

# Funções Trigonométricas Inversas

## Def. 1.1

Seja  $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função injetiva. A função

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}: & CD_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ & y & \mapsto x \end{array}$$

onde  $x$  é tal que  $f(x) = y$ , é designada por **função inversa de  $f$** .

Dizemos que uma função é **invertível** se admite inversa.

## Obs. 1.2

- ▶  $f$  é invertível sse  $f$  é injetiva;
- ▶ O contradomínio de  $f^{-1}$  é  $D_f$  (isto é,  $CD_{f^{-1}} = D_f$ );
- ▶  $\forall x \in D_f, (f^{-1} \circ f)(x) = x$  ;  $\forall y \in CD_f, (f \circ f^{-1})(y) = y$ ;
- ▶  $\forall x \in D_f, \forall y \in CD_f, f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ ;
- ▶ Os gráficos de  $f$  e  $f^{-1}$  são simétricos relativamente à reta  $y = x$ .

## Def. 1.3

**Função seno:**  $\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \text{sen } x$

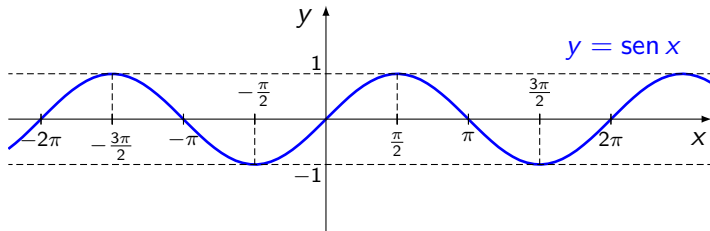
## Prop. 1.4

### Propriedades da função seno:

- ▶ Domínio:  $\mathbb{R}$ ;
- ▶ Contradomínio:  $[-1, 1]$ ;
- ▶ Função periódica de período  $2\pi$ , isto é,

$$\text{sen } x = \text{sen}(x + 2k\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- ▶ Função ímpar;
- ▶ Não é injetiva.



## Obs. 1.5

A função seno não é injetiva em  $\mathbb{R}$ .

No entanto, a sua restrição ao intervalo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  já é injetiva.

## Def. 1.6

A restrição principal da função seno é a função

$$\begin{array}{ccc} f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{sen } x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de  $f$  é chamada de função arco seno, denota-se por **arcsen**, e define-se do seguinte modo

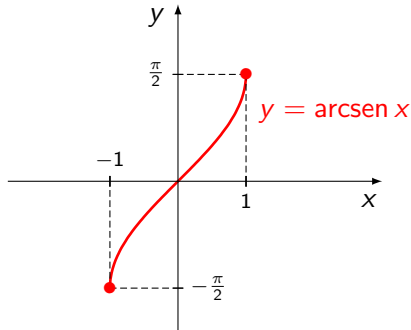
$$\begin{array}{ccc} \text{arcsen} : [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \text{arcsen } x \end{array}$$

onde

$$y = \text{arcsen } x \text{ sse } \text{sen } y = x, \forall x \in [-1, 1], \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

## Obs. 1.7

**arcsen**  $x$  lê-se arco cujo seno é  $x$ .



## Exer. 1.8

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a)  $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$

(b)  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2 \arcsen(1-x)}{3}$

(c)  $f(x) = 2 \arcsen(\sqrt{x}) - \pi$

## Def. 1.9

**Função cosseno:**  $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \cos x$

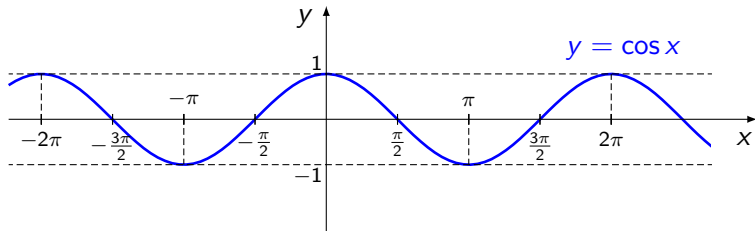
## Prop. 1.10

### Propriedades da função cosseno:

- ▶ Domínio:  $\mathbb{R}$ ;
- ▶ Contradomínio:  $[-1, 1]$ ;
- ▶ Função periódica de período  $2\pi$ , isto é,

$$\cos x = \cos(x + 2k\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- ▶ Função par;
- ▶ Não é injetiva.



## Obs. 1.11

A função cosseno não é injetiva em  $\mathbb{R}$ .

No entanto, a sua restrição ao intervalo  $[0, \pi]$  já é injetiva.



## Def. 1.12

A **restrição principal da função cosseno** é a função

$$\begin{array}{ccc} f : [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

que já é injetiva.

A **inversa de  $f$**  é chamada de **função arco cosseno**, denota-se por **arccos**, e define-se do seguinte modo

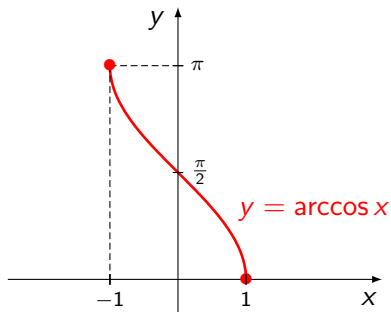
$$\begin{array}{ccc} \arccos : [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \arccos x \end{array}$$

onde

$$y = \arccos x \text{ sse } \cos y = x, \forall x \in [-1, 1], \forall y \in [0, \pi].$$

## Obs. 1.13

**arccos  $x$**  lê-se arco cujo cosseno é  $x$ .



## Exer. 1.14

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a)  $f(x) = \frac{1}{2 + \cos x}$

(b)  $f(x) = 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$

## Def. 1.15

**Função tangente:**  $\operatorname{tg} : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$

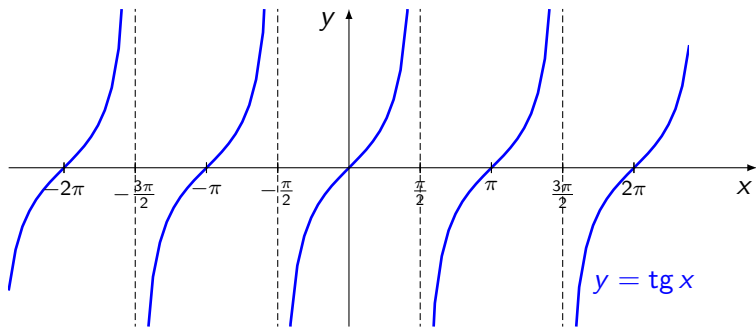
## Prop. 1.16

### Propriedades da função tangente:

- ▶ Domínio:  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- ▶ Contradomínio:  $\mathbb{R}$ ;
- ▶ Função periódica de período  $\pi$ , isto é,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- ▶ Função ímpar;
- ▶ Não é injetiva.

**Obs. 1.17**

A função tangente não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  já é injetiva.

## Def. 1.18

A restrição principal da função tangente é a função

$$\begin{array}{ccc} f : ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{tg} x \end{array}$$

que já é injetiva.

A inversa de  $f$  é chamada de função arco tangente, denota-se por  $\operatorname{arctg}$ , e define-se do seguinte modo

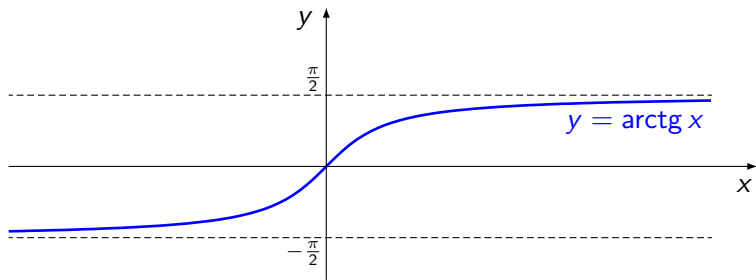
$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arctg} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \operatorname{arctg} x \end{array}$$

onde

$$y = \operatorname{arctg} x \text{ sse } \operatorname{tg} y = x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

## Obs. 1.19

$\operatorname{arctg} x$  lê-se arco cuja tangente é  $x$ .



## Exer. 1.20

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a)  $f(x) = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2-x} \right)$

(b)  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctg(1-x)$

## Def. 1.21

**Função cotangente:**  $\cotg : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \cotg x = \frac{\cos x}{\sin x}$

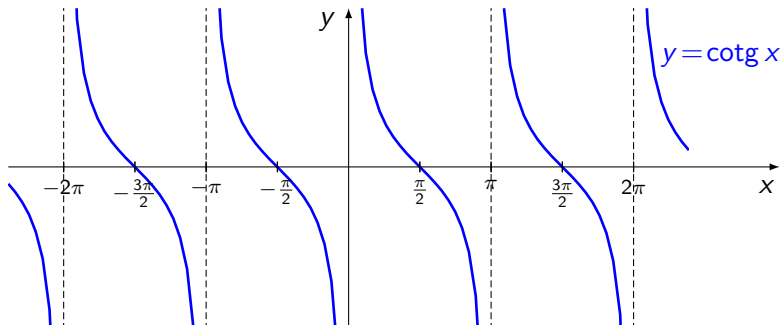
## Prop. 1.22

### Propriedades da função cotangente:

- ▶ Domínio:  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- ▶ Contradomínio:  $\mathbb{R}$ ;
- ▶ Função periódica de período  $\pi$ , isto é,

$$\cotg x = \cotg(x + k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$

- ▶ Função ímpar;
- ▶ Não é injetiva.



## Obs. 1.23

A função cotangente não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo  $]0, \pi[$  já é injetiva.



## Def. 1.24

A restrição principal da função cotangente é a função

$$\begin{aligned} f : ]0, \pi[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \cotg x \end{aligned}$$

que já é injetiva.

A inversa de  $f$  é chamada de função arco cotangente, denota-se por  $\operatorname{arccotg}$ , e define-se do seguinte modo

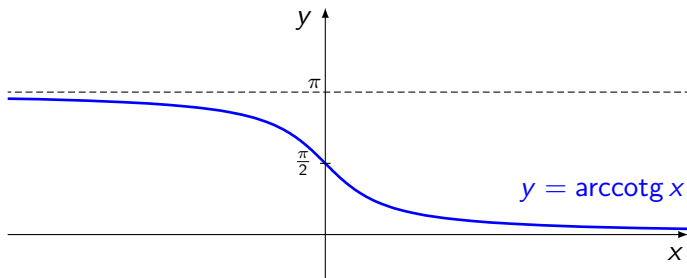
$$\begin{aligned} \operatorname{arccotg} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = \operatorname{arccotg} x \end{aligned}$$

onde

$$y = \operatorname{arccotg} x \text{ sse } \cotg y = x, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in ]0, \pi[.$$

## Obs. 1.25

$\operatorname{arccotg} x$  lê-se arco cuja cotangente é  $x$ .



## Exer. 1.26

Caracterize a inversa das seguintes funções:

(a)  $f(x) = 2 \cotg \left( \frac{x}{3} \right)$

(b)  $f(x) = \pi + \operatorname{arccotg} \left( \frac{x-1}{2} \right)$

## Def. 1.27

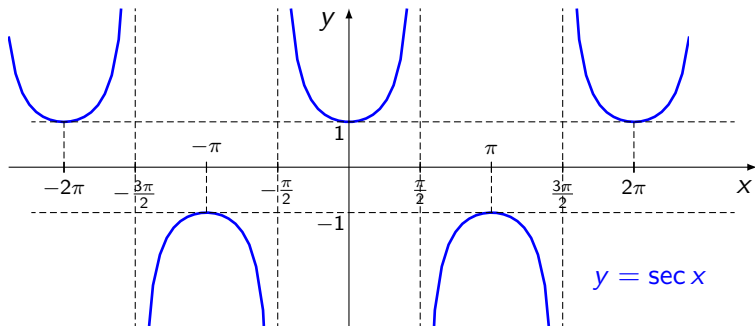
**Função secante:**  $\sec : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \sec x = \frac{1}{\cos x}$

## Prop. 1.28

### Propriedades da função secante:

- ▶ Domínio:  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\};$
- ▶ Contradomínio:  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[;$
- ▶ Função periódica de período  $2\pi$ , isto é,  

$$\sec x = \sec(x + 2k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$
- ▶ Função par;
- ▶ Não é injetiva;
- ▶  $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x, \forall x \in D.$



Obs. 1.29

A função secante não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo  $\left[0, \frac{\pi}{2} \left[ \cup \right] \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  já é injetiva.

## Def. 1.30

A **restrição principal da função secante** é a função

$$\begin{array}{ccc} f : [0, \frac{\pi}{2}[ \cup ] \frac{\pi}{2}, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sec x \end{array}$$

que já é injetiva.

