Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

DATA: 9/03/2023 FOLHA DE PROBLEMAS #1 ANO: 2022/2023

1. Considere a aplicação do método de Newton à resolução numérica da equação $f(x) = 0$. Mostre que:

   (a) se $f(x_*) = f'(x_*) = 0$, $f''(x_*) \neq 0$, o método de Newton converge linearmente para x_*;

   (b) se $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$, $f''(x_*) = 0$, $f'''(x_*) \neq 0$, o método de Newton converge cubicamente para x_*.

2. Neste exercício pretende-se analisar a taxa quadrática de convergência local do método de Newton *inexacto*. Suponha que em vez de ser calculado o passo de Newton exacto é determinado um passo p_k tal que

$$J(x_k)p_k \ = \ -F(x_k) + e_k,$$

   em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ representa o erro residual. Prove, nas condições do Teorema 1, que a sucessão $\{x_k\}$ converge quadraticamente para x_* se existir uma constante positiva c tal que

$$\|e_k\| \ \leq \ c\|F(x_k)\|^2 \qquad \text{para todo o } \ k.$$

3. O método de Newton pode ser usado para calcular os valores próprios λ e os correspondentes vectores próprios x de uma matiz A de ordem n. Se definirmos a função $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} Ax - \lambda x \\ x^T x - 1 \end{bmatrix},$$

   então $F(x, \lambda) = 0$ precisamente quando λ é um valor próprio de A e x é o correspondente vector próprio normalizado. Como

$$J_F(x, \lambda) = \begin{bmatrix} A - \lambda I & -x \\ 2x^T & 0 \end{bmatrix},$$

   o método de Newton para resolver a equação é dado por

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \lambda_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ \lambda_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_k \\ \sigma_k \end{bmatrix},$$

   onde $p_k = [s_k; \sigma_k]^T$ é a solução do sistema linear $J_F(x_k, \lambda_k)p_k = -F(x_k, \lambda_k)$. Escreva um programa que lhe permita calcular o par valor-vector próprios de uma dada matriz A usando o método iterativo dado. Escolha como aproximação inicial um vector normalizado arbitrário (tal que $x_0^T x_0 = 1$) e $\lambda_0 = x_0^T A x_0$ (porquê?). Teste o programa com algumas matrizes escolhidas aleatoriamente.