$1^{\underline{a}}$ Questão de aula do Módulo A10: Otimização

EPRALIMA - Escola Profissional Alto Lima

P2 - Estatística: Medições Básicas

Estatística na Vida

Exercício 1. O João registou as suas notas (de 0 a 20 valores) nas primeiras 7 fichas de avaliação do ano letivo:

Ficha 1	**Ficha 2**	**Ficha 3**	**Ficha 4**	**Ficha 5**	**Ficha 6**	**Ficha 7**
14	12	15	12	16	14	12

1.1. Calcula a média das notas do João. Arredonda à unidade.

1.2. Determina a moda das notas. O que significa este valor para o desempenho do João?

1.3. Calcula a mediana das notas. Mostra os valores ordenados.

1.4. Se o João precisar de ter pelo menos 13 valores de média para passar, qual é a nota mínima que precisa na próxima ficha? Justifica.

Exercício 2. A Maria registou os seus gastos semanais em transporte (em euros) durante um mês:

Semana 1	**Semana 2**	**Semana 3**	**Semana 4**
15	18	15	22

2.1. Calcula a média dos gastos semanais da Maria.

2.2. Determina a moda dos gastos. Qual o significado prático deste valor?

2.3. Calcula a mediana. Compara-a com a média.

2.4. A Maria tem um orçamento mensal de 70€ para transporte. Considerando os dados, achas que ela consegue cumprir o orçamento? Justifica com base nos valores estatísticos calculados.

Estatística Poupança

Exercício 3. A família Silva registou as suas poupanças mensais (em euros) durante 6 meses:

Jan	**Fev**	**Mar**	**Abr**	**Mai**	**Jun**
150	200	150	180	200	220

3.1. Calcula a média das poupanças mensais da família Silva.

3.2. Determina a moda dos valores registados. Explica o que significa este valor no contexto da poupança.

3.3. Calcula a mediana das poupanças. Mostra os passos do cálculo.

3.4. Compara a média e a mediana obtidas. O que podes concluir sobre a distribuição das poupanças da família?

Exercício 4. Uma associação de jovens decidiu poupar para uma viagem de finalistas. A tabela seguinte mostra o valor poupado (em euros) por cada membro durante um mês:

Membro	**Poupança (€)**
Ana	25
Bruno	30
Carla	25
Daniel	40
Eva	30
Filipe	25
Gonçalo	35
Helena	30

4.1. Calcula a média das poupanças do grupo.

4.2. Determina a moda. Quantos membros pouparam esse valor?

4.3. Calcula a mediana das poupanças. Ordena primeiro os valores.

4.4. Se o objetivo é que cada membro contribua com pelo menos 30€, quantos membros ficaram abaixo desse valor? Usa a mediana para justificar se o grupo está no bom caminho.

Estatística Pura

Exercício 5. Considera o seguinte conjunto de dados:

$$\{5, 8, 12, 8, 6, 10, 8, 9\}$$

5.1. Calcula a média aritmética dos valores.

5.2. Determina a moda do conjunto de dados.

5.3. Ordena os valores e calcula a mediana.

5.4. Qual das três medidas (média, moda ou mediana) melhor representa o "centro" destes dados? Justifica a tua resposta.

Exercício 6. Considera o seguinte conjunto de dados:

$$\{3, 7, 7, 10, 15, 7, 12, 9, 11\}$$

6.1. Calcula a média aritmética. Apresenta o resultado com uma casa decimal.

6.2. Identifica a moda. Quantas vezes aparece esse valor?

6.3. Calcula a mediana. Nota: este conjunto tem um número ímpar de elementos.

6.4. Se adicionarmos o valor 100 ao conjunto, como achas que isso afetaria a média e a mediana? Calcula os novos valores e comenta a diferença.

P2 - Estatística: Variabilidade

Medidas de Variabilidade

Exercício 7. Uma família registou as suas poupanças mensais (em euros) durante 5 meses:

$$\{120, 180, 150, 200, 100\}$$

7.1. Calcula a amplitude das poupanças. Identifica o valor máximo e o valor mínimo.

7.2. Calcula a média das poupanças.

7.3. Calcula o Desvio Absoluto Médio (DAM) usando a fórmula:

$$\text{DAM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Para isso:

1. Calcula a diferença de cada valor para a média (em módulo).
2. Soma todas as diferenças.
3. Divide pelo número de valores.