A **inversa de  $f$**  é chamada de **função arco secante**, denota-se por **arcsec**, e define-se do seguinte modo

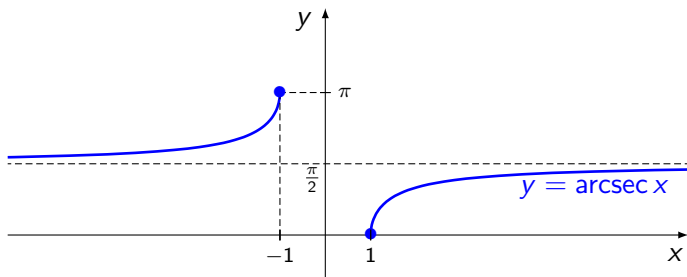
$$\begin{array}{ccc} \text{arcsec} : ] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = \text{arcsec } x \end{array}$$

onde,  $\forall x \in ] - \infty, -1] \cup [1, +\infty[, \forall y \in [0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$$y = \text{arcsec } x \text{ sse } \sec y = x.$$

## Obs. 1.31

**arcsec  $x$**  lê-se arco cuja secante é  $x$ .



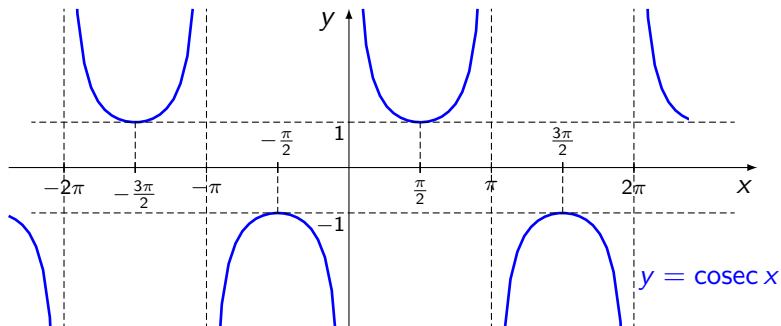
## Def. 1.32

**Função cossecante:**  $\operatorname{cosec} : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longmapsto \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

## Prop. 1.33

**Propriedades da função cossecante:**

- ▶ Domínio:  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- ▶ Contradomínio:  $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ ;
- ▶ Função periódica de período  $2\pi$ , isto é,  
$$\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec}(x + 2k\pi), \forall x \in D \text{ e } k \in \mathbb{Z};$$
- ▶ Função ímpar;
- ▶ Não é injetiva;
- ▶  $(\operatorname{cosec} x)' = -\cotg x \operatorname{cosec} x, \forall x \in D$ .

**Obs. 1.34**

A função cossecante não é injetiva no seu domínio.

No entanto, a sua restrição ao intervalo  $[-\frac{\pi}{2}, 0[ \cup ]0, \frac{\pi}{2}]$  já é injetiva. À inversa dessa restrição chama-se **função arco cossecante**

**Exer. 1.35**

Defina formalmente e esboce o gráfico da função arco cossecante.



Obs. 1.36

Função	Domínio	Contradomínio
$\arcsen x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctg x$	$\mathbb{R}$	$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$
$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$]0, \pi[$
$\operatorname{arcsec} x$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$
$\operatorname{arccosec} x$	$] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$

## Prop. 1.37

$$\mathbf{1} \quad \text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

$$\mathbf{2} \quad \text{cosec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x, \text{ para } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{3} \quad \text{sec}^2 x = 1 + \text{tg}^2 x, \text{ para } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbf{4} \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \text{sen } x \text{sen } y$$

$$\mathbf{5} \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen } x \text{sen } y$$

$$\mathbf{6} \quad \text{sen}(x - y) = \text{sen } x \cos y - \cos x \text{sen } y$$

$$\mathbf{7} \quad \text{sen}(x + y) = \text{sen } x \cos y + \cos x \text{sen } y$$

$$\mathbf{8} \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$$

$$\mathbf{9} \quad \text{sen}(2x) = 2 \text{sen } x \cos x$$

$$\mathbf{10} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\mathbf{11} \quad \text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

## Teo. 1.38

**Teorema da derivada da função inversa**

Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função estritamente monótona e contínua e  $f^{-1}$  a inversa de  $f$ . Se  $f$  é diferenciável em  $x_0 \in ]a, b[$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , então  $f^{-1}$  é diferenciável em  $y_0 = f(x_0)$  e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

## Exer. 1.39

- 1 Sendo  $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e estritamente crescente tal que  $f(2) = 7$  e  $f'(2) = \frac{2}{3}$ , calcule, caso exista,  $(f^{-1})'(7)$ .
- 2 Sabendo que  $f(x) = 4x^3 + x + 2$  é invertível, calcule  $(f^{-1})'(2)$ .
- 3 Seja  $f(x) = x^3$ . Determine a derivada de  $f^{-1}$  utilizando o teorema da função inversa.

## Obs. 1.40

Resulta do teorema da derivada da função inversa que:

$$\mathbf{1} \quad (\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

$$\mathbf{2} \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in ]-1, 1[$$

$$\mathbf{3} \quad (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{4} \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## Exer. 1.41

Prove as fórmulas anteriores usando o teorema da derivada da função inversa.

## Obs. 1.42

Sejam  $u$  e  $v$  funções de  $x$ ,  $k \in \mathbb{R}$  e  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ .

- $(u^k)' = ku^{k-1}u'$
- $(e^u)' = u'e^u$
- $(a^u)' = u'a^u \ln a$
- $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
- $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
- $(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$
- $(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$
- $(\operatorname{tg} u)' = u' \sec^2 u$
- $(\operatorname{cotg} u)' = -u' \operatorname{cosec}^2 u$
- $(\sec u)' = u' \operatorname{tg} u \sec u$
- $(\operatorname{cosec} u)' = -u' \operatorname{cotg} u \operatorname{cosec} u$
- $(\operatorname{arcsen} u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
- $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
- $(\operatorname{arccotg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
- $(u+v)' = u' + v'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

## Exer. 1.43

- 1** Seja  $f(x) = \ln(\arcsen x)$ , com  $x \in ]0, 1[$ .

Calcule  $(f^{-1})'$  utilizando o teorema da função inversa.

- 2** Calcule a derivada das seguintes funções:

(a)  $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$       (c)  $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$

(b)  $f(x) = \arcsen\left(\frac{1}{x^2}\right)$       (d)  $f(x) = \sqrt[3]{\arccos x}$

- 3** Considere a função  $f(x) = \arcsen(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$ .

(a) Determine o domínio de  $f$ .

(b) Mostre que  $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x - x^2}}$

1.8.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad D_{f^{-1}} &= \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ CD_{f^{-1}} &= [-\pi, 0] \\ f^{-1}(y) &= \arcsen(2y) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad D_{f^{-1}} &= \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right] \\ CD_{f^{-1}} &= [0, 2] \\ f^{-1}(y) &= 1 - \sen\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad D_{f^{-1}} &= [-\pi, 0] \\ CD_{f^{-1}} &= [0, 1] \\ f^{-1}(y) &= \sen^2\left(\frac{y+\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

1.14.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad D_{f^{-1}} &= \left[\frac{1}{3}, 1\right] \\ CD_{f^{-1}} &= [0, \pi] \\ f^{-1}(y) &= \arccos\left(\frac{1}{y} - 2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad D_{f^{-1}} &= [\pi, 2\pi] \\ CD_{f^{-1}} &= [-2, 2] \\ f^{-1}(y) &= 2 \cos y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1.20. (a)} \quad D_{f^{-1}} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ CD_{f^{-1}} &= ]-\infty, 0[ \cup ]4, +\infty[ \\ f^{-1}(y) &= 2 - \frac{\pi}{\arctg y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad D_{f^{-1}} &= ]0, \pi[ \\ CD_{f^{-1}} &= \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) &= 1 - \tg\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1.26. (a)} \quad D_{f^{-1}} &= \mathbb{R} \\ CD_{f^{-1}} &= ]0, 3\pi[ \\ f^{-1}(y) &= 3 \operatorname{arccotg}\left(\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad D_{f^{-1}} &= ]\pi, 2\pi[ \\ CD_{f^{-1}} &= \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) &= 2 \cotg(y - \pi) + 1 \end{aligned}$$

1.39.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{3}{2} \\ 2. \quad & 1 \\ 3. \quad & (f^{-1})'(y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \end{aligned}$$

1.43.

$$1. \quad (f^{-1})'(y) = e^y \cos(e^y)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \text{(a)} \quad & 2x \operatorname{arctg} x + 1 \\ \text{(b)} \quad & -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}} \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad -\frac{12x^2 \cos(4x^3)}{1 + \sen^2(4x^3)}$$

$$\text{(d)} \quad -\frac{1}{3\sqrt{1-x^2} \sqrt[3]{\arccos^2 x}}$$

$$3. \quad \text{(a)} \quad [0, 2]$$

# Teoremas do Cálculo Diferencial



## Def. 2.1

Sejam  $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D_f$ .

- ▶  $a$  é um **maximizante local** de  $f$  e  $f(a)$  diz-se um **máximo local** de  $f$  se existir  $\delta > 0$  tal que

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap D_f.$$

- ▶  $a$  é um **minimizante local** de  $f$  e  $f(a)$  diz-se um **mínimo local** de  $f$  se existir  $\delta > 0$  tal que

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in V_\delta(a) \cap D_f.$$

- ▶ Aos máximos e mínimos locais chamamos **extremos locais**.
- ▶ Aos maximizantes e minimizantes locais chamamos **extremantes locais**.

## Def. 2.2

Sejam  $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  e  $a \in D_f$ .

- ▶  $a$  é um **maximizante global** de  $f$  e  $f(a)$  diz-se um **máximo global** de  $f$  se

$$f(a) \geq f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

- ▶  $a$  é um **minimizante global** de  $f$  e  $f(a)$  diz-se um **mínimo global** de  $f$  se

$$f(a) \leq f(x), \quad \forall x \in D_f.$$

- ▶ Aos máximos e mínimos globais chamamos **extremos globais**.
- ▶ Aos maximizantes e minimizantes globais chamamos **extremantes globais**.

## Teo. 2.3

Se  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e  $D_f$  é um conjunto compacto, então  $f$  atinge em  $D_f$  o máximo e o mínimo globais (isto é,  $\exists x_1, x_2 \in D_f$  tais que  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ ,  $\forall x \in D_f$ ).

## Obs. 2.4

Notar que um intervalo  $[a, b]$  é um conjunto compacto. Assim, toda a função contínua em  $[a, b]$  tem aí máximo e mínimo globais.

## Exer. 2.5

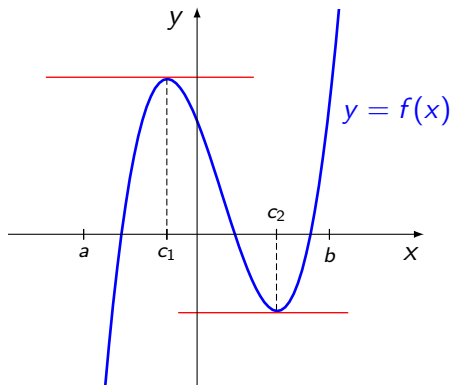
$$\text{Seja } f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- (a) A função  $f$  tem mínimo global em  $[-1, 1]$  ?
- (b) A alínea (a) contradiz o teorema de Weierstrass?

## Prop. 2.6

Seja  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável em  $c \in ]a, b[$ .  
Se  $c$  é um extremante local de  $f$ , então  $f'(c) = 0$ .

Ilustração gráfica:



## Obs. 2.7

- 1** O recíproco da proposição do slide anterior não é verdadeiro. De facto, existem funções com derivada nula em determinado ponto e esse ponto não é extremante.

Por exemplo,  $f(x) = x^3$ , no ponto  $x = 0$ .

- 2** Pode acontecer que a derivada de  $f$  não exista num dado ponto  $x_0$ , mas  $x_0$  ser extremante. Por exemplo:

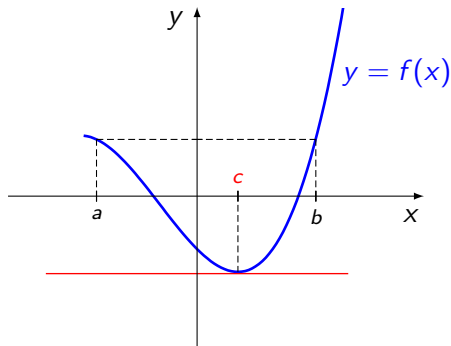
►  $f(x) = |x|$ , no ponto  $x_0 = 0$ .

►  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ , no ponto  $x_0 = 0$

## Teo. 2.8

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ .  
Se  $f(a) = f(b)$ , então existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$

Ilustração Gráfica:



## Cor. 2.9

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ .

- (i) Entre dois zeros de  $f$  existe pelo menos um zero de  $f'$ .
- (ii) Entre dois zeros consecutivos de  $f'$  existe, no máximo, um zero de  $f$ .

