Controle e Sistemas Não Lineares
ENGF97

Profs. Daniel Santana
daniel.diniz@ufba.br

Laboratório de Controle e Otimização Industrial

Escola Politécnica

Universidade Federal da Bahia

Salvador–BA
12 de janeiro de 2018

Parte I

Estratégias de controle

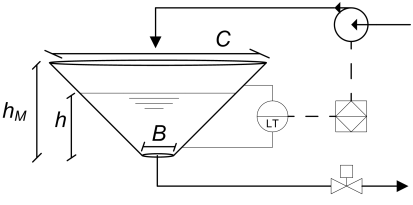
Sumário

Estratégias para o projeto de sistemas de controle não-linear:

- Controle por linearização
- Controle adaptativo
- *Feedback* linearizante
- *Backstepping*
- Modos deslizantes
- *Lyapunov redesign*
- Amortecimento não linear
- *Passivity-Based Control*

Problema: projetar um controlador de nível

Figura 1: Tanque cônico com área variável.



$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= \rho \cdot \dot{w}_i - \rho \cdot \dot{w}_o \\
\frac{\mathrm{d}\rho \cdot V(h)}{\mathrm{d}t} &= \rho \cdot \dot{w}_i - \rho \cdot k \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot h} \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} \cdot \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \dot{w}_i - k \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot h} \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h}\right)} \cdot \left(\dot{w}_i - k \cdot \sqrt{\rho \cdot g \cdot h}\right)
\end{aligned}
$$

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} \cdot \left(u - c \cdot \sqrt{x}\right)$$

Volume:

$$V(h) = \frac{\pi \cdot \phi^2}{3} \cdot \left(h + \frac{B/2}{\gamma}\right)^3 - \frac{\pi \cdot (B/2)^3}{3 \cdot \gamma}, \quad \gamma = \frac{C/2 - B/2}{h_M}$$

Sumário

Casos

Caso regulatório

Estabilizar em um determinado valor de referência.

Caso servo

O sistema deve seguir uma determinada referência.

Caso regulatório

- Pontos de equilíbrio.
- Ponto de linearização: $x_{ss} \, (= \alpha) \; (u_{ss} = c \cdot \sqrt{x_{ss}})$
- Lei de controle: $\underbrace{u - u_{ss}}_{U_\delta} = -K \cdot \underbrace{(x - \alpha)}_{X_\delta}$
- Sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} \cdot \left(u_{ss} - K \cdot (x - \alpha) - c \cdot \sqrt{x} \right) \tag{1}$$

- Malha fechada linearizada em torno do ponto de operação (α):

$$\dot{X}_\delta = A(\alpha, K) \cdot X_\delta \tag{2}$$

- Estabelecer critério de desempenho: avaliar K

Caso regulatório

- Malha fechada linearizada em torno de α:

$$\dot{X}_\delta = \left[-\frac{K}{\beta(\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)}\right]\cdot X_\delta \mid \text{Sistema de } 1^\circ \text{ ordem.}$$

- Estabelecer critério de desempenho:

Estabilidade:

$$-\frac{K}{\beta(\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)} < 0$$

$$K > -\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}}$$

Tempo de acomodação:

$$\tau = \frac{1}{\frac{K}{\beta(\alpha)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)}},\ 5\cdot\tau = 10\text{ s}$$

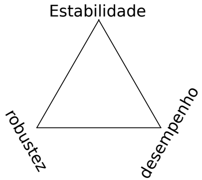
Robustez: qual o maior valor possível de c?

- Simule o sistema para o caso nominal e *mismatch* $(c_{\text{real}} = 1.1\cdot c_{\text{modelo}})$
- Desvantagem: *mismatch* $\rightarrow$ *offset*

Caso servo

- Ponto de linearização: $x_{ss}\,(=\alpha)$ $(u_{ss} = c \cdot \sqrt{x_{ss}})$
- Ponto de operação: $x_\infty = r \mid u_\infty = c \cdot \sqrt{r}$
- Lei de controle: $u = u_\infty - K \cdot (x - r)$

Projetar K de tal forma que o controlador seja robusto. Considere que $r = \alpha$, um caso mais conservador, e sintonize para este.



Mesmo que r, seja modificado, K continuará FIXO!

Offset: Há necessidade de ação integral na lei de controle.

Exercício

- Compare o desempenho deste controlador com o de um controlador P (Proporcional).
- Compare o desempenho deste controlador com o de um controlador por realimentação de estados, baseado no LQR.

Caso servo (ação integral)

- Lei de controle: $\begin{cases} u = -K_1 \cdot \underbrace{(x - r)}_{e} - K_2 \cdot \sigma \\ \dot{\sigma} = x - r \end{cases}$
- Pontos de linearização: $x_{ss} = \alpha \mid \sigma_{ss} = -\dfrac{c\sqrt{\alpha}}{K_2}$
- Ponto de operação: $x_\infty = r \mid \sigma_\infty = -\dfrac{c\sqrt{x_\infty}}{K_2}$
- Malha fechada linearizada em torno de α (Modelo estendido):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{\sigma}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{K_1}{\beta(\alpha)} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)} & -\dfrac{K_2}{\beta(\alpha)} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \sigma_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{K_1}{\beta(\alpha)} \\ -1 \end{bmatrix} \cdot r_\delta$$

$$Y_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \sigma_\delta \end{bmatrix}$$

Caso servo (ação integral)

- Desempenho da malha fechada (autovalores da equação característica):
  Estabilidade:

$$\lambda^2 + \left(\frac{K_1}{\beta(\alpha)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)}\right)\cdot\lambda + \frac{K_2}{\beta(\alpha)} = 0$$

$$K_1 > -\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}} \quad , \quad K_2 > 0$$

  Avalie o retrato de fases, para diferentes valores de r: 1; 1,1; 1,3
  (Qual ponto de equilíbrio?)

Caso servo (ação integral)

- Desempenho da malha fechada:
  Comportamento desejado (caso regulador $\rightarrow$ r_δ é fixo!):

$$\lambda^2 + \left(\frac{K_1}{\beta(\alpha)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)} \right) \cdot \lambda + \frac{K_2}{\beta(\alpha)} = 0$$

$$\lambda^2 + 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \lambda + w_n^2 = 0$$

$$K_2 = w_n^2 \cdot \beta(\alpha) \quad , \quad K_1 \approx 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \beta(\alpha)$$

- Malha fechada (função dos parâmetros de desempenho):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{\sigma}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \xi \cdot w_n - \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)} & -w_n^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \sigma_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot \xi \cdot w_n \\ -1 \end{bmatrix} \cdot r_\delta$$

$$Y_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \sigma_\delta \end{bmatrix}$$

Caso servo (ação integral)

- Avaliar o comportamento da variável de saída Y_δ, em função de variações da referência r_δ:

$$\frac{Y_\delta}{r_\delta} = \frac{2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot s + w_n^2}{s^2 + \left(2 \cdot \xi w_n + \frac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)}\right) \cdot s + w_n^2} \tag{3}$$

$$\xi_{\text{fechada}} = \frac{\left(2 \cdot \xi w_n + \frac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)}\right)}{2 \cdot w_n}$$

- Os parâmetros de desempenho atendem ao caso regulador.
  - Há um zero no comportamento $\frac{Y_\delta}{r_\delta}$.
- É possível realizar uma nova sintonia de K_1 e K_2 (definir ξ e w_n) para atender a um desempenho desejado para o caso servo.

Exercício

- Compare o desempenho deste controlador com o de um controlador PI (Proporcional, Integral).

Sumário

Introdução

- À medida em que r se afasta do ponto de linearização α (para o qual a sintonia fora realizada), o controlador perde desempenho.
- Cada ponto de operação ($x_\infty = r$), corresponde a um ponto de equilíbrio do sistema, α.
- Observe que, nos controladores de ganho fixo, K_1 e K_2, são funções do valor de α.

$r \rightarrow$ variável de escalonamento

Caso servo

Voltando ao exemplo do tanque:

Ganhos do controlador de ganho fixo projetado anteriormente

$$K_2 = w_n^2 \cdot \beta(\alpha) \quad , \quad K_1 \approx 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \beta(\alpha)$$

Aqui $(r = \alpha)$.

$$K_2 = w_n^2 \cdot \beta(r) \quad , \quad K_1 \approx 2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot \beta(r)$$

K_1 e K_2 são funções da variável de escalonamento, r

Assim, a lei de controle:

$$u = -K_1(r) \cdot (x - r) - K_2(r) \cdot \sigma$$

Caso servo

- Sistema em malha fechada:

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} \cdot \left(-K_1(r) \cdot (x - r) - K_2(r) \cdot \sigma - c \cdot \sqrt{x}\right) \tag{4}$$

- Linearizar em torno da variável de escalonamento ($r = \alpha$):

$$\dot{x} \approx \dot{x}\big|_{ss} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial x}(x - x_{ss}) + \frac{\partial \dot{x}}{\partial \sigma} \cdot (\sigma - \sigma_{ss}) + \frac{\partial \dot{x}}{\partial r} \cdot (r - \alpha) \qquad \frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}r} \neq 0$$

$$\dot{\sigma} \approx \dot{\sigma}\big|_{ss} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x}(x - x_{ss}) + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial r}(r - \alpha) \qquad \frac{\mathrm{d}K_2}{\mathrm{d}r} \neq 0$$

- Malha fechada linearizada em torno da variável de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{\sigma}_\delta \end{bmatrix} = A(\alpha, \xi, w_n) \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \sigma_\delta \end{bmatrix} + B(\alpha, \xi, w_n) \cdot r_\delta$$

$$Y_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \sigma_\delta \end{bmatrix}$$

Caso servo

- Malha fechada linearizada em torno da variável de escalonamento:

$$\begin{bmatrix}\dot{X}_\delta \\ \dot{\sigma}_\delta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot\xi\cdot w_n - \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)} & -w_n^2 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_\delta \\ \sigma_\delta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\cdot\xi\cdot w_n + \gamma(\alpha) \\ -1\end{bmatrix}\cdot r_\delta$$

$$Y_\delta = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}X_\delta \\ \sigma_\delta\end{bmatrix}$$

Ganho Escalonado:

$$\frac{Y_\delta}{r_\delta} = \frac{(2\cdot\xi\cdot w_n + \color{red}{\gamma(\alpha)})\cdot s + w_n^2}{s^2 + \left(2\cdot\xi w_n + \frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)}\right)\cdot s + w_n^2}$$

Ganho Fixo:

$$\frac{Y_\delta}{r_\delta} = \frac{2\cdot\xi\cdot w_n\cdot s + w_n^2}{s^2 + \left(2\cdot\xi w_n + \frac{c}{\sqrt{\alpha}\cdot\beta(\alpha)}\right)\cdot s + w_n^2}$$

- Se apenas regulação é importante, o escalonamento de ganhos neste formato é aceitável.
- Desempenhos são diferentes!$\rightarrow$ EFEITO DA MODIFICAÇÃO ZERO

Caso servo: lei de controle modificada

- $\gamma(\alpha)$ se origina de $\dfrac{\mathrm{d}K_2}{\mathrm{d}r}$ → Lei de controle: $\begin{cases} u = -K_1 \cdot (x - r) - \eta \\ \dot{\eta} = -K_2 \cdot (x - r) \end{cases}$
- Malha fechada linearizada em torno da variável de escalonamento:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_\delta \\ \dot{\eta}_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \xi \cdot w_n - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)} & \dfrac{1}{\beta(\alpha)} \\ -w_n^2 \cdot \beta(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \eta_\delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot \xi \cdot w_n \\ w_n^2 \cdot \beta(\alpha) \end{bmatrix} \cdot r_\delta$$

$$Y_\delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_\delta \\ \eta_\delta \end{bmatrix}$$

Gain Scheduled:

$$\frac{Y_\delta}{r_\delta} = \frac{(2 \cdot \xi \cdot w_n) \cdot s + w_n^2}{s^2 + \left(2 \cdot \xi w_n + \frac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)}\right) \cdot s + w_n^2}$$

Ganho Fixo:

$$\frac{Y_\delta}{r_\delta} = \frac{2 \cdot \xi \cdot w_n \cdot s + w_n^2}{s^2 + \left(2 \cdot \xi w_n + \frac{c}{\sqrt{\alpha} \cdot \beta(\alpha)}\right) \cdot s + w_n^2}$$

Procedimento para projeto de controlador por escalonamento de ganhos

1. Linearize o sistema (não-linear) em relação a uma família de pontos de equilíbrio - parametrizado por variáveis de escalonamento.
2. Usando linearização, projete uma família de controladores lineares para alcançar o desempenho esperado em cada ponto de operação.
3. Construa um controlador por escalonamento de ganho, tal que:
   - Para cada valor constante da variável exógena, a malha fechada tem o mesmo comportamento do controlador de ganho fixo.
   - A linearização da malha fechada é equivalente a linearização do sistema a ganho fixo.
4. Verifique o desempenho da malha fechada do controlador por escalonamento de ganho, através de simulação não-linear.

- A garantia de estabilidade é local.
- Mudanças na variável escalonada devem ser limitadas.

Inclusão de observador

Modelo esperado do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \tan(x_1) + x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + u\\ y &= x_2\\ y_m &= h_m(x, w)\end{aligned}$$

- Como projetar uma estratégia de controle?
- Inclusão de observador.

- Lei de controle $\begin{cases} u = -K_1 \cdot \hat{x} - K_2 \cdot \sigma \\ \dot{\sigma} = y - r \end{cases}$
- Observador: $\dot{\hat{x}} = A(\alpha) \cdot \hat{x} + B \cdot u + H(\alpha) \cdot (y_m - C \cdot \hat{x})$
- $r(= \alpha)$ como variável de escalonamento.

Inclusão de observador

- De maneira geral:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, u, \alpha) \rightarrow A(\alpha) \cdot x + B(\alpha) \cdot u \\ \dot{z} = f_2(z, u, y, x, \alpha) \rightarrow A(\alpha) \cdot z + B(\alpha) \cdot u + H(\alpha) \cdot (y_\mathrm{m} - C_\mathrm{m} \cdot z) \\ \dot{\sigma} = y - r \end{cases}$$

$$u = L(\alpha) \cdot z + M_1(\alpha) \cdot \sigma + M_2(\alpha) \cdot y_\mathrm{m} + M_3(\alpha) \cdot e$$

- Malha fechada (Avaliar estabilidade - sem r):

$$\begin{cases} \dot{x} = [A + B \cdot M_2 \cdot C_\mathrm{m} + B \cdot M_3 \cdot C \cdot] \cdot x + B \cdot M_1 \cdot \sigma + B \cdot L \cdot z \\ \dot{\sigma} = y - r \\ \dot{z} = F \cdot z + G_1 \cdot \sigma + G_2 \cdot y_\mathrm{m} \end{cases}$$

$$u = L \cdot z + M_1 \cdot \sigma + M_2 \cdot y_\mathrm{m} + M_3 \cdot e$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\sigma} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B \cdot M_2 \cdot C_\mathrm{m} + B \cdot M_3 \cdot C & B \cdot M_1 & B \cdot L \\ C & 0 & 0 \\ G_2 \cdot C_\mathrm{m} & G_1 & F \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \sigma \\ z \end{bmatrix}$$

Inclusão de observador

- Aplique a transformada da Laplace:

$$Z(s) = [s \cdot I - F(\alpha)]^{-1} \cdot G_1(\alpha) \cdot \sigma(s) + [s \cdot I - F(\alpha)]^{-1} \cdot G_2(\alpha) \cdot y_m$$

$$\begin{aligned} U(s) = & \left\{ F(\alpha) \cdot [s \cdot I - F(\alpha)]^{-1} \cdot G_1(\alpha) + M_1(\alpha) \right\} \cdot \sigma(s) + \\ & + \left\{ F(\alpha) \cdot [s \cdot I - F(\alpha)]^{-1} \cdot G_2(\alpha) + M_2(\alpha) \right\} \cdot y_m(s) + \\ & + M_3 \cdot e(s) \end{aligned}$$

$$U(s) = \left\{ L(\alpha) \cdot [s \cdot I - F(\alpha)]^{-1} \cdot G(\alpha) + M(\alpha) \right\} \cdot \begin{bmatrix} \sigma(s) \\ y_m \end{bmatrix} + M_3 \cdot e(s)$$

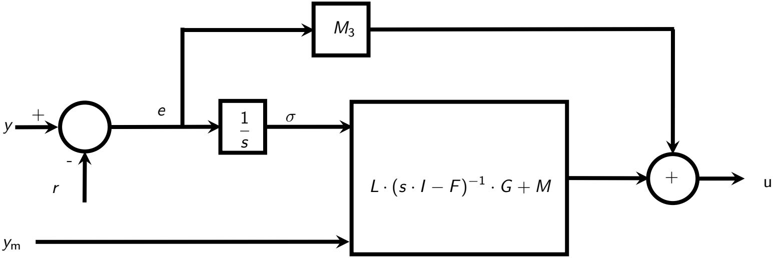
Observe aqui que os ganhos do controlador e do observador estarão escalonados!

Procedimento para projeto de controlador por escalonamento de ganhos com observador

Como projetar?

- Projete o observador e obtenha $H(\alpha)$, função da variável de escalonamento. Defina critério de desempenho para os ganhos do observador.
- Como no caso anterior, projete o controlador pra ganho fixo. Relacione os ganhos com a variável de escalonamento.
- Obtenha as matrizes L, M, F, G (malha fechada)

Projeto de controlador por escalonamento de ganhos com observador



Exemplo do projeto

Voltando ao exemplo:

- Projeto do observador:
  Sistema linearizado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$$\dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + H \cdot (y_m - C \cdot \hat{x}) = (A - H \cdot C) \cdot \hat{x} + B \cdot u + H \cdot y$$

Equação característica:

$$\lambda^2 + (h_2 - 1 - \alpha^2) \cdot \lambda - (1+\alpha^2) \cdot h_2 + h_1 - 1 = 0$$

Alocação de pólos: $\lambda = -\frac{3}{2} \pm j \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$h_1 =$
$10 + 4 \cdot \left(1+\alpha^2\right) \cdot \left(4+\alpha^2\right)$
$h_2 = 4 + \alpha^2$

Exemplo do projeto

Voltando ao exemplo:

- Projeto do controlador:

  Lei de controle: $\begin{cases} u = -K_1 \cdot \hat{x} - K_2 \cdot \sigma \\ \dot{\sigma} = y - r \end{cases}$

  Considere, para o projeto, que $\hat{x} = x$.

  Malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tan(x_1) + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - k_{11} \cdot x_1 - k_{12} \cdot x_2 - k_2 \cdot \sigma \\ \dot{\sigma} &= x_2 - r \end{aligned}$$

  Linearização:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha^2 & 1 & 0 \\ 1-k_{11} & -k_{12} & -k_2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \sigma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot r$$

Exemplo do projeto

Voltando ao exemplo:

- Projeto do controlador:
  Equação característica:

$$\lambda^3+(k_{12}-1-\alpha^2)\cdot\lambda^2+\big(-(1+\alpha^2)\cdot k_{12}+k_2+k_{11}-1\big)\cdot\lambda-(1+\alpha^2)\cdot k_2=0$$

$$k_{11}=3+(1+\alpha^2)\cdot\big(3+\alpha^2\big)+\frac{1}{1+\alpha^2}$$
$$k_{12}=3+\alpha^2$$
$$k_2=-\frac{1}{1+\alpha^2}$$

Como implementar?

Lei de controle modificada

- Por questões de desempenho precisa-se fazer uma alteração na lei de controle (**quando for implementado**).

Lei de controle original:

$$\begin{cases} \dot{z} = F \cdot z + G_1 \cdot \sigma + G_2 \cdot y_\mathrm{m} \\ \dot{\sigma} = y - r \\ u = L \cdot z + M_1 \cdot \sigma + M_2 \cdot y_\mathrm{m} + M_3(\alpha) \cdot e \end{cases}$$

Estrutura modificada:

$$\psi = \begin{bmatrix} e \\ \dot{y}_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = F \cdot z + \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} \cdot \psi \\ \dot{\eta} = L(\alpha) \cdot z + \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \end{bmatrix} \psi \\ u = \eta + M_3 \cdot e \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\xi} = {}^1/_\epsilon \cdot (-\xi + y_\mathrm{m}) \\ \vartheta = {}^1/_\epsilon \cdot (-\xi + y_\mathrm{m}) \end{cases}$$

$$\vartheta(s) = y_\mathrm{m} \cdot \left(\frac{s}{\epsilon \cdot s + 1} \right) \approx s \cdot y_\mathrm{m} \approx \dot{y}_\mathrm{m}$$

Lei de controle modificada

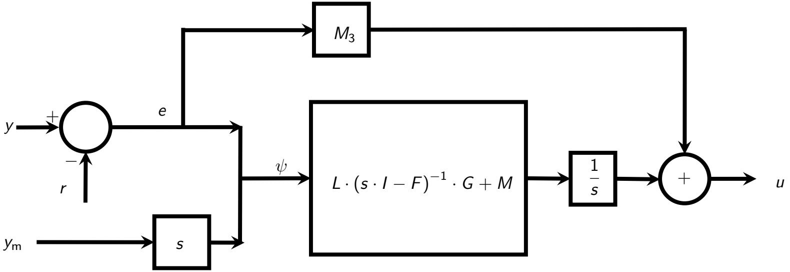
$$\begin{cases} \dot{z} = F \cdot z + G \cdot \psi \\ \dot{\eta} = L \cdot z + M \cdot \psi \\ u = \eta + M_3 \cdot e \end{cases} \qquad \psi = \begin{bmatrix} e \\ \dot{y}_\mathrm{m} \end{bmatrix}$$

Aplicar a transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} Z(s) =& (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G \cdot \psi(s) \\ \eta(s) =& \frac{1}{s} \cdot \left(L \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + M\right) \cdot \psi(s) \\ u(s) =& \frac{1}{s} \cdot \left(L \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + M\right) \cdot \psi(s) + M_3 \cdot e(s) \\ u(s) =& \frac{1}{s} \cdot \left(L \cdot (s \cdot I - F)^{-1} \cdot G + M\right) \cdot \begin{bmatrix} e(s) \\ s \cdot y_\mathrm{m}(s) \end{bmatrix} + M_3 \cdot e(s) \end{aligned}$$

Lei de controle modificada

Estrutura modificada:



Exemplo do projeto

Voltando ao exemplo:

- Identificar as matrizes do formato "padrão".

Forma padrão:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = y - r \\ \dot{z} = F \cdot z + G_1 \cdot \sigma + G_2 \cdot y_m \\ u = L \cdot z + M_1 \cdot \sigma + M_2 \cdot y_m + M_3 \cdot e \end{cases}$$

Controle:

$$L = -K_1$$

$$M = \begin{bmatrix} -K_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_3 = 0$$

Forma implementada:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = y - r \\ \dot{\hat{x}} = A \cdot \hat{x} + B \cdot u + H \cdot (y_m - C \cdot \hat{x}) \\ u = -K_1 \cdot \hat{x} - K_2 \cdot \sigma \end{cases}$$

Observador:

$$F = A - H \cdot C - B \cdot K_1$$

$$G = \begin{bmatrix} -B \cdot K_2 & H \end{bmatrix}$$

- Implementação: alterar o fluxo de sinais.

Sumário

Introdução

Considere novamente o tanque com área variável:

$$\dot{x} = \frac{1}{\beta(x)} \cdot \left(u - c \cdot \sqrt{x}\right) \tag{5}$$

Proponham uma lei de controle tal que a malha fechada seja linear:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{\beta(x)} \cdot \left(u - c \cdot \sqrt{x}\right) \\ u &= c \cdot \sqrt{x} - \beta(x) \cdot K \cdot x \\ \dot{x} &= -K \cdot x \end{aligned} \tag{6}$$

Quais as condições para estabilidade da malha fechada?

- A malha fechada agora é linear → Devido a implementação de uma lei de controle *feedback* → feedback linearizante.

Estrutura do modelo

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot \gamma(x) \left[u - a(x)\right]$$

$$\begin{aligned} \textit{Feedback} \text{ de estado: } u =& a(x) + \gamma(x)^{-1} \cdot \nu \\ \nu =& -K \cdot x \end{aligned} \tag{7}$$

Malha fechada: $\dot{x} = (A - B \cdot K) \cdot x$

$(A - B \cdot K)$ precisa ser estável $\rightarrow$ matriz Hurwitz

<u>Cancelamento de não linearidades</u>

Introdução

Considere o modelo:

$$\dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

É possível propor uma lei de controle por *feedback* linearizante?
Aplicar uma transformação no Espaço de Estados:

$$z_1 = x_1 \qquad \dot{z}_1 = \dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$z_2 = a \cdot \sin(x_2) \qquad \dot{z}_2 = a \cdot \cos(x_2) \cdot \dot{x}_2 = a \cdot \cos(x_2) \cdot \left(-x_1^2 + u\right)$$

$$x_1 = z_1 \qquad \dot{z}_1 = z_2$$
$$x_2 = arcsen(z_2/a) \qquad \dot{z}_2 = a \cdot \cos(arcsen(z_2/a)) \cdot \left(-z_1^2 + u\right)$$

Forma padrão para aplicar o *feedback* linearizante:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot a \cdot \cos(arcsen(z_2/a)) \cdot \left(u - z_1^2\right)$$

Introdução

Sistema original:

$$\dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

Novo espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot a \cdot \cos(arcsen(z_2/a)) \cdot (u - z_1^2)$$

Transformação realizada no espaço de estados:

$$z_1 = x_1 \qquad x_1 = z_1 \qquad -a < z_2 < a$$
$$z_2 = a \cdot \sin(x_2) \qquad x_2 = arcsen(z_2/a) \qquad -\pi/2 < x_2 < \pi/2$$

Lei de controle *feedback*: $u = z_1^2 + \dfrac{1}{a \cdot \cos(arcsen(z_2/a))} \cdot [-K_1 \cdot z_1 - K_2 \cdot z_2]$

Lei de controle *feedback*: $u = x_1^2 + \dfrac{1}{a \cdot \cos(x_2)} \cdot [-K_1 \cdot x_1 - K_2 \cdot a \cdot \sin(x_2)]$

Introdução

Sistema original (malha fechada):

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a \cdot \sin(x_2) \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{a \cdot \cos(x_2)} \cdot [-K_1 \cdot x_1 - K_2 \cdot a \cdot \sin(x_2)]\end{aligned}$$

Novo espaço de estados (malha fechada):

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= -K_1 \cdot z_1 - K_2 \cdot z_2\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}K_1 & K_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 \\ K_1 & K_2\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -K_1 & -K_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}z_1 \\ z_2\end{bmatrix}$$

Equação característica: $\lambda^2 + K_2 \cdot \lambda + K_1 = 0$

Exercício

- Avaliar o retrato de fases do sistema em x, com e sem a lei de controle proposta.
- Implementar o controlador e avaliar as condições nas quais o sistema converge para a origem.

Definição: difeomorfismo

Definição

Uma função $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida na região Ω, é chamada difeomorfismo se ela é suave, e sua inversa, T^{-1} existe e é suave.

Exemplo:

$$\begin{cases} z_1 = & x_1 \\ z_2 = & a \cdot \sin(x_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = & z_1 \\ x_2 = & arcsen(z_2/a) \end{cases} \qquad \Omega = \begin{cases} -a < z_2 < a \\ -\pi/2 < x_2 < \pi/2 \end{cases}$$

$$z = \mathrm{T}(x) \qquad x = T^{-1}(z)$$

Lema

Seja $T(x)$ uma função suave definida na região Ω em $\mathbb{R}^n$. Se a matriz jacobiana $\nabla T(x)$ é não singular em um ponto $x = x_0$ de Ω, então $T(x)$ define um **difeomorfismo local** sobre a região Ω.

Uso

Transformar um sistema não linear em outro sistema não linear, com um novo conjunto de estados.

Definição: linearização por *feedback*

Definição

Um sistema não linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$ é dito linearizável por *feedback* (ou entrada-estado linearizável) se existe um **difeomorfismo** $T : D \rightarrow R^n$ tal que $D_z = T(D)$ **contenha a origem** e a mudança de variáveis $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ transforma o sistema para a forma:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B} \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot [u - \alpha(\mathbf{x})] \tag{8}$$

em que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são controláveis e $\gamma(\mathbf{x})$ é não singular.

Lei de controle: $u = \alpha(\mathbf{x}) + \gamma^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \nu$
Malha fechada: $\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \nu) \cdot \mathbf{z}$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ $\rightarrow$ campos vetoriais.
Observação:
$\nu(\mathbf{z}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{z}$
$\nu(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot T^{-1}(\mathbf{z})$

CASO REGULADOR

Contextualização

Como definir, então, $T(x)$?

- Linearização entrada-saída
- Linearização total dos estados

Linearização entrada-saída

Considere:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u \\ y = & h(\mathbf{x}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^n \end{cases} \to \text{Campo de vetores}$$

Como a ação de controle influencia a saída?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot [\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u]$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$$

$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \to$ Derivada de h ao longo da trajetória $\mathbf{f}$.

$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \to L_{\mathbf{f}} h$

$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \to$ Derivada de h ao longo da trajetória $\mathbf{g}$.

$\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \to L_{\mathbf{g}} h$

Definição: Derivada de Lie

Definição

Seja $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar, e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial suave em $\mathbb{R}^n$, então a derivada de Lie de h em relação a $\mathbf{f}$ é uma função escalar definida por:

$$L_{\mathbf{f}} h = \nabla h \cdot \mathbf{f}$$

$L_{\mathbf{f}} h \to$ Derivada direcional de h ao longo da trajetória do campo vetorial $\mathbf{f}$.

Exemplos:

- $L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = \nabla L_{\mathbf{f}} h \cdot \mathbf{g} = \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}} h}{\partial x} \cdot \mathbf{g}$
- $L_{\mathbf{f}}^2 h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} h = \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}} h}{\partial x} \cdot \mathbf{f}$
- $L_{\mathbf{f}}^k h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}}^{k-1} h = \dfrac{\partial L_{\mathbf{f}}^{k-1} h}{\partial x} \cdot \mathbf{f}$
- $L_{\mathbf{f}}^0 h = h$

Exemplo: Equação de Van der Pool

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(x)} \cdot u$$

Caso 1:

$$y = h(x) = x_1 + 0 \cdot x_2$$
$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \cdot u)$$
$$\dot{y} = \underbrace{x_2}_{L_\mathbf{f} h} + \underbrace{0}_{L_\mathbf{g} h} \cdot u$$
$$\ddot{y} = \frac{\partial L_\mathbf{f} h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \cdot u)$$
$$\ddot{y} = \underbrace{-x_1 + \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2}_{L_\mathbf{f}^2 h} + \underbrace{1}_{L_\mathbf{g} L_\mathbf{f} h} \cdot u$$

Caso 2:

$$y = h(x) = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2$$
$$\dot{y} = \dot{x}_2$$
$$\dot{y} = \underbrace{-x_1 + \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2}_{L_\mathbf{f} h} + \underbrace{1}_{L_\mathbf{g} h} \cdot u$$

Exemplo: Equação de Van der Pool

Caso 1:

Considere, então, um novo espaço de estados: $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\xi} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\underbrace{1}_{L_{\mathbf{g}} h} \cdot u \underbrace{- x_1 + \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2}_{L_{\mathbf{f}} h} \right)$$

$$\boldsymbol{\xi} = T(x) = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = T^{-1}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

- $T(\mathbf{x})$ é difeomorfismo
- $D_{\boldsymbol{\xi}}$ contém a origem
- Em $\boldsymbol{\xi}$, a origem é ponto de equilíbrio

- Lei de controle: $u = x_1 - \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2 - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}$
- Lei de controle: $u = x_1 - \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2 - \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$

Exemplo: Equação de Van der Pool

- Avaliar o retrato de fases do sistema com a lei de controle proposta.
- Implementar o controlador e avaliar as condições nas quais o sistema converge para a origem.

Linearização entrada-saída

Considere:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = & \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u \\ y = & h(\mathbf{x}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}^n \end{cases} \to \text{ Campo de vetores}$$

Como a ação de controle influencia a saída?

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = L_{\mathbf{f}} h + L_{\mathbf{g}} h \cdot u \qquad L_{\mathbf{g}} h = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}L_{\mathbf{f}} h}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L_{\mathbf{f}} h}{\mathrm{d}\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{f}} h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \cdot u = L_{\mathbf{f}}^2 h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \cdot u \qquad L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\mathrm{d}^\rho y}{\mathrm{d}t^\rho} = L_{\mathbf{f}}^\rho h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \cdot u \qquad L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \neq 0$$

Linearização entrada-saída

Considere, então, o seguinte **vetor de estados**:

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ \overset{(\rho-1)}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_{\mathbf{f}} h(x) \\ L_{\mathbf{f}}^2 h \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \overset{(3)}{y} \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\mathbf{f}} h(x) \\ L_{\mathbf{f}}^2 h \\ L_{\mathbf{f}}^3 h \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\rho} h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \cdot u \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \overset{(3)}{y} \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{\text{cadeia de integradores}} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ \overset{(\rho-1)}{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \cdot u + L_{\mathbf{f}}^{\rho} h \right)$$

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A}_c \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{B}_c \cdot L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \cdot \left(u + \frac{L_{\mathbf{f}}^{\rho} h}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h} \right)$$

Linearização entrada-saída

$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_c \cdot \xi + \mathbf{B}_c \cdot L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \cdot \left(u + \frac{L_{\mathbf{f}}^{\rho} h}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h} \right)$$

Está no formato que permite aplicar *feedback* linearizante.
Lei de controle:

$$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h} \cdot \left(-L_{\mathbf{f}}^{\rho} h + \nu \right)$$

Definição: grau relativo do sistema

Um sistema é dito ter grau relativo ρ, $1 \leq \rho \leq n$, em uma região $D_0 \subset D$, se:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{j} h = 0, \; j = 0, 2, \ldots, \rho - 2 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \neq 0 \end{cases}, \text{ para todo } x \in D_0$$

Linearização entrada-saída

- Nesta transformação, $\xi = T^*(x)$, parte da dinâmica do processo pode ser perdida.
- $T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^\rho$ $\to$ Só poderá ser difeomorfismo se $n = \rho$.
- Observe que o grau relativo ρ pode ser inferior ao número de estados originais do sistema n $(\rho < n)$. Então existem $n - \rho$ estados que precisam ser adicionados à este "novo" espaço.

Definição

Uma função $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida na região Ω, é chamada difeomorfismo se ela é suave, e sua inversa, T^{-1} existe e é suave.

Como adicionar então, os estados que faltam?

Linearização entrada-saída

$$\mathbf{z} = T(x) = \left[\begin{array}{c} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ \overset{(\rho-1)}{y} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_{n-\rho}(x) \\ \hline h(x) \\ L_{\mathbf{f}} h(x) \\ L_{\mathbf{f}}^2 h \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \phi \\ \hline \xi \end{array}\right]$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \left[\begin{array}{c} \dot{\phi} \\ \hline \dot{\xi} \end{array}\right]$$

Impor que $\dot{\phi}(x)$ não depende diretamente da entrada u.

$$\dot{\phi}(x) = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(x) + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(x) \cdot u \;\rightarrow\; \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(x) = \mathbf{0}$$

Teorema

Teorema

Considere o sistema $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \cdot u \\ y = h(x) \end{cases}$ e suponha grau relativo ρ em D.

- Se $\rho = n$, então para cada $x_0 \in D$, existe uma vizinhança de x_0 tal que o mapa: $T(x) = \begin{bmatrix} h(x) \\ \vdots \\ L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h \end{bmatrix}$ é difeomorfismo, restrito nesta região.
- Se $\rho < n$, então para cada $x_0 \in D$, existem uma vizinhança de x_0 e funções suaves $\phi_1, \cdots, \phi_{n-\rho}$, tal que $\dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(x) = \mathbf{0}$, para todo x nesta região, e $T(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$, um difeomorfismo restrito a esta região.

Linearização entrada-saída

$$\begin{cases} \dot{\phi} = & \psi(\phi, \xi) \\ \dot{\xi} = & \mathbf{A}_c \cdot \xi + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(x) \cdot (u - \alpha(x)) \\ y = & \mathbf{C}_c \cdot \xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = & \psi(\phi, \xi) \rightarrow \text{não controlável.} \\ \dot{\xi} = & \mathbf{A}_c \cdot \xi + \mathbf{B}_c \cdot \nu \\ y = & \mathbf{C}_c \cdot \xi \end{cases}$$

Lei de controle:
$u = \alpha(\mathbf{x}) + \gamma^{-1}(\mathbf{x}) \cdot \nu$

Ponto de equilíbrio

Se $\mathbf{y^* = 0}$, então, $h(\mathbf{x}^*) = 0$, sendo possível escolher ϕ de tal forma que $\phi(\mathbf{x}^*) = 0$. Assim, a origem $[\boldsymbol{\phi^* = 0, \xi^* = 0}]$, é **ponto de equilíbrio do novo sistema.**

Sistema de fase mínima

Se $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ é escolhido tal que a origem $(\mathbf{z}^* = \mathbf{0})$ é ponto de equilíbrio do sistema, então o **sistema é dito de fase mínima se a origem da dinâmica zero** $[\psi(\phi, 0)]$ **é assintoticamente estável.**

Exemplo: Equação de Van der Pool

Caso 2:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1+\epsilon\cdot\left(1-x_1^2\right)\cdot x_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(x)}\cdot u$$

$$y = h(x) = 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2$$
$$\dot{y} = \dot{x}_2$$
$$\dot{y} = \underbrace{-x_1+\epsilon\cdot\left(1-x_1^2\right)\cdot x_2}_{L_{\mathbf{f}}h} + \underbrace{1}_{L_{\mathbf{g}}h}\cdot u$$

- Grau relativo $= 1 \rightarrow$ tem uma dinâmica não controlável.
- Ponto de equilíbrio ($\mathbf{x}^*$): origem
- Considere o novo espaço de estados: $\mathbf{z} = \begin{bmatrix}\phi\\ \xi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi\\ y\end{bmatrix}$
- Lei de controle:
  $$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\rho-1}h}\cdot\left(-L_{\mathbf{f}}^{\rho}h+\nu\right) = x_1-\epsilon\cdot\left(1-x_1^2\right)\cdot x_2 - k_1\cdot\xi$$

Exemplo: Equação de Van der Pool

Caso 2:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}x_2\\ -x_1+\epsilon\cdot\left(1-x_1^2\right)\cdot x_2\end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(x)} + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}}_{\mathbf{g}(x)}\cdot u$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix}\phi\\ \xi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi\\ y\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix}\phi\\ x_2\end{bmatrix}$$

- Lei de controle:
  $$u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}}L_{\mathbf{f}}^{\rho-1}h}\cdot\left(-L_{\mathbf{f}}^{\rho}h+\nu\right) = x_1-\epsilon\cdot\left(1-x_1^2\right)\cdot x_2 - k_1\cdot\xi$$
- Caracterizar a dinâmica zero $\psi(\phi,0)$: $\xi = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow x_2 = 0$
  $Z^* = \left\{x\in\mathbb{R}^2 | y=0\right\} = \left\{x\in\mathbb{R}^2 | x_2=0\right\} | u_{ss} = x_1$(lei de controle)

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \cancelto{0}{x_2}\\ \dot{x}_2 = -x_1+\epsilon\cdot\left(1-x_1^2\right)\cdot\cancelto{0}{x_2}+u\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 0 => \dot{y} \rightarrow \text{Fase não mínima}\\ \dot{x}_2 = -x_1+u \rightarrow \text{controlável}\end{cases}$$

Exemplo: Equação de Van der Pool

Definindo ϕ: $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(x) = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \phi = x_1$

$\phi(0) = 0$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{\xi} = u - x_1 + \epsilon \cdot \left(1 - x_1^2\right) \cdot x_2 \\ y = \xi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\phi} = \xi \rightarrow \text{Sistema de fase não-mínima} \\ \dot{\xi} = u - \phi + \epsilon \cdot \left(1 - \phi^2\right) \cdot \xi \\ y = \xi \end{cases}$$

- Lei de controle: $u = \phi - \epsilon \cdot (1 - \phi^2) \cdot \xi - k_1 \cdot \xi$
- Lei de controle: $u = x_1 - \epsilon \cdot (1 - x_1^2) \cdot x_2 - k_1 \cdot x_2$

Malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \xi \rightarrow \text{Não controla} \\ \dot{\xi} = -K \cdot \xi \\ y = \xi \end{cases}$$

Essa lei de controle é apropriada?

Exemplo 13.6

Proponha um controlador para o sistema, pelo método do *feedback* linearizante:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \dfrac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \cdot u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 \cdot x_3 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

1. Grau relativo: $= 2$

$$y = x_2$$
$$\dot{y} = x_3 = L_{\mathbf{f}} h$$
$$\ddot{y} = x_1 \cdot x_3 + u = L_{\mathbf{f}}^2 h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \cdot u$$

2. Ponto de equilíbrio ($\mathbf{x}^*$): origem

3. Proposta do espaço de estados: $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \phi \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi\left(\phi, \xi\right) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A} \cdot \xi + \mathbf{B} \cdot \gamma \cdot [u - \alpha(x)] \\ y = \mathbf{C} \cdot \xi \end{cases}$$

Exemplo 13.6

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \dfrac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \cdot u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 \cdot x_3 + u \\ y = x_2 \end{cases}$$

$$y = x_2$$
$$\dot{y} = \dot{x}_2 = x_3 = L_{\mathbf{f}} h$$
$$\ddot{y} = x_1 \cdot x_3 + u = L_{\mathbf{f}}^2 h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h \cdot u$$

1. Lei de controle: $u = \dfrac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h} \cdot \left(-L_{\mathbf{f}}^{\rho} h + \nu\right) = -x_1 \cdot x_3 - \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\xi}$
2. Caracterizar a dinâmica zero ($\boldsymbol{\xi} = 0$)
   $Z^* = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | y = \dot{y} = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 = x_3 = 0\right\} | u_{ss} = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2 \cdot u \\ \dot{x}_2 = \cancel{x_3}^{\,0} \\ \dot{x}_3 = x_1 \cdot \cancel{x_3}^{\,0} + u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \rightarrow \text{Fase mínima} \\ \dot{x}_2 = 0 => \dot{y} \rightarrow \text{controlado} \\ \dot{x}_3 = 0 => \text{controlável} \end{cases}$$

Exemplo 13.6

- Determinar ϕ: $\begin{cases} \phi(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \cdot \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 0 \rightarrow \phi = -x_1 + \tan^{-1}(x_3) + x_3$$

- Determinar $T(x)$ e $T^{-1}(x)$ (*difeomorfismo*?):$\rightarrow z \in \mathbb{R}^3$ e $x \in \mathbb{R}^3 (x_1 > 0)$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -x_1 + \tan^{-1}(x_3) + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -z_1 + \tan^{-1}(z_3) + z_3 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.6

Finalmente, o espaço de estados em $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \phi \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \left(-\phi + \tan^{-1}(\xi_2) + \xi_2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{2+\xi_2^2}{1+\xi_2^2}\right) \cdot \xi_2\right) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \left(-\phi + \tan^{-1}(\xi_2) + \xi_2\right) \cdot \xi_2 + u \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

- Lei de controle: $u = -\left(-\phi + \tan^{-1}(\xi_2) + \xi_2\right) \cdot \xi_2 - k_{11} \cdot \xi_1 - k_{12} \cdot \xi_2$
- Lei de controle: $u = -x_1 \cdot x_3 - k_{11} \cdot x_2 - k_{12} \cdot x_3$
- Malha fechada:

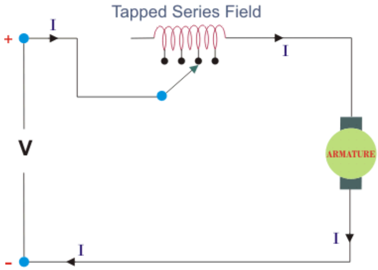
$$\begin{cases} \dot{\phi} = \left(-\phi + \tan^{-1}(\xi_2) + \xi_2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{2+\xi_2^2}{1+\xi_2^2}\right) \cdot \xi_2\right) \\ \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Exemplo 13.7: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_f(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_f}{L_f} \cdot i_f(t) + \dfrac{v_f(t)}{L_f} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_a}{L_a} \cdot i_a(t) - \dfrac{c_1}{L_a} \cdot i_f(t) \cdot w(t) + \dfrac{v_a(t)}{L_a} \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c_2}{J} \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - c_3 \cdot w \end{cases}$$

$c_3 = 0$

Projete um controlador (caso regulador) para a velocidade angular do rotor, $w(t)$, utilizando como variável manipulada a tensão do circuito externo $v_{f(t)}$.



Exemplo 13.7: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_f(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_f}{L_f} \cdot i_f(t) + \dfrac{v_f(t)}{L_f} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_a}{L_a} \cdot i_a(t) - \dfrac{c_1}{L_a} \cdot i_f(t) \cdot w(t) + \dfrac{v_a(t)}{L_a} \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c_2}{J} \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - c_3 \cdot w \end{cases}$$

$$c_3 = 0$$

Projete um controlador (caso regulador) para a velocidade angular do rotor, $w(t)$, utilizando como variável manipulada a tensão do circuito externo $v_{f(t)}$.

$$a = \frac{R_f}{L_f} \quad b = \frac{R_a}{L_a} \quad c = \frac{c_1}{L_a} \quad \theta = \frac{c_2}{J}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = i_f \quad x_2 = i_a \quad x_3 = w$$

$$u = \frac{v_f}{L_f} \quad k = \frac{v_a}{L_a}$$

Exemplo 13.7 - motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y &= x_3 \\ \dot{y} &= \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \\ \ddot{y} &= \theta \cdot (-a \cdot x_1 + u) \cdot x_2 + \theta \cdot x_1 \cdot \dot{x}_2 \\ &= -\theta \cdot a \cdot x_1 \cdot x_2 + \theta \cdot x_1 \cdot \dot{x}_2 + \theta \cdot x_2 \cdot u \end{aligned}$$

1. Grau relativo $= 2$
2. Ponto de equilíbrio ($\mathbf{x}^*$): $\begin{bmatrix} 0 & k/b & w_0 \end{bmatrix}$
3. Proposta do espaço de estados:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \phi \\ y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \psi(\phi, \xi) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{A} \cdot \xi + \mathbf{B} \cdot \gamma \cdot [u - \alpha(x)] \\ y = \mathbf{C} \cdot \xi \end{cases}$$

Exemplo 13.7: motor sem amortecimento no eixo

1. Lei de controle: $u = \dfrac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{\rho-1} h} \cdot \left(-L_{\mathbf{f}}^{\rho} h + \nu\right)$

$$u = \frac{1}{\theta \cdot x_2} \cdot (\theta \cdot a \cdot x_1 \cdot x_2 - \theta \cdot x_1 \cdot \dot{x}_2 + \nu)$$

2. Caracterizar a dinâmica zero ($\boldsymbol{\xi} = 0$)
$Z^* = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | y = \dot{y} = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = x_1 = 0\right\} | u_{ss} = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k \rightarrow \text{estável} \\ \dot{x}_3 = 0 \end{cases}$$

3. Determinar $\phi = \begin{cases} \phi(\mathbf{x}^*) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(x) = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \phi}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0 \Bigg| \phi = x_2 - \frac{k}{b}$$

Exemplo 13.7: motor sem amortecimento no eixo

- Pontos de equilíbrio: $\begin{bmatrix} 0 & k/b & w_0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Determinar $T(x)$ e $T^{-1}(x)$ (*difeomorfismo*?)
  $\rightarrow z \in \mathbb{R}^3$ e $x \in \mathbb{R}^3 (x_2 > 0)$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_2 - \dfrac{k}{b} \\ x_3 \\ \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_3}{\theta \cdot \left(z_1 + \frac{k}{b}\right)} \\ z_1 + \dfrac{k}{b} \\ z_2 \end{bmatrix}$$

- Sistema:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{cases} = \begin{cases} \dot{\phi} \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{cases} = \begin{cases} -b \cdot \phi - c \cdot \dfrac{\xi_2}{\theta \cdot \left(\phi + \frac{k}{b}\right)} \cdot \xi_1 \\ \xi_2 \\ -(a+b) \cdot \xi_2 + \dfrac{k \cdot \xi_2}{\phi + \frac{k}{b}} - c \cdot \left(\dfrac{\xi_2^2}{\theta \cdot \left(\phi + \frac{k}{b}\right)^2} \right) \cdot \xi_1 + \theta \cdot \left(\phi + \dfrac{k}{b}\right) \cdot u \end{cases}$$

Exemplo 13.7: motor sem amortecimento no eixo

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} x_2 - \dfrac{k}{b} \\ x_3 \\ \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{z_3}{\theta \cdot \left(z_1 + \frac{k}{b}\right)} \\ z_1 + \dfrac{k}{b} \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{cases} = \begin{cases} \dot{\phi} \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{cases} = \begin{cases} -b \cdot \phi - c \cdot \dfrac{\xi_2}{\theta \cdot \left(\phi + \frac{k}{b}\right)} \cdot \xi_1 \\ \xi_2 \\ -(a+b) \cdot \xi_2 + \dfrac{k \cdot \xi_2}{\phi + \frac{k}{b}} - c \cdot \left(\dfrac{\xi_2^2}{\theta \cdot \left(\phi + \frac{k}{b}\right)^2}\right) \cdot \xi_1 + \theta \cdot \left(\phi + \dfrac{k}{b}\right) \cdot u \end{cases}$$

Lei de controle: $u = \dfrac{1}{\theta \cdot x_2} \cdot \left(\theta \cdot a \cdot x_1 \cdot x_2 - \theta \cdot x_1 \cdot \dot{x}_2 + \nu\right)$

$$u = \frac{1}{\theta \cdot \left(\phi + \frac{k}{b}\right)} \cdot \left((a+b) \cdot \xi_2 - \frac{k \cdot \xi_2}{\phi + \frac{k}{b}} + \frac{c \cdot \xi_2^2 \cdot \xi_1}{\theta \cdot \left(\phi + \frac{k}{b}\right)^2} + \nu\right)$$

Exemplo 13.7: motor sem amortecimento no eixo

- Considere agora que há amortecimento no eixo. Projete um controlador por *feedback* linearizante para este sistema.

Linearização total dos estados

A depender da variável controlada ($y = h(x)$), o sistema pode apresentar uma dinâmica que não será controlada.

O sistema é linearizável por *feedback* se existe uma função suave $h : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$, tal que o sistema $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \cdot u \\ y = h(x) \end{cases}$ tem grau relativo n na região $\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}$.

Na forma padrão, o sistema será reduzido para:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(x) \cdot [u - \alpha(x)] \\ y = \mathbf{C} \cdot \mathbf{z} \end{cases}$$

$\mathbf{A}_c$ e $\mathbf{B}_c$ $\to$ CONTROLÁVEL

$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ $\qquad \dot{\mathbf{z}} = \dfrac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}$ $\qquad$ Avaliar $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ ? \end{bmatrix}$

Linearização total dos estados

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial x} \cdot \dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot [u - \alpha(\mathbf{x})] = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u)$$

$$\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot [u - \alpha(\mathbf{x})] = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u)$$

$$\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot u = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$$

Linearização total dos estados

$$\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot u = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial T_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial T_3(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial T_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1(\mathbf{x}) \\ T_2(\mathbf{x}) \\ T_3(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ T_{n-1}(\mathbf{x}) \\ T_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x})$$

Linearização total dos estados

$$\mathbf{T}(x) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}) \\ ? \end{bmatrix}$$

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial T_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_2(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f} T_1(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f}^1 h(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial T_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_3(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f} T_2(\mathbf{x}) = T_3(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f}^2 h(\mathbf{x}) = T_3(\mathbf{x})$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial T_{n-2}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{n-1}(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f}^{n-2} h(\mathbf{x}) = T_{n-1}(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial T_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_{n}(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f}^{n-1} h(\mathbf{x}) = T_{n}(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial T_{n}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) \rightarrow L_\mathbf{f}^{n} h(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x})$$

Linearização total dos estados

$$\mathbf{A}_c \cdot \mathbf{T}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot u = \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$$

$$\frac{\partial \mathbf{T}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u = \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial T_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial T_3(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial T_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial T_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \gamma(\mathbf{x})$$

Linearização total dos estados

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$$
$$\frac{\partial T_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0$$
$$\frac{\partial T_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial T_{n-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-2} h(\mathbf{x}) = 0$$
$$\frac{\partial T_n(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x})$$

$$T_1(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$$
$$T_2(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^1 h(\mathbf{x})$$
$$T_3(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x})$$
$$\vdots$$
$$T_{n-1}(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^{n-2} h(\mathbf{x})$$
$$T_n(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x})$$

$$L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x}) = -\gamma(\mathbf{x}) \cdot \alpha(\mathbf{x})$$
$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{f}}^n h(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h}$$

Linearização total dos estados

O sistema é linearizável por *feedback* se e apenas se um função $h(\mathbf{x})$ existe tal que o sistema $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u \\ y = h(\mathbf{x}) \end{cases}$ tenha grau relativo n, ou equivalente $h(\mathbf{x})$ que satisfaça as equações diferenciais:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{i} h(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 0, \ldots, n-2 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases}$$

Forma padrão: $\mathbf{z} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{z} + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(x) \cdot [u - \alpha(x)]$

Lei de controle:

$$u = \alpha(x) - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} \rightarrow u = \frac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x})} \cdot \left(-L_{\mathbf{f}}^{n} h(\mathbf{x}) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}\right)$$

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\frac{L_{\mathbf{f}}^{n} h(\mathbf{x})}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h} \quad \gamma(\mathbf{x}) = L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-1} h(\mathbf{x})$$

EXISTE SOLUÇÃO PARA O SISTEMA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS?

Teorema de Frobenius

Uso

Provê condições necessárias e suficientes para solução de uma especial de equações diferenciais parciais.

Considere:

$$\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_1}\cdot a_1+\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_2}\cdot a_2+\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_3}\cdot a_3=0$$

$$\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_1}\cdot b_1+\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_2}\cdot b_2+\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_3}\cdot b_3=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_2} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_2} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_3}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=0$$

- $a_i(x_1,x_2,x_3)$, $b_i(x_1,x_2,x_3)\rightarrow$ funções escalares
- $h(\mathbf{x})=h(x_1,x_2,x_3)\rightarrow$ função que se deseja avaliar.
- Se existe $h(x_1,x_2,x_3)$, então, o campo vetorial $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ é completamente integrável.
- o sistema de equações, é o que queremos resolver na linearização total.

Teorema de Frobenius

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_2} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_1} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_2} & \frac{\mathrm{d}h(\mathbf{x})}{\mathrm{d}x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = 0$$

Este conjunto de equações possui solução se e apenas se existem funções escalares $\alpha_1(x_1, x_2, x_3)$ $\alpha_2(x_1, x_2, x_3)$ tal que:

$$\nabla \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \underbrace{\alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \alpha_1 \cdot \mathbf{b}}_{\text{combinação linear dos vetores}}$$

$$\underbrace{[a, b]}_{\text{parênteses de Lie}} = \alpha_1 \cdot \mathbf{a} + \alpha_1 \cdot \mathbf{b}$$

campo vetorial em involução

Um sistema de campos vetoriais $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ em $\mathbb{D}$ é dito estar em involução se existe funções reais $c_k^{i,j}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{D}$ e $i, j, k = 1, \ldots, r$ tal que:

$$[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_k^{i,j} \cdot \mathbf{v}_k$$

os parênteses de Lie são combinação linear (funções) dos vetores que compõem a base.

Teorema de Frobenius

Teorema de Frobenius

O campo vetorial $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é integrável se e somente se o mesmo é involutivo.

Definição

um campo vetorial de vetores independentes $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ em $\mathbb{R}^n$ é dito ser completamente integrável se e apenas se, existe $n-r$ funções escalares $h_1(\mathbf{x}), \ldots, h_{n-r}(\mathbf{x})$, satisfazendo: $\nabla h_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$

Observações:

- Um campo de vetores constantes é sempre involutivo:
  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \cancelto{0}{\nabla \mathbf{v_2}} \cdot \mathbf{v_1} - \cancelto{0}{\nabla \mathbf{v_1}} \cdot \mathbf{v_2} = 0$
- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1\}$ é involutivo:
  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1] = \nabla \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1} - \nabla \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_1} = 0$

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ involutivo:
$rank(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r) = rank(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j](\mathbf{x}))$

Parênteses de Lie

É um campo vetorial definido por:

$$[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = \nabla \mathbf{g} \cdot \mathbf{f} - \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}$$

"ação adjunta"

- $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{0} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$
- $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\mathbf{f}, \mathbf{g}](\mathbf{x})$
- $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{2} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [f, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}(\mathbf{x})]$
- $\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{k} \mathbf{g}(\mathbf{x}) = [f, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{k-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})]$

- Comutatividade (distorcida) $[\mathbf{f}, \mathbf{g}] = -[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$
- Identidade de Jacobi $L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}} h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h$

Linearização total dos estados: condições para solução

$L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0$	$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0$	
$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 0$	$-L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} \mathbf{h} + L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} \mathbf{h} = 0$ $-\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} + \cancelto{0}{\nabla L_{\mathbf{g}} \mathbf{h}} \cdot \mathbf{f} = 0$ $\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0$	Identidade de Jacobi $L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} h = L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} h - L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h$
$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = 0$	$L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}} h = 0$ $\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} = 0$	Identidade de Jacobi $L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}} h = L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} h$ $= L_{\mathbf{f}} L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} h - L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h$ $= L_{\mathbf{f}}^2 L_{\mathbf{g}} h - 2 \cdot L_{\mathbf{f}} L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h$ $= L_{\mathbf{f}}^2 \cancelto{0}{L_{\mathbf{g}} h} - 2 \cdot L_{\mathbf{f}} \cancelto{0}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h} + L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^{n-2} h(\mathbf{x}) = 0$	$L_{\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{n}-2}\mathbf{g}} h = 0$ $\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2} \mathbf{g} = 0$	Identidade de Jacobi

Linearização total dos estados: condições para solução

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} &= 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} &= 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} &= 0 \\ &\vdots \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2} \mathbf{g} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} &= 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} &= 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} &= 0 \\ &\vdots \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2} \mathbf{g} &= 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1} \mathbf{g} &\neq 0 \end{aligned}$$

Teorema de Frobenius

O campo vetorial $V = \mathrm{span}\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}, \cdots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}\}$ deve ser involutivo em $\mathbb{D}_0$.

Para que este sistema tenha solução, $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}, \cdots, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-2}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{n-1}\mathbf{g}]$ deve ter rank n, para todo $x \in \mathbb{D}_0$.

Assuma $\mathbf{x}^*$ como ponto de equilíbrio do sistema ($u = 0$). Escolhe-se $h(\mathbf{x}^*) = 0$. Assim, $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$ mapeia $\mathbf{x}^*$na origem.

Exemplo 13.14:

Propor uma lei de controle para o sistema por linearização total dos estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot (x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c \cdot (x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^3 h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^3 \mathbf{g} \neq 0 \end{cases} \qquad h(0) = 0$$

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \mathrm{span}\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}]$ tem *rank* 4?

Exemplo:

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}]$ tem *rank* 4?

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.14:

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^3\mathbf{g}]$ tem *rank* 4?

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} = \frac{\partial \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}}{\partial x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = -\nabla \mathbf{f}(x) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g} = -\begin{bmatrix} -\dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot d \\ -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot d \\ -\dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdot d \\ -\dfrac{\partial f_4}{\partial x_3} \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ d \cdot b \\ 0 \\ -c \cdot d \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.14:

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \mathrm{span}\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \mathrm{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}, \mathrm{ad}_\mathbf{f}^3\mathbf{g}]$ tem *rank* 4?

$$\mathrm{ad}_\mathbf{f}^3\mathbf{g} = \frac{\partial \mathrm{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}}{\partial x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot \mathrm{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g} = -\nabla \mathbf{f} \cdot \mathrm{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}$$

$$\mathrm{ad}_\mathbf{f}^3\mathbf{g} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot d \cdot b - \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \cdot c \cdot d \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot d \cdot b - \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \cdot c \cdot d \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot d \cdot b - \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \cdot c \cdot d \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_2} \cdot d \cdot b - \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \cdot c \cdot d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \cdot d \\ 0 \\ c \cdot d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.14:

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}^3\mathbf{g}]$ tem *rank* 4?

- V é involutivo?

$$V = span\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\d\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\-d\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\d\cdot b\\0\\-c\cdot d\end{bmatrix}\right\}$$ é involutivo. $[v_i, v_j] = 0$

- G tem *rank* 4?

$$\text{rank}(G) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -b\cdot d\\ 0 & 0 & d\cdot b & 0\\ 0 & -d & 0 & c\cdot d\\ d & 0 & -c\cdot d & 0\end{bmatrix}\right) = 4$$ válido para todo domínio.

Exemplo 13.14:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot (x_1 - x_3) \\ x_4 \\ c \cdot (x_1 - x_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^3 h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^3 \mathbf{g} \neq 0 \end{cases} \qquad h(0) = 0$$

$$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_4} \cdot d = 0 \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_4} = 0$$

Exemplo 13.14:

$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot d = 0 \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0$$

$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}^2_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} & \frac{\partial h}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ d \cdot b \\ 0 \\ -c \cdot d \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot d \cdot b - \cancelto{0}{\frac{\partial h}{\partial x_4}} \cdot c \cdot d = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

Exemplo 13.14:

$$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{3}\mathbf{g} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h}{\partial x_3} & \dfrac{\partial h}{\partial x_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -b \cdot d \\ 0 \\ c \cdot d \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot b \cdot d - \cancelto{0}{\frac{\partial h}{\partial x_3}} \cdot c \cdot d = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} \neq 0$$

Exemplo 13.14:

Resumo

$$\frac{\partial h}{\partial x_4} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x_3} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0$$

$h(0) = 0$

Proposta: $h = x_1$

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_\mathbf{f} h \\ L_\mathbf{f}^2 h \\ L_\mathbf{f}^3 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot (x_1 - x_3) \\ -a \cdot x_2 \cdot \cos(x_1) - b \cdot (x_2 - x_4) \end{bmatrix}$$

É difeomorfismo?

Exemplo 13.14:

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_{\mathbf{f}} h \\ L_{\mathbf{f}}^2 h \\ L_{\mathbf{f}}^3 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot (x_1 - x_3) \\ -a \cdot x_2 \cdot \cos(x_1) - b \cdot (x_2 - x_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dfrac{z_3 + a \cdot \sin(z_3)}{b} + z_1 \\ \dfrac{z_4 + a \cdot \sin(z_2) \cdot \cos(z_1)}{b} + z_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.14:

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_{\mathbf{f}} h \\ L_{\mathbf{f}}^2 h \\ L_{\mathbf{f}}^3 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot (x_1 - x_3) \\ -a \cdot x_2 \cdot \cos(x_1) - b \cdot (x_2 - x_4) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ -(a \cdot \cos(z_1) + b + c) \cdot z_3 + a \cdot (z_2^2 - c) \cdot \sin(z_1) + b \cdot d \cdot u \end{bmatrix}$$

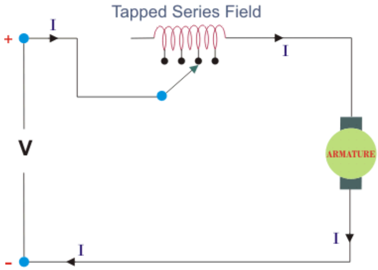
- Lei de controle:
$$u = \frac{1}{b \cdot d} \cdot ((a \cdot \cos(z_1) + b + c) \cdot z_3 - a \cdot (z_2^2 - c) \cdot \sin(z_1) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{z})$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_f(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_f}{L_f} \cdot i_f(t) + \dfrac{v_f(t)}{L_f} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_a}{L_a} \cdot i_a(t) - \dfrac{c_1}{L_a} \cdot i_f(t) \cdot w(t) + \dfrac{v_a(t)}{L_a} \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c_2}{J} \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - c_3 \cdot w \end{cases}$$

$c_3 = 0$

Projete um controlador (caso regulador) para a velocidade angular do rotor, $w(t)$, utilizando como variável manipulada a tensão do circuito externo $v_{f(t)}$.



Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_f(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_f}{L_f} \cdot i_f(t) + \dfrac{v_f(t)}{L_f} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_a(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{R_a}{L_a} \cdot i_a(t) - \dfrac{c_1}{L_a} \cdot i_f(t) \cdot w(t) + \dfrac{v_a(t)}{L_a} \\ \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c_2}{J} \cdot i_f(t) \cdot i_a(t) - c_3 \cdot w \end{cases}$$

$$c_3 = 0$$

Projete um controlador (caso regulador) para a velocidade angular do rotor, $w(t)$, utilizando como variável manipulada a tensão do circuito externo $v_{f(t)}$.

$$a = \frac{R_f}{L_f} \quad b = \frac{R_a}{L_a} \quad c = \frac{c_1}{L_a} \quad \theta = \frac{c_2}{J}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

$$x_1 = i_f \quad x_2 = i_a \quad x_3 = w$$

$$u = \frac{v_f}{L_f} \quad k = \frac{v_a}{L_a}$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} \neq 0 \end{cases} \qquad h([0, \frac{k}{b}, w_o]) = 0$$

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \mathrm{span}\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g}]$ tem *rank* 3?

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \mathrm{span}\{\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}]$ tem *rank* 3?

$$\mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \cdot x_3 \\ -\theta \cdot x_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g}]$ tem *rank* 3?

$$\text{ad}^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \frac{\partial \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}$$

$$\text{ad}^2_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} a^2 \\ c \cdot x_3 \cdot (a+b) \\ \theta \cdot x_2 \cdot (b-a) - k \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}^2\mathbf{g}]$ tem *rank* 3?

- V é involutivo?

$$V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ c \cdot x_3 \\ -\theta \cdot x_2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$[\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}] = \frac{\partial \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g} - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g} = \frac{\partial \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{g}$$

$$[\mathbf{g}, \text{ad}_\mathbf{f}\mathbf{g}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in V \rightarrow \text{é involutivo}$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \text{span}\{\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}^2\mathbf{g}]$ tem *rank* 3?

- **G** tem *rank* 3? (Colunas independentes)

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & c \cdot x_3 & c \cdot x_3 \cdot (a+b) \\ 0 & -\theta \cdot x_2 & \theta \cdot x_2 \cdot (b-a) - k \cdot \theta \end{bmatrix}$$

$$\det = c \cdot \theta \cdot x_3 \cdot (2 \cdot x_2 \cdot b - k) \neq 0 \begin{cases} x_3 \neq 0 \\ x_2 \neq \dfrac{k}{2 \cdot b} \end{cases}$$

$D_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_2 > \dfrac{k}{2 \cdot b}, x_3 > 0 \right\} \rightarrow$ Domínio no qual a transformação é válida.

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^2 \mathbf{g} \neq 0 \end{cases} \qquad h(0) = 0$$

$$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} & \frac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_1} = 0$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ c \cdot x_3 \\ -\theta \cdot x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot c \cdot x_3 = \theta \cdot x_2 \cdot \frac{\partial h}{\partial x_3} = \lambda(x_2, x_3)$$

$$h = \theta \cdot x_2^2 + c \cdot x_3^2 - \theta \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^2 - c \cdot (w_o)^2$$

$$h([0, \frac{k}{b}, w_o]) = 0 \rightarrow h = \theta \cdot x_2^2 + c \cdot x_3^2 - \theta \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^2 - c \cdot (w_o)^2$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}}^{2} \mathbf{g} \neq 0$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h}{\partial x_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^2 \\ c \cdot x_3 \cdot (a+b) \\ \theta \cdot x_2(b-a) - k \cdot \theta \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot c \cdot x_3 \cdot (a+b) + \frac{\partial h}{\partial x_3} \cdot [\theta \cdot x_2(b-a) - k \cdot \theta] \neq 0$$

$$2 \cdot \theta \cdot c \cdot x_3 \cdot (2 \cdot x_2 \cdot b - k) \neq 0$$

$$\begin{cases} x_3 \neq 0 \\ x_2 \neq \dfrac{k}{2 \cdot b} \end{cases} \quad \rightarrow \text{é atendido em } D_0.$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

Resumo

$$h = \theta \cdot x_2^2 + c \cdot x_3^2 - \theta \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^2 - c \cdot (w_o)^2$$

$$D_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| x_2 > \frac{k}{2 \cdot b}, x_3 > 0 \right\} \rightarrow$$ Domínio no qual a transformação é válida.

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_{\mathbf{f}} h \\ L_{\mathbf{f}}^2 h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \cdot x_2^2 + c \cdot x_3^2 - \theta \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^2 - c \cdot (w_o)^2 \\ -2 \cdot \theta \cdot b \cdot x_2^2 + 2 \cdot \theta \cdot k \cdot x_2 \\ 2 \cdot \theta \cdot (k - 2 \cdot b \cdot x_2) \cdot (-b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3) \end{bmatrix}$$

É difeomorfismo?

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \cdot x_2^2 + c \cdot x_3^2 - \theta \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^2 - c \cdot (w_o)^2 \\ -2 \cdot \theta \cdot b \cdot x_2^2 + 2 \cdot \theta \cdot k \cdot x_2 \\ 2 \cdot \theta \cdot (k - 2 \cdot b \cdot x_2) \cdot (-b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\frac{z_3}{2 \cdot \theta (k - 2 \cdot b \cdot x_2(z_2))} - k + b \cdot x_2(z_2)}{-c \cdot x_3(z_1, z_2)} \\ \dfrac{2 \cdot \theta \cdot k + \sqrt{4 \cdot \theta^2 \cdot k^2 - 8 \cdot \theta \cdot b \cdot z_2}}{4 \cdot \theta \cdot b} \\ \sqrt{\dfrac{z_1 + c \cdot {w_o}^2 + \theta \cdot (k/b)^2 - \theta x_2(z_2)}{c}} \end{bmatrix}$$

$$D_0 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_2 > {}^{k}/_{(2 \cdot b)}, x_3 > 0 \right\}$$

$$D_z = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z_1 > \theta \cdot x_2(z_2) - c \cdot w_0^2 - \theta \cdot \left({}^{k}/_{b}\right)^2, z_2 < \frac{\theta \cdot k^2}{2 \cdot b} \right\}$$

Exemplo 13.15: motor sem amortecimento no eixo

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a \cdot x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3 \\ \dot{x}_3 = \theta \cdot x_1 \cdot x_2 \end{cases}$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

$$\mathbf{z} = T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \cdot x_2^2 + c \cdot x_3^2 - \theta \cdot \left(\frac{k}{b}\right)^2 - c \cdot (w_o)^2 \\ -2 \cdot \theta \cdot b \cdot x_2^2 + 2 \cdot \theta \cdot k \cdot x_2 \\ 2 \cdot \theta \cdot (k - 2 \cdot b \cdot x_2) \cdot (-b \cdot x_2 + k - c \cdot x_1 \cdot x_3) \end{bmatrix}$$

Lei de controle: $u = \dfrac{1}{L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}}^2 h} \cdot \left(-L_{\mathbf{f}}^3 h - \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}\right)$

Caso servo

$$\dot{\phi} = \phi(\phi, \xi)$$
$$\dot{\xi} = \mathbf{A}_c \cdot \xi + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x}))$$
$$y = \mathbf{C}_c \cdot \xi$$

Assuma r uma referência, tal que y rastreie r:

- $r, \cdots, \overset{(\rho)}{r}$ estão disponíveis
- pode se utilizar um modelo para r

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_\rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \\ \vdots \\ \overset{(\rho-1)}{r} \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{e} = \xi - \mathbf{R}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \vdots \\ \dot{e}_\rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_\rho \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{r} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_c \cdot \xi + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{r} \end{bmatrix}$$

Caso servo

$$\mathbf{e} = \xi - \mathbf{R}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \cdot \xi + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) - \dot{\mathbf{R}}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \cdot (\mathbf{e} + \mathbf{R}) + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{r} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) + \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{R} - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{r} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B}_c \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \overset{(\rho)}{r} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B}_c \cdot \left[\gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) - \overset{(\rho)}{r}\right]$$

Caso servo

Resumo

$$\dot{\phi} = \phi\left(\phi, \mathbf{e} + \mathbf{R}\right)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A}_c \cdot \mathbf{e} + \mathbf{B}_c \cdot \left[\gamma(\mathbf{x}) \cdot (u - \alpha(\mathbf{x})) - \overset{(\rho)}{r}\right]$$

$$\mathbf{e} = \xi - \mathbf{R}$$

Lei de controle:

$$u = \alpha(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x})^{-1} \cdot K \cdot \mathbf{e} + \gamma^{-1} \cdot \overset{(\rho)}{r}$$

$$u = \alpha(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x})^{-1} \cdot \left[-K \cdot (\xi - \mathbf{R}) + \overset{(\rho)}{r}\right]$$

Malha fechada:

$$\dot{\phi} = \phi\left(\phi, \mathbf{e} + \mathbf{R}\right)$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c \cdot \mathbf{K}) \cdot \mathbf{e}$$

$$\mathbf{e} = \xi - \mathbf{R}$$

Exemplo 13.21: Pêndulo

$$\begin{cases} \dot{\theta} = x_2 \\ \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l} \cdot \sin(x_1) - \dfrac{k}{m} \cdot x_2 + \dfrac{1}{m \cdot l^2} \cdot T \end{cases}$$

$$y = \theta$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 + c \cdot u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

Está no formato padrão:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (c \cdot u - a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2)$$

$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}$ (origem é ponto de equilíbrio)

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - r \\ x_2 - \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 + c \cdot u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 + \dot{r} \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 + c \cdot u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix}$$

Exemplo 13.21: Pêndulo

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - r \\ x_2 - \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 + \dot{r} \\ -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 + c \cdot u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \ddot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_2 \\ c \cdot u - a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 - \ddot{r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (c \cdot u - a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 - \ddot{r})$$

Lei de controle: $u = \dfrac{1}{c} \cdot (a \cdot \sin(x_1) + b \cdot x_2 + \ddot{r} - k_1 \cdot e_1 - k_2 \cdot e_2)$

Malha fechada:

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Comportamento de r:

$$\frac{r}{w} = \frac{K \cdot w_n^2}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot w_n \cdot s + w_n^2}$$

Observação 1: Dinâmica de ϕ

Considere, o sistema parcialmente linearizável:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi(\phi, \xi) \\ \dot{\xi} = \mathbf{A} \cdot \xi + \mathbf{B} \cdot \gamma(\mathbf{x}) \cdot [u - \alpha(\mathbf{x})] \end{cases} \qquad \mathbf{z} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi \\ \xi \end{bmatrix}$$

lei de controle *feedback*

Objetivo: estabilizar a origem do sistema (z=0).

$$u = \alpha(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x})^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \xi \rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{K}) \text{ seja Hurwitz.}$$

Importante

Sabendo que o sistema linearizável por *feedback* entrada-saída é de fase mínima globalmente, não garante que a lei de controle $(u = \alpha(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x})^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \xi)$ irá estabilizar o sistema globalmente.

Exemplo 13.16:

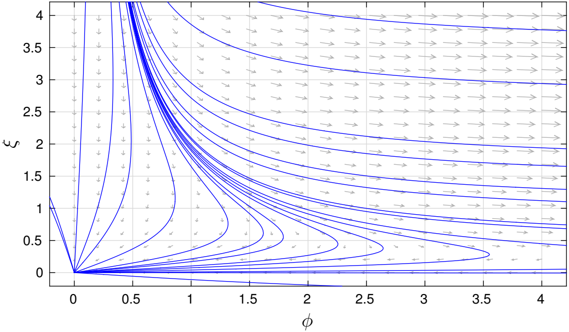
Malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi \cdot (\phi \cdot \xi - 1) \\ \dot{\xi} = -K \cdot \xi \end{cases}$$

É de fase mínima? $\rightarrow$ SIM

$\dot{\phi} = -\phi \rightarrow$ estável globalmente, quando $\xi = 0$

E o que ocorre durante a dinâmica?



A origem não é estável globalmente.

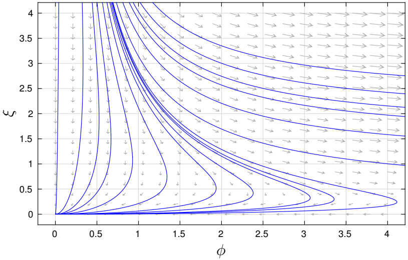
Solução?

Sintonizar de tal forma que ξ decaia rapidamente.

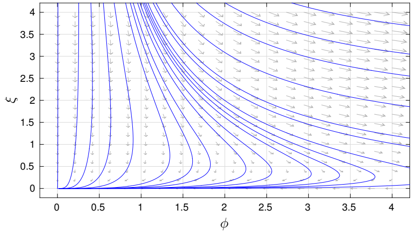
Exemplo 13.16:

Malha fechada:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi \cdot (\phi \cdot \xi - 1) \\ \dot{\xi} = -K \cdot \xi \end{cases}$$



K = 2



K = 4

Com o aumento de K, ξ decai mais rápido, o que pode ser uma solução para o efeito de pico. Entretanto, esta estratégia ainda pode falhar.

Observação 2: robustez

Importante

Linearização por *feedback* provê um método "simples" e sistemático para estabilizar uma classe de sistemas não lineares.

- robustez?
- eficiência?

Entretanto, o modelo é apenas uma aproximação da "realidade":

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [u - \hat{\alpha}] \qquad u = \alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [\alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} - \hat{\alpha}]$$
$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [\alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} - \hat{\alpha}] - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}$$
$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{z}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [\alpha - \hat{\alpha} - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} + \hat{\gamma}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}]$$
$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [\delta_\alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} + \hat{\gamma}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}} + \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}} - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}]$$

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [\delta_\alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}) + \left(\hat{\gamma}^{-1} - \gamma^{-1}\right) \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}]$$
$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \hat{\gamma} \cdot [\delta_\alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \delta_z + \delta_{\gamma^{-1}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}]$$

Observação 2: robustez

Resumo

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \delta_{\mathbf{z}}$$

$$\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{z}} = \hat{\gamma} \cdot \left[\delta_\alpha - \gamma^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\delta}_z + \boldsymbol{\delta}_{\gamma^{-1}} \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}\right]$$

A malha fechada implementada perturba a malha fechada “real”:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi(\phi, \mathbf{z}) \\ \hat{\mathbf{z}} = \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} \end{cases}.$$

Se $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{z}}$ é pequeno, então não deve haver problemas.

Observação 2: robustez

Considere o sistema em malha fechada $\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) \cdot \hat{\mathbf{z}} + \hat{\mathbf{B}} \cdot \delta_{\mathbf{z}}$ em que $\left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right)$ é Hurwitz. Seja $\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top > 0$ a solução da equação de Lyapunov:

$$\mathbf{P} \cdot \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right) + \left(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{K}\right)^\top \cdot \mathbf{P} + \mathbf{I} = 0$$

e λ uma constante não negativa menor do que $\dfrac{1}{2||\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{B}}||_2}$:

- Se $||\boldsymbol{\delta}_z|| \leq \lambda \cdot ||\mathbf{z}||$ para todo $\mathbf{z}$, a origem da malha fechada será globalmente exponencialmente estável
- $||\boldsymbol{\delta}_z|| \leq \lambda \cdot ||\mathbf{z}|| + \epsilon$, para todo $\mathbf{z}$, o estado $\mathbf{z}$ será globalmente limitado por $\epsilon \cdot c$ para algum $c > 0$.

Estimativas de λ e ϵ estão relacionadas ao erro relacionado à incerteza dos parâmetros do modelo.

Exemplo 13.18: pêndulo - controle regulatório

x_1 = ângulo | x_2 = velocidade

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -a \cdot \sin(x_1) - b \cdot x_2 + c \cdot u$$

controle	planta
$a = 0{,}5$	$\hat{a} = 1{,}0$
$b = 1{,}0$	$\hat{b} = 1{,}0$
$c = 0{,}5$	$\hat{c} = 0{,}3$

Forma padrão:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot c \left(u - \left(\frac{a \cdot \sin(x_1) + b \cdot x_2}{c} \right) \right)$$

Lei de controle: $u = \left(\frac{a \cdot \sin(x_1) + b \cdot x_2}{c} \right) - \frac{1}{c} \cdot \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Assuma: $\hat{x}_1 = x_1$, $\hat{x}_2 = x_2$, $b = \hat{b}$

$$\delta_x = \left(\frac{a \cdot \hat{c} - \hat{a} \cdot c}{c} \right) \cdot \sin(\hat{x}_1) - \left(\frac{\hat{c} - c}{c} \right) \cdot (k_1 \cdot \hat{x}_1 + k_2 \cdot \hat{x}_2)$$

Observação 3: cancelamento de não linearidades

É realmente necessário cancelar todas as não linearidades?

Em alguns casos, não-linearidades são benéficas e o seu cancelamento não deve ser automático!

Exemplo 13.19

$$\dot{x} = a \cdot x - b \cdot x^3 + u$$

Malha aberta: origem é ponto de equilíbrio instável

Lei de controle 1:
$u = -a \cdot x + b \cdot x^3 - k \cdot x$
Malha fechada:
$\dot{x} = -k \cdot x$
Função de Lyapunov:
$V = x^2$
$\dot{V} = -2 \cdot k \cdot x^2$

- origem é ponto de equilíbrio estável da malha fechada

Lei de controle 2:
$u = -a \cdot x - k \cdot x$
Malha fechada:
$\dot{x} = -k \cdot x - b \cdot x^3$
Função de Lyapunov:
$V = x^2$
$\dot{V} = -2 \cdot \left(k \cdot x^2 + b \cdot x^4\right)$

- origem é ponto de equilíbrio estável da malha fechada
- converge mais rapidamente para a origem do que o caso anterior

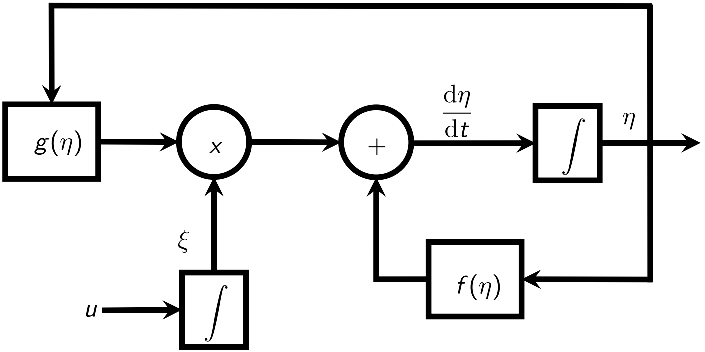
Sumário

Backstepping

Forma padrão:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi$$
$$\dot{\xi} = u$$

f e g são suaves em algum domínio $D \in \mathbb{R}^n$ que contém $\eta = 0$ e $f(0) = 0$.



Backstepping

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Considere, em primeiro momento, a primeira equação:

$$\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi$$

Assuma $\xi = \psi(\eta)$ ($\psi(0) = 0$) uma lei de controle que estabiliza η.

Malha fechada: $\dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)$

Espera-se: origem da malha fechada $\rightarrow$ assintoticamente estável
Assuma: $V(\eta)$ uma função de Lyapunov para a malha fechada.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] \leq -W(\eta)$$

Como propor uma lei de controle (u) que estabiliza o sistema?

$W(\eta) \rightarrow$ positivo definido.

Backstepping

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi \\ \dot{\eta} &= f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi + g(\eta) \cdot \psi(\eta) - g(\eta) \cdot \psi(\eta) \\ \dot{\eta} &= [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] + g(\eta) \cdot [\xi - \psi(\eta)] \end{aligned}$$

Mudança de variável:
$z = \xi - \psi(\eta) \rightarrow \dot{z} = \dot{\xi} - \dot{\psi}(\eta) \rightarrow \dot{z} = u - \dot{\psi}(\eta) \rightarrow \dot{z} = \nu$

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] + g(\eta) \cdot z \\ \dot{z} = \nu \end{cases}$$

Origem assintoticamente estável

Backstepping

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \qquad \begin{aligned} z &= \xi - \psi(\eta) \\ \dot{z} &= u - \dot{\psi}(\eta) \\ \dot{z} &= \nu \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] + g(\eta) \cdot z \\ \dot{z} = \nu \end{cases}$$

Função de Lyapunov: $V_c\,(\eta, z) \rightarrow V_c = V(\eta) + \frac{1}{2} \cdot z^2$

Lembre-se: $\frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] \leq -W(\eta)$

$$\dot{V}_c = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c}{\partial \eta} & \frac{\partial V_c}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V_c}{\partial \eta} \cdot \dot{\eta} + \frac{\partial V_c}{\partial z} \cdot \dot{z}$$

$$\dot{V}_c = \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \{[f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] + g(\eta) \cdot z\} + z \cdot \nu$$

$$\dot{V}_c = -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) \cdot z + z \cdot \nu$$

Backstepping

$$\begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] + g(\eta) \cdot z \\ \dot{z} = \nu \end{cases}$$

Origem assintoticamente estável

Função de Lyapunov: $V_c(\eta, z) \rightarrow V_c = V(\eta) + \frac{1}{2} \cdot z^2$

$$\dot{V}_c = -W(\eta) + \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) \cdot z + z \cdot \nu$$

Espera-se: $\dot{V}_c \leq 0$

Assuma: $\nu = -\frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) - k \cdot z$

$\dot{V}_c = -W(\eta) - k \cdot z^2$

Assim, a origem $(\eta = 0,\ z = 0)$ é assintoticamente estável.

Backstepping

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta)\cdot\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \qquad \begin{aligned} z &= \xi - \psi(\eta) \\ \dot{z} &= u - \dot{\psi}(\eta) \\ \dot{z} &= \nu \end{aligned} \qquad \begin{cases} \dot{\eta} = [f(\eta) + g(\eta)\cdot\psi(\eta)] + g(\eta)\cdot z \\ \dot{z} = \nu \end{cases}$$

$$\nu = -\frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot g(\eta) - k\cdot z$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot g(\eta) - k\cdot[\xi - \psi(\eta)]$$

$$u - \dot{\psi}(\eta) = -\frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot g(\eta) - k\cdot[\xi - \psi(\eta)]$$

$$u = \frac{\partial \psi(\eta)}{\partial t}\cdot\dot{\eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot g(\eta) - k\cdot[\xi - \psi(\eta)]$$

$$u = \frac{\partial \psi(\eta)}{\partial t}\cdot\dot{\eta} - \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot g(\eta) - k\cdot[\xi - \psi(\eta)]$$

$$u = \frac{\partial \psi(\eta)}{\partial t}\cdot[f(\eta) + g(\eta)\cdot\xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta}\cdot g(\eta) - k\cdot[\xi - \psi(\eta)]$$

Backstepping

Considere o sistema $\begin{cases} \dot{\eta} = f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$.

- Seja $\psi(\eta)$ uma lei de controle que estabilize $\dot{\eta}$.
- Seja $V(\eta)$ uma função de Lyapunov que satisfaça $\dfrac{\partial V}{\partial \eta} \cdot [f(\eta) + g(\eta) \cdot \psi(\eta)] \leq -W(\eta)$

Então, a lei de controle *feedback*:

$$u = \frac{\partial \psi(\eta)}{\partial t} \cdot [f(\eta) + g(\eta) \cdot \xi] - \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) - k \cdot [\xi - \psi(\eta)]$$

estabiliza a origem do sistema $[\dot{\eta} \quad \dot{\xi}]$ com $V_c = V(\eta) + \dfrac{1}{2} \cdot (\xi - \psi(\eta))^2$ como função de Lyapunov.

Exemplo 14.8

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = u$$

$$\dot{\eta} = \eta^2 - \eta^3 + \xi$$
$$\dot{\xi} = u$$

Tomando a primeira equação: $\dot{\eta} = \eta^2 - \eta^3 + \xi$

$\xi = \psi(\eta) = -\eta^2 - \eta$ (*feedback* linearizante sem cancelar η^3)

Malha fechada: $\dot{\eta} = -\eta^3 - \eta$

Encontrar função de Lyapunov, $V(\eta)$, para o sistema:

$$V(\eta) = \frac{\eta^2}{2}$$

$$\dot{V}(\eta) = \frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot \dot{\eta}$$
$$\dot{V}(\eta) = -\eta^2 \cdot \left(1 + \eta^2\right)$$
$$\dot{V}(\eta) \leq -\eta^2$$

A origem é globalmente estável

Exemplo 14.8

$$\dot{\eta} = \eta^2 - \eta^3 + \xi$$
$$\dot{\xi} = u$$

$$V(\eta) = \frac{\eta^2}{2}$$
$$\psi(\eta) = -\eta^2 - \eta$$

Mudança de variável: $z = \xi - \psi(\eta)$

$$\dot{\eta} = \eta^2 - \eta^3 + \xi + \psi(\eta) - \psi(\eta)$$
$$\dot{\eta} = \left[\eta^2 - \eta^3 + \psi(\eta)\right] + \xi - \psi(\eta)$$

Novo sistema:

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \left[\eta^2 - \eta^3 + \psi(\eta)\right] + z \\ \dot{z} = u - \dot{\psi}(\eta) = \nu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\eta} = [\underbrace{-\eta^3 - \eta}_{\text{malha fechada}}] + z \\ \dot{z} = u - \dot{\psi}(\eta) = \nu \end{cases}$$

Encontrar função de Lyapunov, $V(\eta, z)$, para este novo sistema:

$$V_c(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2} \cdot z^2$$

$$\dot{V}_c(\eta, z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_c}{\partial \eta} & \frac{\partial V_c}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

Exemplo 14.8

$$\dot{\eta} = \left[-\eta^3 - \eta\right] + z$$
$$\dot{z} = u - \dot{\psi}(\eta) = \nu$$

$$V(\eta) = \frac{\eta^2}{2}$$
$$\psi(\eta) = -\eta^2 - \eta$$

$$V_c(\eta, z) = V(\eta) + \frac{1}{2} \cdot z^2$$
$$\dot{V}_c(\eta, z) = \frac{\partial V_c}{\partial \eta} \cdot \dot{\eta} + \frac{\partial V_c}{\partial z} \cdot \dot{z}$$

$$\dot{V}_c(\eta, z) = -\eta^2 \cdot \left(1 + \eta^2\right) + \eta \cdot z + z \cdot \nu$$

Assuma: $\nu = -\frac{\partial V}{\partial \eta} \cdot g(\eta) - k \cdot z \to \nu = -\eta - k \cdot z$

$\dot{V}_c(\eta, z) = -\eta^2 \cdot \left(1 + \eta^2\right) - k \cdot z^2$ (monotonicamente decrescente)

$$\nu = -\eta - k \cdot z \qquad u = -\eta - k \cdot z + \dot{\psi}(\eta) \qquad u = -\eta - k \cdot z + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \dot{\eta}$$

Lei de controle

$$u = -\eta - k \cdot \left(\xi + \eta^2 + \eta\right) + (-2 \cdot \eta - 1) \cdot \left(\eta^2 - \eta^3 + \xi\right)$$

Sumário

Exemplo:

Propor uma lei de controle para o sistema por linearização total dos estados:

$$\dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} \neq 0 \end{cases}$$

1. Condições de existência de solução:
   - $V = \mathrm{span}\{\mathbf{g}\}$ é involutivo?
   - $G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g}]$ tem *rank* 2?

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

$V = \text{span}\{\mathbf{g}\}$ é involutivo?
$[\mathbf{g}, \mathbf{g}] = 0 \rightarrow$ é involutivo

os parênteses de Lie dos vetores que compõem V são combinação linear (funções) dos mesmos.

$G(\mathbf{x}) = [\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}]$ tem *rank* 2?

$$\text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -a \cdot cos(x_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -a \cdot cos(x_2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$cos(x_2) \neq 0 \rightarrow rank = 2$

rank$(\mathbf{g}, \text{ad}_{\mathbf{f}}\mathbf{g}) = 2$?

$$\mathbb{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 | \cos(x_2) \neq 0\}$$

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

Sistema a ser resolvido:

$$\begin{cases} L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = 0 \\ L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{g} = 0 \\ \nabla \mathbf{h} \cdot \mathrm{ad}_{\mathbf{f}} \mathbf{g} \neq 0 \end{cases}$$

$$h(0) = 0$$

$$L_{\mathbf{g}} h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0 \rightarrow \text{h não é função de } x_2$$

$$L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \cdot \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} = \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot a \cdot \sin(x_2)$$

$$L_{\mathbf{g}} L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h}{\partial x_1} & \frac{\partial L_{\mathbf{f}} h}{\partial x_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_1} \cdot a \cdot \cos(x_2) \neq 0 \begin{cases} \cos(x_2) \neq 0 \text{ em } \mathbb{D}_0 \\ \text{Assim, } \frac{\partial h}{\partial x_1} \neq 0 \end{cases}$$

Exemplo:

$$\dot{x}_1 = a \cdot \sin(x_2)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \sin(x_2) \\ -x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot u$
$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \rightarrow$ campos vetoriais.

h deve ser resolvido de tal forma que:

- não seja função de x_2 $(\frac{\partial h}{\partial x_2} = 0)$
- seja função de x_1 $(\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0)$ e
- $h(0)$

$h = x_1$ satisfaz estas condições.
Então, a seguinte transformação é proposta:

$$z = \begin{bmatrix} h(x) \\ L_{\mathbf{f}} h(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ a \cdot \sin(x_2) \end{bmatrix}$$

É difeomorfismo?

Lei de controle: desenvolvemos anteriormente...