

Modelação Epidemiológica: Simulação Numérica do Modelo SIR



Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Diogo Coelho da Silva, Tomás Alexandre Torres Pereira

Projeto desenvolvido no âmbito da Unidade Curricular Simulação Numérica em Engenharia
Mestrado em Computação Avançada – Universidade do Minho

Introdução

As epidemias podem ser descritas por sistemas de equações diferenciais que modelam a interação entre indivíduos suscetíveis, infetados e recuperados. O modelo SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*), proposto por *Kermack & McKendrick* (1927), é um modelo epidemiológico utilizado para descrever como a infeção se propaga ao longo de uma epidemia numa população fechada. A palavra SIR é uma referência aos 3 estados possíveis que o nosso modelo comporta:

- **S** - Os indivíduos que se encontram neste estado estão suscetíveis a ser infetados.
- **I** - Os indivíduos que se encontram neste estado estão infetados.
- **R** - Os indivíduos que se encontram neste estado estão recuperados.

Por exemplo, durante a pandemia COVID-19, o modelo SIR foi amplamente utilizado para prever a evolução de infetados em comunidades. Este trabalho tem como objetivo simular a evolução temporal de uma epidemia utilizando o modelo SIR, com o intuito de determinar o instante em que o número de infetados desce abaixo de 10.

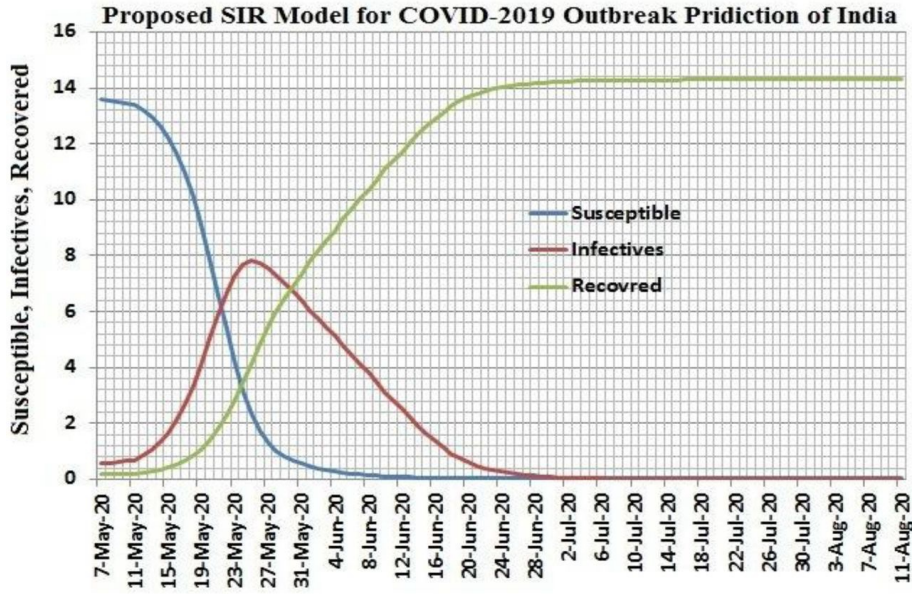


Fig.3- SIR Model Simulation for COVID-2019 epidemic state of India from 7-May 2020 [1]

Modelo Matemático

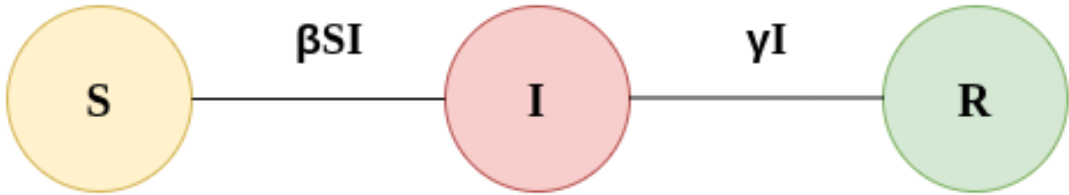
Assunções do Modelo:

- O modelo trabalha sobre uma população fechada de tamanho N . Isto significa que a qualquer momento no modelo a seguinte equação se verifica:
$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$
- Admite-se que um indivíduo afetado passa a ser infecioso com efeito imediato
- Todos os indivíduos da população têm a mesma probabilidade de ser infetado por outros indivíduos.
- Inicialmente todos os indivíduos estão na classes susceptível exceto o indivíduo zero.