## Exer. 2.10

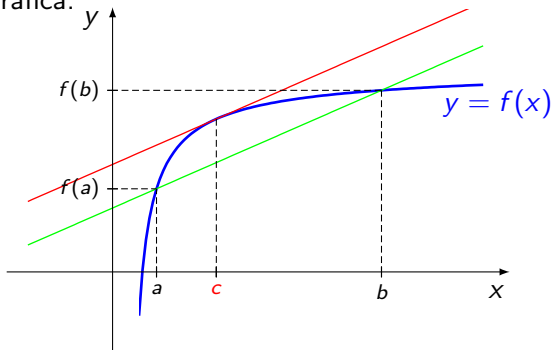
- 1** Seja  $f$  a f.r.v.r. definida por  $f(x) = \arctg((x-1)^2) + 2$ . Usando o Teorema de Rolle, mostre que existe  $c \in ]0, 2[$  tal que  $f'(c) = 0$ .
- 2** Mostre que se  $a > 0$  a equação  $x^3 + ax + b = 0$  não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja  $b \in \mathbb{R}$ .
- 3** Mostre que a função definida por  $f(x) = \sin x + x$  tem um único zero no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

## Teo. 2.11

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e diferenciável em  $]a, b[$ .  
Então, existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ilustração Gráfica:





## Exer. 2.12

**1** Seja  $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} \right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$

- (a) Estude  $f$  quanto à continuidade em  $x = 0$ .  
(b) Mostre que existe pelo menos um  $c \in ]-\frac{2}{\pi}, 0[$  tal que  $f'(c) = \frac{2}{\pi}$ .

**2** Seja  $f(x) = \arcsen(\ln x)$ .

- (a) Determine o domínio de  $f$ .  
(b) Mostre que existe pelo menos um  $c \in ]1, e[$  tal que  $f'(c) = \frac{\pi}{2(e-1)}$ .

**3** Seja  $h$  uma função de domínio  $\mathbb{R}$  tal que  $h'(x) = \cos x \cdot e^{\operatorname{sen}^2 x}$  e  $h(0) = 0$ . Usando o Teorema de Lagrange, mostre que  $h(x) \leq e \cdot x$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}^+$ .

## Prop. 2.13

Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $I$  e diferenciável em  $\text{int}(I)$ . Então

- (i) Se  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in \text{int}(I)$ , então  $f$  é **constante** em  $I$ .
- (ii) Se  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \text{int}(I)$ , então  $f$  é **crescente** em  $I$ .
- (iii) Se  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in \text{int}(I)$ , então  $f$  é **decrescente** em  $I$ .
- (iv) Se  $f'(x) > 0$ ,  $\forall x \in \text{int}(I)$ , então  $f$  é **estritamente crescente** em  $I$ .
- (v) Se  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in \text{int}(I)$ , então  $f$  é **estritamente decrescente** em  $I$ .

## Prop. 2.14

Seja  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b] \subseteq D_f$  e diferenciável em  $]a, b[$ , exceto possivelmente em  $c \in ]a, b[$ . Então,

- (i) se  $f'(x) > 0, \forall x < c$ , e  $f'(x) < 0, \forall x > c$ ,  
então  $f(c)$  é um **máximo local** de  $f$ .
- (ii) se  $f'(x) < 0, \forall x < c$ , e  $f'(x) > 0, \forall x > c$ ,  
então  $f(c)$  é um **mínimo local** de  $f$ .

## Exer. 2.15

**1** Seja  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

(a) Determine o domínio de  $f$ .

(b) Estude  $f$  quanto à monotonia e existência de extremos locais.

**2** Mostre que  $g(x) = x + 2 \sin x - 1$  tem um único zero em  $]0, \frac{\pi}{2}[$ .

**3** Mostre que  $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R}$ .

## Teo. 2.16

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções contínuas em  $[a, b]$  e diferenciáveis em  $]a, b[$ . Se  $g'(x) \neq 0$ , para todo o  $x \in ]a, b[$ , então existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} .$$

## Obs. 2.17

Do Teorema de Cauchy pode estabelecer-se uma regra — **Regra de Cauchy** — de grande utilidade no cálculo de limites quando ocorrem indeterminações do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  ou  $\frac{0}{0}$  .

Nos cinco slides seguintes enunciam-se as várias formas dessa regra.

## Prop. 2.18

Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em  $I = ]a, b[$  tais que,  $\forall x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$  e  $g'(x) \neq 0$ . Se

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x)$  são ambos nulos ou ambos infinitos

e existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

## Prop. 2.19

Sejam  $f$  e  $g$  funções diferenciáveis em  $I = ]a, b[$  tais que,  $\forall x \in I$ ,  $g(x) \neq 0$  e  $g'(x) \neq 0$ . Se

$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} g(x)$  são ambos nulos ou ambos infinitos

e existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

## Prop. 2.20

Sejam  $I = ]a, b[$  e  $c \in I$ . Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $I$  e diferenciáveis em  $I \setminus \{c\}$ , tais que  $g(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I \setminus \{c\}$ .

Se  $g'(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in I \setminus \{c\}$ ,

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow c} g(x)$  são ambos nulos ou ambos infinitos

e existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Prop. 2.21

Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $I = ]a, +\infty[$  e diferenciáveis em  $I$ , com  $g(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Se  $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$ ,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  são ambos nulos ou ambos infinitos

e

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$



## Prop. 2.22

Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $I = ] - \infty, b[$  e diferenciáveis em  $I$ , com  $g(x) \neq 0, \forall x \in I$ . Se  $g'(x) \neq 0, \forall x \in I$ ,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  são ambos nulos ou ambos infinitos

e

$$\text{existe } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

## Exer. 2.23

**1** Calcule, caso existam, os seguintes limites:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\arctg x}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+3)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arcsen x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \ln(-x)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x)^{\ln x}$$

**2** Mostre que existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sen x}{x + \sen x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

2.5.

- (a) Não
- (b) Não

2.12.

- 1.(a) É contínua em  $x = 0$

2.(a)  $\left[\frac{1}{e}, e\right]$

2.15.

- 1.(a)  $\mathbb{R}^+$
- (b) Est. crescente em  $]0, e[$   
Est. decrescente em  $]e, +\infty[$   
Máximo em  $x = e$  cujo valor é  $\frac{1}{e}$

2.23.

- 1. (a)  $\frac{2}{3}$
- (b) 1
- (c) 0
- (d) 0
- (e) 0
- (f)  $-\infty$
- (g) 1
- (h) 1
- (i)  $e$
- (j) 1

- 2. 1

# Integrais Indefinidos

*Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).*

## Def. 3.1

Seja  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função, onde  $I$  é um intervalo não degenerado (isto é, com mais do que um ponto) de  $\mathbb{R}$ . Chama-se **primitiva ou antiderivada de  $f$**  a toda a função  $F$  diferenciável em  $I$  tal que, para todo o  $x \in I$ ,

$$F'(x) = f(x).$$

Se  $f$  admite uma primitiva em  $I$  dizemos que  $f$  é **primitivável em  $I$** .

## Obs. 3.2

- Caso  $I = [a, b]$ , dizer que  $F$  é diferenciável em  $I$  significa que, para todo o  $x \in ]a, b[$ ,  $F$  é diferenciável em  $x$  e que existem e são finitas  $F'_+(a)$  e  $F'_-(b)$ .

Convenções análogas para  $I = [a, b[$  ou  $I = ]a, b]$ .

- Toda a primitiva de uma função é uma função contínua.

## Exer. 3.3

Indique uma primitiva das seguintes funções (no intervalo indicado)

(a)  $f(x) = 2x$ , em  $\mathbb{R}$

(b)  $f(x) = e^x$ , em  $\mathbb{R}$

(c)  $f(x) = \cos x$ , em  $\mathbb{R}$

(d)  $f(x) = \frac{1}{x}$ , em  $\mathbb{R}^+$

## Prop. 3.4

Seja  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função e  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva de  $f$  em  $I$ . Então, para cada  $C \in \mathbb{R}$ ,  $G(x) = F(x) + C$  é também uma primitiva de  $f$  em  $I$ .

## Prop. 3.5

Se  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  são duas primitivas de  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , então existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $F(x) - G(x) = C$ , para todo o  $x \in I$ .

## Def. 3.6

À família de todas as primitivas de uma função  $f$  chamamos **integral indefinido de  $f$** . Denota-se esse conjunto de funções por

$$\int f(x) dx.$$

A  $f$  chamamos **função integranda** e a  $x$  **variável de integração**.

## Obs. 3.7

**1** Atendendo à segunda proposição do slide anterior,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

**2** Se  $f$  for diferenciável, então

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Obs. 3.8

$$\textbf{1} \quad \int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\textbf{2} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad (\text{onde } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ou } x \in \mathbb{R}^-)$$

$$\textbf{3} \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{4} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\textbf{5} \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{6} \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$



## Obs. 3.8 (cont.)

$$\textbf{7} \quad \int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{8} \quad \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{9} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsen x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{10} \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{11} \quad \int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{12} \quad \int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Prop. 3.9

Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $I$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos.

Se  $f$  e  $g$  são primitiváveis em  $I$ , então  $\alpha f + \beta g$  é primitivável em  $I$  e

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx .$$

## Exer. 3.10

Calcule:

(a)  $\int (2^x - 3 \operatorname{sen} x) dx$

(c)  $\int \frac{x+3}{x^2} dx$

(b)  $\int (x+3)x^2 dx$

(d)  $\int \sqrt[5]{x^3} dx$

## Prop. 3.11

Sejam  $I$  e  $J$  dois intervalos de números reais,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que a composta  $f \circ g$  está definida.

Se  $g$  é diferenciável em  $J$ , então  $(f \circ g)g'$  é primitivável e tem-se

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

onde  $F$  é uma primitiva de  $f$ .

## Exemplo de aplicação

$$\int 2x \cos(x^2) dx = \sin(x^2) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Obs. 3.12

(Esta lista generaliza os slides 56 e 57, e é uma consequência da Prop. 3.11)

Seja  $u$  uma função de  $x$ .

$$\mathbf{1} \quad \int u' u^p dx = \frac{u^{p+1}}{p+1} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\mathbf{2} \quad \int \frac{u'}{u} dx = \ln |u| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{3} \quad \int u' e^u dx = e^u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{4} \quad \int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

$$\mathbf{5} \quad \int u' \sin u dx = -\cos u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{6} \quad \int u' \cos u dx = \sin u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Obs. 3.12 (cont.)

$$\textbf{7} \quad \int u' \sec^2 u \, dx = \operatorname{tg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{8} \quad \int u' \operatorname{cosec}^2 u \, dx = -\operatorname{cotg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{9} \quad \int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{10} \quad \int \frac{u'}{1+u^2} \, dx = \operatorname{arctg} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{11} \quad \int u' \sec u \operatorname{tg} u \, dx = \sec u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\textbf{12} \quad \int u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u \, dx = -\operatorname{cosec} u + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

## Exer. 3.13

Determine os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int \frac{x^4}{1+x^5} dx \quad (f) \int e^{\operatorname{tg} x} \sec^2 x dx \quad (k) \int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(b) \int \operatorname{sen}(\sqrt{2}x) dx \quad (g) \int \frac{x}{x^2+9} dx \quad (l) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$(c) \int x 7^{x^2} dx \quad (h) \int \frac{1}{(x+9)^2} dx \quad (m) \int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$(d) \int \operatorname{tg} x dx \quad (i) \int \frac{1}{x^2+9} dx \quad (n) \int \frac{5}{x \ln^3 x} dx$$

$$(e) \int \operatorname{sen} x \cos^5 x dx \quad (j) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad (o) \int \frac{1}{x \ln x} dx$$

## Exer. 3.14

**1** Determine a primitiva da função  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$  que se anula no ponto  $x = 2$ .

**2** Determine a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$f'(x) = \frac{2e^x}{3 + e^x} \quad \text{e} \quad f(0) = \ln 4.$$

**3** Sabendo que a função  $f$  satisfaz a igualdade

$$\int f(x) dx = \sin x - x \cos x - \frac{1}{2}x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

determinar  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ .

## Prop. 3.15

Sejam  $u$  e  $v$  funções de  $x$  diferenciáveis em  $I$ . Então

$$\int u'v \, dx = uv - \int uv' \, dx.$$

## Exemplo de aplicação

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\ln x}_v \, dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$



## Obs. 3.16

- ▶ Esta fórmula é útil sempre que a função integranda se pode escrever como o produto de duas funções e, além disso, é conhecida uma primitiva de pelo menos uma delas.
- ▶ Sabendo primitivar apenas uma das funções, escolhe-se essa para primitivar e deriva-se a outra função.
- ▶ Quando conhecemos uma primitiva de cada uma das funções, devemos escolher para derivar a função que mais se simplifica por derivação. Por vezes essa escolha é indiferente.
- ▶ Por vezes é necessário efetuar várias aplicações sucessivas da fórmula de integração por partes.
- ▶ Por vezes obtém-se novamente o integral que se pretende determinar. Nesses casos, interpreta-se a igualdade obtida como uma equação em que a incógnita é o integral que se pretende determinar.

