LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS

MATEMÁTICA ELEMENTAR e DISCRETA

Aula 2

Curso: Lic. em Computação (Ead)
Prof. Dr. Paulo Alexandre Oliveira
Palmas, TO – 12 de agosto de 2023

Conteúdo da aula

Teoria das Funções

- Conceito de relação.
- Domínio e Imagem.
- Definição e notação de uma função.
- Gráfico. Zero de uma função.
- Função Composta e Inversa.

LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

Conceito de relação

Produto cartesiano

O produto cartesiano A x B de dois conjuntos **A** e **B** não vazios é definido como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), nos quais **x** pertence a **A**, e **y** pertence a **B**.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Produto cartesiano

Sejam os conjuntos $A = \{2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 5\}$. Obter os produtos cartesianos $A \times B$, A^2 e $B \times A$.

Resolução:

$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 1), (4, 5)\}$

$A^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

Conceito de Relação

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não vazios, definimos uma relação **R** de **A** em **B** como um subconjunto de A x B.

Considere $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{1, 2\}$.

$$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$$

Assim, duas relações de **A** em **B** poderiam ser:

$$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\} = \{(0, 1), (1, 2)\}$$

Função: Definição e notação
função.

Dados dois conjuntos **A** e **B** não vazios, uma relação **f** de **A** em **B** é função de **A** em **B** se, e somente se, para todo $x \in A$ se associa a um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

> Sistema de notação
>
> A função **f** de **A** em **B** pode ser indicada por $f: A \to B$.

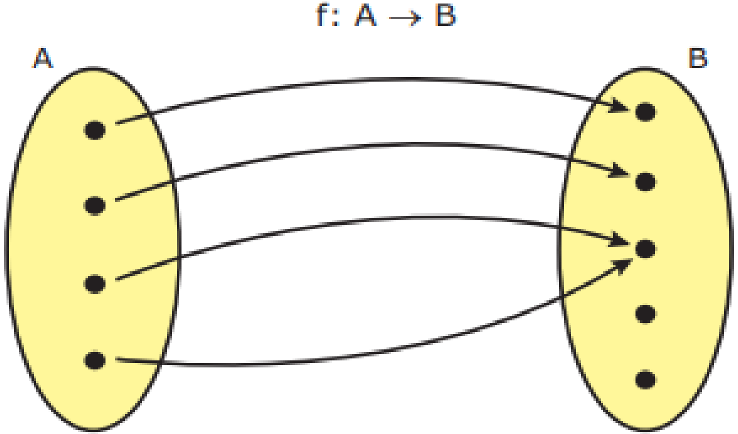
Definição de função

Dados A e B dois conjuntos de $\mathbb{R}$:

uma **função** $f : A \to B$ é uma ***relação ou correspondência*** que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

As funções ***servem para descrever*** o mundo real em termos matemáticos.

Função – esquema prático



i) O conjunto **A** é o domínio da função.

ii) O conjunto **B** é o contradomínio da função.

iii) Os elementos do contradomínio que estão relacionados, por setas, com os elementos de **A** formam o conjunto imagem da função.

Domínio de uma Função

Determinar o domínio de uma função significa saber para quais valores de **x** a expressão matemática **y** está definida, ou seja, quais valores podem ser atribuídos à variável **x** de modo a não violar as condições de existência da expressão matemática.

1º) Na função $y = 3x + 7$, para qualquer valor real de **x** existe uma imagem **y** correspondente. Logo, o domínio dessa função é $D = \mathbb{R}$.

