Revisão de Exercício

MAT_P4FUNCOE_4FX_DAX_019 - Determinação da Funcao Inversa

Modulo P4 - Funcoes — Conceito: Funcao Inversa — Tipo: Determinacao Analitica

Exercício

Determine a função inversa de f(x) = 2x + 3. Apresente todos os passos de cálculo, incluindo a verificação da condição de injetividade e a comprovação do resultado através da composição de funções.

Solução

Solução Passo a Passo:

1. **Verificar se a função é invertível (injetiva):**
    - A função $f(x) = 2x + 3$ é uma função afim com coeficiente angular $a = 2 \neq 0$.
    - Como $a > 0$, a função é estritamente crescente em todo o seu domínio.
    - Uma função estritamente monótona é necessariamente injetiva.
    - Portanto, $f(x)$ é bijetora em $\mathbb{R}$ e possui função inversa.
2. **Aplicar o método de troca de variáveis:**
$$y = 2x + 3 \tag{1}$$
$$x = 2y + 3 \quad \text{(troca } x \leftrightarrow y\text{)} \tag{2}$$
3. **Isolar a nova variável y:**
$$x = 2y + 3 \tag{3}$$
$$x - 3 = 2y \tag{4}$$
$$y = \frac{x-3}{2} \tag{5}$$
4. **Escrever a função inversa:**
$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$
5. **Verificação através da composição de funções:**

- Verificar $f(f^{-1}(x)) = x$:

$$f\left(\frac{x-3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x-3}{2} + 3 \tag{6}$$
$$= (x-3) + 3 \tag{7}$$
$$= x\checkmark \tag{8}$$

- Verificar $f^{-1}(f(x)) = x$:

$$f^{-1}(2x+3) = \frac{(2x+3)-3}{2} \tag{9}$$
$$= \frac{2x}{2} \tag{10}$$
$$= x\checkmark \tag{11}$$

6. **Análise dos domínios e contradomínios:**
   - Domínio de f: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
   - Contradomínio de f: $\mathcal{C}_f = \mathbb{R}$
   - Domínio de f^{-1}: $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ (igual ao contradomínio de f)
   - Contradomínio de f^{-1}: $\mathcal{C}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ (igual ao domínio de f)

Conclusão: A função inversa de $f(x) = 2x + 3$ é:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}}$$

Observações importantes:

- Graficamente, a função inversa é o reflexo de $f(x)$ em relação à reta $y = x$.
- A composição $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ confirma a corretude do resultado.
- O ponto $(0, 3)$ em $f(x)$ corresponde ao ponto $(3, 0)$ em $f^{-1}(x)$.