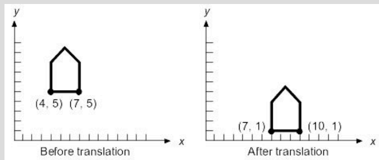
Transformações Geométricas

2D

– Translação



$$\begin{cases} x_T = x + T_x \\ y_T = y + T_y \end{cases}$$

Vértices: (4,5) e (7,5)

$T_x = 3$ $T_y = -4$

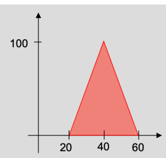
O par de translação denomina-se por *vector de translação.* A cada vértice é aplicado um deslocamento **T**:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Na forma de produto matricial:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

– Escalamento

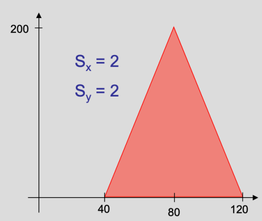


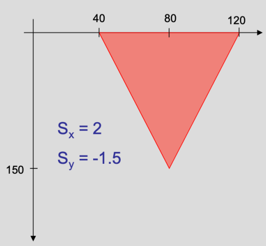
$$\begin{cases} x_S = x * S_x \\ y_S = y * S_y \end{cases}$$

Em relação à origem.

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

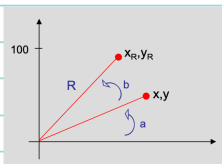




Factor de escala:

- >1 aumenta o objecto
- <1 reduz o objecto
- $s_x = s_y$ factor de escala uniforme → não distorce o objecto

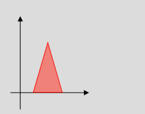
– Rotação



$$\begin{cases} x = R.\cos(a) \\ y = R.\mathrm{sen}(a) \end{cases}$$

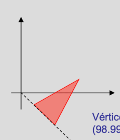
Em torno da origem.

$$\begin{cases} x_R = R.\cos(a+b) = R.\cos(a).\cos(b) - R.\mathrm{sen}(a).\mathrm{sen}(b) = x.\cos(b) - y.\mathrm{sen}(b) \\ y_R = R.\mathrm{sen}(a+b) = R.\mathrm{sen}(b).\cos(a) + R.\mathrm{sen}(a).\cos(b) = x.\mathrm{sen}(b) + y.\cos(b) \end{cases}$$



Vértices: (20,0), (60,0), (40,100)

Rotação de -45º



Vértices: (14.14, -14.14), (42.43, -42.43), (98.99, 42.43)

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_R \\ y_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(b) & -\mathrm{sen}(b) \\ \mathrm{sen}(b) & \cos(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nota: *b* positivo no sentido contrário ao movimento dos ponteiros do relógio.

Coordenadas Homogéneas

Matriz de Rotação

$$\begin{bmatrix} \cos(a) & -sen(a) & 0 \\ sen(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(a)$$

Matriz de Translação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = T(T_x, T_y)$$

Matriz de Escalamento

$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = S(s_x, s_y)$$

Em coordenadas homogéneas um objecto de *n* dimensões é representado num espaço a *n+1* dimensões.

(x,y) → (x.h, y.h, h)

2D 3D

Consideramos h=1

As transformações são sempre aplicadas de forma inversa!!

Fazer as transformações na Origem!

3D

Extensão dos Métodos 2D incluindo agora a coordenada Z.

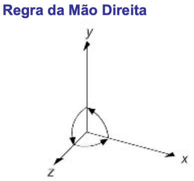
Transformações:

- Translação
- Escalamento
- Rotação

Eixo de rotação	Direcção da rotação positiva
x	y para z
y	z para x
Z	x para y

Sistema de coordenadas 3D:

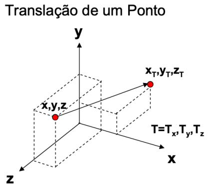
Regra da Mão Direita



(out of page)

- Translação

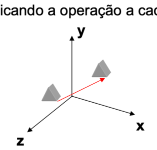
Translação de um Ponto



$$\begin{cases} x_t = x + T_x \\ y_t = y + T_y \\ z_t = z + T_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_T \\ y_T \\ z_T \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

A Translação de um Objecto é efectuada aplicando a operação a cada um dos seus vértices.

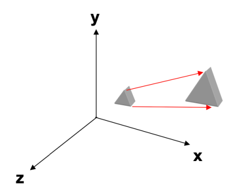


- Escalamento

Em relação à origem:

$$\begin{cases} x_s = x.s_x \\ y_s = y.s_y \\ z_s = z.s_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

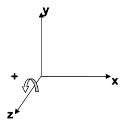


Em relação a um ponto arbitrário é necessário colocar aqui $(1-S_{x/y/z}) \times x/y/z_p$, sendo p um ponto de referência.

– Rotação

- Em 2D o eixo de rotação é perpendicular ao plano XY
- Em 3D o eixo de rotação poderá ser
  - x, y ou z
  - Um eixo colocado arbitrariamente no espaço

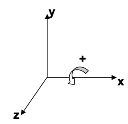
Em torno do eixo z → z constante



$$\begin{cases} x_{Rz} = x\cos(a) - y\sin(a) \\ y_{Rz} = x\sin(a) + y\cos(a) \\ z_{Rz} = z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Rz} \\ y_{Rz} \\ z_{Rz} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) & 0 & 0 \\ \sin(a) & \cos(a) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

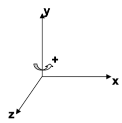
Em torno do eixo x → x constante



$$\begin{cases} x_{Rx} = x \\ y_{Rx} = y\cos(a) - z\sin(a) \\ z_{Rx} = y\sin(a) + z\cos(a) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_{Rx} \\ y_{Rx} \\ z_{Rx} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(a) & -\sin(a) & 0 \\ 0 & \sin(a) & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno do eixo y → y constante



$$\begin{bmatrix} x_{Ry} \\ y_{Ry} \\ z_{Ry} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(a) & 0 & \sin(a) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(a) & 0 & \cos(a) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$