



FICHA DE EXERCÍCIOS 1

COMPLEMENTOS DE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

(Funções trigonométricas inversas, Teoremas de Weierstrass, Rolle, Lagrange e Cauchy, Regra de Cauchy, contradomínios e extremos)

1. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a inversa da função considerada, indicando também o seu contradomínio.

(a) f definida por $f(x) = \frac{1}{x+1}$;

(b) f definida por $f(x) = 2 + e^{x+1}$;

(c) f definida por $f(x) = \log_3(2-x)$;

(d) f definida por $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

2. Considere as funções f e g de domínio \mathbf{R} tais que

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ e } g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

estas funções são as chamadas *seno hiperbólico* e *cosseno hiperbólico* e as suas notações usuais são $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$, respetivamente.

- (a) Mostre que, para todo o $x \in \mathbf{R}$:

i. $(\sinh(x))' = \cosh(x)$;

ii. $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.

- (b) Mostre que a função seno hiperbólico é invertível e determine a sua inversa.

- (c) Justifique que a função cosseno hiperbólico (definida em \mathbf{R}) não é invertível. Identifique uma sua restrição invertível (considerando o “maior” domínio possível) e determine o domínio dessa inversa.

3. Calcule:

(a) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$

(b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$

(c) $\sin(\arcsen(-\frac{1}{2}))$

(d) $\cos(\arcsen(-\frac{1}{2}))$

(e) $\cotg(\arcsen(\frac{12}{13}))$

(f) $\cos(2 \cdot \arctg(\frac{4}{3}))$

(g) $\operatorname{arccotg}(\cotg(\frac{1}{2}))$

(h) $\operatorname{arccotg}(\tg(\frac{\pi}{4}))$

(i) $\arctg(\tg(\pi))$

4. Em cada uma das alíneas seguintes, defina a função inversa de f e indique o seu contradomínio. Considere as correspondentes restrições principais das funções trigonométricas envolvidas.

(a) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x + \frac{\pi}{2})$;

(b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \arcsen(1-x)}{3}$;

(c) $f(x) = \tg(\frac{\pi}{2-x})$;

(d) $f(x) = 3 \arccos(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2}$;

(e) $f(x) = \pi - 3 \arctg(\frac{x-1}{2})$;

(f) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln(x+1))$.

5. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

6. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

7. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \cos x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

- (a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$;
- (b) $(g^{-1})'(0)$.

8. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

- (a) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;
- (b) $f(x) = x^2 e^{x^2}$;
- (c) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;
- (d) $f(x) = (1-x^2) \ln x$;
- (e) $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$;
- (f) $f(x) = \arcsen \sqrt{x}$.

9. Calcule $f'(x)$:

- (a) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$;
- (b) $f(x) = \arcsen \frac{1}{x^2}$;
- (c) $f(x) = \arccos(1-e^x)$;
- (d) $f(x) = \operatorname{arctg}(1+\ln x)$.

10. Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{se } x < 0 \\ x+2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

- (a) Estude a continuidade de f .
- (b) Mostre que a função f não tem mínimo global em $[-1, 1]$, determinando o seu contradomínio.
- (c) A não existência de mínimo global de f em $[-1, 1]$ não contradiz o Teorema de Weierstrass. Porquê?

11. Sendo $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, mostre que f possui exatamente um zero no intervalo $]1, 3]$.

12. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

13. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de \mathbb{R} cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

14. Considere a função polinomial p definida por $p(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Prove que a equação $p'(x) = 0$ tem exatamente três soluções reais distintas.

15. Considere a função f definida em \mathbb{R}_0^+ por $f(x) = \ln(1+x) - x$. Mostre que f é decrescente e diga, justificando se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: $f(x) < 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

16. Prove que:

- (a) para todo o $x \in]0, 1]$ se tem $\arcsen x > x$;
- (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\operatorname{sen} x \leq x$;
- (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

17. Considere a função f definida por $f(x) = e^{-x^2}$. Estude f quanto à monotonia e existência de extremos globais.

18. Verifique que $x = 0$ é um extremo local da f.r.v.r. definida por $h(x) = 2x^5 - x^3 + x^2 + 5$. Classifique-o e calcule o respetivo extremo local.