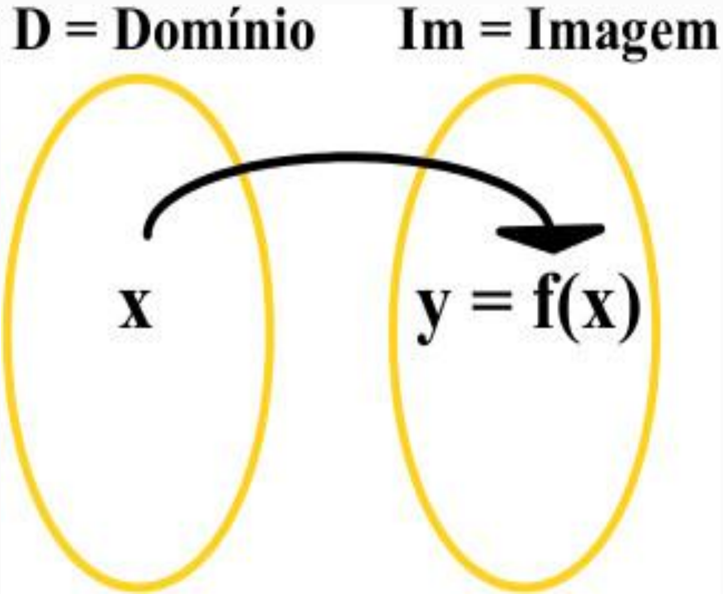
Domínio de um função

2º) Na função $y = \dfrac{1}{x-4}$, devemos observar que $x - 4$ é denominador de uma fração e, portanto, deve ser diferente de zero, ou seja, $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. Então, o domínio dessa função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$.

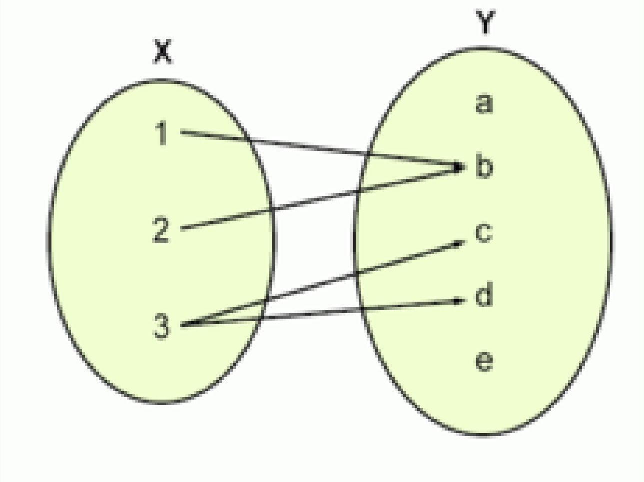
3º) Na função $y = \sqrt{x-5}$, devemos observar que $x - 5$ é o radicando de uma raiz quadrada. Esse radicando deve ser maior ou igual a zero, ou seja, $x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$. Então, o domínio dessa função deve ser $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

Conjunto imagem

Imagem de uma função é conjunto, contido no seu contradomínio. Os elementos deste conjunto são aqueles que tem algum correspondente no domínio



