

Curvas e Superfícies

Malha Poligonal

Características da malha poligonal:

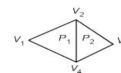
- Uma aresta liga 2 vértices.
- Um polígono é definido por uma sequência fechada de arestas.
- Uma aresta é ligada a um ou dois polígonos (adjacentes).
- Um vértice é partilhado pelo menos por 2 arestas.
- Todas as arestas fazem parte de algum polígono.

A estrutura de dados para **representar a malha poligonal** pode ter várias configurações, que são avaliadas pelo **espaço de memória** e **tempo de processamento** necessário para obter resposta, por exemplo, a:

- Obter todas as arestas que se unem num dado vértice.
- Determinar os polígonos que partilham uma aresta ou um vértice.
- Determinar os vértices ligados a uma aresta.
- Determinar as arestas de um polígono.
- Representar graficamente a malha.
- Identificar erros na representação, como falta de uma aresta, vértice ou polígono.

2. Representação por Apontadores para Lista de Vértices: cada polígono é representado por uma lista de índices (ou apontadores) para uma lista de vértices.

Lista de Vértices $V = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)\}$



$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = \{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_4, y_4, z_4)\}$

$P_1 = (1, 2, 4)$

$P_2 = (4, 2, 3)$

Vantagens:

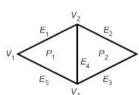
- Cada vértice da malha poligonal é guardado uma única vez na memória.
- A coordenada de um vértice é facilmente alterada.

Desvantagens:

- Difícil obter os polígonos que partilham uma dada aresta.
- As arestas continuam a ser usadas (desenhadas) mais do que uma vez.

3. Representação por Apontadores para Lista de Arestas: cada polígono é representado por uma lista de apontadores para uma lista de arestas, na qual cada aresta aparece uma única vez. Por sua vez, cada aresta aponta para os dois vértices que a definem e guarda também quais os polígonos a que pertence.

Um polígono é representado por $P = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ e uma aresta como $E = (V_1, V_2, P_1, P_2)$. Se a aresta pertence apenas a um polígono então P_2 é **null**.



$V = (V_1, V_2, V_3, V_4) = \{(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_4, y_4, z_4)\}$

$E_1 = (V_1, V_2, P_1, P_2)$

$E_2 = (V_2, V_3, P_2, P_3)$

$E_3 = (V_3, V_4, P_3, P_4)$

$E_4 = (V_4, V_1, P_4, P_1)$

$P_1 = (E_1, E_4, E_3)$

$P_2 = (E_1, E_2, E_4)$

Curvas Cúbicas Paramétricas

Forma geral de representação da curva:

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x$$

$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y$$

$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \quad 0 \leq t \leq 1$$

Sendo: $T = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = T.C$$

Tipos de Continuidade

Tipos de Continuidade:

- G⁰** – continuidade geométrica zero \rightarrow as curvas só se juntam num ponto.
- G¹** – continuidade geométrica um \rightarrow a direcção dos vectores tangentes é igual.
- C¹** – continuidade paramétrica 1 \rightarrow as tangentes no ponto de junção têm a mesma direcção e amplitude (primeira derivada igual).
- Cⁿ** – continuidade paramétrica n \rightarrow as curvas têm no ponto de junção todas as derivadas iguais até à ordem n.

$C \rightarrow$ continuidade paramétrica

$G \rightarrow$ continuidade geométrica

Tipos de Curvas

1. Curvas de Hermite

- Continuidade **G¹** nos pontos de junção
- Vector geométrico:
 - 2 pontos extremos e
 - Os vectores tangentes nesses pontos

$$P_1 = P_1$$

$$P_4 = P_4$$

2. Curvas de Bézier

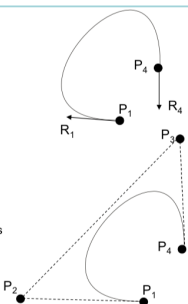
- Continuidade **G¹** nos pontos de junção
- Vector geométrico:
 - 2 pontos extremos e
 - 2 pontos que controlam os vectores tangentes nesses extremos

$$R_1 = 3(P_2 - P_1)$$

$$R_2 = 3(P_4 - P_3)$$

3. Curvas Splines

- Família de curvas muito alargada
- Maior controlo da continuidade nos pontos de junção (Continuidade **C¹** e **C²**)



Notação Comum

$$Q(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{bmatrix} = T.C$$

$$Q(t) = T.M.G$$

$$\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

Matriz T

Matriz de Base

Vetor Geométrico

Matriz de Base: Caracteriza o tipo de curva (Hermite, Bezier, etc)

Vetor Geométrico: Caracteriza a geometria de uma dada curva.

