



Ficha de Exercícios 1

Funções

1. Calcule:

- (a) $\sin(\arccos(\frac{1}{2}))$
- (b) $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{2}))$
- (c) $\sin(\arcsen(-\frac{1}{2}))$
- (d) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$
- (e) $\cotg(\arcsen(\frac{12}{13}))$
- (f) $\cos(2 \cdot \arctg(\frac{4}{3}))$
- (g) $\operatorname{arccotg}(\cotg(\frac{1}{2}))$
- (h) $\operatorname{arccotg}(\tg(\frac{\pi}{4}))$
- (i) $\arctg(\tg(\pi))$

2. Caracterize a função inversa das seguintes funções indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que as definem. Considere as restrições principais das funções trigonométricas.

- (a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x + \frac{\pi}{2})$;
- (b) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2\arcsen(1-x)}{3}$;
- (c) $f(x) = \tg(\frac{\pi}{2-x})$;
- (d) $f(x) = e^{\arcsen x}$;
- (e) $f(x) = 2\arcsen(\sqrt{x}) - \pi$;
- (f) $f(x) = 3\arccos(\sqrt{x+4}) - \frac{\pi}{2}$;
- (g) $f(x) = \frac{1}{\pi + \arccos(x-2)}$;
- (h) $f(x) = \pi - 3\arctg(\frac{x-1}{2})$;
- (i) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln(x+1))$.

3. Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

4. Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

5. Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = \operatorname{sen} x$. Determine, utilizando o teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

(a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$;

(b) $(g^{-1})'(0)$.

6. Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

(a) $f(x) = (x-1)(x^2 + 3x)$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$;

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}$;

(d) $f(x) = x^2 e^{x^2}$;

(e) $f(x) = \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$;

(f) $f(x) = 3^{\operatorname{tg} x}$;

(g) $f(x) = \log_3(\operatorname{tg} x)$

(h) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$;

(i) $f(x) = \cos(\log_2(x^2))$;

(j) $f(x) = (1-x^2) \ln x$;

(k) $f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x$;

(l) $f(x) = x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$.

7. Determine a derivada de cada uma das funções seguintes:

(a) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{sen}(4x^3))$;

(b) $f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{1}{x^2}$;

(c) $f(x) = \arccos(1 - e^x)$;

(d) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + \ln x)$.

8. Para cada uma das funções seguintes calcule $(f^{-1})'$ utilizando o teorema da derivada da função inversa.

(a) $f(x) = x^3 + 1$;

(b) $f(x) = \ln(\operatorname{arcsen} x)$, com $x \in]0, 1[$;

(c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1, 0[$;

(d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1-x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

9. Mostre que se $a > 0$ a equação $x^3 + ax + b = 0$ não pode ter mais que uma raiz real, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}$.

10. Prove que a equação $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ tem 3 zeros distintos e localize-os em intervalos de \mathbb{R} cujos extremos sejam números inteiros consecutivos.

11. Verifique que $x = 0$ é raiz da equação $e^x = 1 + x$. Mostre que esta equação não pode ter outra raiz real.

12. Mostre que a função $f(x) = \operatorname{arctg}(x-2) + 2x - 5$ tem um único zero no intervalo $]2, 3[$.

13. Prove que:

- (a) para todo o $x \in]0, 1[$ se tem $\arcsen x > x$;
- (b) para todo o $x \geq 0$ se tem $\sen x \leq x$;
- (c) para todo o $x > 0$ se tem $\ln x < x$.

14. Sejam f e g funções diferenciáveis em \mathbb{R} tais que $f'(x) > g'(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$. Prove que:

- (a) $f(x) > g(x)$, para todo o $x > a$;
- (b) $f(x) < g(x)$, para todo o $x < a$.

15. Seja f uma função real de variável real. Mostre que se f admite terceira derivada no intervalo $[a, b]$ e $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$, então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'''(c) = 0$.

16. Sejam $b \in \mathbb{R}^+$ e f uma função contínua em $[0, b]$ e diferenciável em $]0, b[$ tal que $f(b) = 0$. Considerando a função $g(x) = xf(x)$, mostre que existe $c \in]0, b[$ tal que $f'(c) = -\frac{f(c)}{c}$.

17. Considere a função f definida pela expressão analítica $f(x) = \arcsen(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$.

- (a) Determine o domínio de f .
- (b) Mostre que $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$.
- (c) Justifique que f atinge um máximo global y_M e um mínimo global y_m . Determine também esses valores.
- (d) Determine o contradomínio de f .

18. Seja h a função de domínio \mathbb{R} definida por $h(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 4x)$.

Estude h quanto à existência de extremos e determine os seus intervalos de monotonia.

19. Considere a função g definida por $g(x) = \arcsen((x-1)^2)$.

- (a) Determine o domínio de g .
- (b) Mostre que a equação $g(x) = \frac{\pi}{6}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.
- (c) Estude g quanto à existência de extremos locais e determine os seus intervalos de monotonia.
- (d) A função g é invertível? Justifique a sua resposta.