Conjunto imagem



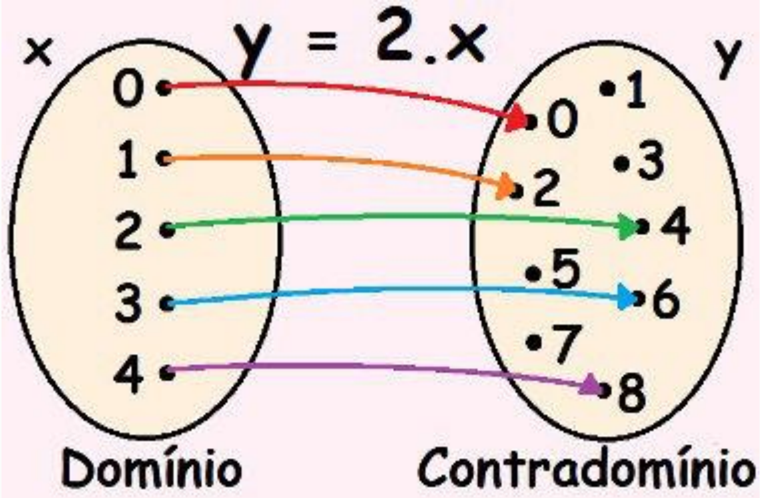
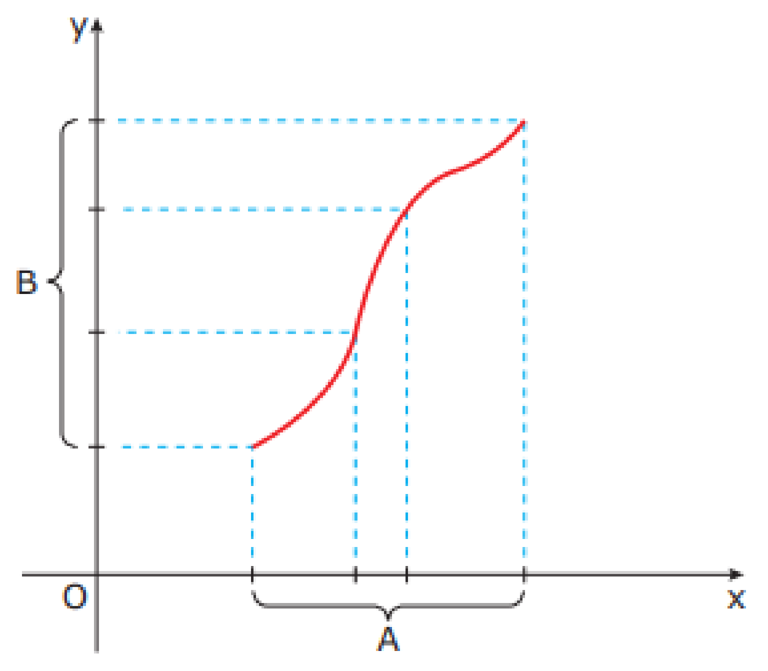