$$Q(t) = T.M.G$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix}$$

$$Q(t) = (t^3 m_{11} + t^2 m_{21} + t m_{31} + m_{41}) G_1 + (t^3 m_{12} + t^2 m_{22} + t m_{32} + m_{42}) G_2 + (t^3 m_{13} + t^2 m_{23} + t m_{33} + m_{43}) G_3 + (t^3 m_{14} + t^2 m_{24} + t m_{34} + m_{44}) G_4$$

Conclusão 1: $Q(t)$ é uma soma pesada dos elementos do vector geométrico

Conclusão 2: Os pesos são polinomiais cúbicos em $t \rightarrow$ **FUNÇÕES DE MISTURA**

(Blending functions)

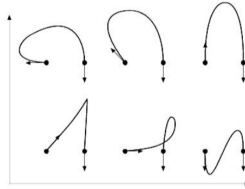
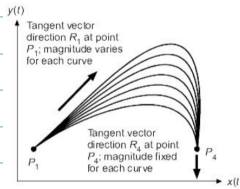
$$Q(t) = T.C = T.M.G = B.G$$

Curvas de Hermite

- P_1 e P_4 fixos
- R_1 fixo
- R_4 varia em amplitude

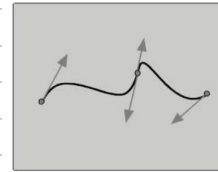
Exemplos

- P_1 e P_4 fixos
- R_1 fixo
- R_4 varia em direcção



Continuidade em Curvas de Hermite

- Os pontos extremos podem ser reposicionados
- Os vectores tangentes podem ser alterados puxando as setas
- Os vectores tangentes são forçados a serem colineares (continuidade G^1) e R_4 é visualizado em sentido contrário (maior visibilidade)
- É comum dispor de comandos para forçar continuidade G^0 , G^1 ou C^1



Continuidade na junção:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} P_2 \\ P_3 \\ K \cdot R_2 \\ R_5 \end{bmatrix}$$

- $K > 0 \rightarrow G^1$
- $K = 1 \rightarrow C^1$

verificar a igualdade do P_4 da 1ª curva com o P_1 da 2ª e verificar se é igual a 1 para C^1 ou se apenas > 0 para G^1

Curvas de Bézier

Vector Geométrico:

$$G_B = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Para uma mesma curva, demonstra-se que, comparando com G_H :

$$R_1 = Q'(0) = 3 \cdot (P_2 - P_1)$$

$$R_4 = Q'(1) = 3 \cdot (P_4 - P_3)$$

$$G_H = M_{HB} \cdot G_B$$

$$G_H = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix}$$

Convex Hull

Continuidade em Curvas de Bézier

Junção de curvas de Bézier

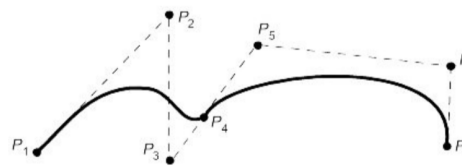
Continuidade G^1 :

$$P_4 - P_3 = K \cdot (P_5 - P_4) \quad \text{com } K > 0$$

i.e. P_3, P_4 e P_5 devem ser colineares

Continuidade C^1 :

$$P_4 - P_3 = K \cdot (P_5 - P_4) \quad \text{restringindo } K = 1$$



Seja $P_4 - P_3$ repetida à curva e $P_5 - P_4$ os pontos P_2 e P_1 da 2ª curva.

Desenho de Curvas

Dois algoritmos:

1. Avaliação de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ para valores incrementais de t entre 0 e 1.
2. Subdivisão da curva: Algoritmo de Casteljau

1. Avaliação de $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$

É possível reduzir o número de operações de 11 multiplicações e 10 adições para 9 e 10, respectivamente.

$$f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d = ((at + b) \cdot t + c) \cdot t + d$$

2. Algoritmo de Casteljau

Efectua a subdivisão recursiva da curva, parando apenas quando a curva em questão é suficientemente "plana" para poder ser aproximada por um segmento de recta.

Algoritmo eficiente: requer apenas 6 shifts e 6 adições em cada divisão.

Fazer $P_4 - P_3 = K(P_5 - P_4)$

Mesmas condições de Hermite:

- Se $K = 1$, continuidade C^1 ;
- Se $K > 0 \wedge K \neq 1$, continuidade G^1 .

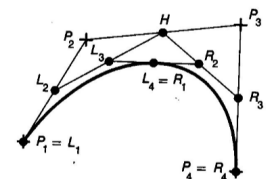
Algoritmo de Casteljau - Uso de Convex Hull

Crítérios possíveis de paragem:

- A curva em questão é suficientemente "plana" para poder ser aproximada pelo seu convex hull.
- Os 4 pontos de controlo estão no mesmo pixel.

$$L_2 = (P_1 + P_2)/2, \quad H = (P_2 + P_3)/2, \quad L_3 = (L_2 + H)/2, \quad R_3 = (P_3 + P_4)/2$$

$$R_2 = (H + R_3)/2, \quad L_4 = R_1 = (L_3 + R_2)/2$$



Superfícies Cúbicas

As superfícies cúbicas são uma generalização das curvas cúbicas. A equação da superfície é obtida a partir da equação da curva:

$$Q(t) = T \cdot M \cdot G, \quad \text{sendo } G \text{ constante.}$$

$$\text{Mudar para a variável } s: Q(s) = S \cdot M \cdot G$$

Fazendo variar os pontos do vector Geométrico em 3D ao longo de um percurso parametrizado por t obtém-se:

$$Q(s, t) = S \cdot M \cdot G(t) = S \cdot M \cdot \begin{bmatrix} G_1(t) \\ G_2(t) \\ G_3(t) \\ G_4(t) \end{bmatrix}$$

A matriz geométrica é composta por 16 pontos.