## Exer. 3.17

Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a)  $\int x \cos x \, dx$

(e)  $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

(b)  $\int e^{-3x}(2x + 3) \, dx$

(f)  $\int e^{2x} \sin x \, dx$

(c)  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$

(g)  $\int \sin(\ln x) \, dx$

(d)  $\int x^3 \ln x \, dx$

(h)  $\int \ln^2 x \, dx$

## Obs. 3.18

**1 Potências ímpares de  $\sin x$  ou  $\cos x$** 

Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função usando  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

**2 Potências pares de  $\sin x$  ou  $\cos x$** 

Passam-se para o arco duplo através das fórmulas

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{ou} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

**3 Produtos onde existem fatores tipo  $\sin(mx)$  ou  $\cos(nx)$** 

Aplicam-se as fórmulas

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x - y) - \cos(x + y));$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x + y) + \cos(x - y));$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2} (\sin(x + y) + \sin(x - y)).$

## Obs. 3.18 (cont.)

**4 Potências pares e ímpares de  $\operatorname{tg} x$  ou  $\operatorname{cotg} x$** 

Destaca-se  $\operatorname{tg}^2 x$  ou  $\operatorname{cotg}^2 x$  e aplicam-se as fórmulas

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1.$$

**5 Potências pares de  $\sec x$  ou  $\operatorname{cosec} x$** 

Destaca-se  $\sec^2 x$  ou  $\operatorname{cosec}^2 x$  e ao fator resultante aplicam-se as fórmulas

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \quad \text{ou} \quad \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x.$$

**6 Potências ímpares de  $\sec x$  ou  $\operatorname{cosec} x$** 

Destaca-se  $\sec^2 x$  ou  $\operatorname{cosec}^2 x$  e primitiva-se por partes escolhendo esse fator para primitivar.

## Exer. 3.19

Determine os seguintes integrais indefinidos:

(a)  $\int \cos^2 x \, dx$

(f)  $\int \sec^6 x \, dx$

(b)  $\int \sin^3 x \, dx$

(g)  $\int \sin x \cos^2 x \, dx$

(c)  $\int \operatorname{tg}^6 x \, dx$

(h)  $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$

(d)  $\int \sin^4 x \, dx$

(i)  $\int \sin(3x) \cos(4x) \, dx$

(e)  $\int \sec^3 x \, dx$

(j)  $\int \sin(2x) \sin(-3x) \, dx$

## Prop. 3.20

Sejam  $I$  e  $J$  intervalos de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função primitivável e  $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e invertível tal que  $\varphi(J) \subseteq I$ . Então a função  $(f \circ \varphi)\varphi'$  é primitivável e, sendo  $H$  uma primitiva de  $(f \circ \varphi)\varphi'$ , tem-se que  $H \circ \varphi^{-1}$  é uma primitiva de  $f$ .

## Obs. 3.21

Na prática, quando calculamos uma primitiva recorrendo à proposição anterior, usando a mudança de variável  $x = \varphi(t)$ , escrevemos, por abuso de linguagem,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = H(\varphi^{-1}(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

## Exemplo de aplicação da técnica de primitivação por substituição

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx$$

Substituição de variável:  $\sqrt{2x} = t$ , donde resulta  $x = \frac{t^2}{2}$ ,  $t \geq 0$ .

$\varphi(t) = \frac{t^2}{2}$  é diferenciável e invertível em  $\mathbb{R}_0^+$  e  $\varphi'(t) = t$ . Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sqrt{2x}} dx &= \int \frac{t}{1 + t} dt \\ &= \int \left( 1 - \frac{1}{1 + t} \right) dt \\ &= t - \ln |1 + t| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\ &= \sqrt{2x} - \ln(1 + \sqrt{2x}) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

## Exer. 3.22

Determine, usando a técnica de integração por substituição, os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int x^2 \sqrt{1-x} \, dx$$

$$(e) \int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} \, dx$$

$$(b) \int x(2x+5)^{10} \, dx$$

$$(f) \int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx$$

$$(c) \int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx$$

$$(g) \int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} \, dx$$

$$(d) \int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$(h) \int \frac{\ln x}{x(1 + \ln^2 x)} \, dx$$



## Obs. 3.23

As **substituições trigonométricas** dadas na seguinte tabela permitem transformar a primitivação de uma função que envolve radicais na primitivação de uma função trigonométrica.

função com o radical	substituição
$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}, a, b > 0$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} t, \text{ com } t \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\sqrt{a^2 + b^2 x^2}, a, b > 0$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{tg} t, \text{ com } t \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
$\sqrt{b^2 x^2 - a^2}, a, b > 0$	$x = \frac{a}{b} \operatorname{sec} t, \text{ com } t \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

## Exer. 3.24

Determine os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9 - x^2}} dx$$

$$(e) \int \sqrt{4 - (x + 1)^2} dx$$

$$(b) \int x \sqrt{8 + x^2} dx$$

$$(f) \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(c) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 7}} dx$$

$$(g) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

$$(d) \int \frac{1}{x \sqrt{x^2 + 4}} dx$$

$$(h) \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$$

## Def. 3.25

Uma função cuja expressão analítica admite a forma

$$\frac{N(x)}{D(x)}$$

onde  $N$  e  $D$  são polinómios em  $x$  com coeficientes reais e  $D$  é não nulo, diz-se uma **função racional**.

Caso  $\text{grau}(N) < \text{grau}(D)$  dizemos que  $\frac{N(x)}{D(x)}$  é uma **fração própria**.

## Prop. 3.26

Se  $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$ , então existem polinómios  $Q$  e  $R$  tais que

$$N(x) = D(x)Q(x) + R(x),$$

com  $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$ .

A  $Q$  e  $R$  chamamos quociente e resto da divisão de  $N$  por  $D$ , respetivamente.

## Obs. 3.27

Assim, caso  $\text{grau}(N) \geq \text{grau}(D)$ ,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

$\swarrow$                        $\searrow$   
polinómio              fração própria

Como

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) dx + \int \frac{R(x)}{D(x)} dx ,$$

e a primitivação de funções polinomiais é imediata, a primitivação de funções racionais reduz-se à primitivação de frações próprias, que por sua vez se pode reduzir à **primitivação de frações simples**.

## Def. 3.28

Chamamos **fração simples** a toda a fração do tipo

$$\frac{A}{(x - \alpha)^p} \quad \text{ou} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^q},$$

onde  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $B, C \in \mathbb{R}$  não simultaneamente nulos e  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  são tais que  $\beta^2 - 4\gamma < 0$ .

## Exemplos de frações simples

$$\frac{2}{x-1}, \quad \frac{1}{x^2}, \quad \frac{x-2}{x^2+x+1}, \quad \frac{1}{(x^2+x+2)^3}$$

## Prop. 3.29

Toda a fração própria pode ser decomposta numa soma de frações simples.

Obs. 3.30

Fração a decompor:  $\frac{R(x)}{D(x)}$ , com  $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$

### Procedimento

**1** Decompor  $D(x)$  em fatores irreduzíveis:

$$D(x) = a(x - \alpha_1)^{p_1} \dots (x - \alpha_n)^{p_n} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{q_1} \dots (x^2 + \beta_m x + \gamma_m)^{q_m}$$

onde  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $p_i, q_j \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ , com  $\beta_j^2 - 4\gamma_j < 0$ , para  $i = 1, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, m$ .

**2** Fazer corresponder a cada factor de  $D(x)$  uma determinada fração simples de acordo com o seguinte:

(i) Ao fator de  $D(x)$  do tipo  $(x - \alpha)^r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) corresponde

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r}$$

onde  $A_1, \dots, A_r$  são constantes reais a determinar.

## Procedimento (cont.)

(ii) Ao fator de  $D(x)$  do tipo

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^s, \text{ com } \beta^2 - 4\gamma < 0 \text{ e } s \in \mathbb{N}$$

corresponde

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + \beta x + \gamma} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + \beta x + \gamma)^2} + \cdots + \frac{B_sx + C_s}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$$

onde  $B_i, C_i$  são constantes reais a determinar,  $i = 1, \dots, s$ .

- 3** Escrever  $\frac{R(x)}{D(x)}$  como soma dos elementos simples identificados no ponto anterior e determinar as constantes que neles ocorrem, usando o método dos coeficientes indeterminados.

## Primitivação de Frações Simples

**1** Fração do tipo:  $\frac{A}{(x - \alpha)^r}$

$$\text{Se } r = 1, \int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \ln |x - \alpha| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } r \neq 1, \int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = \frac{A(x - \alpha)^{-r+1}}{-r + 1} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

**2** Fração do tipo:  $\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^s}$

Reduz-se à primitivação de frações do tipo (i) ou (ii):

$$(i) \quad \frac{t}{(1 + t^2)^s}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{(1 + t^2)^s}$$



## Primitivação das frações do tipo (i) e (ii) do slide anterior

(i) Fração do tipo:  $\frac{t}{(1+t^2)^s}$

$$\text{Se } s = 1, \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } s \neq 1, \int \frac{t}{(1+t^2)^s} dt = \frac{(1+t^2)^{-s+1}}{2(-s+1)} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

(ii) Fração do tipo:  $\frac{1}{(1+t^2)^s}$

$$\text{Se } s = 1, \int \frac{1}{1+t^2} dt = \arctg t + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Se  $s \neq 1$ , aplica-se o método de primitivação por partes recursivamente, partindo de  $\int \frac{1}{1+t^2} dt$ .

## Exer. 3.31

Determine os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} dx$$

$$(e) \int \frac{x + 2}{x(x^2 + 4)} dx$$

$$(b) \int \frac{2x - 1}{(x - 2)(x - 3)(x + 1)} dx$$

$$(f) \int \frac{x^3 + 4x - 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$(c) \int \frac{x + 2}{(x - 1)(x + 3)^2} dx$$

$$(g) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x^2} dx$$

$$(d) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx$$

$$(h) \int \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

## Exer. 3.32

Determine os seguintes integrais indefinidos:

$$(a) \int e^{2x} \operatorname{sen}(e^{2x}) dx$$

$$(e) \int x \ln(1 + x^2) dx$$

$$(b) \int x \sqrt{(1 - x^2)^3} dx$$

$$(f) \int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$$

$$(c) \int x^2 \operatorname{arctg} x dx$$

$$(g) \int \sqrt{9 - x^2} dx$$

$$(d) \int \frac{(\operatorname{arcsen} x)^3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$(h) \int \frac{6x^2 - 7x - 1}{(2x^2 + 1)(x - 2)} dx$$

3.3.

- (a)  $x^2$
- (b)  $e^x + 3$
- (c)  $\sin x$
- (d)  $\ln x$

3.10.

- (a)  $\frac{2^x}{\ln 2} + 3 \cos x + c, c \in \mathbb{R}$
- (b)  $\frac{x^4}{4} + x^3 + c, c \in \mathbb{R}$
- (c)  $\ln |x| - \frac{3}{x} + c, c \in \mathbb{R}$
- (d)  $\frac{5}{8}x^{\frac{8}{5}} + c, c \in \mathbb{R}$

3.13.

- (a)  $\frac{1}{5} \ln |1 + x^5| + c, c \in \mathbb{R}$
- (b)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\sqrt{2}x) + c, c \in \mathbb{R}$
- (c)  $\frac{7x^2}{2 \ln 7} + c, c \in \mathbb{R}$
- (d)  $-\ln |\cos x| + c, c \in \mathbb{R}$
- (e)  $-\frac{\cos^6 x}{6} + c, c \in \mathbb{R}$
- (f)  $e^{\lg x} + c, c \in \mathbb{R}$
- (g)  $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 9| + c, c \in \mathbb{R}$

(h)  $-\frac{1}{x+9} + c, c \in \mathbb{R}$

(i)  $\frac{1}{3} \arctg\left(\frac{x}{3}\right) + c, c \in \mathbb{R}$

(j)  $\arctg(e^x) + c, c \in \mathbb{R}$

(k)  $\frac{3}{2} \arcsen(x^2) + c, c \in \mathbb{R}$

(l)  $-\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + c, c \in \mathbb{R}$

(m)  $\frac{\ln^2 x}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(n)  $-\frac{5}{2} \frac{1}{\ln^2 x} + c, c \in \mathbb{R}$

(o)  $\ln |\ln x| + c, c \in \mathbb{R}$

3.14.

1.  $-\frac{1}{x} + x - \frac{3}{2}$
2.  $2 \ln |3 + e^x| - \ln 4$
3.  $\frac{\pi}{4} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right)$

3.17.

