Conteúdo

Capítulo 3

Transformada de Laplace

3.1 Definição da transformada de Laplace

A **transformada de Laplace** de uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ é a função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

para os valores de $s \in \mathbb{R}$ onde o integral converge.

Exemplo 3.1.1. Determinar a transformada de Laplace da função $f(t) = t$.
Calcula-se o integral impróprio de 1ª espécie

$$\int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-st}dt$$

Usando a integração por partes, considerando $u' = e^{-st}$ e $v = t$ (consequentemente, $u = -\frac{1}{s}e^{-st}$ e $v' = 1$) vem

$$\int_0^x te^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t\right]_0^x - \int_0^x -\frac{1}{s}e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t\right]_0^x + \frac{1}{s}\int_0^x e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\,t\right]_0^x - \left[\frac{1}{s^2}e^{-st}\right]_0^x$$

Substituindo agora t pelos valores 0 e x vem,

$$\int_0^x te^{-st}dt = \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x + \frac{1}{s}e^0\,0\right) - \left(\frac{1}{s^2}e^{-sx} - \frac{1}{s^2}e^0\right) = -\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}$$

Tomando agora o limite,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x te^{-st}dt = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx} + \frac{1}{s^2}\right) = \frac{1}{s^2},\ s > 0$$

Note-se que se $s > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\right) = -\frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \frac{1}{s}}{e^{sx}} = 0(^1)$$

Se $s < 0$, $-sx$ tende para $+\infty$ e portanto

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{s}e^{-sx}\,x - \frac{1}{s^2}e^{-sx}\right) = -\frac{1}{s}\lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{s}\right)e^{-sx} = +\infty$$

Por último, se $s = 0$

$$\int_0^{+\infty} te^{-st}dt = \int_0^{+\infty} te^0dt = \int_0^{+\infty} tdt$$

Este integral é divergente, já que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x tdt = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$$

[1] Podem usar a regra de Cauchy para levantar a indeterminação

Se $s \leq 0$ o integral impróprio é divergente. Se $s > 0$ o integral impróprio é convergente e o seu valor é $\dfrac{1}{s^2}$. Podemos então concluir que a transformada de Laplace de $f(t) = t$ é

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{1}{s^2},\ s > 0$$

Exercício 3.1.1 Calcule as transformadas de Laplace das seguintes funções, indicando os respetivos domínios.

1. $f(t) = 1$.
2. $f(t) = e^t$.

3.2 Existência da Transformada de Laplace

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que

1. f é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$; [2]
2. f é de **ordem exponencial à direita**, isto é, existem $a \in \mathbb{R}$, $M > 0$ e $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M e^{at}, \quad \forall t \geq T.$$

Então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > a$.

Exemplo 3.2.1. Vamos mostrar que a transformada de Laplace da função

$$f(x) = \begin{cases} 8 & \text{se} \quad x \geq 1 \\ -3\,x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

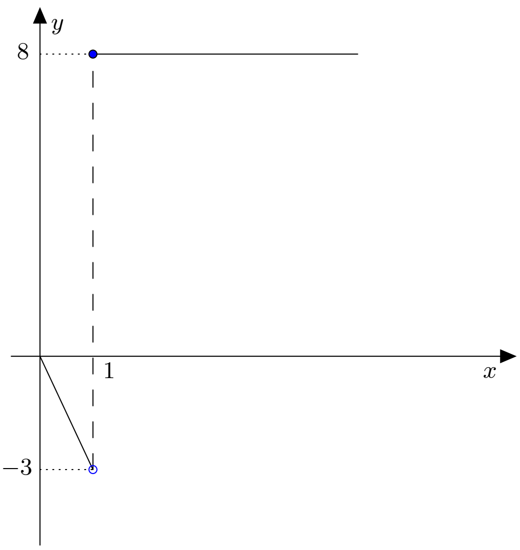
é

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{(11\,s - 3\,e^s + 3)e^{-s}}{s^2}$$

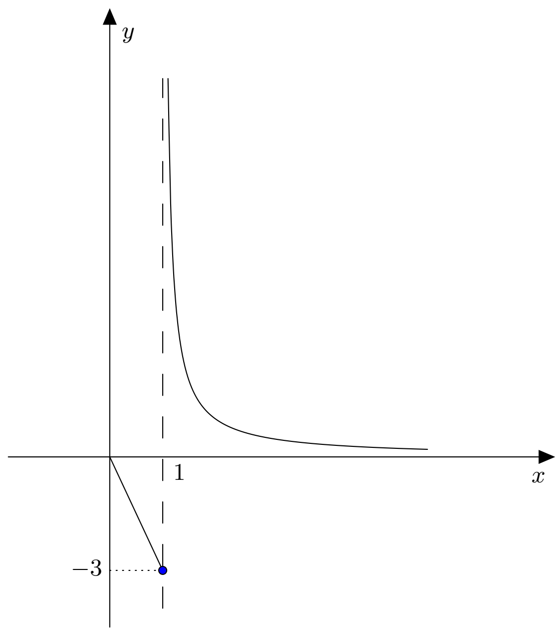
Note-se que f é seccionalmente contínua (apenas apresenta um ponto de descontinuidade em $x = 1$ e é limitada em qualquer intervalo $[0, b]$, $b > 0$) e ainda que $f(x) \leq 8$, $\forall x \geq 0$.
Assim, tomando $M = 8$ e $a = 0$, para qualquer $T > 0$ se verifica a desigualdade

$$|f(x)| \leq M e^{ax}, \quad \forall x \geq T$$

[2] Uma função $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ diz-se seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$ se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é um conjunto numerável e a função é limitada em qualquer intervalo $[0, b]$, $b > 0$.