Transições entre Estados e Sistemas de Equações:

- O modelo epidemiológico (SIR) contém 3 parâmetros iniciais que configuram a maneira como o modelo se comporta.
- β - O valor de *alfa* corresponde à taxa de infeção por pessoa por semana
 - γ - O valor de *gamma* corresponde à taxa de recuperados por dia.
 - N - Número de indivíduos na população

A imagem a seguir representa a transição entre os estados do modelo epidemiológico.



O modelo SIR é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

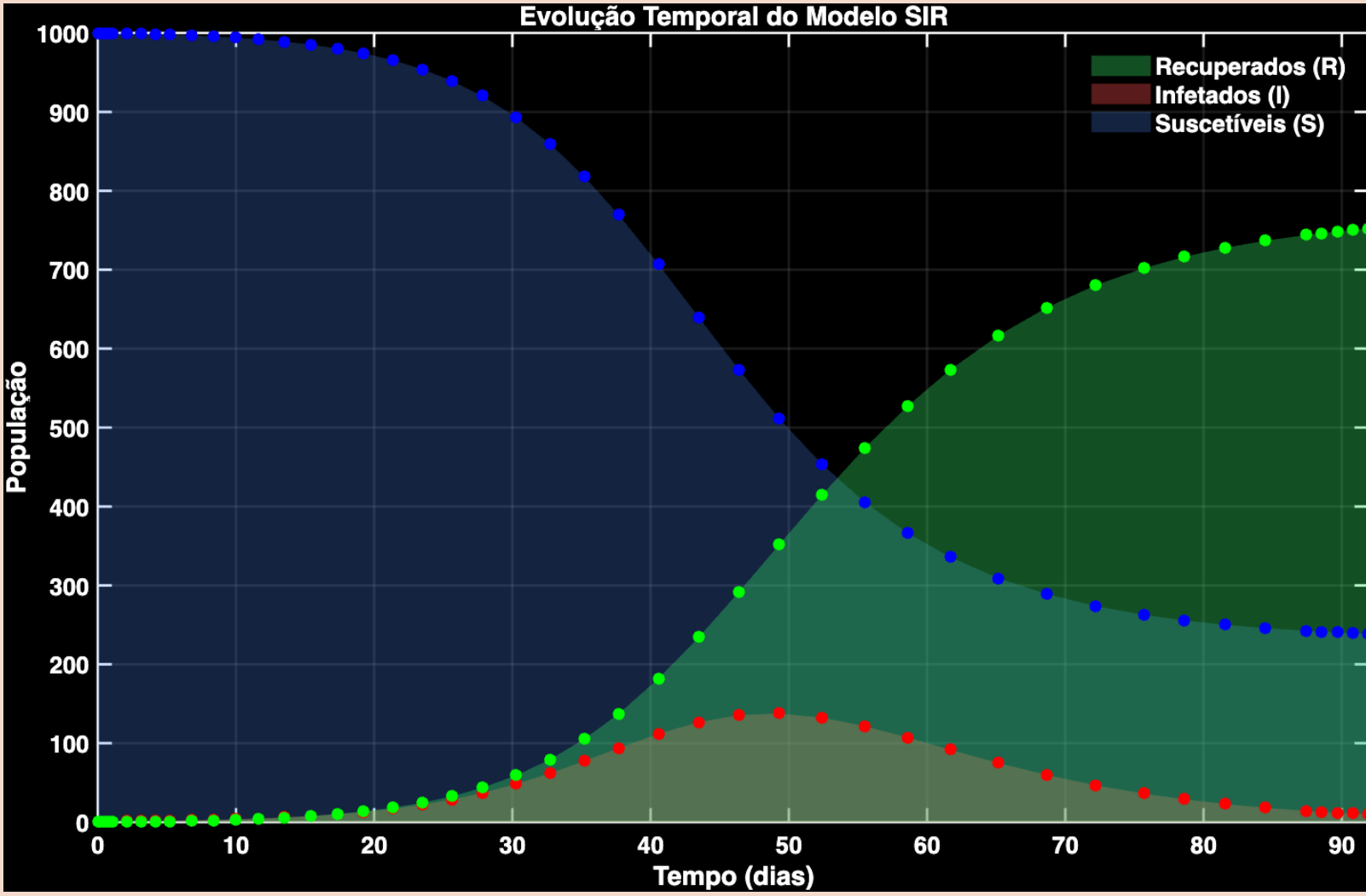
Condições Iniciais:

