



FICHA DE EXERCÍCIOS 4  
*Integrais impróprios*

## 1 Exercícios propostos

1. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a)  $\int_0^{+\infty} \frac{5}{4+x^2} dx$     (b)  $\int_{\pi}^{+\infty} \cos(3x) dx$     (c)  $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{(4-x)^2} dx$     (d)  $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$   
(e)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$     (f)  $\int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx$     (g)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} dx$     (h)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$   
(i)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$     (j)  $\int_e^{+\infty} \ln x dx$     (k)  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} (\ln x)^3 dx$   
(l)  $\int_{-\infty}^0 \frac{4}{1+(x+1)^2} dx$     (m)  $\int_{-\infty}^0 \frac{e^{\arctg x}}{1+x^2} dx$

2. Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a)  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$ ;    (b)  $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1} dx$ ;    (c)  $\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1} dx$ ;    (d)  $\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$ .

3. Calcule, caso exista,  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  com  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \arctg x & \text{se } x > 0 \end{cases}$ .

4. Estude a natureza do integral impróprio  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$ .

5. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a)  $\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;    (b)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cotg x dx$ ;    (c)  $\int_{-1}^3 \frac{1}{9-x^2} dx$ ;  
(d)  $\int_0^1 \ln x dx$ ;    (e)  $\int_{-2}^1 \frac{1}{|x|} dx$ ;    (f)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\sin x} dx$ ;  
(g)  $\int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ ;    (h)  $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} dx$ ;    (i)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} dx$ ;  
(j)  $\int_0^3 \frac{1}{(x-1)(x-2)} dx$ ;    (k)  $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$ ;    (l)  $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$ ;

6. Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a)  $\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}} dx$ ;    (b)  $\int_{-1}^0 \frac{-x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ ;    (c)  $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$ .    (d)  $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$ .

7. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5 + 2x}} dx; & \text{(b)} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin \sqrt{x} dx; & \text{(c)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx; \\ \text{(d)} \quad & \int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos(3x)}{x + 2} dx; & \text{(e)} \quad & \int_2^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx; & \text{(f)} \quad & \int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3 + 1} dx; & \text{(g)} \quad & \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx; \\ \text{(h)} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}} dx; & \text{(i)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx; & \text{(j)} \quad & \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx; & \text{(k)} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3}} dx; \end{aligned}$$

8. Seja  $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$ . Determine  $m$  de modo a que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$ .

9. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e calcule o seu valor caso seja convergente.

$$\text{(a)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx \quad \text{(b)} \quad \int_0^{+\infty} t e^{-st} dt \quad (s > 0) \quad \text{(c)} \quad \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{\alpha t} dt \quad (s > \alpha)$$

10. Estude a natureza do integral impróprio  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{4 + x^2} dx$  e, em caso de convergência, indique o seu valor.

11. Mostre que o integral impróprio  $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx$  é divergente.

12. Determine a natureza do seguinte integral impróprio e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

## Exercícios Resolvidos

1. Determine a natureza do integral impróprio  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$  e, em caso de convergência, indique o seu valor.

**Resolução:** Uma vez que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_e^t \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \ln |\ln x| \right]_e^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \ln |\ln t| - \ln |\ln e| \right) = +\infty$$

podemos concluir que o integral dado é divergente.

2. Determine a natureza do integral impróprio  $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx$  e, em caso de convergência, indique o seu valor.

**Resolução:** Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x e^{-x} dx.$$

Usando o método de integração por partes podemos concluir que

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

logo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t x e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -x e^{-x} - e^{-x} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -t e^{-t} - e^{-t} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = \frac{2}{e}$$

pois

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-t e^{-t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( -\frac{t}{e^t} \right) = 0.$$

Portanto, podemos concluir que o integral dado é convergente e  $\int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{2}{e}$ .

3. Estude a natureza do integral impróprio  $\int_0^\pi \operatorname{tg} x \, dx$ .

**Resolução:**

O integral em causa é convergente se e só se forem convergentes ambos os seguintes integrais:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx \quad \text{e} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \operatorname{tg} x \, dx .$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \operatorname{tg} x \, dx &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [-\ln(\cos x)]_0^t \\ &= \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (-\ln(\cos t)) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

o integral  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx$  é divergente. Assim, o integral em estudo é divergente.

4. Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite estude a natureza do seguinte integral impróprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 2} \, dx .$$

**Resolução:** Em primeiro lugar, notar que

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 2} \geq 0, \forall x \in [1, +\infty[;$$

De facto,  $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$  e  $x^3 + x + 2 > 0$ , para  $x \in [1, +\infty[$ , uma vez que  $f(x) = x^3 + x + 2$  é estritamente crescente em  $\mathbb{R}$  e  $f(1) = 4$ .

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x}{x^3 + x + 2} = 1 ;$$

Como  $L \in \mathbb{R}^+$ , pelo Critério do Limite, os integrais  $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 + x + 2} \, dx$  e  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$  têm a mesma natureza. Como  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \, dx$  é divergente (integral de Dirichlet com  $p = 1$ ), o integral em causa é divergente.