Modelação Epidemiológica: Simulação Numérica do Modelo SIR

Diogo Coelho da Silva, Tomás Alexandre Torres Pereira Mestrado em Computação Avançada – Universidade do Minho

Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Introdução

O modelo **SIR** (***Susceptible–Infected–Recovered***)[3],proposto por *Kermack e McKendrick* (1927), é um modelo epidemiológico que descreve a propagação de uma infeção ao longo de uma epidemia numa população fechada, como no caso da ***COVID-19***.

Os três estados do modelo representam:

- **S** – indivíduos suscetíveis à infeção;
- **I** – indivíduos infetados;
- **R** – indivíduos recuperados.

O objetivo deste trabalho é simular a evolução temporal de uma **epidemia** com o modelo **SIR**, determinando o instante em que o número de infetados desce abaixo de 10.

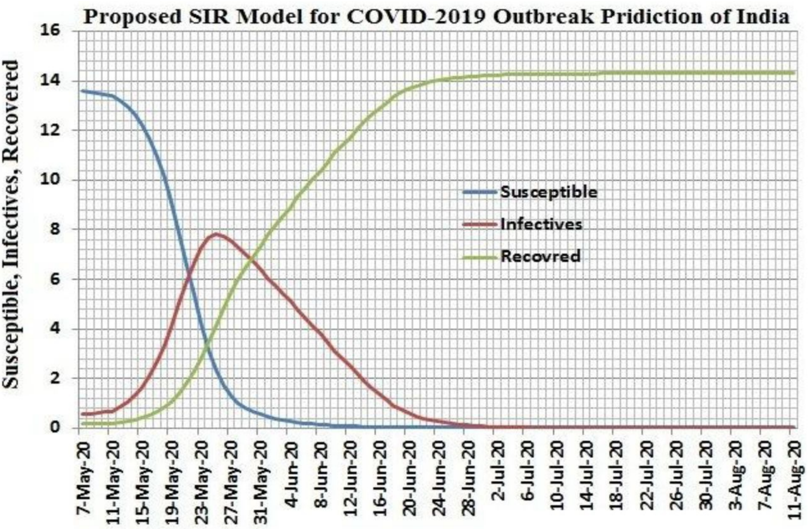

Fig.1- SIR Model Simulation for COVID-2019 epidemic state of India from 7-May 2020 [1]

Modelo Matemático

Assunções do Modelo:

- O modelo considera uma população fechada de tamanho **N**, constante ao longo do tempo, descrita pela equação:
$$N = S(t) + I(t) + R(t)$$
- Inicialmente, todos os indivíduos pertencem à classe suscetível (S), exceto o indivíduo zero, que está infetado.
- Assume-se que um indivíduo infetado torna-se infecioso de forma imediata e que todos os elementos da população têm igual probabilidade de serem infetados.

Transições entre Estados e Sistemas de Equações:

O modelo SIR contém 3 parâmetros que configuram o seu comportamento:

- **β** - O valor de *alfa* corresponde à taxa de infeção por pessoa por semana
- **γ** - O valor de *gamma* à taxa de recuperados por dia.
- **N** - Número de indivíduos na população

A transição entre os estados do modelo epidemiológico representa-se por:

$$S \xrightarrow{\beta SI} I \xrightarrow{\gamma I} R$$

O modelo SIR é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = -aSI \\ \dfrac{dI}{dt} = aSI - rI \\ \dfrac{dR}{dt} = rI \end{cases}$$

Condições Iniciais

- S(0) = 1000 → indivíduos suscetíveis
- I(0) = 1 → indivíduo infetado
- R(0) = 0 → nenhum recuperado

Parâmetros do modelo:

- a = 0.002 → taxa de infeção (por pessoa e por semana)
- r = 0.15 → taxa de recuperação (por dia)

Métodos Utilizados:

O sistema de equações diferenciais foi resolvido numericamente no *MATLAB* através do solver ***ode45*** [2], baseado no **método de *Runge–Kutta*** de 4.ª e 5.ª ordem, até que o número de infetados $\mathbf{I(t)}$ fosse inferior a 10.

Resultados e Discussão

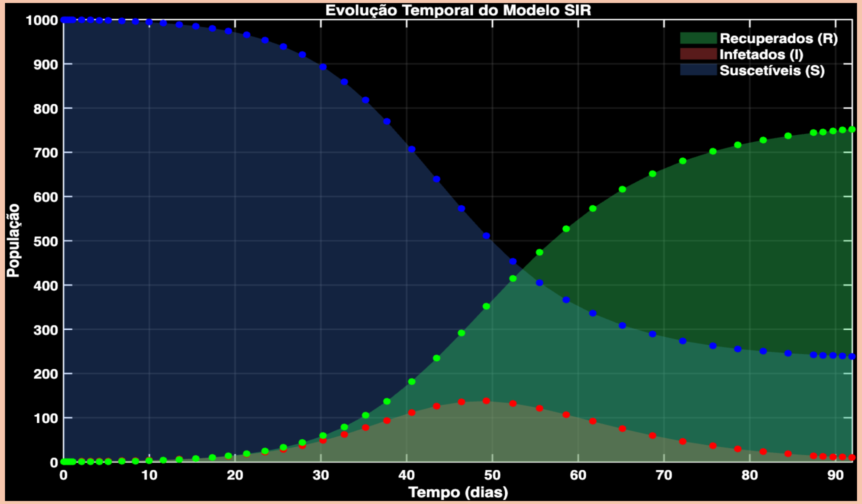

Fig.2- SIR Model Plot made in MATLAB [4]

O gráfico representa a evolução temporal das três variáveis do modelo epidemiológico SIR, simuladas para uma população de 1001 indivíduos.

Com esta simulação podemos retirar as seguintes conclusões:

- A epidemia inicia-se de forma lenta, acelera entre os dias 20 e 50 e decresce até o número de infetados descer abaixo de 10, o que ocorre por volta de t ≈ 90 dias.
- O número total S + I + R = 1001 mantém-se constante ao longo do tempo, validando a conservação da população.
- No final, a maioria da população torna-se imune (R), enquanto que uma fração permanece suscetível.

Conclusões

- A simulação numérica do modelo SIR, implementada em *MATLAB* com o método de *Runge–Kutta*, demonstrou o crescimento inicial exponencial da infeção, seguido de declínio até à extinção.
- O modelo confirma a importância da taxa de recuperação e da taxa de infeção no controlo epidémico e evidencia o valor dos métodos numéricos na modelação de fenómenos reais em engenharia e ciências aplicadas.

Bibliografia

[1] Yadav, R. S. (2020). Mathematical Modeling and Simulation of SIR Model for COVID-2019 Epidemic Outbreak: A Case Study of India. MedRxiv (Cold Spring Harbor Laboratory). https://doi.org/10.1101/2020.05.15.20103077 Fig.1

[2] [4] ODE with Single Solution Component. (2025). Mathworks.com. https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html

[3] A contribution to the mathematical theory of epidemics. (1927). Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 115(772), 700–721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118