7.4. O que indica um DAM alto ou baixo sobre a consistência das poupanças da família? Interpreta o valor que obtiveste.

Exercício 8. Dois alunos, Pedro e Joana, tiveram as seguintes notas (de 0 a 20) em 6 testes:

	Teste 1	**Teste 2**	**Teste 3**	**Teste 4**	**Teste 5**	**Teste 6**
Pedro	10	18	8	16	12	14
Joana	12	14	13	13	12	14

8.1. Calcula a amplitude das notas de cada aluno.

8.2. Calcula a média das notas de cada aluno.

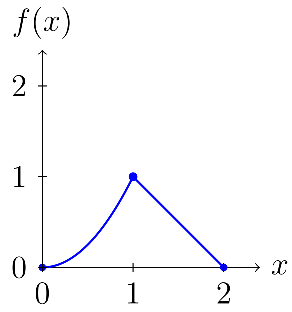
8.3. Calcula o Desvio Absoluto Médio (DAM) das notas de cada aluno.

8.4. Qual dos alunos teve um desempenho mais consistente? Justifica usando os valores da amplitude e do DAM.

A12 - Otimização: Estudo da Monotonia

Monotonia Pura

Exercício 9. Considere o gráfico seguinte, que representa uma função $f(x)$ definida por ramos no intervalo $[0, 2]$:

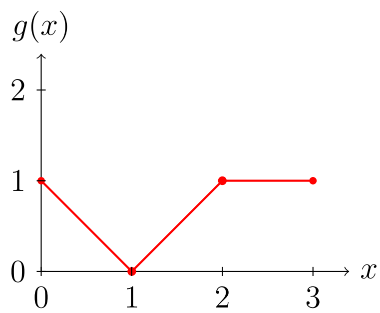


9.1. Indica os intervalos de x onde $f(x)$ é crescente, decrescente e constante.

9.2. Qual é o valor máximo e o valor mínimo de $f(x)$ no intervalo $[0, 3]$? Em que pontos ocorrem?

9.3. Interpreta o significado dos diferentes ramos do gráfico.

Exercício 10. O gráfico seguinte representa uma função $g(x)$ definida por ramos no intervalo $[0, 3]$:



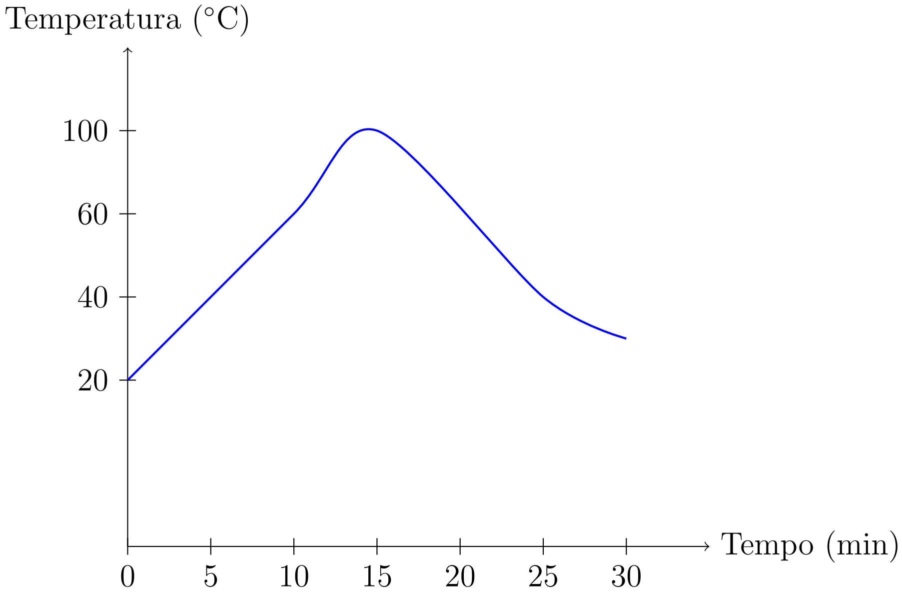
10.1. Indica os intervalos de x onde $g(x)$ é crescente, decrescente e constante.

10.2. Qual é o valor máximo e o valor mínimo de $g(x)$ no intervalo $[0, 5]$? Em que pontos ocorrem?

10.3. Interpreta o significado dos diferentes ramos do gráfico.

Monotonia Real

Exercício 11. A Maria está a fazer um bolo. A temperatura no interior do bolo foi medida ao longo do tempo, entre as 16h00 e as 16h30. O gráfico seguinte mostra como a temperatura variou durante esse período.



