desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular Simulação Númerica em Engenharia
Mestrado em Computação Avançada – Universidade do Minho

Introdução

As epidemias podem ser descritas por sistemas de equações diferenciais que modelam a interação entre indivíduos suscetiveis, infetados e recuperados.
O modelo SIR (Susceptible-Infected-Recovered), proposto por Kermack & McKendrick (1927) [1], é um modelo epidemológico utilizado para descrever como a infeção se propaga ao longo de uma epidemia numa população fechada.

A palavra SIR é uma referência aos 3 estados possíveis que o nosso modelo comporta:

- S - Os individuos que se encontram neste estado estão suscetiveis a ser infetados.
- I - Os individuos que se encontram neste estado estão infetados.
- R - Os individuos que se encontram neste estado estão recuperados.

Este trabalho tem como objetivo simular a evolução temporal de uma epidemias utilizando o modelo SIR, com o intuito de determiner o instante em que o número de infetados desce abaixo de 10.

Modelo Matemático

Assumpções do Modelo:

- O modelo trabalha sobre uma população fechada de tamanho N. Isto significa que a qualquer momento no modelo a seguinte equação se verifica:

$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$

- Admite-se que um individuo afetado passa a ser infecios com efeito emediato
- Todos os individuos da população têm a mesma probabilidade de ser infetado por outros individuos.
- Inicialmente todos os individuos estão na classes susceptível exceto o individuo zero.

Transições entre Estados e Sistemas de Equações:

O modelo epidemológico (SIR) contém 3 parametros iniciais que configuram a maneira como o modelo se comporta.

- β - O valor de alfa corresponde à taxa de infeção por pessoa por semana
- γ - O valor de gamma corresponde à taxa de recuperados por dia.
- N - Número de individuos na população

A imagem a seguir representa a transição entre estados do modelo epidemológico.

O modelo SIR é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -aSI \\ \dfrac{dI}{dt} = aSI - rI \\ \dfrac{dR}{dt} = rI \end{cases}$$

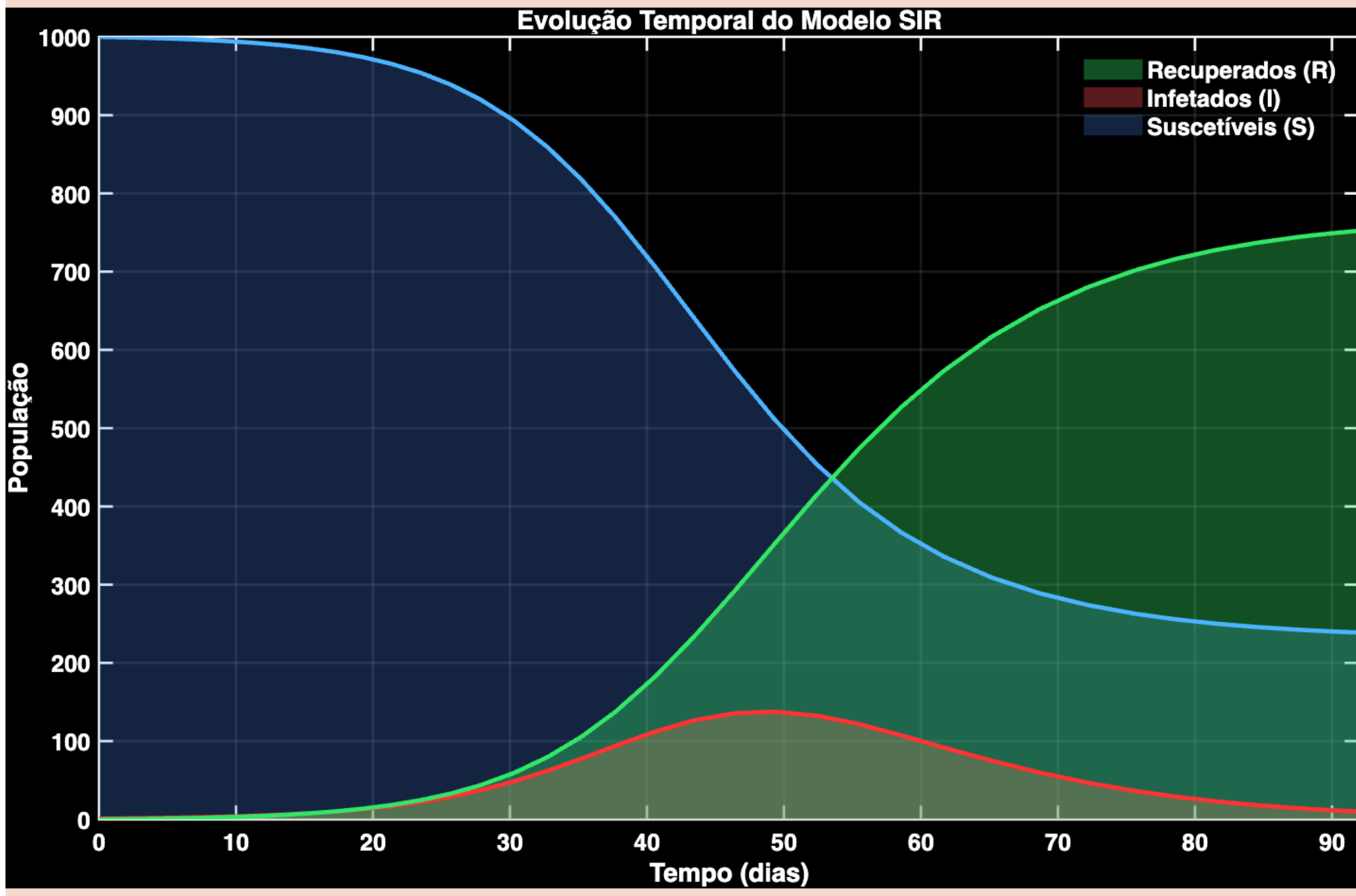
Condições Iniciais:

