MATEMÁTICA

MÓDULO 06 FRENTE C

Função composta e função inversa

FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f: A → B é bijetora se, e somente se, essa função atende às seguintes condições.

i) A sua imagem (Im) é igual ao seu contradomínio (CD).

Observe que, ao representarmos simbolicamente uma função **f** na forma f: A → B, o conjunto **A** é o domínio da função, e o conjunto **B** é o contradomínio da função.

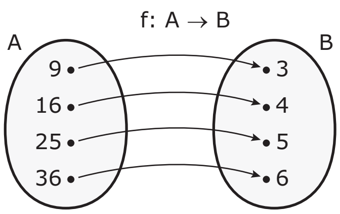
Portanto, a condição é satisfeita se, e somente se, Im = B.

ii) Para quaisquer elementos x_1 e x_2 do domínio **A**, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em outras palavras, cada elemento da imagem deve estar relacionado com um único elemento do domínio.

Exemplos

1º) Exemplo em forma de diagrama



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = A = {9, 16, 25, 36}

Contradomínio: CD = B = {3, 4, 5, 6}

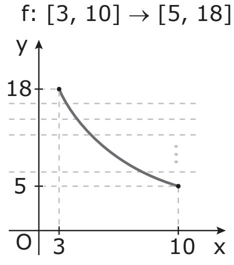
Imagem: Im = {3, 4, 5, 6}

Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio.

2º) Exemplo em forma de gráfico



Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = [3, 10]

Contradomínio: CD = [5, 18]

Imagem (projeção do gráfico no eixo das ordenadas): Im = [5, 18]

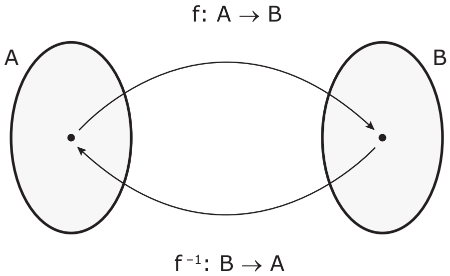
Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio. Para tal verificação, basta traçarmos linhas paralelas ao eixo das abscissas, a partir da imagem. Cada uma dessas linhas deve interceptar a curva em um único ponto, para que a condição seja satisfeita.

FUNÇÃO INVERSA

Considere o diagrama a seguir:



No diagrama, está indicada uma função **f** que associa a cada elemento de **A** a sua imagem em **B**. A função inversa de **f**, indicada por f^{-1}, é a função que associa a cada elemento de **B** a sua imagem em **A**.

Observe que **f** deve ser uma função bijetora.

> Uma função bijetora f: A → B é inversível, e sua inversa é a função f^{-1}: B → A se, e somente se, para todo $(x, y) \in f \rightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

Cálculo da função inversa – regra prática

i) Trocar **x** por **y** e **y** por **x**.

ii) Isolar o novo **y**.

Exemplos

Determinar a função inversa das seguintes funções.

1º) $f(x) = 3x$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**): $x = 3y$

(isolar o novo **y**): $y = \frac{x}{3}$

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

2º) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, para $x \neq -2$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**):

$x = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy = 2x + 1$

(isolar o novo **y**):

$y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$

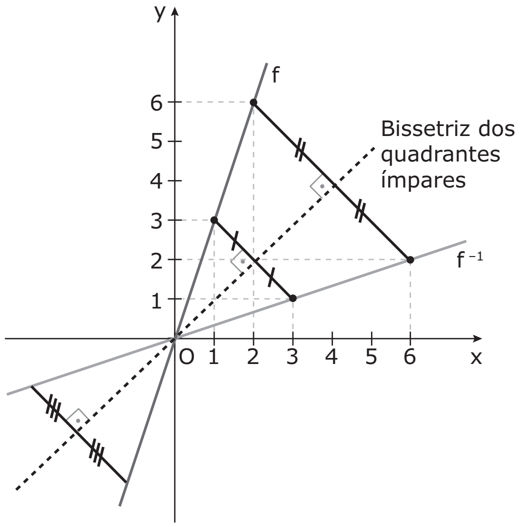
Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

OBSERVAÇÃO

Os gráficos da função **f** de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo

Esboçando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ em um mesmo sistema de eixos e considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos:



EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFV-MG) Seja **f** a função real tal que $f(2x - 9) = x$, para todo **x** real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para **c** igual a

A) 5
B) 7
C) 3
D) 9
E) 1

Resolução:

Cálculo de f(c):

Fazendo $2x - 9 = k$, temos $x = \frac{k+9}{2}$. Portanto, temos que $f(k) = \frac{k+9}{2}$. Logo, podemos dizer que $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Então, para $x = c$, temos $f(c) = \frac{c+9}{2}$.

Cálculo de $f^{-1}(c)$:

Temos $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Trocando **x** por **y** e **y** por **x**, temos:

$x = \frac{y+9}{2} \Rightarrow y = 2x - 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 9$

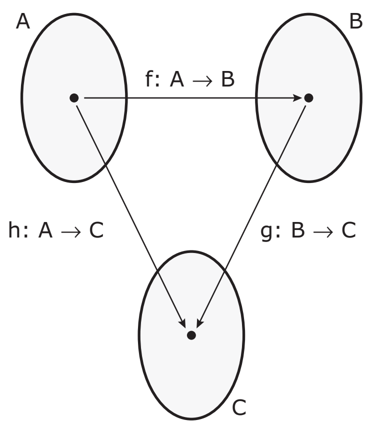
Logo, para $x = c$, temos $f^{-1}(c) = 2c - 9$.

Fazendo $f(c) = f^{-1}(c)$, obtemos:

$\frac{c+9}{2} = 2c - 9 \Rightarrow 4c - 18 = c + 9 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

FUNÇÃO COMPOSTA

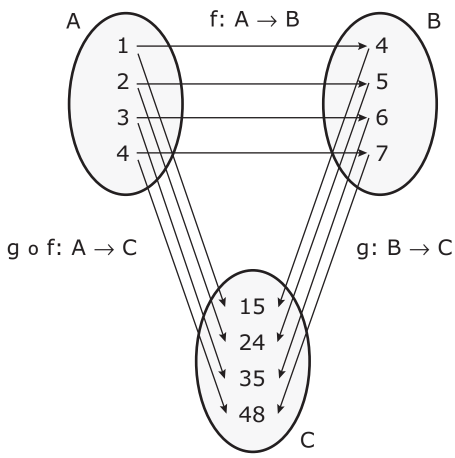
Sejam as funções **f** e **g**, tais que $f: A \to B$ e $g: B \to C$, conforme a figura a seguir:



Considere uma função $h: A \to C$ que produz os mesmos resultados que as funções **f** e **g** aplicadas em sequência, ou seja, que relaciona cada elemento de **A** com o correspondente elemento de **C** sem passar pelo conjunto **B**. Tal função **h** é denominada função composta de **f** e **g**.

Denotamos a função composta h(x) por g(f(x)) ou g o f(x).

Como exemplo, considere os conjuntos **A**, **B** e **C** representados a seguir e sejam as funções f: A → B e g: B → C, tais que f(x) = x + 3 e g(x) = x^2 – 1. Vamos descobrir a expressão matemática da função g(f(x)), que relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.



Para calcularmos a expressão da função g(f(x)), devemos substituir o **x** na expressão de g(x) por f(x).

Assim, como g(x) = x^2 – 1, temos:

$g(f(x)) = f(x)^2 - 1$

Mas, f(x) = x + 3. Portanto, temos:

$g(f(x)) = g(x + 3) = (x + 3)^2 - 1 = x^2 + 6x + 9 - 1$

Assim, $g(f(x)) = x^2 + 6x + 8$.

Observe que essa expressão realmente relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.

- Para x = 1, temos $g(f(1)) = 1^2 + 6.1 + 8 = 15$.
- Para x = 2, temos $g(f(2)) = 2^2 + 6.2 + 8 = 24$.
- Para x = 3, temos $g(f(3)) = 3^2 + 6.3 + 8 = 35$.
- Para x = 4, temos $g(f(4)) = 4^2 + 6.4 + 8 = 48$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. Sejam as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f(x) = 2x + 3 e g(x) = x – 2. Calcular:

A) f(g(2))

Resolução:

f(g(2)) = f(0) = 3

B) f o g o g(1)

Resolução:

f o g o g(1) = f(g(g(1))) = f(g(–1)) = f(–3) = –3

C) f(g(x))

Resolução:

f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x – 2) + 3 = 2x – 1

D) g o f(x)

Resolução:

g o f(x) = g(f(x)) = f(x) – 2 = 2x + 3 – 2 = 2x + 1

03. Considere as funções f(x) = 4x + 11 e f(g(x)) = 6x – 10. Determinar a expressão de g(x).

Resolução:

Pela definição de função composta, temos que f(g(x)) = 4g(x) + 11. Igualando esse resultado com a expressão fornecida, temos:

$$4g(x) + 11 = 6x - 10 \Rightarrow 4g(x) = 6x - 21 \Rightarrow g(x) = \frac{6x - 21}{4}$$

04. Sejam as funções h(x) = 5x – 3 e t(h(x)) = 15x + 32. Determinar a expressão de t(x).

Resolução:

$t(h(x)) = 15x + 32 \Rightarrow t(5x - 3) = 15x + 32 \quad \text{(I)}$

Vamos denotar 5x – 3 por **k**. Assim, temos:

$$5x - 3 = k \Rightarrow x = \frac{k+3}{5}$$

Substituindo na expressão (I), temos:

$$t(k) = 15.\left(\frac{k+3}{5}\right) + 32 \Rightarrow t(k) = 3k + 9 + 32 \Rightarrow$$

t(k) = 3k + 41

Daí, se a expressão vale para **k**, a mesma também vale para **x**, ou seja, t(x) = 3x + 41.

05. (UFU-MG) Seja **f** uma função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq 0 \\ f(f(-x)), \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Então, f(–1) é igual a

A) 0

B) 1

C) 2

D) –1

E) 3

Resolução:

Para x = –1, temos f(–1) = f(f(1)).

Mas f(1) = 1 + 1 ⇒ f(1) = 2.

Logo, f(–1) = f(2).

Mas f(2) = 2 + 1 ⇒ f(2) = 3.

Logo, f(–1) = 3.