- $S(0) = 1000$ (indivíduos susceptíveis)
- $I(0) = 1$ (indivíduo infetado)
- $R(0) = 0$ (nenhum recuperado)
- $\beta = 0.002$ (p/pessoa e p/semana) -> taxa de infeção
- $\gamma = 0.15$ (p/ dia) -> taxa de recuperação

Métodos Utilizados

O Sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente no *software MATLAB*, recorrendo ao *solver 'ode45'*, baseado no método de *Runge-Kutta* de 4ª e 5ª ordem, até ao número de infetados **I(t)** descer abaixo de 10. Este método aproxima a solução de uma equação diferencial calculando sucessivos incrementos das derivadas e ajustando o passo temporal para garantir estabilidade do modelo. A função *'ode45'* utiliza dois métodos em paralelo e controla o erro local para cada iteração.

Resultados e Discussão



O gráfico representa a evolução temporal das três variáveis do modelo epidemiológico SIR, simuladas para uma população de 1001 indivíduos.

- **Curva azul (S)** representa que o número de suscetíveis diminui continuamente, à medida que os indivíduos entram em contacto com infetados.
- **Curva vermelha (I)** representa que o número de infetados aumenta de forma exponencial até atingir o pico em torno de $t \approx 45$ dias, no qual a infeção atinge a sua máxima propagação.
- **Curva verde (R)** representa que o número de recuperados cresce continuamente, até estabilizar perto de 700 indivíduos.

Com esta simulação podemos retirar as seguintes conclusões:

- A epidemia inicia-se de forma lenta, acelera entre os dias 20 e 50 e decresce até o número de infetados descer abaixo de 10, o que ocorre por volta de $t \approx 90$ dias.
- O número total $S + I + R = 1001$ mantém-se constante ao longo do tempo, validando a conservação da população.
- No final, a maioria da população torna-se imune (R), enquanto que uma fração permanece suscetível.

Conclusões

Este trabalho permitiu compreender como um sistema de equações diferenciais pode descrever o comportamento de uma epidemia real. A simulação numérica do modelo SIR, implementada em *MATLAB* com o método de *Runge-Kutta*, demonstrou o crescimento inicial exponencial da infeção, seguido de declínio até a extinção. O modelo confirma a importância da taxa de recuperação e da taxa de infeção no controlo epidémico e evidencia o valor dos métodos numéricos na modelação de fenómenos reais em engenharia e ciências aplicadas.

Bibliografia

- ODE with Single Solution Component. (2025). Mathworks.com. <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html>
- Rocha, Ana. Comandos de Matlab de Apoio Às Aulas de Métodos Numéricos. 2021.
- A contribution to the mathematical theory of epidemics. (1927). Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 115(772), 700–721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>
- Hethcote, H. W. (2000). The Mathematics of Infectious Diseases. ResearchGate, 42, 599–653. https://www.researchgate.net/publication/216632172_The_Mathematics_of_Infectious_Diseases
- Yadav, R. S. (2020). Mathematical Modeling and Simulation of SIR Model for COVID-2019 Epidemic Outbreak: A Case Study of India. MedRxiv (Cold Spring Harbor Laboratory). <https://doi.org/10.1101/2020.05.15.20103077> Fig.1 [1]