- S(0) = 1000 (indivíduos suscetíveis)
- I(0) = 1 (indivíduo infetado)
- R(0) = 0 (nenhum recuperado)
- a = 0.002 (p/pessoa e p/semana) -> taxa de infeção
- r = 0.15 (p/ dia) -> taxa de recuperação

Métodos Utilizados

O Sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente no software MATLAB, recorrendo ao solver \`ode45\`, baseado no método de Runge-Kutta de 4ª e 5ª ordem, até ao número de infetados I(t) descer abaixo de 10. Este método aproxima a solução de uma equação diferencial calculando sucessivos incrementos das derivadas e ajusta o passo temporal para garantir estabilidade. A função \`ode45\` utiliza dois métodos em paralelo e controla o erro local para cada iteração.

Resultados e Discussão



O gráfico representa a evolução temporal das três variáveis do modelo epidemiológico SIR, simuladas para uma população de 1001 indivíduos.

- Curva azul (S) representa que o número de suscetíveis diminui continuamente, à medida que os indivíduos entram em contacto com infetados.
- Curva vermelha (I) representa que o número de infetados aumenta de forma exponencial até atingir o pico em torno de t ≈ 45 dias, no qual a infeção atinge a sua máxima propagação.
- Curva verde (R) representa que o número de recuperados cresce continuamente, até estabilizar perto de 700 indivíduos.

Com esta simulação podemos retirar as seguintes conclusões:

- A epidemia inicia-se de forma lenta, acelera entre os dias 20 e 50 e decresce até o número de infetados descer abaixo de 10, o que ocorre por volta de t ≈ 90 dias.
- O número total S + I + R = 1001 mantém-se constante ao longo do tempo, validando a conservação da população.
- No final, a maioria da população torna-se imune (R), enquanto que uma fração permanece suscetível.

CONCLUSIONS

Este trabalho permitiu compreender como um sistema de equações diferenciais pode descrever o comportamento de uma epidemia real. A simulação numérica do modelo SIR, implementada em MATLAB com o método de Runge–Kutta, demonstrou o crescimento inicial exponencial da infeção, seguido de declínio até a extinção. O modelo confirma a importância da taxa de recuperação e da taxa de infeção no controlo epidémico e evidencia o valor dos métodos numéricos na modelação de fenómenos reais em engenharia e ciências aplicadas.

Bibliografia

- ODE with Single Solution Component. (2025). Mathworks.com. https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html
- Rocha, Ana. Comandos de Matlab de Apoio Às Aulas de Métodos Numéricos. 2021.
- A contribution to the mathematical theory of epidemics. (1927). Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 115(772), 700–721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118 [1]
- Hethcote, H. W. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases. ResearchGate, 42, 599–653. https://www.researchgate.net/publication/216632172_The_Mathematics_of_Infectious_Diseases
-