UNIVERSIDADE DE AVEIRO
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA, TELECOMUNICAÇÕES E INFORMÁTICA

MPEI - Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática (2015/2016) **PL 02**

Palavras chave: Variáveis Aleatórias: função de distribuição acumulada, função de probabilidade de massa e função densidade de probabilidade, Distribuições (Binomial, Poisson, Uniforme, Normal).

Nota: Estas informações não pretendem ser soluções completas. Se as suas resoluções não estiverem conformes com os resultados deste documento não deixe de contactar o seu docente da TP ou o regente da cadeira, preferencialmente por email.

1. Ex. 1

   (a)

```
pX=ones(1,6)/6
x=1:6
subplot(121)
stem(x,pX)
axis([-0.5 8 0 1/6+.05])
title('pX(x)')
xlabel('xi')
ylabel('pX(x)')
```

   (b)

```
pX2=[ 0 pX  0 ]
x=0:7
FX=cumsum(pX2)
subplot(122)
stairs(x,FX)
axis([-0.5 8 0 1.1])
title('FX(x)')
xlabel('x')
ylabel('FX(x)')
```

2. Ex.2

   a.

   $S = nota_1, nota_2, ..., nota_{100}$

   Como temos 100 acontecimentos elementares equiprováveis $P(nota_i) = 1/100$

   b.

   $S_X = 5, 50, 100$

   $P(X = 5) = 90/100$, $P(X = 50) = 9/100$, $P(X = 100) = 1/100$

Sugestões de simulação:

```
% método 1 - listar exaustivamente (teoria clássica)
X = [ 5*ones(1,90) 50*ones(1,9) 100 ];
pX= [sum(X==5) sum(X==50)  sum(X==100)]/100

% método 2 - usar def. frequencista
N=1e6;
X = b( 1+floor(length(b)*rand(1,N)) );
pX= [sum(X==5) sum(X==50)  sum(X==100)]/N
```

c.

```
X=[5, 50, 100]
pX=[90 9 1]/100
stem(x,pX)
```

3. Ex. 3

   (a) Uma das possibilidades é usar simulação para obter as estimativas (frequencistas) da probabilidade. Os resultados obtidos para $N = 1E6$ devem ser próximos dos seguintes:

x_i	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	0.0626	0.2491	0.3757	0.2500	0.0625

   (b) Usando os valores anteriores temos: Média = $E(X)$ = $\sum x_i p_X(x_i) = 2.0001$
   var(X) = $E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 2^2 = 1$

   (c) Trata-se de uma Binomial com parâmetros n e p , com função de probabilidade:
   $p_X(k) = C_k^n \times p^k \times (1-p)^{n-k}$
   Nota: Para uma Binomial $E(X) = np$. No caso presente obtemos $E(X) = 2$ confirmando o valor da alínea anterior
   Quanto à variância, igual a np(1-p), temos 4x1/2(1/4) = 1 como no ponto anterior

   (d) Da aplicação da fórmula de $p_X(k)$ para os vários valores de k obtemos

$x_i = k$	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	0.0625	0.2500	0.3750	0.2500	0.0625

   (e) i. P=0.6875 (= 0.3750 + 0.2500 + 0.0625)
   ii. P=0.3125 (= 0.0625 + 0.2500)
   iii. Considerando que é entre 1 e 3 coroas inclusivé temos P= 0.8750
   Caso se considerasse que o 1 e o 3 não são de incluir teríamos P=0.3750

4. Pode resolver-se usando a fórmula da Binomial ou simulando. Os resultados devem ser similares.

   Aplicando a fórmula (com n=5 e p=0.3) para os vários valores de k (entre 0 e n) obtém-se:

$x_i = k$	0	1	2	3	4	5
$p_X(x)$	0.1681	0.3601	0.3087	0.1323	0.0283	0.0024

   Em Matlab obtem-se facilmente estes valores e o gráfico representativo da distribuição de probabilidades usando:

```
n=5; p=3/10;
for k=0:5
    pX(k+1) = factorial(n)/(factorial(n-k)* factorial(k))*p.^k*(1-p).^(n-k)
end

stem(0:5, pX)
axis([-0.5 5.5 0 0.5])
```

(a) Usando os valores anteriores temos: P=0.8369 (= 0.1681 + 0.3601 + 0.3087)

5. Ver resolução que integra o material das aulas TPs disponibilizado

6. Aplicando a distribuição Binomial obtém-se, usando p=1/1000 e n=8000 e k=7: 0.1396

   Pela fórmula de Poisson, com $\lambda = np = 8$, obtemos: 0.1396

   Lei de Poisson: $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

7. a. P=3.0590e-007

   b. P=0.8815

8. Fazendo (em Matlab) x=1:4 e fx=(x+5)/30 seguido de stem(x,fx)

   obtém-se o vector fx e a representação gráfica

   Para fx ser uma distribuição de probabilidade a soma dos seus valores tem de ser 1 e todos os elementos $>= 0$ e $<= 1$. Estas condições verificam-se facilmente em Matlab

   sum(fx)

   $fx >= 0 \& fx <= 1$

9. Probabilidade de que exista pelo menos um erro numa determinada página = 0.6321

10. (a) 0.300

    (b) 0.300

    (c) 0.5000

    Exemplo de Comprovação dos resultados através de simulação em Matlab:

```
N=1e6;
X= rand(1, N)*10 ; %%

cf1= sum(X<3);
p1sim=cf1/N;
fprintf(1, 'P(X<3) =   %.3f   (simul=%.4f)\n',p1,p1sim);
```

    Produz :

```
P(X<3) = 0.300 (simul=0.3004)
```

11. (a) P= 0.6826

    Ou seja mais de 0.68 de probabilidade (68 %) de termos uma classificação no intervalo compreendido entre a média menos 1 desvio padrão e a média mais 1 desvio padrão para uma variável com distribuição Normal

    $P(\text{média} - 1 \times \text{desvio padrão} < X < \text{média} + 1 \times \text{desvio padrão}) \approx 0.68$

    (b) P= 0.9547

    Ou seja mais de 0.95 de probabilidade (95 %) de termos uma classificação no intervalo compreendido entre a média menos dois desvios padrão e a média mais dois desvios padrão para uma variável com distribuição Normal

    $P(\text{média} - 2 \times \text{desvio padrão} < X < \text{média} + 2 \times \text{desvio padrão}) \approx 0.95$

    (c) P=0.9774

AT, 5 Outubro 2015