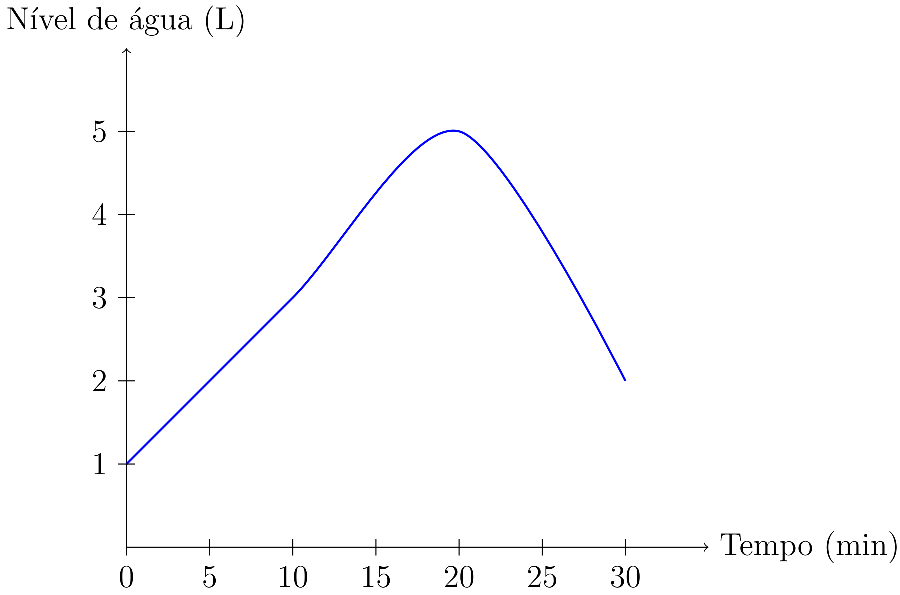
11.1. Durante que intervalo de tempo a temperatura do bolo esteve a aumentar?

11.2. Durante que intervalo de tempo a temperatura esteve a diminuir?

11.3. Qual foi a temperatura máxima atingida e em que minuto isso aconteceu?

11.4. Interpreta o que significa o ponto mais alto do gráfico no contexto do bolo.

Exercício 12. Num laboratório, o nível de água num tanque foi registado ao longo de uma experiência de 30 minutos. O gráfico mostra como o nível de água variou nesse período.



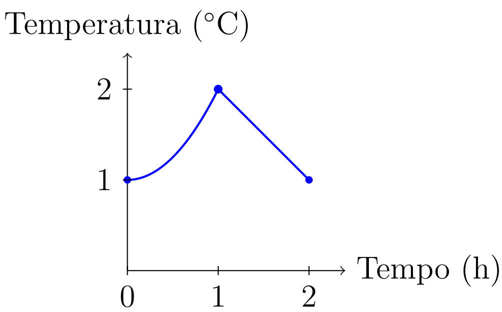
12.1. Durante que intervalo de tempo o nível de água esteve a aumentar?

12.2. Durante que intervalo de tempo o nível de água esteve a diminuir?

12.3. Qual foi o nível máximo de água atingido e em que minuto isso aconteceu?

12.4. Interpreta o significado do ponto mais alto do gráfico no contexto da experiência.

Exercício 13. Durante uma experiência, a temperatura de um líquido foi registada ao longo de 2 horas. Inicialmente, o líquido aquece rapidamente, depois arrefece de forma linear. O gráfico mostra a evolução da temperatura ao longo do tempo.



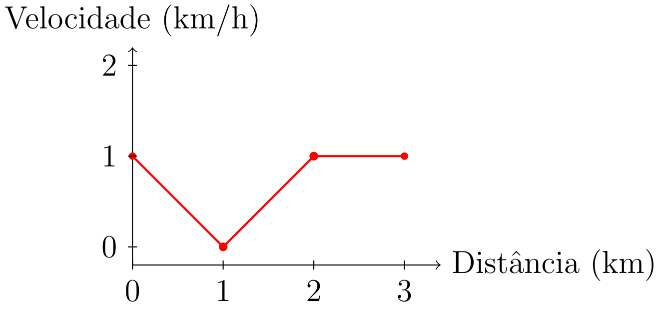
13.1. Durante que intervalo de tempo a temperatura esteve a aumentar?

13.2. Durante que intervalo de tempo a temperatura esteve a diminuir?

13.3. Qual foi a temperatura máxima atingida e em que hora isso aconteceu?

13.4. Interpreta o significado dos diferentes ramos do gráfico no contexto da experiência.

Exercício 14. Um ciclista inicia um percurso às 9h00. Nos primeiros 2 km, a sua velocidade varia de acordo com $v(x) = |x - 1|$ (em km/h), onde x é a distância percorrida em km. Depois, mantém uma velocidade constante de 1 km/h até aos 3 km. O gráfico mostra a evolução da velocidade ao longo do percurso.