Gráfico de uma função



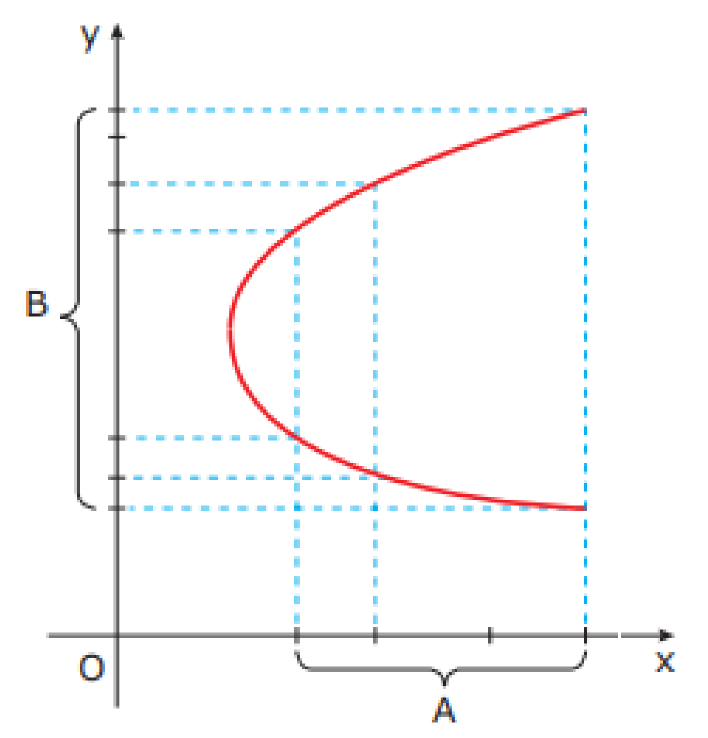
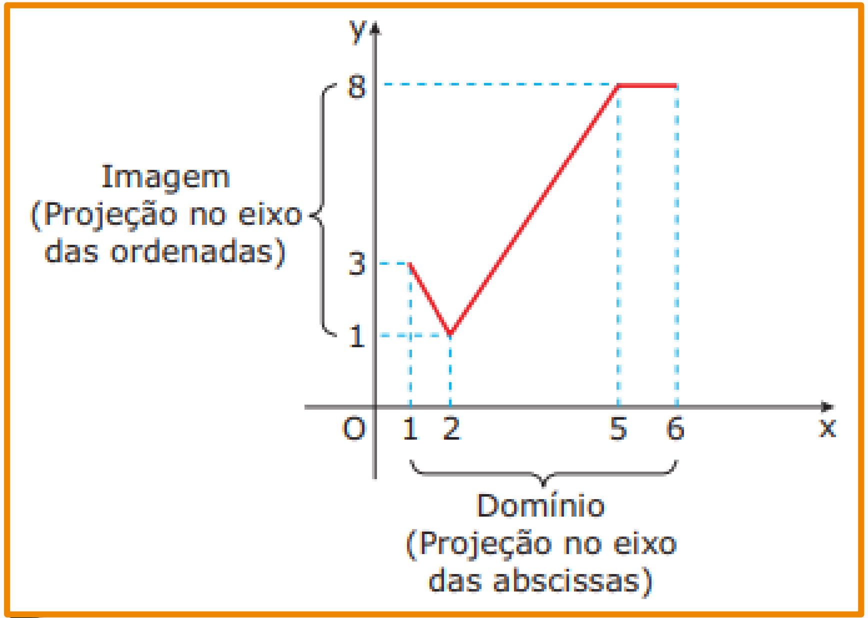
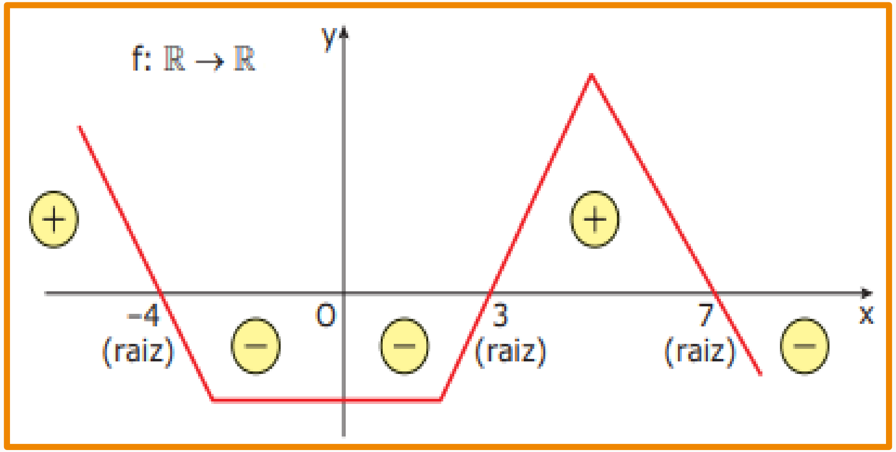


Gráfico e Zero de uma função

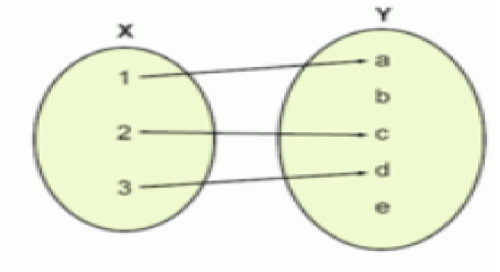




Classificação de uma função

FUNÇÃO INJETORA OU INJETIVA

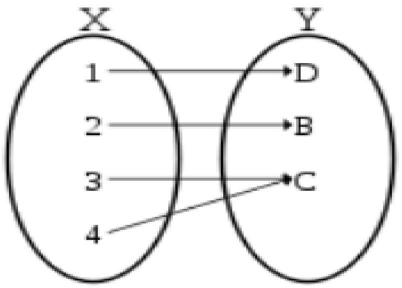
Cada elemento da imagem está associado a apenas um elemento do domínio



O número de elementos no contradomínio pode ser igual ou maior que na imagem da função.

