Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I — Agrupamento I 2016/2017

Ficha de Exercícios 5
Séries Numéricas

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, S_n e a soma S (se possível) de cada uma das seguintes séries:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$;

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$;

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}$;

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2-1}$;

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n}\right)$;

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

2. Calcule, se possível, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}+b_n\right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n=\sqrt[n]{\dfrac{e}{n^n}}$, $n\in\mathbb{N}$.

3. Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, convergente e de soma igual a S. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[3a_n+\frac{2}{3^n}\right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n=\begin{cases} 1+2(n-1) & \text{se } n<4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n\geq 4 \end{cases}$.

5. Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde a é um parâmetro real, com $a\neq -1$).

   (a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.

   (b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Escreva na forma de fração as seguintes dízimas periódicas:

   (a) $0,555\cdots=\dfrac{5}{10}+\dfrac{5}{10^2}+\dfrac{5}{10^3}+\cdots$

   (b) $0,34\,34\,34\cdots=0,\overline{34}$

   (c) $1,345\,345\cdots=1,\overline{345}$

   (d) $0,324\,101\,101\,101\cdots=0,324\overline{101}$

7. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

   (a) Seja $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.

      i) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, então a série converge.

      ii) Se a série converge, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

      iii) Se $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série diverge.

   (b) A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:

      i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$;

      ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k < 1$;

      iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$.

8. Estude a natureza das séries seguintes:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}}$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

   (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n+5]^n}$

   (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

   (h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^3}$

   (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0<b<1)$

   (k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d>0)$

   (l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n}$

   (m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

   (n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

   (o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

   (p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{50}\right)}{2^n}$

   (q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

   (r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+n-1}$

   (s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n+1}{2^n-1}$

   (t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n\cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

   (u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$

   (v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!+3n}{((n+1)!)^2}$

   (w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\dots\cdot(2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\dots\cdot(3n+1)}$

   (x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}$

9. Sejam $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e $a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$.

10. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^{n-1}}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{e^n+1}$

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

11. Verifique que as seguintes séries são alternadas convergentes. Indique, justificando em cada caso, se a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n^n)}$ *(Sugestão: tenha em conta o 1.º exercício resolvido desta ficha.)*

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$ *(Sugestão: $n! < n^n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$)*

(c) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$, sendo $\alpha \in]-\infty, 1[$

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(\ln n)^\alpha}$, sendo $\alpha \in]1, +\infty[$

12. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^{8} a_n = 15, \quad a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n, \text{ para } n \geq 9 \quad \text{e} \quad b_n > a_n, \text{ para } n > 20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

13. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe 2/3 da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

14. Considere as séries $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$.

(a) Estude a natureza de cada uma das séries.

(b) Indique o limite do termo geral das séries.

(c) Sendo $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{n!}{n^n}+b_n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$, indique a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$. Justifique.

15. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_1\neq 0$ e $a_{n+1}=\frac{n}{2n+1}\,a_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

16. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+n^2}{3^n\,n^2}$ sabendo que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

17. Estude a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indique se a convergência é simples ou absoluta.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3+3n^2+4}$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)!}$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\sqrt{n+1}}$

Exercícios Resolvidos

1. Estude a natureza da série $\sum_{n=2}^{+\infty}u_n=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ usando o Critério do Integral.

Resolução: Seja $f:[2,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Notando que $u_n=f(n),\quad n=2,3,4,\ldots$ e que:

- f é contínua em $[2,+\infty[$;
- $f(x)>0,\ \forall x\in[2,+\infty[$;
- f é decrescente em $[2,+\infty[$, pois

$$f'(x)=-\frac{(x\ln x)'}{x^2\ln^2 x}=-\frac{\ln x+x\frac{1}{x}}{x^2\ln^2 x}=-\frac{\ln x+1}{x^2\ln^2 x}<0,\quad \forall x\in\,]2,+\infty[\,.$$

Estamos em condições de aplicar o Critério do Integral, pelo que a série $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$ e o integral impróprio $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}$ têm a mesma natureza. Estudemos a natureza do integral impróprio. Para isso, calcule-se o limite:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\int_2^x\frac{1/t}{\ln t}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(\ln t)\right]_2^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(\ln x)-\ln(\ln 2)\right]=+\infty.$$

Como L não é finito, o integral $\int_2^{+\infty}f(x)\,dx$ diverge. Concluímos que a série dada é divergente.

2. Use o Critério do Limite para estudar a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n^2}$.

   Resolução: Como a série dada é de termos não negativos podemos usar o Critério do Limite. Vamos usar como referência a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ que é uma série de Dirichlet com $\alpha = 2 > 1$, logo convergente.
   Analisemos o limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\operatorname{arctg}(1/n)}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg}(1/n) = \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

   Como $L = 0$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, podemos afirmar que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge.

3. Use o Critério de Cauchy para estudar a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

   Resolução: A série em estudo é divergente. Na verdade,

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \mathrm{e} > 1.$$

4. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, com $a_n = \sin(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, é uma série alternada convergente.

   Resolução: Comecemos por verificar que se trata de uma série alternada. Tendo em conta que $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$, o número real $x = 1/n \in]0, \pi/2[$, portanto $\sin x$ é positivo, ou seja, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ é alternada. Podemos agora aplicar o Critério de Leibniz. Facilmente se verifica que

   - $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$;
   - a sucessão (a_n) é monótona decrescente:

$$n+1 > n \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

     e como a função $\sin x$ é estritamente crescente quando $x \in]0, \pi/2[$:

$$\sin\left(\frac{1}{n+1}\right) < \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

   então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.