Superfície de Hermite

Para a coordenada x :

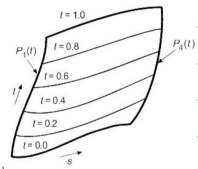
$$x(s, t) = S \cdot M_H \cdot G_{Hx}(t) = S \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ P_4(t) \end{bmatrix}$$

$$P_{1x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \\ g_{14} \end{bmatrix}$$

$$P_{4x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} g_{21} \\ g_{22} \\ g_{23} \\ g_{24} \end{bmatrix}$$

$$R_{1x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} g_{31} \\ g_{32} \\ g_{33} \\ g_{34} \end{bmatrix}$$

$$R_{4x}(t) = T \cdot M_H \cdot \begin{bmatrix} g_{41} \\ g_{42} \\ g_{43} \\ g_{44} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} P_1(t) \\ P_4(t) \\ R_1(t) \\ R_4(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}}_{G_{Hx}} \cdot M_H^T \cdot T^T = G_{Hx} \cdot M_H^T \cdot T^T$$

Conclui-se que: $x(s, t) = S \cdot M_H \cdot G_{Hx} \cdot M_H^T \cdot T^T$

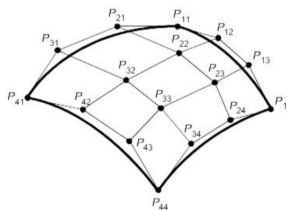
Superfície de Bézier

As equações para a superfície de Bézier podem ser obtidas da mesma forma que as de Hermite, resultando:

$$x(s, t) = S \cdot M_B \cdot G_{Bx} \cdot M_B^T \cdot T^T$$

$$y(s, t) = S \cdot M_B \cdot G_{By} \cdot M_B^T \cdot T^T$$

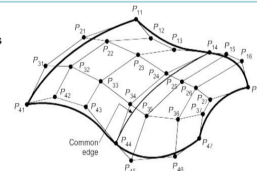
$$z(s, t) = S \cdot M_B \cdot G_{Bz} \cdot M_B^T \cdot T^T$$



Continuidade C^0 e G^0 é obtida fazendo coincidir os quatro pontos de controlo de fronteira: $P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{44}$

Para obter G^1 devem ser colineares:

$$\begin{aligned} P_{13}, P_{14} &\in P_{15} \\ P_{23}, P_{24} &\in P_{25} \\ P_{33}, P_{34} &\in P_{35} \\ P_{43}, P_{44} &\in P_{45} \end{aligned}$$



A matriz geométrica tem 16 pontos de controlo.

Exercícios

Curvas de Hermite

$$\text{Verifica } R_4 = k R_1$$

3. Seja a sucessão $C1, C2, C3, C4$ de curvas de Hermite representadas pelos vectores geométricos juntos. Complete estes com os valores em falta, de forma a obter continuidade do tipo C^1 em todos os pontos de junção e justifique os casos em que isso não seja possível, de acordo com os dados fornecidos.

$$C1 = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 3,3 \\ 0,2 \\ 2,0 \end{bmatrix}$$

$$C2 = \begin{bmatrix} 6,6 \\ 3,6 \\ 0,1 \\ 0,-1 \end{bmatrix}$$

$$C3 = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 6,3 \\ 0,1 \\ 2,0 \end{bmatrix}$$

X não há continuidade porque os pontos de junção não coincidem.

$$k \neq 1$$

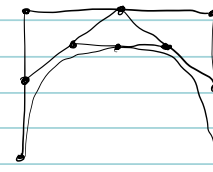
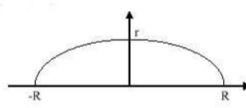
log continuidade G_1 em vez de C_1 .

$$k=1$$

$$R_{4,1} = k R_{1,2}$$

$$\Rightarrow R_{4,1} = 2,0$$

$$C1 = \begin{bmatrix} 0,0 \\ 3,3 \\ 0,2 \\ 2,0 \end{bmatrix}$$



6. Determine as posições dos quatro pontos de controlo de uma curva de Bézier equivalente à elipse da figura junta:

a)- Analiticamente.

b)- Usando métodos baseados no algoritmo de Casteljou.