FUNÇÃO SOBREJETORA OU SOBREJETIVA

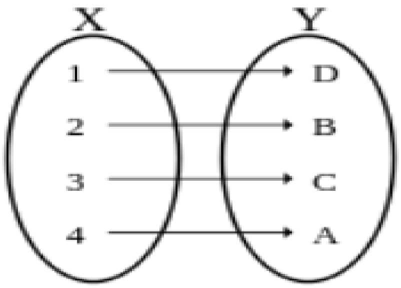
Todos os elementos do contradomínio estão associados a algum elemento do domínio.



O conjunto imagem é igual ao conjunto contradomínio (CD=I).

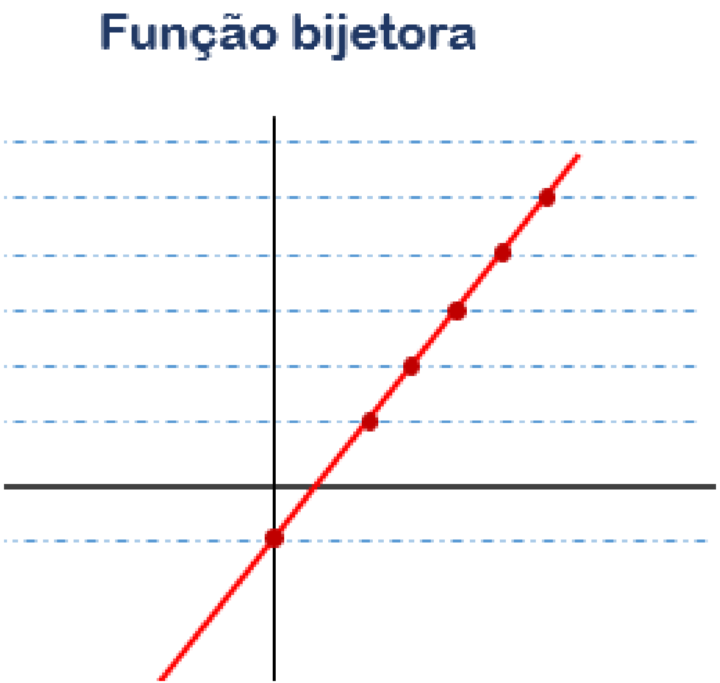
FUNÇÃO BIJETORA OU BIJETIVA

São ao mesmo tempo sobrejetoras e injetoras.



Todos os elementos do domínio estão associados a todos os elementos do contradomínio de forma um para um e exclusiva. (CD=I)