- (a)  $x \sin x + \cos x + c, c \in \mathbb{R}$
- (b)  $-\frac{e^{-3x}(6x+11)}{9} + c, c \in \mathbb{R}$
- (c)  $x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c, c \in \mathbb{R}$
- (d)  $\frac{x^4}{4} \left( \ln x - \frac{1}{4} \right) + c, c \in \mathbb{R}$

(e)  $\frac{e^{x^2}(x^2-1)}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(f)  $\frac{e^{2x}(2 \sin x - \cos x)}{5} + c, c \in \mathbb{R}$

(g)  $\frac{x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))}{2} + c, c \in \mathbb{R}$

(h)  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + c, c \in \mathbb{R}$

3.19.

- (a)  $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2} \sin(2x)) + c, c \in \mathbb{R}$
- (b)  $-\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c, c \in \mathbb{R}$
- (c)  $\frac{\lg^5 x}{5} - \frac{\lg^3 x}{3} + \lg x - x + c, c \in \mathbb{R}$
- (d)  $\frac{12x - 8 \sin(2x) + \sin(4x)}{32} + c, c \in \mathbb{R}$
- (e)  $\frac{\sec x \lg x + \ln |\sec x + \lg x|}{2} + c, c \in \mathbb{R}$
- (f)  $\frac{\lg^5 x}{5} + \frac{2 \lg^3 x}{3} + \lg x + c, c \in \mathbb{R}$
- (g)  $-\frac{\cos^3 x}{3} + c, c \in \mathbb{R}$
- (h)  $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{2 \cos^5 x}{5} - \frac{\cos^7 x}{7} + c, c \in \mathbb{R}$
- (i)  $\frac{1}{2} \left( \cos x - \frac{\cos(7x)}{7} \right) + c, c \in \mathbb{R}$
- (j)  $\frac{1}{2} \left( \frac{\sin(5x)}{5} - \sin x \right) + c, c \in \mathbb{R}$

3.22.

$$(a) -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{7}(1-x)^{\frac{7}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(b) \frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{5}{44}(2x+5)^{11} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(c) 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{e^x - 1}) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(d) -2 \cos(\sqrt{x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(e) \frac{3}{2} \ln |x^{\frac{2}{3}} + 1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(f) \operatorname{arctg}(\ln x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(g) -\frac{1}{e^{x+1}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(h) \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

3.24.

$$(a) -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(b) \frac{1}{3}(8+x^2)^{\frac{3}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(c) \frac{\sqrt{x^2-7}}{7x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(d) -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{x} + \frac{2}{x} \right| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(e) 2 \arcsen \left( \frac{x+1}{2} \right) + \frac{(x+1)\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(f) \frac{1}{2} \arcsen x - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(g) \sqrt{x^2-1} - \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(h) 2 \arcsen \left( \frac{x}{2} \right) - \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4} + c, c \in \mathbb{R}$$

3.31.

$$(a) 3 \ln|x-3| - 2 \ln|x-2| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(b) -\ln|x-2| + \frac{5}{4} \ln|x-3| - \frac{1}{4} \ln|x+1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(c) \frac{1}{16} \left( -\frac{4}{x+3} + 3 \ln|x-1| - 3 \ln|x+3| \right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(d) \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(e) \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{4} \ln(4+x^2) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} \right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(f) \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{2} \right) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(g) x + \frac{1}{x} - \ln|x| + 2 \ln|x-1| + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(h) \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 5) - \operatorname{arctg}(x+2) + c, c \in \mathbb{R}$$

3.32.

$$(a) -\frac{1}{2} \cos(e^{2x}) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(b) -\frac{1}{5}(1-x^2)^{\frac{5}{2}} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(c) \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(d) \frac{(\arcsen x)^4}{4} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(e) \frac{1+x^2}{2} (\ln(1+x^2) - 1) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(f) \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} - \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$(g) \frac{9}{2} \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + c, c \in \mathbb{R}$$

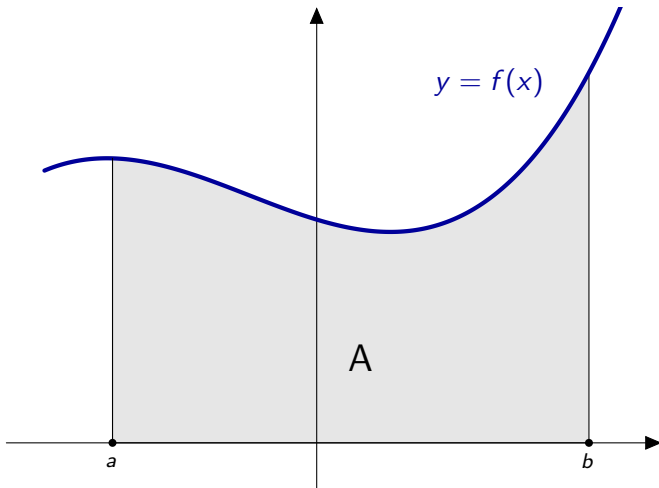
$$(h) \ln|x-2| + \ln(2x^2+1) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x) + c, c \in \mathbb{R}$$

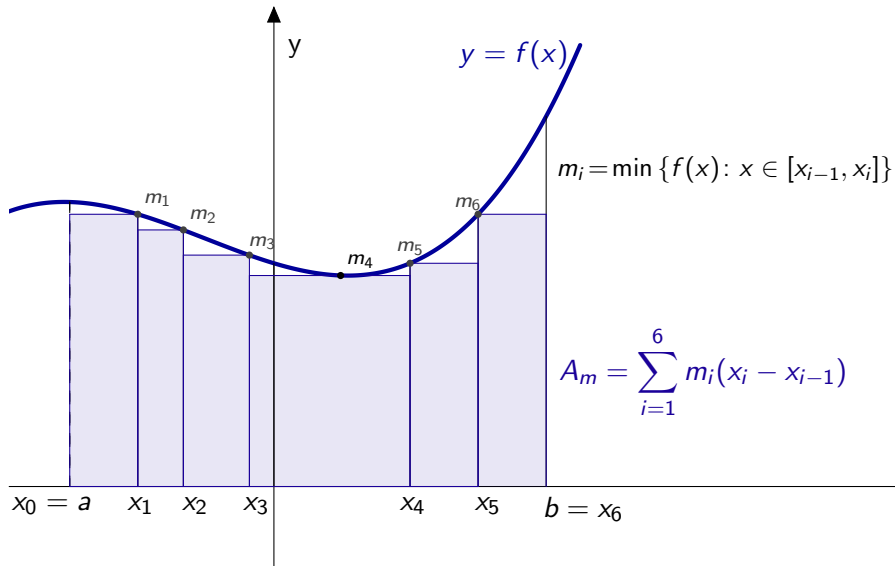
# Integrais Definidos

*Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).*

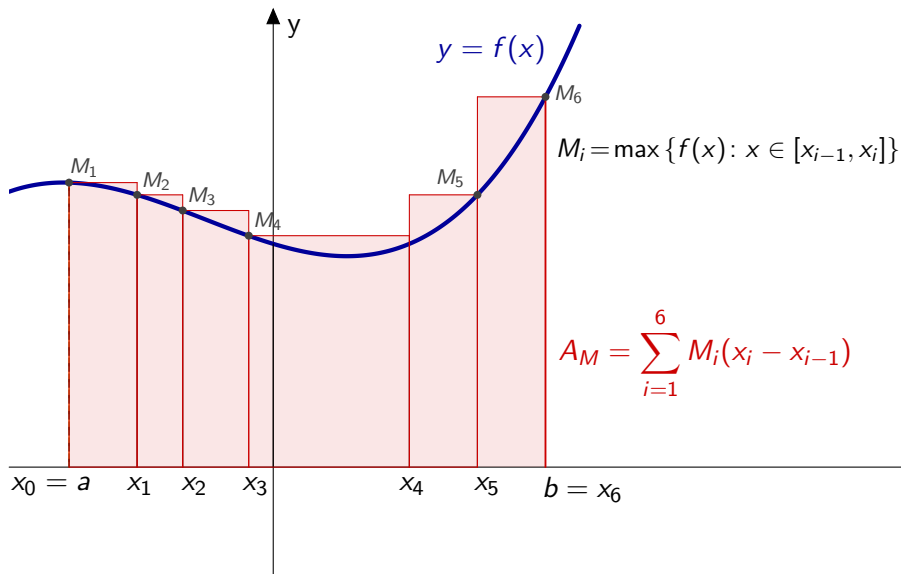
Questão:

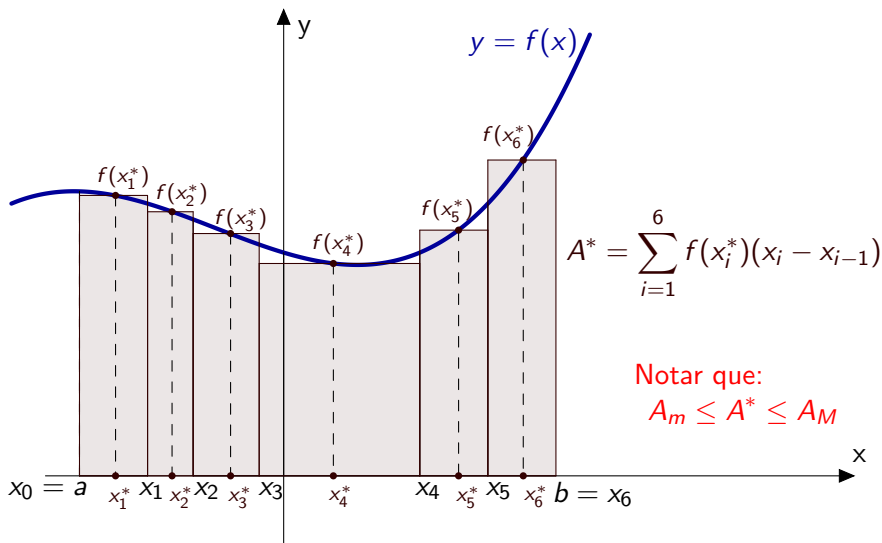
Como calcular a área delimitada pelo gráfico de  $f$ , pelas retas  $x = a$ ,  $x = b$  e  $y = 0$  ?











## Def. 4.1

- Chama-se **partição** de  $[a, b]$  a todo o subconjunto finito de  $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

tal que  $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_n \equiv b$ .

- Chama-se **diâmetro de  $\mathcal{P}$** , e denota-se por  $\Delta\mathcal{P}$ , à maior das amplitudes dos intervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , isto é,

$$\Delta\mathcal{P} = \max \{x_i - x_{i-1} : i = 1, 2, \dots, n\} .$$

- Chama-se **seleção de  $\mathcal{P}$**  a todo o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

tal que  $x_1^* \in [x_0, x_1]$ ,  $x_2^* \in [x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$ .

## Def. 4.2

Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  e  $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  uma sua seleção. Chama-se **soma de Riemann de  $f$  associada à partição  $\mathcal{P}$  e seleção  $\mathcal{C}$**  à seguinte soma,

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) := \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

## Exer. 4.3

- 1 Determine uma partição  $\mathcal{P}$  de  $[0, 4]$  com 4 pontos e uma sua seleção  $\mathcal{C}$ .
- 2 Calcular a soma de Riemann de  $f(x) = \sqrt{x}$  associada à partição  $\mathcal{P}$  e seleção  $\mathcal{C}$  anteriores.

## Obs. 4.4

Nos slides anteriores, as somas  $A_m$ ,  $A_M$  e  $A^*$  são somas de Riemann de  $f$  para uma mesma partição de  $[a, b]$  em 6 sub-intervalos, para três seleções diferentes.

## Def. 4.5

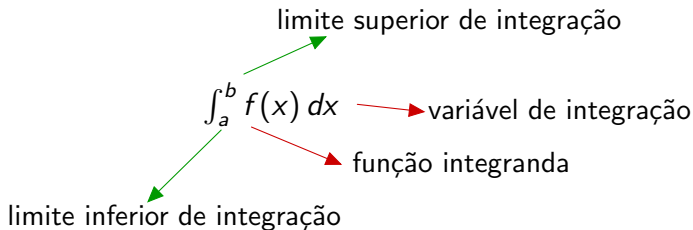
Sejam  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I \in \mathbb{R}$ . Diz-se que  $I$  é o integral de Riemann (ou integral definido) de  $f$  em  $[a, b]$  (ou de  $a$  para  $b$ ) se para todo o  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, para toda a partição  $\mathcal{P}$  de  $[a, b]$ , tal que  $\Delta\mathcal{P} < \delta$ , se tem

$$|S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) - I| < \epsilon$$

para toda a seleção  $\mathcal{C}$  de  $\mathcal{P}$ .

Caso exista  $I$ , nas condições anteriores, diz-se que  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e escreve-se

$$I = \int_a^b f(x) dx .$$

**Obs. 4.6**

- A variável de integração é uma variável muda, i.e., podemos escrever

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du, \text{ por exemplo.}$$

- Na definição de integral de Riemann considerou-se  $a < b$ .

Caso  $a = b$ ,  $\int_a^b f(x) dx = 0$  ;

Caso  $a > b$ ,  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  .

## Prop. 4.7

Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $I$  um número real.

Então  $I$  é o integral de Riemann de  $f$  de  $a$  para  $b$  se e só se, para toda a sucessão  $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partições do intervalo  $[a, b]$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\Delta \mathcal{P}_n) = 0$$

se tem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I ,$$

para toda a sucessão  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}_n$  é uma seleção de  $\mathcal{P}_n$ .

## Exer. 4.8

- 1** Sabendo que  $f$  definida por  $f(x) = x$  é integrável em  $[0, 1]$ , mostre usando a proposição anterior que

$$\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$$

- 2** Seja  $k \in \mathbb{R}$ . Sabendo que  $f$  definida por  $f(x) = k$  é integrável no intervalo  $[a, b]$ , mostre usando a proposição anterior que

$$\int_a^b k \, dx = k(b - a)$$

## Obs. 4.9

O cálculo do valor de  $\int_a^b f(x) \, dx$  usando a definição pode por vezes ser complicado. Mais à frente veremos como determinar o valor do integral conhecendo apenas uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ .



## Prop. 4.10

Seja  $f$  uma f.r.v.r definida em  $[a, b]$ . Então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  se e só se, para todo o  $\epsilon > 0$ , existe uma partição

$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  do intervalo  $[a, b]$  tal que, para todas as seleções  $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  e  $\mathcal{C}' = \{x_1', x_2', \dots, x_n'\}$  de  $\mathcal{P}$ , se tem

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i^*) - f(x_i')|(x_i - x_{i-1}) < \epsilon .$$

## Exer. 4.11

Verifique que a função definida por

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

é limitada mas não é integrável em  $[0, 1]$ .

## Prop. 4.12

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  então  $f$  é limitada em  $[a, b]$ .

## Obs. 4.13

- A proposição anterior permite concluir que  $f$  não é limitada em  $[a, b] \Rightarrow f$  não é integrável em  $[a, b]$ .
- A proposição anterior é apenas necessária, isto é, existem funções limitadas num intervalo que não são integráveis nesse intervalo (ver Exer. 6.11).

## Exer. 4.14

Mostre que a função  $f$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

não é integrável em qualquer intervalo  $[a, b]$ , onde  $a < 0 < b$ .

## Prop. 4.15

Seja  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- 1** Se  $f$  for contínua em  $[a, b]$  então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .
- 2** Se  $f$  for limitada em  $[a, b]$  e descontínua num número finito de pontos então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .
- 3** Se  $f$  for monótona em  $[a, b]$  então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .

## Prop. 4.16

Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $[a, b]$ . Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $g$  difere de  $f$  apenas num número finito de pontos (isto é,  $f(x) = g(x)$ , para todo o  $x \in [a, b]$ , exceto para um número finito de valores de  $x$ ), então

$$g \text{ é integrável em } [a, b] \text{ e } \int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx .$$

## Exer. 4.17

Diga, justificando, se as seguintes funções são integráveis no intervalo considerado:

**1**  $f(x) = \cos(x^2 - 2x)$ , em  $[0, 4]$

**2**  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[ \\ 2 & \text{se } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ , em  $[0, \frac{\pi}{2}]$

**3**  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [-2, 0[ \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } x \in ]0, 1] \end{cases}$ , em  $[-2, 1]$

**4**  $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \in [3, 7] \text{ e } x \notin \mathbb{N} \\ 1 & \text{se } x \in [3, 7] \cap \mathbb{N} \end{cases}$ , em  $[3, 7]$

## Prop. 4.18

Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis em  $[a, b]$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- 1**  $f + g$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx;$$

- 2**  $\alpha f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx;$

- 3**  $f \cdot g$  é integrável em  $[a, b];$

- 4**  $f$  é integrável em qualquer sub-intervalo  $[c, d]$  de  $[a, b];$

- 5** Se  $c \in ]a, b[$ , então  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e em  $[c, b]$  e

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

## Prop. 4.18 (cont.)

**6** Se  $f(x) \geq 0$ , para todo o  $x \in [a, b]$ , então  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ;

**7** Se  $f(x) \leq g(x)$ , para todo o  $x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx ;$$

**8** Se  $m \leq f(x) \leq M$ , para todo o  $x \in [a, b]$ , onde  $m, M \in \mathbb{R}$ , então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) ;$$

**9**  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$ .

## Exer. 4.19

**1** Mostre que  $\int_0^2 e^{-x^2} dx \geq 0$ .

**2** Sabendo que

$$\int_1^3 f(x) dx = 5 \quad \text{e} \quad \int_7^1 f(x) dx = -11,$$

calcule  $\int_3^7 f(x) dx$ .

**3** Mostre que se  $f$  é uma função contínua e estritamente crescente no intervalo  $[1, 3]$ , então

$$f(1) < \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx < f(3).$$

## Teo. 4.20

Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$  e

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Então

- (i)  $F$  é contínua em  $[a, b]$ ;
- (ii) se  $f$  é contínua em  $c \in ]a, b[$ , então  $F$  é diferenciável em  $c$  e  $F'(c) = f(c)$ .

## Cor. 4.21

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$  e  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

Então  $F$  é diferenciável em  $[a, b]$  e tem-se que

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

isto é,

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$



## Exer. 4.22

- 1** Calcule  $F'(x)$  sendo  $F$  a f.r.v.r. dada por

$$(a) \quad F(x) = \int_1^x (\sin t^2 + e^{-t^2}) dt \quad (b) \quad F(x) = \int_x^2 \cos t^4 dt$$

- 2** Seja  $f$  a função definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $f(x) = x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$  e seja

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt, \quad \text{para } x > 1.$$

Justifique que  $F$  é diferenciável em  $x = 2$  e calcule  $F'(2)$ .

- 3** Mostre que se  $f$  é uma função contínua e não negativa em  $[a, b]$  e  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , então  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in [a, b]$ .

Sugestão: Considere a função  $F(t) = \int_a^t f(x) dx$  e use o Teo. 6.20.

## Cor. 4.23

Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ .  
Então existe  $c \in ]a, b[$  tal que

$$\int_a^b f(t) dt = f(c)(b - a) .$$

## Exer. 4.24

Seja  $f(x) = x^2$  e  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ .

- 1** Justifique que a função  $F$  é contínua em  $[1, 4]$ .
- 2** Calcule  $F(1)$  e  $F'(2)$ .
- 3** Mostre que existe um  $c \in ]1, 4[$  tal que  $F(4) = 3c^2$ .

## Cor. 4.25

Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ,  $x \in [a, b]$ , é uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ .

## Cor. 4.26

Sejam  $I$  um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $]a, b[$  e  $g_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções diferenciáveis em  $I$  tais que  $g_1(I) \subseteq ]a, b[$  e  $g_2(I) \subseteq ]a, b[$ .

Então a função  $H$  definida em  $I$  por

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t) dt ,$$

é diferenciável em  $I$  e,  $\forall x \in I$ ,

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x) .$$

## Exer. 4.27

- 1** Calcule  $F'(x)$  sendo  $F$  a f.r.v.r. dada por

$$(a) \quad F(x) = \int_{x^3}^{\cos x} \ln(t^2 + 1) dt \quad (b) \quad F(x) = x^3 \int_1^x e^{-t^2} dt$$

- 2** Determine  $k \in \mathbb{R}$  de modo que  $F'(1) = 0$ , sendo  $F$  a função definida em  $\mathbb{R}^+$  por

$$F(x) = \int_x^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

- 3** Considere a função  $F$  definida em  $\mathbb{R}$  por

$$F(x) = \int_0^{x^2} (4 + \sin t) dt.$$

- (a) Calcule  $F'(x)$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Estude a função  $F$  quanto à monotonia e existência de extremos locais.

## Exer. 4.28

- 1** Considere a função  $F$  definida em  $\mathbb{R}$  por

$$F(x) = \int_0^{x^3} t e^{\sin t} dt.$$

(a) Justifique que  $F$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e determine  $F'(x)$ .

(b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{\sin x}$

- 2** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Considere a função  $\varphi$  dada por

$$\varphi(x) = \int_{e^x}^{1+x^2} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Justifique que  $\varphi$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e determine  $\varphi'(x)$ .

(b) Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{x} = -f(1)$ .

## Prop. 4.29

Se  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $[a, b]$  e se  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f$  então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

## Obs. 4.30

Notação:  $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b = \left[ F(x) \right]_a^b$

## Exemplos de aplicação:

- 1**  $\int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 = \frac{8}{3} - 2 - \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{4}{3}$
- 2**  $\int_e^{e^2} \frac{1}{y \ln y} dy = \left[ \ln |\ln y| \right]_e^{e^2} = \ln |\ln(e^2)| - \ln |\ln(e)| = \ln(2)$

## Exer. 4.31

**1** Calcule

(a)  $\int_0^1 \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

(b)  $\int_{-\pi}^0 \operatorname{sen}(3x) dx$

(c)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(d)  $\int_3^{11} \frac{1}{\sqrt{2x+3}} dx$

(e)  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

(f)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 + 2x - 3} dx$

**2** Calcule  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{se } x \in [-1, 0[ \\ 7 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{1+x} & \text{se } x \in ]0, 1] \end{cases}$

Prop. 4.32

$$\int_a^b u' v \, dx = \left[ uv \right]_a^b - \int_a^b uv' \, dx.$$

Exemplo de aplicação:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x \, dx &= \left[ \sin x \cdot x \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= 0 - \left[ -\cos x \right]_0^{\pi} \\ &= \cos \pi - \cos 0 = 2 \end{aligned}$$

Exer. 4.33

Calcule:     (a)  $\int_0^1 (x+2)e^x \, dx$      (b)  $\int_1^e x \ln x \, dx$



## Prop. 4.34

Sejam  $f$  uma função contínua em  $I$  e

$$\begin{aligned}\varphi: J &\longrightarrow I \\ t &\mapsto x = \varphi(t)\end{aligned}$$

diferenciável em  $J$  e tal que  $\varphi'$  é contínua em  $J$ .

Sejam  $a, b \in I$  e  $c, d \in J$  tais que  $\varphi(c) = a$  e  $\varphi(d) = b$ . Então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

## Obs. 4.35

$I$  e  $J$  denotam intervalos não degenerados de  $\mathbb{R}$ .

## Exer. 4.36

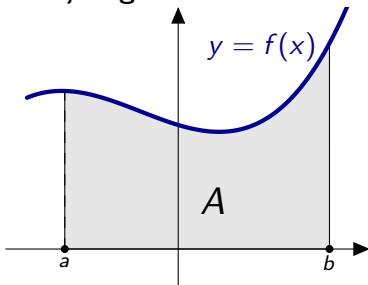
Calcule: (a)  $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 4} dx$  (b)  $\int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx$

## Prop. 4.37

Se  $f$  é uma função contínua em  $[a, b]$  tal que  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ , então a área da região plana delimitada pelo gráfico de  $f$  e pelas retas  $y = 0, x = a$  e  $x = b$  é dada por

$$\int_a^b f(x) dx.$$

## Ilustração gráfica



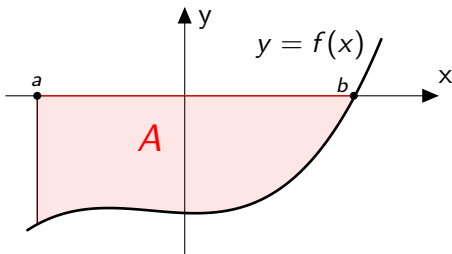
$$A = \int_a^b f(x) dx$$

## Prop. 4.38

Se  $f$  é uma **função contínua em  $[a, b]$  tal que  $f(x) \leq 0, \forall x \in [a, b]$** , então a área da região plana delimitada pelo gráfico de  $f$  e pelas retas  $y = 0, x = a$  e  $x = b$  é dada por

$$-\int_a^b f(x) dx.$$

## Ilustração gráfica



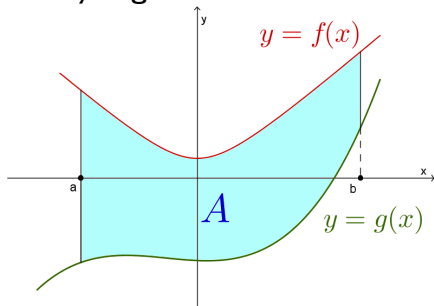
$$A = -\int_a^b f(x) dx$$

## Prop. 4.39

Se  $f$  e  $g$  são funções contínuas em  $[a, b]$  tais que  $f(x) \geq g(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , então a área da região plana delimitada pelos gráficos de  $f$  e de  $g$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  é dada por

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx.$$

## Ilustração gráfica



$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

## Exer. 4.40

- 1** Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das funções  $f(x) = \frac{1}{x}$  e  $g(x) = x^2$  e pelas retas  $x = 2$  e  $y = 0$ .
- 2** Calcule a área da região do plano situada entre  $x = -\frac{1}{2}$  e  $x = 0$  e limitada pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função  $h$  definida por

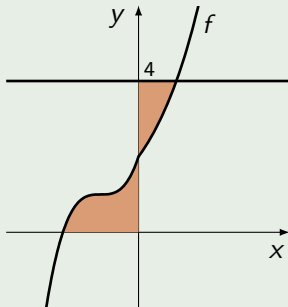
$$h(x) = \frac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- 3** Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2, y \geq x-1, y \leq 4\}$ .
- (a) Represente geometricamente a região  $A$ .
- (b) Calcule o valor da área da região  $A$ .

## Exer. 4.41

Calcule a área da seguinte região sombreada, onde

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 + 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$



4.3.

1. Por exemplo:  
 $\mathcal{P} = \{0, 1, 3, 4\}$   
 $\mathcal{C} = \{0, 2, 4\}$
2.  $2\sqrt{2} + 2$

4.17.

1. Sim
2. Não
3. Sim
4. Sim

4.19.

2. 6

4.22.

1. (a)  $\sin(x^2) + e^{-x^2}$   
(b)  $-\cos(x^4)$
2.  $-2 \ln 2$

4.24.

2.  $F(1) = 0$ ;  $F'(2) = 4$

4.27.

1. (a)  $-\sin x \ln(\cos^2 x + 1) - 3x^2 \ln(x^6 + 1)$   
(b)  $3x^2 \int_1^x e^{-t^2} + x^3 e^{-x^2}$
2.  $k = e^{-1}$
3. (a)  $2x(4 + \sin(x^2))$   
(b) Est. decresc. em  $\mathbb{R}^-$   
Est. cresc. em  $\mathbb{R}^+$   
Mín 0 em  $x = 0$

4.28.

1. (a)  $3x^5 e^{\sin(x^3)}$   
(b) 0
2. (a)  $2x f(1+x^2) - e^x f(e^x)$

4.31.

1. (a)  $\ln 2$   
(b)  $-\frac{2}{3}$   
(c)  $\frac{\pi}{6}$   
(d) 2

(e)  $\frac{1}{2}$

(f)  $-\frac{\ln 3}{4}$

2.  $\frac{\pi}{2} + \ln 2$

4.33.

(a)  $2e - 1$

(b)  $\frac{e^2 + 1}{4}$

4.36.

(a)  $\frac{\ln 3}{4}$

(b)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.40.

1.  $\frac{1}{3} + \ln 2$

2.  $\frac{\pi^2}{72}$

3. (b)  $\frac{37}{6}$

4.41.  $6 - \frac{2}{\ln 2}$

# Integrais Impróprios

*Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).*



## Obs. 5.1

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda,  $f$ , esteja definida num intervalo fechado e limitado,  $I$ , e que  $f$  seja limitada. Vamos agora estender este conceito omitindo uma (ou as duas) dessas condições, passando ao estudo do que chamamos **Integrais Impróprios**.

Os **Integrais Impróprios** podem ser de três espécies:

**1.<sup>a</sup> Espécie:**  $I$  é ilimitado

**2.<sup>a</sup> Espécie:**  $f$  é ilimitada ou não definida em alguns pontos de  $I$

**3.<sup>a</sup> Espécie:**  $I$  é ilimitado e  $f$  é ilimitada ou não definida em alguns pontos de  $I$

## Def. 5.2

*Integral impróprio de 1.ª espécie no limite superior de integração*

Seja  $f: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, t]$ ,  $\forall t \geq a$ .

Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$$

então o integral impróprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

## Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t \\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  é convergente e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

## Exer. 5.3

- 1** Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a)  $\int_{\pi}^{+\infty} \cos(x) dx$  (b)  $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2} dx$  (c)  $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

- 2** Prove que o integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  é:

divergente se  $\alpha \leq 1$ ;

convergente se  $\alpha > 1$  e, neste caso,  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$ .

- 3** Prove que o integral impróprio  $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx$  é:

divergente se  $\beta \geq 0$ ;

convergente se  $\beta < 0$  e, neste caso,  $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx = -\frac{1}{\beta}$ .

## Def. 5.4

*Integral impróprio de 1.ª espécie no limite inferior de integração*

Seja  $f: ] - \infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[t, a]$ ,  $\forall t \leq a$ .

Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx$$

então o integral impróprio  $\int_{-\infty}^a f(x) dx$  diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

## Exemplo de aplicação:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\operatorname{arctg}(x)]_t^1 \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} t \right) \\ &= \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

o integral impróprio  $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

## Exer. 5.5

- 1** Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a)  $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$

(b)  $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{4-x} dx$

(c)  $\int_{-\infty}^0 \frac{4}{1+(x+1)^2} dx$

- 2** Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^0 a^x dx$$

## Prop. 5.6

Sejam  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, t]$ ,  $\forall t \geq a$ . Então verificam-se as seguintes condições:

**1** Se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  são convergentes, então  $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$  é convergente,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$

**2** Se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x)) dx$  é divergente,  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Obs. 5.7

Resultado análogo é válido para integrais impróprios de 1.<sup>a</sup> espécie no limite inferior de integração.



## Prop. 5.8

Sejam  $f: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, t]$ ,  $\forall t \geq a$ , e  $b > a$ . Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

## Obs. 5.9

Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.<sup>a</sup> espécie no limite inferior de integração.

## Exemplos de aplicação:

- 1** Pelo Exercício 7.3.2 tem-se que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

- 2** Como, atendendo ao Exercício 7.3.2, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} x^2 dx \text{ é divergente, então o integral impróprio}$$

$$\int_3^{+\infty} x^2 dx \text{ também é divergente.}$$

## Def. 5.10

*Integral impróprio de 1.ª espécie em ambos os limites de integração*

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[\alpha, \beta]$  para todos os  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha < \beta$ .

**1** Se, para algum  $a \in \mathbb{R}$ , os integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{são ambos convergentes}$$

dizemos que o integral impróprio  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  é **convergente** e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

## Def. 5.11 (cont.)

2 Se, para algum  $a \in \mathbb{R}$ , pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  é **divergente**.

## Exer. 5.12

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} x dx \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \quad (c) \int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$$

## Prop. 5.13

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $[a, +\infty[$ , integráveis em  $[a, t]$ ,  $\forall t \geq a$ , tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

para todo o  $x \in [a, +\infty[$ . Então:

- (i) se  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é convergente.
- (ii) se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é divergente.

## Obs. 5.14

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração.

## Exemplo de aplicação:

*Usando o Critério de Comparação estudar a natureza do integral*

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx .$$

Notar que, para todo o  $x \in [1, +\infty[$  temos

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} . \text{ (justifique!)} \quad (1)$$

Uma vez que o integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente.

## Prop. 5.15

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $[a, +\infty[$  e integráveis em  $[a, t]$ ,  $\forall t \geq a$ , tais que  $f(x) \geq 0$  e  $g(x) > 0$ ,  $\forall x \in [a, +\infty[$ . Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

- (i) Se  $L \in \mathbb{R}^+$ , então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  têm a mesma natureza.
- (ii) Se  $L = 0$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é convergente.
- (iii) Se  $L = +\infty$  e  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é divergente.

## Exemplo de aplicação:

*Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral*

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx .$$

Notar que,  $\forall x \in [1, +\infty[$ ,  $\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \geq 0$  e  $\frac{1}{x^2} > 0$ . Além disso

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 .$$

Uma vez que  $L \in \mathbb{R}^+$  e que  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente, pelo

Critério do Limite, o integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} dx$  é convergente.



Obs. 5.16

Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impr rios de 1.  espécie, impr rios no limite inferior de integração.

Exemplo de aplicação:

*Estudo da natureza do integral impr rio*  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$ .

$\forall x \in ]-\infty, 0], \frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$  e  $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$ .

Uma vez que

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

e que  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$  é convergente (**verifique!**), concluímos, pelo Critério do Limite, que  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$  é convergente.

## Exer. 5.17

Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$$

$$(d) \int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1} dx$$

$$(e) \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^7 + 2x + 1} dx$$

$$(c) \int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$$

$$(f) \int_{-\infty}^0 \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2} dx$$

## Def. 5.18

Seja  $f: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[a, t]$ , para todo o  $t \in [a, +\infty[$ . Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é **absolutamente convergente**, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

é também convergente.

## Prop. 5.19

Seja  $f: [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[a, t]$ , para todo o  $t \in [a, +\infty[$ . Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

## Obs. 5.20

Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.<sup>a</sup> espécie, impróprios no limite inferior de integração.

## Exer. 5.21

Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

$$(a) \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} dx$$

$$(b) \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 2x^4} dx, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

## Def. 5.22

*Integral impróprio de 2.ª espécie no limite inferior de integração*

Seja  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[t, b]$ ,  $\forall a < t \leq b$ .

Se existe e é finito

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

dizemos que o integral impróprio  $\int_a^b f(x) dx$  é **convergente** e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

## Def. 5.23

*Integral impróprio de 2.<sup>a</sup> espécie no limite de integração superior*

Seja  $f: [a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[a, t]$ ,  $\forall a \leq t < b$ .

Se existe e é finito

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

dizemos que o integral impróprio  $\int_a^b f(x) dx$  é **convergente** e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

## Def. 5.24

*Integral impróprio de 2.<sup>a</sup> espécie em ambos os limites de integração*

Seja  $f: ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[t_1, t_2]$ , para todos os  $t_1$  e  $t_2$  tais que  $a < t_1 < t_2 < b$ .

Dizemos que o integral impróprio  $\int_a^b f(x) dx$  é **convergente** se, para algum  $c \in ]a, b[$ , os integrais

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx$$

são ambos convergentes e escreve-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

## Def. 5.25

*Integral impróprio de 2.<sup>a</sup> espécie num ponto interior do intervalo de integração*

Seja  $f$  uma função definida em  $[a, b]$  exceto possivelmente em  $c \in ]a, b[$ , e integrável em  $[a, t]$ , para todo o  $a \leq t < c$  e em  $[r, b]$ , para todo o  $c < r \leq b$ . Se os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x) dx \quad \text{forem ambos convergentes,}$$

então o integral impróprio  $\int_a^b f(x) dx$  diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.



## Exer. 5.26

Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x} dx$$

$$(c) \int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$(d) \int_{-2}^1 \frac{1}{|x|} dx$$

$$(e) \int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$$

## Obs. 5.27

As propriedades, definições e critérios de convergência apresentados para os integrais de 1.ª espécie têm as suas versões para os integrais de 2.ª espécie.

Nos slides seguintes apresentamos esses resultados para o caso dos integrais de 2.ª espécie no limite inferior de integração, para os outros o estudo faz-se analogamente.

## Prop. 5.28

Sejam  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[t, b]$ , para todo o  $t \in ]a, b]$ . Então verificam-se as seguintes condições:

**1** Se  $\int_a^b f(x) dx$  e  $\int_a^b g(x) dx$  são convergentes, então

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \text{ é convergente, } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ e}$$
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx .$$

**2** Se  $\int_a^b f(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^b (\alpha f(x)) dx$  é divergente, para todo o  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Prop. 5.29

Sejam  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função integrável em  $[t, b]$ , para todo o  $t \in ]a, b]$ , e  $a < b' < b$ . Então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^{b'} f(x) dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b'} f(x) dx + \int_{b'}^b f(x) dx.$$

## Prop. 5.30

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $]a, b]$ , integráveis em  $[t, b]$ , para todo o  $t \in ]a, b]$ , tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) ,$$

para todo o  $x \in ]a, b]$ . Então:

- (i) se  $\int_a^b g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente.
- (ii) se  $\int_a^b f(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^b g(x) dx$  é divergente.

## Prop. 5.31

Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $]a, b]$  e integráveis em  $[t, b]$ ,  $\forall t \in ]a, b]$ , tais que  $f(x) \geq 0$  e  $g(x) > 0$ ,  $\forall x \in ]a, b]$ . Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

- (i) Se  $L \in \mathbb{R}^+$ , então  $\int_a^b f(x) dx$  e  $\int_a^b g(x) dx$  têm a mesma natureza.
- (ii) Se  $L = 0$  e  $\int_a^b g(x) dx$  é convergente, então  $\int_a^b f(x) dx$  é convergente.
- (iii) Se  $L = +\infty$  e  $\int_a^b g(x) dx$  é divergente, então  $\int_a^b f(x) dx$  é divergente.

## Def. 5.32

Seja  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[t, b]$ , para todo o  $t \in ]a, b]$ . Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x) dx \text{ é absolutamente convergente,}$$

se o integral impróprio

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ é também convergente.}$$

## Prop. 5.33

Seja  $f: ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[t, b]$ , para todo o  $t \in ]a, b]$ . Se o integral impróprio

$$\int_a^b f(x) dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

## Exer. 5.34

**1** Prove que o integral impróprio  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$  é:

divergente se  $\alpha \geq 1$ ;

convergente se  $\alpha < 1$  e, neste caso,  $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha}$ .

**2** Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a)  $\int_0^1 \frac{\pi}{1 - \sqrt{x}} dx$

(b)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$

## Def. 5.35

*Integral impróprio de 3.ª espécie do tipo  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , onde  $f$  é ilimitada ou não está definida em  $x = a$ .*

Seja  $f: ]a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[t, t']$ , quaisquer que sejam  $t, t' \in \mathbb{R}$  tais que  $a < t < t'$ .

Dizemos que o integral impróprio  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  é **convergente** se, para algum  $c \in ]a, +\infty[$ , os integrais impróprios  $\int_a^c f(x) dx$  e  $\int_c^{+\infty} f(x) dx$  forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.



## Def. 5.36

*Integral impróprio de 3.ª espécie do tipo  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ , onde  $f$  é ilimitada ou não está definida em  $x = b$ .*

Seja  $f: ]-\infty, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável em  $[t, t']$ , quaisquer que sejam  $t, t' \in \mathbb{R}$  tais que  $t < t' < b$ .

Dizemos que o integral impróprio  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$  é **convergente** se, para algum  $c \in ]-\infty, b[$ , os integrais impróprios  $\int_{-\infty}^c f(x) dx$  e  $\int_c^b f(x) dx$  forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é **divergente**.

## Obs. 5.37

- Definem-se de modo análogo os integrais impróprios de 3.<sup>a</sup> espécie dos tipos

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

onde  $f$  não está definida ou é ilimitada em algum ponto do interior do intervalo de integração.

- Atendendo às definições apresentadas, para estudar a natureza de integrais impróprios de 3.<sup>a</sup> espécie, devemos decompor o intervalo de integração de modo conveniente e estudar a natureza de integrais impróprios de 1.<sup>a</sup> e de 2.<sup>a</sup> espécies (correspondentes).

## Exer. 5.38

- 1** Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

(b)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$

- 2** Calcule, caso exista,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  sendo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

5.3.

- (a) Divergente  
(b)  $\frac{1}{4}$   
(c) Divergente

5.5.

- (a)  $-\frac{1}{2}$   
(b) Divergente  
(c)  $3\pi$
- Diverge se  $0 < a < 1$ ;  
Converge se  $a > 1$   
e tem valor  $\frac{1}{\ln a}$

5.12.

- Divergente
- $\pi$
- Divergente

5.17.

- Convergente
- Convergente
- Divergente
- Divergente

(e) Convergente

(f) Divergente

5.21.

- Sim
- Sim

5.26.

- $\frac{\pi}{2}$
- Divergente
- 0
- Divergente
- Divergente

5.34.

- (a) Divergente  
(b) Convergente

5.38.

- (a) 2  
(b) Divergente
- Divergente

# Séries Numéricas

*Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos (indicados na bibliografia).*

## Def. 6.1

Seja  $(a_n)$  uma sucessão de números reais. Chama-se **série numérica de termo geral**  $a_n$  à “soma de todos os termos da sucessão  $(a_n)_n$ ”:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

A **sucessão das somas parciais**  $(S_n)_n$  associada a esta série é a sucessão definida por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

## Obs. 6.2

Um exemplo de série é a **série harmónica** dada por

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

## Def. 6.3

Dizemos que uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é **convergente** se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$  existe e é finito, caso em que é designado por **soma da série** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Se  $(S_n)_n$  é divergente, dizemos que a série é **divergente**.

## Exer. 6.4

Estude a convergência das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

## Def. 6.5

Uma **série geométrica** de razão  $r \in \mathbb{R}$ , é uma série do tipo

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

onde  $a \in \mathbb{R}$  é o primeiro termo da série.

## Obs. 6.6

Note-se que o termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = \begin{cases} na, & \text{se } r = 1 \\ a \frac{1 - r^n}{1 - r}, & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$



## Obs. 6.6 (cont.)

Conclui-se assim que, para  $a \neq 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ converge se e só se } |r| < 1$$

e nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

## Exer. 6.7

Verifique se as seguintes séries são convergentes e em caso afirmativo calcule a sua soma:

$$(a) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n \quad (b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n \quad (c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \quad (d) \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n}$$

## Def. 6.8

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diz-se **redutível** (ou de **Mengoli** ou **telescópica**) se o seu termo geral se puder escrever numa das seguintes formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

onde  $(u_n)$  é uma sucessão e  $p \in \mathbb{N}$ .

## Obs. 6.9

No caso em que  $a_n = u_n - u_{n+p}$

$$S_n = \sum_{k=1}^p u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$$

e no caso em que  $a_n = u_{n+p} - u_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^p u_k = u_{n+1} + \cdots + u_{n+p} - (u_1 + \cdots + u_p)$$

## Séries redutíveis (ou de Mengoli ou telescópicas) 163

### Obs. 6.9 (cont.)

Assim, a série é convergente se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$  for finito.

Além disso, se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = k \in \mathbb{R}$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}) = pk$ .

### Exer. 6.10

Determine a soma (se existir) das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n}{n+1} \right)$$

$$(e) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n+1)(n+4)}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(f) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$$

## Teo. 6.11

As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ e } \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots, \forall p \in \mathbb{N}$$

têm a mesma natureza. Assim, a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.

## Obs. 6.12

Como  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  e  $S'_n = \sum_{k=p+1}^n a_k$  (com  $n > p+1$ ), temos

$S_n = S'_n + \sum_{k=1}^p a_k$ , e, portanto, se existir um dos limites o outro também existe:

$$\lim_n S_n = \lim_n S'_n + \sum_{k=1}^p a_k$$

## Teo. 6.13

Se a série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente, então  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

## Obs. 6.14

O resultado anterior é considerado como um primeiro critério de convergência de uma série. Na verdade, o critério é útil na sua forma contrapositiva, isto é:

$$\text{se } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \text{ ou não existir } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente}$$

revelando-se, assim, como um “critério de divergência”. Note-se que se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , nada se pode concluir sobre a natureza da série.

## Exer. 6.15

Analise a natureza das séries seguintes à luz da condição necessária de convergência:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n}{n+1} \right)$$

$$(e) \sum_{n=1}^{+\infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + \left( \frac{7}{10} \right)^n}$$

## Teo. 6.16

- (a) Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  duas séries numéricas convergentes com somas  $A$  e  $B$  respetivamente. Então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

- (b) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente e tem soma  $A$ , então  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$  é convergente e tem soma  $\lambda A$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

## Teo. 6.16 (cont.)

(c) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente então  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$  é divergente.

(d) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é convergente e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  é divergente, então a série  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  é divergente.

## Obs. 6.17

Note-se que o resultado anterior nada diz quanto ao caso de ambas as séries serem divergentes. Na verdade, a série resultante

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  tanto pode ser convergente como divergente.



### Exer. 6.18

Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} 50 \ln \left( \frac{n}{n+1} \right)$$

$$(c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \frac{7}{11} \right)^n + \left( \frac{10}{3} \right)^n \right]$$

$$(b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{12}{n^2 - 1}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n}$$

## Def. 6.19

Dizemos que a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é uma **série de termos não negativos** se,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , se tem  $a_n \geq 0$ .

## Exer. 6.20

Verifique quais das seguintes séries são séries de termos não negativos:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos \left( \frac{1}{n} \right)$

### Teo. 6.21

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos não negativos. Então a sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente.

### Teo. 6.22

Seja  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Teo. 6.23

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série de termos não negativos e  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função decrescente e tal que  $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza.

Exer. 6.24

Estude a natureza das seguintes séries:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(c)  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

## Def. 6.25

Às séries da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

chamamos **séries de Dirichlet** (ou **série harmónica de ordem  $\alpha$** ).

## Obs. 6.26

A convergência destas séries é analisada usando o critério do integral. É fácil ver que (exercício!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ é : } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > 1 \\ \text{divergente se } \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

## Exer. 6.27

Indique a natureza das seguintes séries

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n^5}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$$

## Obs. 6.28

Convém notar que, na utilização do critério do integral, o valor obtido na resolução do integral impróprio quando este é convergente **não é** a soma da respectiva série.

## Teo. 6.29

Suponha-se que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Então:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ diverge.}$$

## Obs. 6.30

Convém notar que, se  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  for divergente ou  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  for convergente, nada se pode concluir.

Teo. 6.31

Sejam  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  duas séries tais que  $a_n \geq 0$  e  $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .  
Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(a) se  $L \in \mathbb{R}^+$ , então as séries têm a mesma natureza.

(b) se  $L = 0$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

(c) se  $L = +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  diverge  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.



## Obs. 6.32

Podemos assim concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  funciona como referência, sendo necessário conhecer à partida a sua natureza. A escolha desta série é normalmente sugerida pela forma da série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Em muitas situações, as séries de Dirichlet  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$  revelam-se de grande utilidade (como referência).

## Exer. 6.33

Use o critério da comparação ou o critério do limite para estudar a natureza das séries seguintes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^4}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3 + 2}}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n^3}}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{17n - 13}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n^2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^6 + 1}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$$

## Def. 6.34

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série de números reais e  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  a correspondente **série dos módulos**.

(a) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diz-se **absolutamente convergente**.

(b) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge mas  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge, então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diz-se **simplesmente convergente**.

## Teo. 6.35

Toda a série absolutamente convergente é também convergente.

## Obs. 6.36

- (a) Realça-se que se  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  diverge, então nada se pode concluir sobre a natureza de  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Esta pode ser convergente ou divergente.
- (b) Como  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  é uma série de termos não negativos, então podemos aplicar os critérios vistos anteriormente para estudar a sua natureza.

## Exer. 6.37

Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$

## Teo. 6.38

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série de números reais não nulos e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se  $0 \leq L < 1$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente.

(b) se  $L > 1$  ou  $L = +\infty$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

(c) se  $L = 1$ , nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

## Teo. 6.39

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  uma série de números reais e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se  $0 \leq L < 1$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é absolutamente convergente.

(b) se  $L > 1$  ou  $L = +\infty$ , então  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  é divergente.

(c) se  $L = 1$ , nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

## Exer. 6.40

Estude a natureza das seguintes séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! 2^n}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3n^2}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\ln n}{n} \right)^n$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^n$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{4}{3} \right)^n$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! n^2}{(2n)!}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$$



## Def. 6.41

Uma **série alternada** é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

onde  $a_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

## Exer. 6.42

Verifique se as seguintes séries são alternadas:

(a)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$

(b)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}$

(d)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n!}$

## Teo. 6.43

Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  com  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$  uma série alternada. Se

(a) a sucessão  $(a_n)$  é monótona decrescente;

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

então a série é convergente.

## Exer. 6.44

Estude a natureza das seguintes séries usando o critério de Leibniz.

(a)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(b)  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

## Exer. 6.45

Estude a natureza (divergência, convergência absoluta ou convergência simples) das seguintes séries numéricas:

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$(f) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sen}(1/n)$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^{10}}$$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$(h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n}}{(n + \sqrt{n})^2}$$

$$(d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$$

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$(e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n} - 1}$$

$$(j) \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{n} - \frac{1}{5^n} \right]$$

6.4.

- (a) Div.
- (b) Conv. e  $S = 0$  se  $\alpha = 0$ ;  
Div. se  $\alpha \neq 0$
- (c) Conv. e  $S = 1$

6.7.

- (a) Conv. e  $S = 100$
- (b) Div.
- (c) Conv. e  $S = 1$
- (d) Conv. e  $S = \frac{1}{4}$

6.10.

- (a)  $S = \frac{3}{2}$
- (b) Div.
- (c)  $S = 1$
- (d)  $S = \frac{1}{2}$
- (e)  $S = \frac{47}{60}$
- (f)  $S = \frac{3}{2}$

6.15.

- (a) Div.
- (b) Nada se pode concluir
- (c) Nada se pode concluir

(d) Div.

(e) Div.

(f) Div.

6.18.

- (a) Div.
- (b) Conv. e  $S = 9$
- (c) Div.
- (d) Conv. e  $S = 2$

6.20.

- (a) Não
- (b) Sim
- (c) Não
- (d) Sim

6.24.

- (a) Div.
- (b) Conv.
- (c) Div.

6.27.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Div.
- (d) Div.

6.33.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Div.
- (d) Conv.
- (e) Conv.
- (f) Div.
- (g) Conv.
- (h) Div.

6.37.

- (a) Sim
- (b) Não
- (c) Sim
- (d) Não

6.40.

- (a) Abs. Conv.
- (b) Abs. Conv.
- (c) Div.
- (d) Abs. Conv.
- (e) Abs. Conv.
- (f) Div.
- (g) Div.
- (h) Div.

6.42.

- (a) Sim
- (b) Sim
- (c) Não
- (d) Sim

6.44.

- (a) Conv.
- (b) Conv.
- (c) Nada se pode concluir
- (d) Conv.

6.45.

- (a) Simp. Conv.
- (b) Abs. Conv.
- (c) Div.
- (d) Abs. Conv.
- (e) Simp. Conv.
- (f) Simp. Conv.
- (g) Div.
- (h) Div.
- (i) Abs. Conv.
- (j) Div.