20. Calcule, caso exista, o limite considerado em cada uma das alíneas que se seguem:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2));$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen^2 \frac{x}{3}}{x^2};$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - x}{x};$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsen x}{3x};$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x \sen x};$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\pi/4} \frac{\cos(2x)}{1 + \cotg x};$

- (g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln(2-x)}$;
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^x$;
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$;
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$;
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} (2x)}$;
- (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$;
- (q) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - x}{(x-1)^2}$.

21. Mostre que existe

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x},$$

mas não pode aplicar-se para o seu cálculo a regra de Cauchy.

22. Considere a função g de domínio \mathbb{R} definida por

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- (a) Mostre que g é diferenciável em $x = 0$ e indique o valor de $g'(0)$.
- (b) Mostre que existe pelo menos um $c \in]0, \frac{2}{\pi}[$ tal que $g'(c) = \frac{2}{\pi}$.

23. Considere a função f definida em $] -\infty, 3[$ por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{12}{\pi} + x\right) \cdot \operatorname{arctg}(1-x) & \text{se } x < 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \\ \frac{2x}{\ln(3+x) - \ln(3-x)} & \text{se } 0 < x < 3. \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.
- (b) Mostre que $f'_-(0) = \frac{\pi^2 - 24}{4\pi}$.
- (c) Mostre que existe pelo menos um $c \in \left]-\frac{12}{\pi}, 0\right[$ tal que $f'(c) = \frac{\pi}{4}$.

24. Seja g a função definida por $g(x) = \frac{e^{1-x} + \arcsen x}{\ln x}$.

- (a) Determine o domínio de g .
- (b) Averigue se o gráfico de g admite assíntotas verticais.

25. Seja $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ a função definida do seguinte modo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \frac{\sin(\ln(x^3))}{x} & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

- (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 1$.
- (b) Seja g uma função real de variável real diferenciável e tal que $g'(\frac{\pi}{2}) = 2$. Calcule o valor de $(g \circ f)'(0)$.

26. Considere a função f definida em $] -\infty, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x}{e^x - 1} & \text{se } x < 0 \\ 1 + \arcsen x & \text{se } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

- (a) Verifique se f é contínua em $x = 0$.
 - (b) Mostre que o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]0, 1[$.
 - (c) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x))^{\frac{1}{x}}$.
27. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $h(x) = \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right)$.
Mostre que as retas $y = 0$ e $y = \frac{\pi}{2}$ são assíntotas horizontais ao gráfico de h .

Exercícios de testes de anos anteriores

28. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2) & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(1+x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$

- (a) Estude f quanto à continuidade em $x = 0$.
- (b) Estude f quanto à diferenciabilidade em $x = 0$.
- (c) Estude f quanto à existência de extremos locais.
- (d) Mostre que existe pelo menos um $\theta \in]-1, 0[$ tal que $f'(\theta) = -\frac{\pi}{4}$.
- (e) Mostre que a equação $f(x) = 1 - x^2$ possui exatamente uma solução em $] -1, 0[$.
- (f) Considere a função g definida em \mathbb{R}_0^- por $g(x) = f(x)$. Justifique que g é invertível e determine a função inversa de g indicando o domínio, o contradomínio e a expressão analítica que a define.

(Miniteste 1, Cálculo I, 2008/2009)

29. Considere a função f definida em \mathbb{R} por $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x} & \text{se } x > 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \\ \frac{1-x}{x^3+x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$

onde α é um parâmetro real.

- (a) Determine os limites laterais de f na origem.
- (b) Pode indicar um valor para $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que f seja contínua em $x = 0$? Justifique a sua resposta.
- (c) O gráfico de f admite assíntotas verticais? Justifique a sua resposta.

(Miniteste 1, Cálculo I, 2009/2010)

30. (a) Utilizando o Teorema de Lagrange, mostre que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f'(x) = 0$, para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.
- (b) Prove que sendo $f(x) = \arcsen(x) + \arccos(x)$, então $f(x) = \frac{\pi}{2}, \forall x \in [-1, 1]$ (Sugestão: use a alínea anterior).

(1ª prova, Cálculo I, 2013/2014 (semestre extraordinário))

31. Seja h uma função de domínio \mathbb{R} tal que $h(0) = 0$ e $h'(x) = \cos x \cdot e^{\sin^2 x}$. Usando o Teorema de Lagrange, mostre que $h(x) \leq e \cdot x$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

(1ª prova, Cálculo I, 2013/2014 (semestre extraordinário))

32. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e h a função definida por $h(x) = \alpha \arcsen(x^2 - 1) + x^2 - \frac{\pi}{2}x$.

- (a) Determine o domínio de h .
- (b) Mostre que a função h tem pelo menos um zero no intervalo $] -1, 1[$, qualquer que seja o valor do parâmetro α .

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

33. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \arcsen(x^2))^{\frac{1}{x}}$.

(Exame de Recurso, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)

34. Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ a função real de variável real definida por

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Estude f quanto à monotonia e existência de extremos locais.

(Exame Final, Cálculo I - Agrupamento IV, 2017/2018)