19. Sejam f e g funções diferenciáveis em \mathbb{R} tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

(a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$;

(b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

20. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

21. Mostre que existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$, mas que não se pode aplicar a regra de Cauchy no seu cálculo.

22. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{x^2}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x}$;

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x}$;

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}$;

(e) $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \cotg x}$;

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;

(g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$;

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} - x \right)$;

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$;

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$;

(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2))$;

(l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^x$;

(m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;

(n) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;

(o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

23. Seja f uma função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se } x > 0 \\ \sin(x) + 5x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

(a) Estude f quanto à continuidade.

(b) Averigue se a função f é diferenciável para $x = 0$.

(c) Mostre que o Teorema de Rolle é aplicável à função f no intervalo $[0, 1]$. Determine o(s) ponto(s) b do interior desse intervalo tais que $f'(b) = 0$.

(d) f tem extremos globais em $[-\pi, 1]$? Justifique. Caso existam, calcule-os e classifique-os.

24. ¹ Considere a função $f: [0, e] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+(\ln x)^2} & \text{se } x \in]0, e] \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

(a) Estude f quanto à continuidade.

(b) Calcule, caso exista, $f'_+(0)$.

(c) Estude a função quanto à existência de extremos absolutos. Caso existam, calcule-os e classifique-os.

(d) Identifique o contradomínio de f . Justifique.

¹A partir deste exercício, são retomados tópicos já abordados em exercícios anteriores. A maioria dos exercícios foram retirados de provas de avaliação de Cálculo I realizadas em anos anteriores.

25. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$
- Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.
 - Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.
 - Estude f quanto à existência de extremos locais.
 - Mostre que existe pelo menos um $\theta \in]-1, 0[$ tal que $f'(\theta) = -\frac{\pi}{4}$.
 - Mostre que a equação $f(x) = 1 - x^2$ possui exatamente uma solução em $] -1, 0[$.
 - Considere a função g definida em \mathbb{R}_0^- por $g(x) = f(x)$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.
26. Verifique que $x = 1$ é solução da equação $e^{x-1} = x$ e que esta equação não pode ter outra raiz real.
27. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \arcsen(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$.
- Determine o domínio de f .
 - Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.
 - Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m . Determine também esses valores.
 - Determine o contradomínio de f .
28. (a) Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) = 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.
- (b) Prove que sendo $f(x) = \arcsen(x) + \arccos(x)$, então $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$ (Sugestão: use a alínea anterior).
29. Seja h uma função de domínio \mathbb{R} tal que $h(0) = 0$ e $h'(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.
30. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \arcsen(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.
- Determine o domínio de h .
 - Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $] -1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α .
31. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arcsen(x^2))^{\frac{1}{x}}$.
32. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

33. Considere a função real $N(t)$, de domínio $\mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$, definida por

$$N(t) = a e^{-kt}, \text{ onde } a \text{ e } k \text{ são parâmetros(constantes) reais positivos.}$$

A função $N(t)$ é frequentemente usada como modelo do decaimento radioativo de uma substância radioativa. Onde $N(t)$ representa o número de átomos radioativos no instante t , contado em anos, numa amostra de determinado radioisótopo. O parâmetro k é a chamada constante de desintegração.

- (a) Estude N quanto à monotonia.
- (b) Verifique se N tem extremos absolutos e, em caso afirmativo, identifique-os e indique os respectivos extremantes.
- (c) Determine o contradomínio de N .
- (d) Sabendo que para determinada substância $k = 10^{-10} \ln(4)$, calcule a sua meia-vida, isto é, calcule o instante de tempo em que o número de átomos radioativos numa amostra é metade do número de átomos radioativos no instante inicial de tempo.