Classificação de uma função

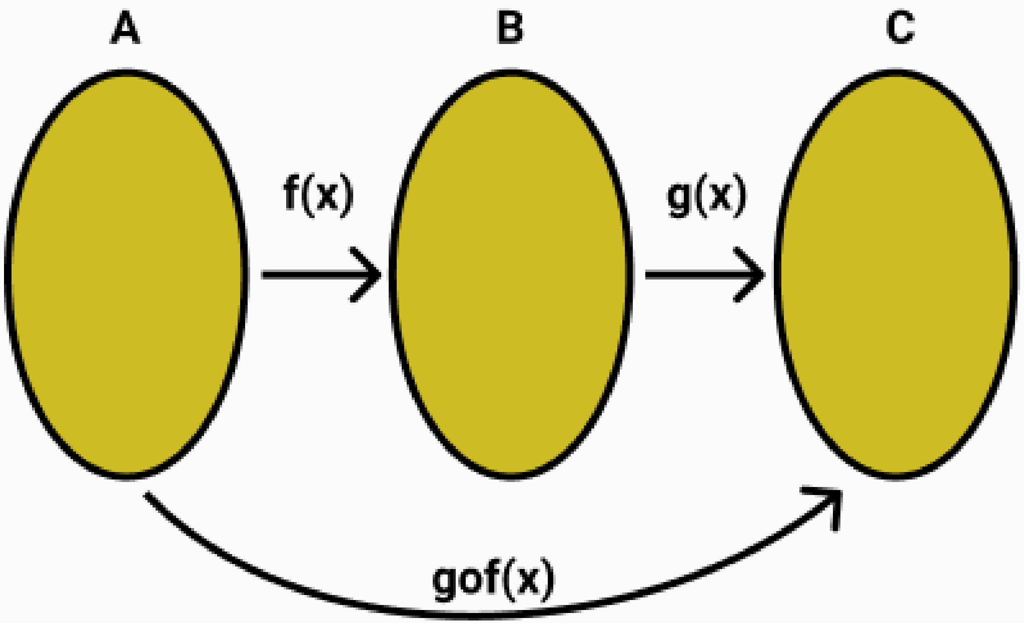


Função Composta

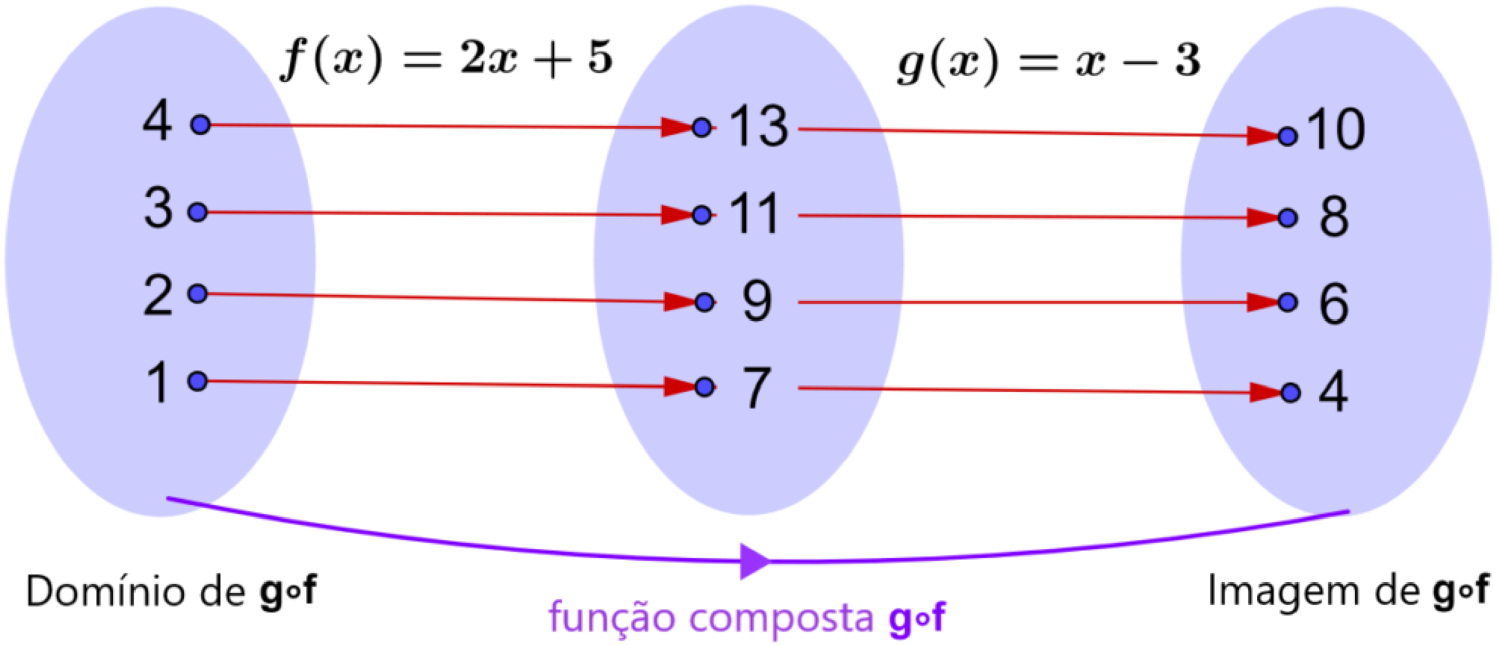
Definição: Dadas as funções
f: $A \to B$ e g: $B \to C$,
a função composta de g com f é a função $h(x) = g(f(x))$, que também pode ser escrita como $(g \circ f)(x)$.

LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

Função Composta



Função Composta



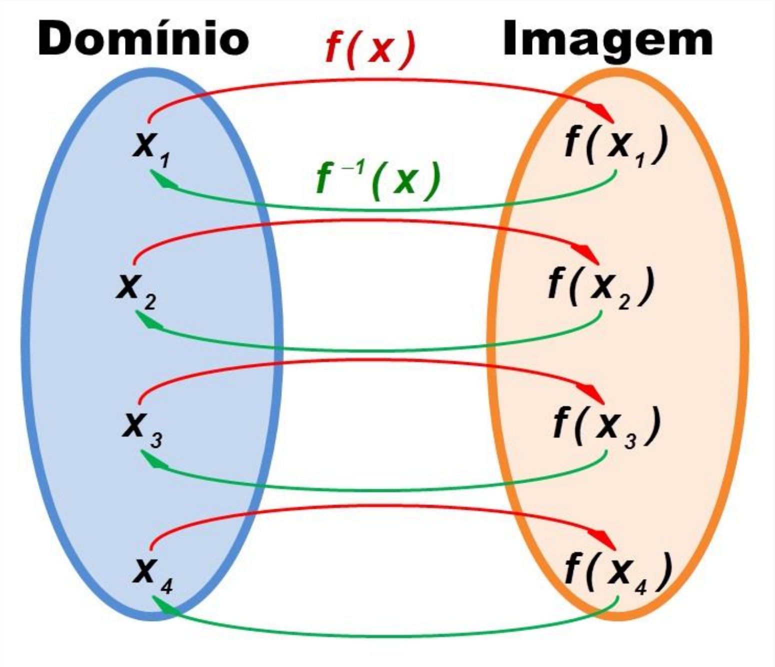
Função Inversa

Definição: Dada a função f: A em B, chama-se função **inversa** de f, indicada por $\boldsymbol{f^{-1}(x)}$, a função de B em A que associa cada y de B ao elemento x de A, tal que y = f(x).

Obs.: Apenas as funções bijetoras admitem função inversa

Função Inversa

Para que uma função admita uma inversa, ela precisa ser bijetora, ou seja, injetora e sobrejetora.



Função Inversa

- Trocar f(x) ou a função que está representada por y.
- Trocar x por y e y por x.
- Isolar y para representá-lo como função de x.
- Trocar y por $f^{-1}(x)$.

Exemplo: Função Inversa

Obter a inversa da função $f(x) = 3x - 2$.

Função Inversa X Composta

- Qual a relação entre elas?
- Faça um exemplo $(f \circ f^{-1} f)(x)$
- Qual a conclusão?

Exercícios da aula

1. Analise as relações a seguir, identificando as que são funções:

   a) $A = \{-1, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, 0, 1, 2\}$ e $R = \{(x,y) \in A \times B \mid y = x - 1\}$.

   b) $\{(4, 1), (1, 2), (3, 4), (3, 2), (4, 3)\}$ sobre o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

   c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ e $R = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

2. Dados $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, considere $f: A \to B$ a função definida por $f(x) = 2 \cdot x + 1$. Determine o domínio, o contradomínio e a imagem da função.

Exercícios da aula

3. Identifique se as funções a seguir são injetoras, sobrejetoras ou bijetoras. No caso das funções bijetoras identifique a inversa da função.

   a) $A = \{1\ ,\ 2,\ 3,\ 4\}$ e $f\colon A \to A$ definida por $f(x) = x$.