seccionalmente contínua



não seccionalmente contínua

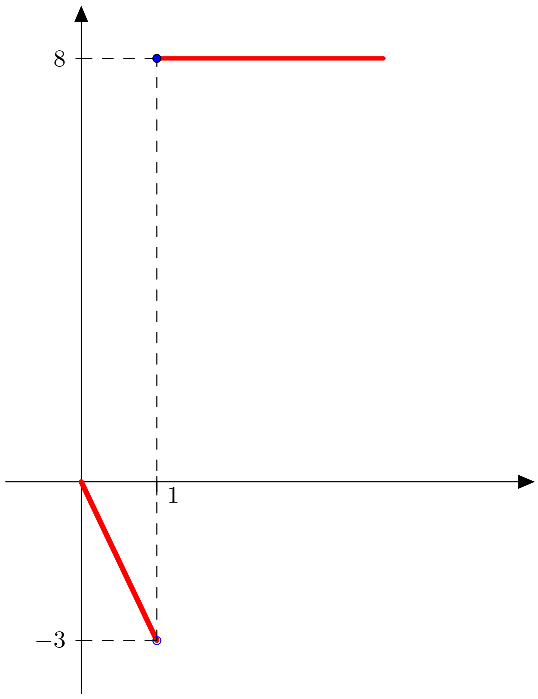


Figura 3.1: Gráfico da função f.

portanto, f admite transformada de Laplace.
Dada uma função f definida em $I = [0, +\infty[$, a sua transformada de Laplace é uma função de s, $F(s)$, dada pelo integral impróprio

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

para os valores de s para os quais o integral é convergente.
Como f é uma função definida por ramos, vem

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)\, dx = \int_0^1 -3\, xe^{-sx}\, dx + \int_1^{+\infty} 8\, e^{-sx}\, dx$$

O primeiro integral é dado por

$$\int_0^1 -3\, xe^{-sx}\, dx = \left[\frac{3\,(sx+1)e^{-sx}}{s^2}\right]_0^1 = \frac{3\,(s+1)e^{-s}}{s^2} - \frac{3}{s^2}$$

A convergência do segundo integral pode ser estudada pela existência do limite

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t 8\, e^{-sx}\, dx = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{8\, e^{-sx}}{s}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{8\, e^{-st}}{s} + \frac{8\, e^{-s}}{s}\right]$$

Este limite só existe em $\mathbb{R}$ se $s > 0$ e neste caso

$$\lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{8\, e^{-st}}{s} + \frac{8\, e^{-s}}{s}\right] = \frac{8\, e^{-s}}{s}$$

Se $s < 0$ o limite é $+\infty$. Observe-se que se $s = 0$ temos o integral

$$\int_1^{+\infty} 8\, dx$$

que é divergente (para $+\infty$).
Assim, para $s > 0$ temos

$$F(s) = \frac{11\, e^{-s}}{s} + \frac{3\, e^{-s}}{s^2} - \frac{3}{s^2} = \frac{(11\, s - 3\, e^{s} + 3)e^{-s}}{s^2}$$

Exercício 3.2.1 Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x \geq 5 \\ 9\,x & \text{se} \quad 0 \leq x < 5 \end{cases}$$

Justifique que a função f admite transformada de Laplace e mostre que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = -\frac{46\,e^{-5\,s}}{s} - \frac{9\,e^{-5\,s}}{s^2} + \frac{9}{s^2}$$

para todos os valores de $s \in \mathbb{R}^+$.

3.3 Linearidade da transformada de Laplace

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e duas funções $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Suponhamos que existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s), \text{ para } s > s_f \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{g\}(s), \text{ para } s > s_g$$

Então:

1. $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \; s > \max\{s_f, s_g\}$
2. $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \; s > s_f.$

Exemplo 3.3.1. A transformada de $f(t) = 5 + 3t$ é dada por

$$\mathcal{L}\{5 + 3t\}(s) = 5\mathcal{L}\{1\}(s) + 3\mathcal{L}\{t\}(s) = \frac{5}{s} + \frac{3}{s^2}$$

com $s > 0$.

3.4 Transformadas de Laplace fundamentais

1. $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \dfrac{1}{s - a}, \; s > a, a \in \mathbb{R}$
2. $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \dfrac{s}{s^2 + a^2}, \; s > 0, a \in \mathbb{R}$
3. $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\}(s) = \dfrac{a}{s^2 + a^2}, \; s > 0, a \in \mathbb{R}$
4. $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \; s > 0, n \in \mathbb{N}_0$
5. $\mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{s}{s^2 - a^2}, \; s > |a|, a \in \mathbb{R}$
6. $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\}(s) = \mathcal{L}\{\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\}(s) = \dfrac{a}{s^2 - a^2}, \; s > |a|, a \in \mathbb{R}$

Exercício 3.4.1 Determine a transformada de Laplace das funções, indicando os respetivos domínios:

1. $f(t) = t^2 + \cos(3t) + \pi$
2. $g(t) = 3e^{-2t} + \text{sen}\left(\dfrac{t}{6}\right) + \cosh(4t)$
3. $h(t) = t^{10} + \dfrac{e^t}{3} + \cos^2(t)$
4. $j(t) = \text{senh}(\sqrt{2}t) + \left(\frac{t}{2}\right)^2$

3.5 Deslocamento na transformada

Sejam $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda.$$

Exemplo 3.5.1. Para calcular a transformada de Laplace da função $g(t) = e^{-3t}\,\mathrm{sen}\,(2t)$ começamos por determinar a transformada

$$\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,(2t)\}(s) = \frac{2}{s^2 + 4},\ s > 0$$

Aplicamos agora a propriedade acima referida

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\,\mathrm{sen}\,(2t)\}(s) = \frac{2}{(s - (-3))^2 + 4} = \frac{2}{(s + 3)^2 + 4},\ s > -3$$

Exercício 3.5.1 Calcule as transformadas de Laplace de:

1. $f(t) = e^{2t} t^2$
2. $h(t) = e^{-t}\cosh(4t)$

3.6 Transformada do deslocamento

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e nula em $\mathbb{R}^-$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \quad \mathcal{L}\{f(t - a)\}(s) = e^{-as} F(s), \quad s > s_f$$

Demonstração. A transformada $\mathcal{L}\{f(t - a)\}(s)$ é dada por

$$\mathcal{L}\{f(t - a)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t - a) dt = \int_{-a}^{+\infty} e^{-s(t_1 + a)} f(t_1) dt_1$$

fazendo a mudança de variável $t = t_1 + a$. Aplicando agora as propriedades do integral, temos

$$\int_{-a}^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 = \int_{-a}^{0} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 + \int_0^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1$$

O primeiro integral é nulo já que $f(t) = 0$ em $\mathbb{R}^-$. Então,

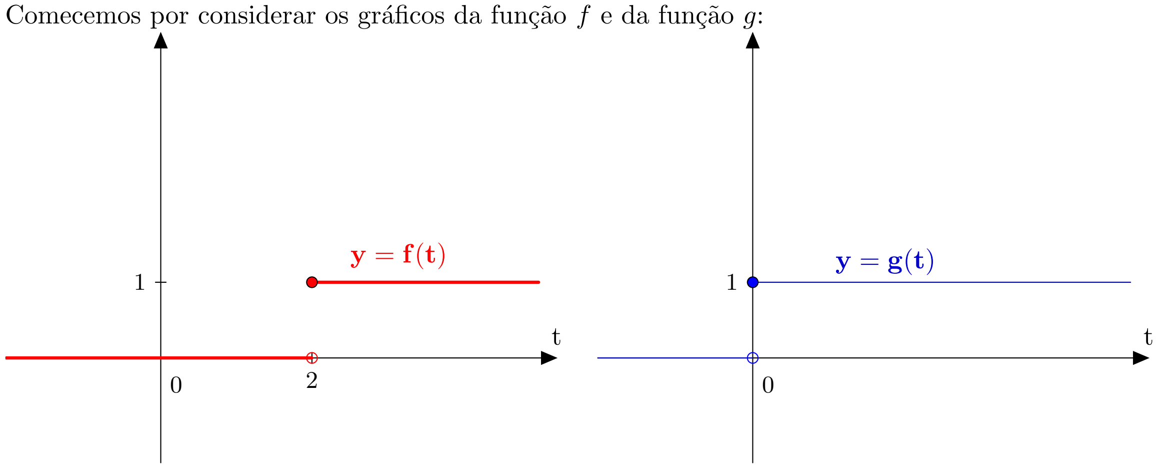
$$\int_{-a}^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 = \int_0^{+\infty} e^{-s(t_1+a)} f(t_1) dt_1 = e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-st_1} f(t_1) dt_1 = e^{-sa} \mathcal{L}\{f(t_1)\}(s) = e^{-sa} F(s).$$

□

Exercício resolvido 3.6.1. Use o resultado anterior para calcular a seguinte transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2 \\ 1 & \text{se } t \geq 2 \end{cases}$$

Resolução:
Comecemos por considerar os gráficos da função f e da função g:



onde g é dada por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Observe-se que $f(t) = g(t-2)$. Como a transformada de Laplace de g é

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s},\ s > 0$$

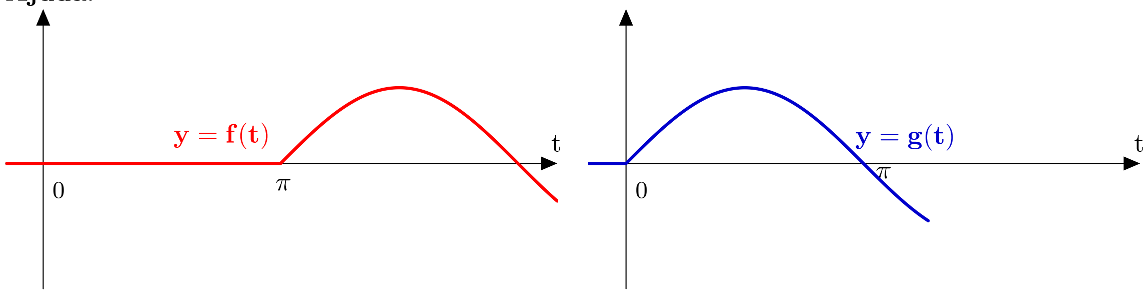
resulta que a transformada de Laplace de f é dada por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = e^{-2s}\frac{1}{s},\ s > 0$$

Exercício 3.6.1 Use o resultado anterior para calcular a transformada de Laplace:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < \pi \\ \text{sen}(t-\pi) & \text{se } t \geq \pi \end{cases}$$

Ajuda:



3.7 Transformada da contração/expansão de uma função

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$ e $a \in \mathbb{R}^+$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > as_f$$

Exemplo 3.7.1. Sabendo que a transformada de $f(t) = \cos t$ é $\mathcal{L}\{\cos(t)\}(s) = \dfrac{s}{s^2+1}$, podemos determinar a transformada de $\mathcal{L}\{\cos(4t)\}(s)$, onde $a = 4$. Assim,

$$\mathcal{L}\{\cos(4t)\}(s) = \frac{1}{4}\frac{\frac{s}{4}}{\frac{s^2}{16}+1} = \frac{s}{s^2+16}$$

Exercício 3.7.1 Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

1. $n(t) = \frac{t^2}{2}$
2. $p(t) = e^{3t}$

3.8 Derivada da transformada

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, integrável em $[0, b]$, para qualquer $b > 0$.
Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f.$$

Exemplo 3.8.1. Para calcular $\mathcal{L}\{t^2\cos(t)\}$, consideramos a transformada $\mathcal{L}\{\cos(t)\} = \dfrac{s}{s^2+1}$; a transformada de $t^2\cos(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}\{t^2\cos(t)\} = (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'' = \left(\frac{-s^2+1}{(s^2+1)^2}\right)' = \frac{2s^3-6s}{(s^2+1)^3}$$

Exercício 3.8.1 Use a propriedade anterior para obter a Transformada de Laplace de:

1. $f(t) = te^{2t}$
2. $h(t) = (t^2 - 3t + 2)\text{sen}(3t)$.

3.9 Transformada da derivada

Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ seccionalmente contínua. Admita-se que as derivadas f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$ são de ordem exponencial e que $f^{(n)}$ é seccionalmente contínua.
Se existem

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s),\ \mathcal{L}\{f'\}(s),\ \ldots,\ \mathcal{L}\{f^{(n-1)}\}(s)$$

para $s > s_f$, $s > s_{f'}$, $\ldots$, $s > s_{f^{(n-1)}}$, respetivamente, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \\ - s^{n-3} f''(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),\end{aligned}$$

para $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''},\ \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$.

Exemplo 3.9.1. Supondo que $y = f(x)$ e as suas derivadas satisfazem as condições do Teorema anterior, vamos determinar $\mathcal{L}\{f'''(t)\}$ em função de $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$ sabendo que $f(0) = -2$, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 1$.

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0) = s^3F(s) + 2s^2 - 1$$

Exercício 3.9.1 Supondo que $y = f(x)$ e as suas derivadas satisfazem as condições do Teorema anterior, determine em função de $F(s) = \mathcal{L}\{f\}$

1. $\mathcal{L}\{f''(t)\}$ sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = 2$.
2. $\mathcal{L}\{f''(t) + 3f'(t) - f(t)\}$ sabendo que $f(0) = 3$ e $f'(0) = 0$.
3. $\mathcal{L}\{f'''(t) - 2f''(t) - f'(t)\}$ sabendo que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ e $f''(0) = 0$.

Exercício 3.9.2 Determine $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ sabendo que

$$\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

3.10 Transformada de Laplace Inversa

Seja $F(s)$ uma função definida para $s > \alpha$.
Chama-se **transformada de Laplace inversa de** F, que se representa por $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ ou $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, à função f, caso exista, definida em $\mathbb{R}_0^+$ tal que $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, para $s > \alpha$.

Observação 3.1. Dada F definida para $s > \alpha$, nem sempre existe $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$; no caso de existir, a transformada inversa pode não ser única e nesse caso escolhemos a solução que origina uma função contínua (o que é justificado pelo resultado seguinte)

Teorema 3.1. *Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $\mathbb{R}_0^+$ tais que*

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s),$$

para $s > \alpha$. Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Por outras palavras, o resultado diz que não podem existir duas funções contínuas distintas com a mesma transformada de Laplace.

Exemplo 3.10.1. A função contínua cuja transformada de Laplace é $\dfrac{2}{s^2+4}$ é

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \text{sen}\,(2t),\ t \geq 0$$

Para calcularmos transformadas de Laplace inversas convém referir algumas propriedades.

Teorema 3.2. *Suponha-se que existem* $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ *e* $\mathcal{L}^{-1}\{G\}$. *Então*

1. $\mathcal{L}^{-1}\{F+G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\}$;
2. $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F\}$.

Teorema 3.3. *Se existe* $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$, *então*

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Estas propriedades e a tabela de transformadas (tomada agora no sentido inverso) serão usadas para determinar transformadas inversas.

Exercício resolvido 3.10.1. Vamos mostrar que a inversa da transformada de Laplace da função

$$F(s) = \frac{-0.2\,s+2}{s^2+0.04}$$

é

$$f(x) = 10 \text{ sen}\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

Resolução:
A lineariedade permite-nos escrever

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-0.2\,s+2}{s^2+0.04}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{0.2\,s}{s^2+0.04}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+0.04}\right]$$

Recordando a transformada de laplace das funções seno e cosseno:

$$\mathcal{L}[\cos(ax)](s) = \frac{s}{s^2+a^2} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}[\text{sen}\,(ax)](s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

basta observar que

$$-\frac{0.2\,s}{s^2+0.04} = -0.2\,\frac{s}{s^2+0.2^2} \quad \text{e} \quad \frac{2}{s^2+0.04} = 10\,\frac{0.2}{s^2+0.2^2}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{0.2\,s}{s^2+0.04}\right] = -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+0.2^2}\right] = -\frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+0.04}\right] = 10\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.2}{s^2+0.2^2}\right] = 10\,\text{sen}\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

Efetuando os cálculos tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-0.2\,s+2}{s^2+0.04}\right] = 10 \text{ sen}\left(\frac{1}{5}\,x\right) - \frac{1}{5}\cos\left(\frac{1}{5}\,x\right)$$

Exercício resolvido 3.10.2. Determine a função y sabendo que a sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{-36\,s^2+5\,s-144}{(s^2+4)(9\,s-6)},\ s > \frac{2}{3}$$

Resolução:
Vamos decompor esta fração em elementos simples:

$$\frac{-36\,s^2+5\,s-144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{C}{9\,s-6}$$

Para determinar os coeficientes A, B e C podemos atender apenas aos numeradores

$$(As+B)(9\,s-6) + C(s^2+4) = -36\,s^2+5\,s-144$$

Fazendo s igual a $\frac{2}{3}$ vem $\frac{40}{9}C = -\frac{470}{3} \Leftrightarrow C = -\frac{141}{4}$; se fizermos $s=0$ obtemos imediatamente o valor de B: $-6\,B - 141 = -144 \Leftrightarrow B = \frac{1}{2}$. Para determinar o valor de A, toma-se, por exemplo, $s=1$ e vem $3\,A - \frac{699}{4} = -175 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{12}$.

Assim,

$$\frac{-36\,s^2+5\,s-144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4} + \frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, temos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}$$

Calculando as inversas das transformadas de Laplace, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t) - \frac{1}{12}\,\cos(2\,t) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\} = -\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}$$

Finalmente, a função y é dada por:

$$y = -\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t) - \frac{1}{12}\,\cos(2\,t)$$

Exercício 3.10.1 Determine a transformada de Laplace inversa das seguintes funções:

1. $\dfrac{5}{s^2+25}$
2. $\dfrac{3}{s-4}$
3. $\dfrac{4}{s^7}$
4. $\dfrac{s+2}{s^2+4s+40}$
5. $\dfrac{5}{s^2-6s-7}$
6. $\dfrac{1}{s^2-3s}$
7. $\dfrac{1}{(s-2)^2}$
8. $\dfrac{s^2+20s+9}{(s-1)^2(s^2+9)}$

3.11 Problemas de Valor Inicial ou de Cauchy

Chamamos **Problema de Cauchy** ou **problema de valores iniciais** ao sistema

$$\begin{cases} F(x,y,y',y'',\ \ldots,y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Às n condições $y(x_0) = y_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ chamamos **condições iniciais**. Se estas condições respeitarem a pontos diferentes, designam-se **condições de fronteira** e ao problema chamamos **problema de valores de fronteira**.

Exemplo 3.11.1. O problema

$$\begin{cases} y'' = 3t + 4y \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

é um problema de valores de fronteira. Contudo,

$$\begin{cases} y'' = 3t + 4y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

é um problema de valores iniciais ou de Cauchy.

A determinação da solução de um problema de Cauchy, passa pela resolução de uma equação diferencial e pela solução dessa equação que satisfaz as condições iniciais.
Vimos já algumas técnicas de resolução de EDOs, que podem ser aplicadas nestas situações.
Consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

A equação diferencial $y' - y = -e^x$ é uma equação linear e podemos resolvê-la usando a técnica do fator integrante (ver secção **??**). A sua solução é

$$y = (-x + c)e^x, \ c \in \mathbb{R}$$

Pretendemos a solução que satisfaz a condição $y(0) = 0$. Vamos determinar o valor da constante c que satisfaz esta condição:

$$y(0) = 0 \Leftrightarrow (-0 + c)e^0 = 0 \Leftrightarrow c = 0$$

Assim, a solução do problema de Cauchy será

$$y = -xe^x$$

Este exemplo pode também ser resolvido recorrendo à Transformada de Laplace.
Como $y' - y = -e^x$, se aplicarmos a transformada de Laplace a ambos os membros da equação, continuamos a obter uma igualdade:

$$\mathcal{L}\{y' - y\}(s) = \mathcal{L}\{-e^x\}(s) \tag{3.1}$$

Sabemos que

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} - 0 = s\mathcal{L}\{y\} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{-e^x\} = -\frac{1}{s-1}, \, s > 1$$

Substituindo agora estas igualdades em 3.1 temos a equação

$$s\mathcal{L}\{y\} - \mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{s-1} \tag{3.2}$$

ou seja,

$$(s-1)\mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{s-1} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{(s-1)^2}$$

Para determinar a função y basta saber a transformada de Laplace inversa de $\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-1)^2}\right\}$. Como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s^2}\right\} = -x$$

aplicando o deslocamento da transformada, vem

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = -xe^x$$

Exercício 3.11.1. Resolva o seguinte problema de Cauchy usando duas técnicas diferentes:

$$\begin{cases} 3y' - 4y = x \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Quando, num problema de Cauchy temos uma equação linear de coeficientes constantes e o 2º membro é uma função que admite transformada de Laplace, podemos utilizar a transformada de Laplace para determinar a sua solução, recorrendo à transformada de Laplace inversa. Contudo, podemos também resolver a EDO recorrendo a outras técnicas e no final, escolher a solução que satisfaz as condições iniciais.
No caso particular das equações lineares o seguinte teorema permite-nos afirmar que um problema de Cauchy tem solução única.

Teorema 3.4. *Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e b são funções contínuas num intervalo I, $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, $x_0 \in I$ e $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$, então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1} \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

No caso particular de $n = 1$ (equação linear de 1ª ordem), este teorema pode enunciar-se da forma

Teorema 3.5. *Se p e q são funções contínuas num intervalo I, então o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Apresentamos de seguida alguns exemplos de problemas de valor inicial, recorrendo à transformada de Laplace.

Exercício resolvido 3.11.1. Considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} -6\,y + 9\,y' = 5\,\cos(-2\,t) \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

Mostraremos que a solução deste problema é

$$y = -\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t} + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,(2\,t) - \frac{1}{12}\,\cos(2\,t)$$

Resolução:
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$9\mathcal{L}\{y'\} - \mathcal{L}\{6\,y\} = \mathcal{L}\{5\,\cos(-2\,t)\}$$

Como a transformada de Laplace da derivada é dada por $\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} + 4$ e a transformada de Laplace do 2º membro é $\mathcal{L}\{5\,\cos(-2\,t)\} = \dfrac{5\,s}{s^2+4}$, vem

$$9\,(s\mathcal{L}\{y\} + 4) - 6\mathcal{L}\{y\} = \frac{5\,s}{s^2+4} \Leftrightarrow (9\,s - 6)\mathcal{L}\{y\} = \frac{5\,s}{s^2+4} - 36$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\frac{5\,s}{s^2+4} - 36}{9\,s - 6} = \frac{-36\,s^2 + 5\,s - 144}{(s^2+4)(9\,s-6)}$$

Vamos decompor esta fração em elementos simples:

$$\frac{-36\,s^2 + 5\,s - 144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{As + B}{s^2+4} + \frac{C}{9\,s-6}$$

Para determinar os coeficientes A, B e C podemos atender apenas aos numeradores

$$(As + B)(9\,s - 6) + C(s^2 + 4) = -36\,s^2 + 5\,s - 144$$

- Fazendo s igual a $\dfrac{2}{3}$ vem $\dfrac{40}{9}C = -\dfrac{470}{3} \Leftrightarrow C = -\dfrac{141}{4}$.
- Se fizermos $s = 0$ obtemos imediatamente o valor de B: $-6\,B - 141 = -144 \Leftrightarrow B = \dfrac{1}{2}$.
- Para determinar o valor de A, toma-se, por exemplo, $s = 1$ e vem $3\,A - \dfrac{699}{4} = -175 \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{12}$.

Assim,

$$\frac{-36\,s^2 + 5\,s - 144}{(s^2+4)(9\,s-6)} = \frac{-\frac{1}{12}\,s + \frac{1}{2}}{s^2+4} + \frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}$$

Aplicando a inversa da transformada de Laplace, temos

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}\,s + \frac{1}{2}}{s^2+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}$$

Calculando as inversas das transformadas de Laplace, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{12}s+\frac{1}{2}}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t)-\frac{1}{12}\cos(2\,t)\quad \text{e}\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-\frac{141}{4}}{9\,s-6}\right\}=-\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}$$

Finalmente, a solução da equação diferencial é

$$y=-\frac{47}{12}\,e^{\frac{2}{3}\,t}+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,(2\,t)-\frac{1}{12}\cos(2\,t)$$

Exercício resolvido 3.11.2. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} 2\,y-4\,y'+2\,y''=\cos(-3\,t)\\ y(0)=6\\ y'(0)=1\end{cases}$$

Resolução:
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$2\mathcal{L}\{y''\}-4\mathcal{L}\{y'\}+2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{\cos(-3\,t)\}$$

Atendendo às transformadas de Laplace das derivadas:

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2\mathcal{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\quad \text{e}\quad \mathcal{L}\{y'\}=s\mathcal{L}\{y\}-y(0)$$

obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2\mathcal{L}\{y\}-6\,s-1\quad \text{e}\quad \mathcal{L}\{y'\}=s\mathcal{L}\{y\}-6$$

Como a transformada de Laplace de $\cos(-3\,t)$ é $\dfrac{s}{s^2+9}$, efetuando os cálculos temos

$$(2\,s^2-4\,s+2)\mathcal{L}\{y\}=12\,s+\frac{s}{s^2+9}-22\Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\}=\frac{12\,s+\frac{s}{s^2+9}-22}{2\,s^2-4\,s+2}$$

vem,

$$\mathcal{L}\{y\}=\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{(s^2+9)(2\,s^2-4\,s+2)}$$

Vamos decompor esta fração em elementos simples. Para isso vejamos se $2\,s^2-4\,s+2$ se pode decompor em elementos de 1º grau. Como a equação $2\,s^2-4\,s+2=0$ só tem uma raiz, 1, podemos escrever

$$2\,s^2-4\,s+2=2\,(s-1)^2$$

Assim,

$$\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{(s^2+9)(2\,s^2-4\,s+2)}=\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{2\,(s-1)^2(s^2+9)}$$

A fração decomposta em elementos simples é:

$$\frac{12\,s^3-22\,s^2+109\,s-198}{2\,(s-1)^2(s^2+9)}=-\frac{4\,s+9}{100\,(s^2+9)}+\frac{151}{25\,(s-1)}-\frac{99}{20\,(s-1)^2}$$

Nota: Recorde a decomposição em elementos simples estudada na determinação de primitivas.
Para determinar a solução da equação diferencial basta calcular a inversa da transformada de Laplace

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4\,s+9}{100\,(s^2+9)}+\frac{151}{25\,(s-1)}-\frac{99}{20\,(s-1)^2}\right\}$$

Usando a linearidade vem:

$$y=-\frac{99}{20}\,te^t+\frac{151}{25}\,e^t-\frac{3}{100}\,\mathrm{sen}\,(3\,t)-\frac{1}{25}\cos(3\,t)$$

que é a solução do problema de valor inicial dado.

Exercício resolvido 3.11.3. Determine a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} -3\,y - 6\,y' - 3\,y'' = 5\,e^{-t} \\ y(0) = -4 \\ y'(0) = -9 \end{cases}$$

Resolução
Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação diferencial vem:

$$-3\mathcal{L}\{y''\} - 6\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{5\,e^{-t}\}$$

Atendendo às transformadas de Laplace das derivadas:

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0)$$

obtemos

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} + 4\,s + 9 \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} + 4$$

Como a transformada de Laplace de $5\,e^{-t}$ é $\dfrac{5}{s+1}$, efetuando os cálculos temos

$$(-3\,s^2 - 6\,s - 3)\mathcal{L}\{y\} = 12\,s + \frac{5}{s+1} + 51 \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{12\,s + \frac{5}{s+1} + 51}{-3\,s^2 - 6\,s - 3} \Leftrightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{(s+1)(-3\,s^2 - 6\,s - 3)}$$

Vamos decompôr esta fração em elementos simples. Para isso vejamos se $-3\,s^2 - 6\,s - 3$ se pode decompôr em elementos de 1º grau. Como a equação $-3\,s^2 - 6\,s - 3 = 0$ só tem uma raiz, -1, podemos escrever

$$-3\,s^2 - 6\,s - 3 = -3\,(s+1)^2$$

Assim,

$$\frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{(s+1)(-3\,s^2 - 6\,s - 3)} = \frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{-3\,(s+1)^3}$$

A fração decomposta em elementos simples é:

$$\frac{12\,s^2 + 63\,s + 56}{-3\,(s+1)^3} = -\frac{4}{s+1} - \frac{13}{(s+1)^2} - \frac{5}{3\,(s+1)^3}$$

Nota: Recorde a decomposição em elementos simples estudada na determinação de primitivas.
Para determinar a solução da equação diferencial basta calcular a inversa da transformada de Laplace

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{4}{s+1} - \frac{13}{(s+1)^2} - \frac{5}{3\,(s+1)^3}\right\}$$

Usando a lineariedade vem:

$$y = -\frac{5}{6}\,t^2e^{-t} - 13\,te^{-t} - 4\,e^{-t}$$

que é a solução do problema de valor inicial dado.

Exercício 3.11.1 Considere os seguintes problemas de Cauchy e determine as suas soluções.

1. $\begin{cases} y' - \mathrm{e}^{ax} = 0,\ a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' + 2y' - 8y = 12e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y'' + y' = \cos(t) \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3.12 Exercícios do capítulo

Exercício 3.12.1 Para cada uma das funções seguintes, determine $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

1. $f(t) = 2\,\mathrm{sen}(3t) + t - 5e^{-t}$;
2. $f(t) = e^{2t}\cos(5t)$;
3. $f(t) = te^{3t}$;
4. $f(t) = \pi - 5e^{-t}t^{10}$;
5. $f(t) = (3t-1)\,\mathrm{sen}\,t$.

Exercício 3.12.2 Para cada uma das funções seguintes, determine $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$:

1. $F(s) = \dfrac{2s}{s^2-9}$;
2. $F(s) = \dfrac{4}{s^7}$;
3. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+s-2}$;
4. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+6}$;

Exercício 3.12.3 Calcule o valor do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{10}\,e^{-2t}dt$.

Exercício 3.12.4 Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que $f'(t) + 2f(t) = e^t$ e que $f(0) = 2$, determine a expressão de $f(t)$.

Exercício 3.12.5 Calcule:

1. $\mathcal{L}\{(t - 2 + e^{-2t})\cos(4t)\}$;
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2-4s+6}\right\}$;

Exercício 3.12.6 Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}$

Exercício 3.12.7 Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

Através de variaveis separaveis

1. $xy' + y = y^2, \quad y(1) = \frac{1}{2}$;
2. $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0, \quad y(0) = 1$;
3. $(1+x^3)y' = x^2y, \quad y(1) = 2$.

Exercício 3.12.8 Resolva cada um dos seguintes problemas de Cauchy usando a transformada de Laplace.

1. $3x' - x = \cos t, \quad x(0) = -1$;
2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 36y = 0, \quad y(0) = -1, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2$;
3. $y'' + 2y' + 3y = 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;
4. $y'' + y = t^2 + 1, \quad y(\pi) = \pi^2, \quad y'(\pi) = 2\pi$.
(Sugestão: Efetue a substituição definida por $x = t - \pi$.)

Exercício 3.12.9 Resolva o problema de Cauchy $\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$

Exercício 3.12.10 Determine uma solução contínua para os seguintes problemas de valor inicial, e represente-a graficamente:

1. $y' + 2y = f(x)\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0;$

2. $(x^2+1)\,y' + 2\,x\,y = f(x), \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -x & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad , \quad y(0) = 0\ .$

Exercício 3.12.11 Determine uma solução contínua para o problema de valor inicial $y' + P(x)\,y = 4\,x, \quad y(0) = 3,$ onde $P(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -2/x & \text{se } x > 1 \end{cases}$, e represente-a graficamente.

3.13 Soluções dos exercícios

Exercício 3.1.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}, s > 0.$
2. $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s-1}, s > 1.$

Exercício 3.2.1

Exercício 3.4.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+9} + \frac{\pi}{s}, \ s > 0$
2. $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{6}{36s^2+1} + \frac{s}{s^2-16}, \ s > 4$
3. $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{10!}{s^{11}} + \frac{1}{3s-3} + \frac{1}{2s} + \frac{s}{2s^2+8}, \ s > 1$
4. $\mathcal{L}\{j\}(s) = \frac{\sqrt{2}}{s^2-2} + \frac{1}{2s^3}, \ s > \sqrt{2}$

Exercício 3.5.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{2}{(s-2)^3}, \ s > 2$
2. $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2-16}, \ s > 3$

Exercício 3.6.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{e^{-2s}}{s}, \ s > 0$
2. $\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}, \ s > 0$

Exercício 3.7.1

1. $\mathcal{L}\{n\}(s) = \frac{1}{s^3}, \ s > 0$
2. $\mathcal{L}\{p\}(s) = \frac{1}{s-3}, \ s > 3$

Exercício 3.8.1

1. $\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{(s-2)^2}, \ s > 2$
2. $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{18s^2-54}{(s^2+9)^3} - \frac{18s}{(s^2+9)^2} + \frac{6}{s^2+9}, \ s > 0.$

Exercício 3.9.1

1. $s^2F(s) - s - 2$
2. $(s^2 + 3s - 1)F(s) - 3s - 9$
3. $(s^3 - 2s^2 - s)F(s) - s + 2$

Exercício 3.9.2 $Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{2}{s}$

Exercício 3.10.1

1. $y(x) = \operatorname{sen}(5x), \ x \geq 0$
2. $y(x) = 3e^{4x}, \ x \geq 0$
3. $y(x) = \frac{x^6}{180}, \ x \geq 0$
4. $y(x) = e^{-2x}\cos(6x), \ x \geq 0$
5. $y(x) = \frac{5}{4}e^{3x}\operatorname{senh}(4x), \ x \geq 0$
6. $y(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{3x}, \ x \geq 0$
7. $y(x) = e^{2x}x, \ x \geq 0$
8. $y(x) = \frac{8}{5}e^{-x} + 3e^{x}x - \frac{8}{5}\cos(3x) - \frac{18}{15}\operatorname{sen}(3x), \ x \geq 0$

Exercício 3.11.1

1. $y(x) = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a};$
2. $y(t) = -\frac{1}{6}e^{2t} + 2te^{2t} + \frac{1}{6}e^{-4t};$
3. $y(t) = \frac{e^{-t}}{2} - \frac{\cos(t)}{2} + \frac{\operatorname{sen}(t)}{2} + 2.$

Exercício 3.12.1

1. $\dfrac{6}{s^2+9} + \dfrac{1}{s^2} - \dfrac{5}{s+1}, \quad s > 0;$
2. $\dfrac{s-2}{(s-2)^2+25}, \quad s > 2;$
3. $\dfrac{1}{(s-3)^2}, \quad s > 3;$
4. $\dfrac{\pi}{s} - \dfrac{5 \cdot 10!}{(s+1)^{11}}, \quad s > 0;$
5. $\dfrac{6s}{(s^2+1)^2} - \dfrac{1}{s^2+1}, \quad s > 0.$

Exercício 3.12.2

1. $2\cosh(3t) = e^{3t} + e^{-3t}, \quad t \geq 0;$
2. $\dfrac{t^6}{180}, \quad t \geq 0;$
3. $\dfrac{1}{3}e^{t} - \dfrac{1}{3}e^{-2t}, \quad t \geq 0;$
4. $\dfrac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t), \quad t \geq 0.$

Exercício 3.12.3 $\dfrac{10!}{2^{11}}.$

Exercício 3.12.4 $f(t) = \dfrac{1}{3}e^{t} + \dfrac{5}{3}e^{-2t}.$

Exercício 3.12.5

1. $\dfrac{s^2-16}{(s^2+16)^2} - \dfrac{2s}{s^2+16} + \dfrac{s+2}{(s+2)^2+16}, \quad s > 0;$
2. $e^{2t}\left(2\cos(\sqrt{2}\,t) + \dfrac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t)\right), \quad t \geq 0.$

Exercício 3.12.6 $\dfrac{1}{4}e^{t} - \dfrac{1}{4}e^{-t}\cos(2t) + \dfrac{3}{4}e^{-t}\operatorname{sen}(2t), \quad t \geq 0.$

Exercício 3.12.7

1. $y = \frac{1}{x+1};$
2. $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}};$
3. $y = \sqrt[3]{4(1+x^3)}.$

Exercício 3.12.8

1. $x(t) = \frac{3}{10}\operatorname{sen} t - \frac{1}{10}\cos t - \frac{9}{10}e^{\frac{t}{3}};$
2. $y(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}(6t) - \cos(6t);$
3. $y(t) = t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}}e^{-t}\operatorname{sen}(\sqrt{2}t) + \frac{2}{3}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t);$
4. $y(t) = (t-\pi)^2 + 2\pi(t-\pi) + \pi^2 - 1 + \cos(t-\pi)$
   $= t^2 - 1 - \cos t.$

Exercício 3.12.9 $y = 1 + e^{-\operatorname{sen} x}, x \in \mathbb{R}.$

Exercício 3.12.10

1. $y = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-2x}}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ -\dfrac{e^{-2x}}{2} + \dfrac{e^{-2(x-3)}}{2}, & \text{se } x > 3 \end{cases}.$
2. $y = \begin{cases} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2+1}, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{-\frac{x^2}{2}+1}{x^2+1}, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}.$

Exercício 3.12.11 $y = \begin{cases} 2x - 1 + 4e^{-2x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^2\ln x + (1+4e^{-2})x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}.$