14.1. Durante que intervalo de distância a velocidade esteve a aumentar?

14.2. Durante que intervalo de distância a velocidade esteve a diminuir?

14.3. Qual foi a velocidade mínima atingida e em que ponto do percurso isso aconteceu?

14.4. Interpreta o significado dos diferentes ramos do gráfico no contexto do percurso do ciclista.

A12 - Otimização: Problemas Simples

Modelagem

Exercício 15. O custo total C (em euros) de produção de x peças numa fábrica é dado pela função:

$$C(x) = 5x + 200$$

onde x representa o número de peças produzidas.

15.1. Qual é o custo fixo de produção (custo quando $x = 0$)?

15.2. Qual é o custo de produzir uma unidade adicional (custo marginal)?

15.3. Se a fábrica tem um orçamento de 700€, quantas peças pode produzir no máximo? Resolve a equação $C(x) = 700$.

15.4. Se cada peça é vendida a 12€, a partir de quantas peças a fábrica começa a ter lucro?

Exercício 16. A temperatura T (em graus Celsius) de uma sala climatizada em função do tempo t (em minutos) após ligar o ar condicionado é dada por:

$$T(t) = 30 - 0.5t$$

A temperatura ambiente inicial era de 30°C.

16.1. Qual era a temperatura da sala quando o ar condicionado foi ligado ($t = 0$)?

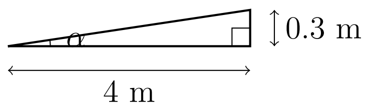
16.2. A que ritmo está a temperatura a diminuir por minuto?

16.3. Após quanto tempo a sala atinge 22°C? Resolve a equação $T(t) = 22$.

16.4. Se o ar condicionado não pode arrefecer abaixo de 18°C, qual é o tempo máximo de funcionamento útil?

Problemas de Rampas

Exercício 17. Uma rampa de acesso para cadeiras de rodas tem 4 metros de comprimento horizontal e sobe 30 centímetros de altura.



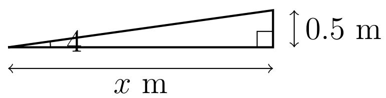
17.1. Converte a altura para metros.

17.2. Usa a razão trigonométrica adequada para calcular $\tan(\alpha)$.

17.3. Calcula o ângulo α (em graus). Usa a calculadora para encontrar $\tan^{-1}$ (arctangente).

17.4. As normas de acessibilidade recomendam um ângulo máximo de 5°. Esta rampa cumpre a norma? Justifica.

Exercício 18. Um edifício precisa de uma rampa de acesso que suba 50 cm de altura. O projetista quer que a inclinação da rampa seja exatamente de 4° (dentro das normas de acessibilidade).



18.1. Qual razão trigonométrica relaciona a altura com o comprimento horizontal da rampa?

18.2. Sabendo que $\tan(4) \approx 0.07$, calcula o comprimento horizontal x necessário.

18.3. Qual seria o comprimento total da rampa (hipotenusa)? Usa o Teorema de Pitágoras.

18.4. Se o espaço disponível é de apenas 6 metros horizontais, a rampa pode ser construída com inclinação de 4°? Justifica.

Triângulos Retângulos Puros

Exercício 19. Considera a função $f(x) = x^2$ e o triângulo $[ABC]$ onde:

- O vértice A está na origem $(0, 0)$

- O vértice B está sobre o gráfico de f no ponto $(2, f(2))$
- O vértice C está sobre o eixo Ox tal que $\overline{BC}$ é vertical (perpendicular ao eixo Ox)

Nota: O triângulo é retângulo em C pois $\overline{BC} \perp \overline{AC}$.

19.1. Determina as coordenadas do vértice B.

19.2. Determina as coordenadas do vértice C.

19.3. Calcula a área do triângulo $[ABC]$.

19.4. Qual seria a área se usássemos $x_B = 3$ em vez de $x_B = 2$?

Exercício 20. Considera a função $g(x) = 2x + 1$ e um triângulo retângulo $[PQR]$ onde:

- O vértice P está sobre o gráfico de g com $x_P = 0$
- O vértice Q está sobre o gráfico de g com $x_Q = 3$
- O vértice R está sobre o eixo Ox tal que $\overline{PR}$ é vertical

20.1. Determina as coordenadas de P e Q.

20.2. Determina as coordenadas de R.

20.3. Verifica que o triângulo é retângulo em R calculando o comprimento dos três lados.

20.4. Calcula a área do triângulo $[PQR]$.