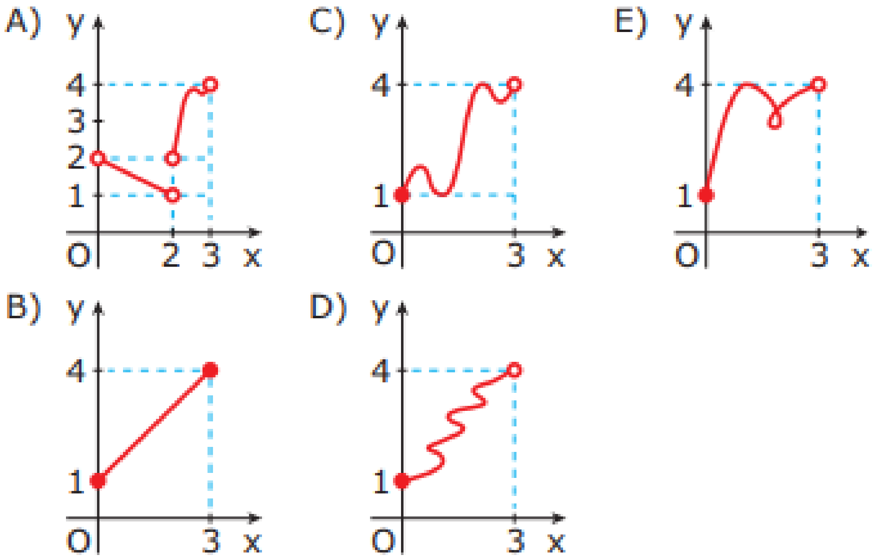
   b) $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, $B = \{-1,\ 0,\ 3,\ 8\}$ e $f\colon A \to B$ a função definida por $f(x) = x^2 - 2 \cdot x$.

   c) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ e $f\colon A \to B$ a função definida por $f(x) = 2$.

4. Dadas as funções $f(x) = 3 \cdot x - 1$ e $g(x) = x + 2$, encontre $f \circ g$ e $g \circ f$.

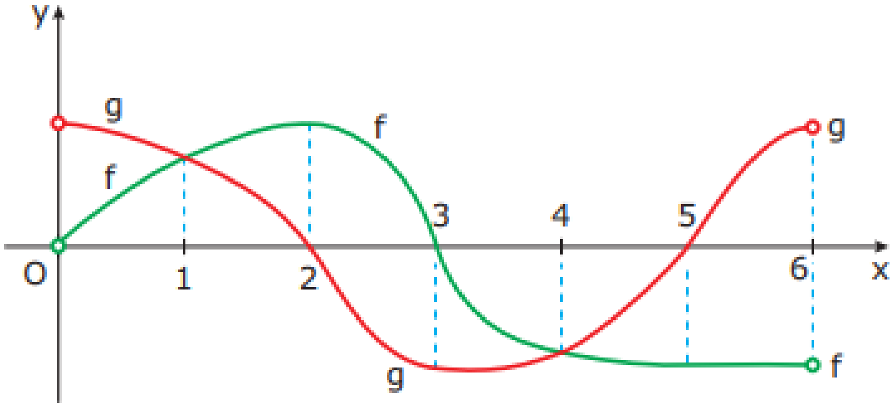
Exercícios da aula

(UFMG) Dos gráficos, o **ÚNICO** que representa uma função de imagem $\{y \in \mathbb{R}: 1 \leq y \leq 4\}$ e domínio $\{x \in \mathbb{R}: 0 \leq x < 3\}$ é



Exercícios da aula

(UFMG-2008) Neste plano cartesiano, estão representados os gráficos das funções y = f(x) e y = g(x), ambas definidas no intervalo aberto]0, 6[.



Seja **S** o subconjunto de números reais definido por $S = \{x \in \mathbb{R};\ f(x).g(x) < 0\}$. Então, é **CORRETO** afirmar que **S** é

A) $\{x \in \mathbb{R};\ 2 < x < 3\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 5 < x < 6\}$

B) $\{x \in \mathbb{R};\ 1 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 4 < x < 5\}$

C) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 2\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 5\}$

D) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R};\ 3 < x < 6\}$

Exercícios da aula

(UFMG) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(5x) = 5\,f(x)$ para todo número real **x**. Se $f(25) = 75$, então o valor de $f(1)$ é

A) 3 B) 5 C) 15 D) 25 E) 45

LICENCIATURA EM COMPUTAÇÃO

UFT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS