TPC#2
Data de entrega: 28 de Abril de 2023
Autores: Diogo Alexandre Mousinho dos Reis (100%); Maria Margarida Botelho de Athaíde Matos Ferreira(100%); Matilde Vieira Duque (100%)

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável e com matriz Hessiana definida positiva em $\mathbb{R}^n$.
   Consideremos a seguinte mudança de variável: $x = Ry$, em que $R \in \mathbb{R}^{nxn}$ é uma matriz não singular.
   Seja $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função defina por $g(y) = f(Ry)$.
   Começemos por provar que $\nabla g(y) = R^T \nabla f(Ry)$.
   Temos que:

$$\underbrace{g(y_1, y_2, ..., y_n)}_{g(y)} = \underbrace{f(x_1, x_2, ..., x_n)}_{f(Ry)} = f\left(\sum_{j=1}^{n} R_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} R_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} R_{nj}y_j\right)$$

Uma vez que,

$$x = Ry = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}y_1 + R_{12}y_2 + ... + R_{1n}y_n \\ R_{21}y_1 + R_{22}y_2 + ... + R_{2n}y_n \\ \vdots \\ R_{n1}y_1 + R_{n2}y_2 + ... + R_{nn}y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} R_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^{n} R_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} R_{nj}y_j \end{bmatrix}.$$

Calculemos agora:

$$\nabla g(y) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2}, ..., \frac{\partial g}{\partial y_n}\right)$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}R_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2}R_{21} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}R_{n1} \\ &= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \end{bmatrix}^T \nabla f(Ry) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y_2} &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}R_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2}R_{22} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}R_{n2} \\ &= \begin{bmatrix} R_{12} & R_{22} & \cdots & R_{n2} \end{bmatrix}^T \nabla f(Ry) \end{aligned}$$

...

$$\frac{\partial g}{\partial y_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}R_{1i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}R_{2i} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}R_{ni}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{1i} & R_{2i} & \cdots & R_{ni} \end{bmatrix}^T \nabla f(Ry)$$

Assim sendo, podemos concluir que: $\nabla g(y) = R^T \nabla f(Ry)$, como pretendiamos demonstrar. Provemos agora que $\nabla^2 g(y) = R^T \nabla^2 f(Ry) R$.

Como sabemos,$\nabla^2 g(y) = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial y_e \partial y_k}\right]$

Então pelo que vimos anteriormente temos que :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial^2 y_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial g}{\partial y_1}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}R_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2}R_{21} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}R_{n1}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)R_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)R_{21} + ... + \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)R_{n1}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)R_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)R_{21} + ... + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_1}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)R_{n1}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}R_{11}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)R_{11} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}R_{21}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)R_{21} + ... + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}R_{n1}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)R_{n1}$$

$$= R_{11}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)R_{11} + R_{21}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)R_{21} + ... + R_{n1}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)R_{n1}$$

$$= R_{11}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}R_{11} + R_{21}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}R_{21} + ... + R_{n1}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}R_{n1}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \end{bmatrix}^T \nabla^2 f(Ry) \begin{bmatrix} R_{11} & R_{21} & \cdots & R_{n1} \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y_e \partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_e}\frac{\partial g}{\partial y_k}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y_e}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}R_{1k} + \frac{\partial f}{\partial x_2}R_{2k} + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}R_{nk}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_e}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)R_{1k} + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_e}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)R_{2k} + ... + \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_e}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)R_{nk}$$

$$= R_{1e}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)R_{1k} + R_{2e}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)R_{2k} + ... + R_{ne}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)R_{nk}$$

$$= R_{1e}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}R_{1k} + R_{2e}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}R_{2k} + ... + R_{ne}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_n}R_{nk}$$

$$= \begin{bmatrix} R_{1e} & R_{2e} & \cdots & R_{ne} \end{bmatrix}^T \nabla^2 f(Ry) \begin{bmatrix} R_{1k} & R_{2k} & \cdots & R_{nk} \end{bmatrix}$$

Deste modo provamos o pretendido ($\nabla^2 g(y) = R^T \nabla^2 f(Ry) R$).

a) Pretende-se provar que a matriz Hessiana de g, $\nabla^2 g(y)$, é definida positiva em $\mathbb{R}^n$, sabendo que a matriz Hessiana de f, $\nabla^2 f(Ry)$, é definida positiva em $\mathbb{R}^n$, isto é, $\forall z \in \mathbb{R}^n$ $z^T \nabla^2 f(Ry) z > 0$.

Seja $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0$. Ora,

$$\begin{aligned} u^T \nabla^2 g(y) u &= u^T R^T \nabla^2 f(Ry) R u \\ &= (Ru)^T \nabla^2 f(Ry)(Ru) > 0, \end{aligned}$$

pois $(Ru) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor qualquer e a matriz Hessiana de f é definida positiva.
Logo, $\nabla^2 g(y)$ é definida positiva.

b) Queremos mostrar que o método de Newton é invariante ao escalonamento nas variáveis.
Sabendo que $R \in \mathbb{R}^n$ e é não singular, ou, equivalentemente, invertível, temos que:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) \\ \Leftrightarrow Ry_{k+1} &= Ry_k - \nabla^2 f(Ry_k)^{-1} \nabla f(Ry_k) \\ \Leftrightarrow R^{-1} R y_{k+1} &= R^{-1} R y_k - R^{-1} \nabla^2 f(Ry_k)^{-1} \nabla f(Ry_k) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= y_k - R^{-1} \nabla^2 f(Ry_k)^{-1} \nabla f(Ry_k) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= y_k - R^{-1} \nabla^2 f(Ry_k)^{-1} R^{T^{-1}} R^T \nabla f(Ry_k) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= y_k - (R^T \nabla^2 f(Ry_k) R)^{-1} (R^T \nabla f(Ry_k)) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= y_k - \nabla^2 g(y_k)^{-1} \nabla g(y_k), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

c) Suponhamos que R é uma matriz ortogonal, isto é, $R^T = R^{-1}$.
Queremos mostrar que $x_{k+1} = x_k - \nabla f(x_k) \Leftrightarrow y_{k+1} = y_k - \nabla g(Ry_k)$:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \nabla f(x_k) \\ \Leftrightarrow Ry_{k+1} &= Ry_k - \nabla f(Ry_k) \\ \Leftrightarrow R^T R y_{k+1} &= R^T R y_k - R^T \nabla f(Ry_k) \\ \Leftrightarrow y_{k+1} &= y_k - \nabla g(Ry_k), \end{aligned}$$

como pretendiamos demonstrar.

2. a) Queremos mostrar que $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\Pi M}}$ sabendo que $\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv$.

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv \\
&= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{M^3}{8R^3T^3}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv \\
&= \sqrt{\frac{16M^3}{8\pi R^3T^3}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv \\
&= \sqrt{\frac{2M^3}{\pi R^3T^3}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv
\end{aligned}$$

Assim sendo, temos que:

$$\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{2M^3}{\pi R^3T^3}} \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \sqrt{\frac{\pi R^3T^3}{2M^3}} \\
&\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \sqrt{\frac{8R^4T^4}{2M^4}} \\
&\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \sqrt{\frac{4R^4T^4}{M^4}} \\
&\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \frac{2R^2T^2}{M^2}
\end{aligned}$$

Queremos então mostrar que: $\int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \frac{2R^2T^2}{M^2}$

Consideremos $a = \frac{M}{2RT}$ (constante).

Então, $\int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \int_0^{+\infty} v^3 e^{-av^2}\, dv$.

Calculemos, inicialmente, o integral indefinido (correspondente):

$$\int v^3 e^{-av^2}\, dv = \int \frac{ue^{-au}}{2}\, dv \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2} \int ue^{-au}\, du$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{-ue^{-au}}{a} + \frac{1}{a} \int e^{-au}\, du\Big) \quad (2)$$

$$= \frac{-ue^{-au}}{2a} + \frac{1}{2a} \int e^{-au}\, du$$

Sendo a igualdade (1) uma aplicacação da integração por substituição ($u = v^2 \implies u' = 2v$ e $du = 2v\, dv$), a igualdade (2) uma aplicacação da integração por partes $\Big(\int f\, dg = fg - \int g\, df$, que neste caso fizemos $f = u$ e $dg = e^{-au}\, du \implies df = du$ e $g = \frac{-e^{-au}}{a} \Big)$.

Assim sendo, temos que $\int v^3 e^{-av^2}\, dv = \frac{-ue^{-au}}{2a} + \frac{1}{2a} \int e^{-au}\, du$.
Calculemos o segiuinte integral:

$$\int e^{-au}\, du = \int \frac{-e^s}{a}\, ds \quad (3)$$

$$= -\frac{1}{a} \int e^s\, ds$$

$$= -\frac{e^s}{a}$$

$$= -\frac{e^{-au}}{a}$$

Sendo a igualdade (3) uma aplicacação da integração por substituição ($s = -au \implies s' = -a$ e $ds = -a\, du$).
Desta forma, temos que:

$$\int v^3 e^{-av^2}\, dv = \frac{-ue^{-au}}{2a} + \frac{1}{2a}\Big(-\frac{e^{-au}}{a}\Big)$$

$$= \frac{-ue^{-au}}{2a} - \frac{e^{-au}}{2a^2}$$

$$= \frac{-v^2 e^{-av^2}}{2a} - \frac{e^{-av^2}}{2a^2}$$

$$= \frac{-av^2 e^{-av^2} - e^{-av^2}}{2a^2}$$

Calculemos agora o integral (definido) pretendido:

$$\int_0^{+\infty} v^3 e^{-av^2}\, dv = \Big(\frac{-av^2 e^{-av^2} - e^{-av^2}}{2a^2} \Big]_0^{+\infty}$$

$$= \Big(0 - \Big(-\frac{1}{2a^2} \Big) \Big)$$

$$= \frac{1}{2a^2}$$

Como consideramos $a = \frac{M}{2RT}$, temos:

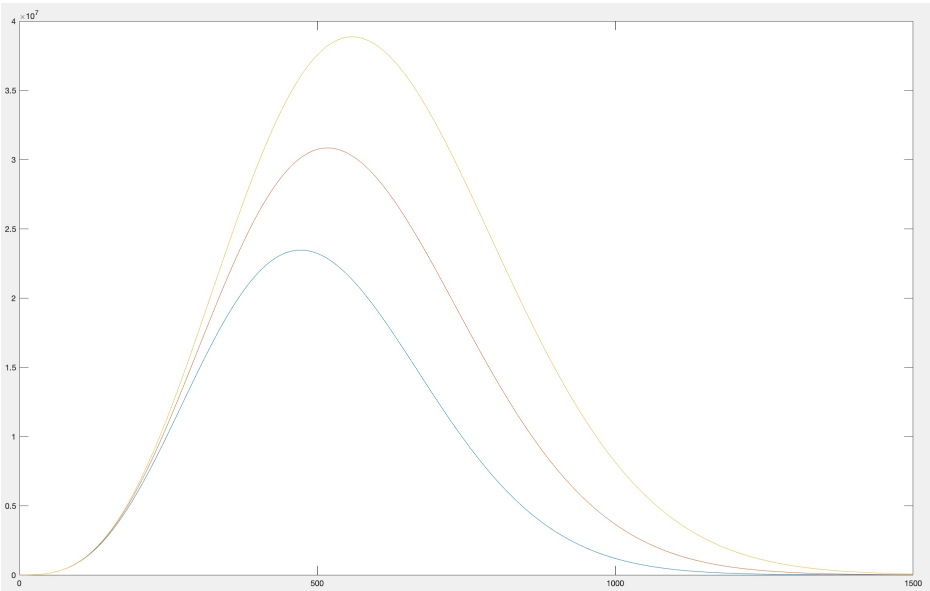
$$\frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2\left(\frac{M}{2RT}\right)^2}$$

$$= \frac{2R^2T^2}{M^2}$$

Consequentemente, temos que $\int_0^{+\infty} v^3 e^{\frac{-Mv^2}{2RT}}\, dv = \frac{2R^2T^2}{M^2}$, como pretendiamos mostrar.

b) O objetivo desta alínea é, com recurso ao Matlab, aproximar o integral para diferentes valores de M, R e T usando as fórmulas de quadratura estudadas: do Ponto Médio, do Trapézio e de Simpson.

Como estamos na presença de um integral impróprio torna-se difícil saber para que valores integrar, como tal, procedemos a plots da função para os diferentes valores de T e concluímos que apenas seria relevante considerar valores desde 0 até 1500.



Começamos por definir valores para M, R e T. M será um número aleatório entre 0 e 1 com duas casas decimais e R um valor aleatório entre 1 e 10 com três casas decimais.T assume três valores diferentes: 250, 300, 350. Definimos ainda outros três valores diferentes de n: 200, 400 e 600 para podermos comparar os resultados em diferentes malhas.

```
%Definir Parâmetros
M = rand() * 10^-4;
R = rand() * 9 + 1;
R = round(R, 3);
T = [250, 300, 350];
n_vals = [200 400 600];
```

De seguida, iniciamos um ciclo que percorre os valores de T e imprime para cada um o seu valor e os respetivos valores de M e R.

Dentro desse ciclo, iniciamos outro ciclo que agora percorre os diferentes valores de n, criando assim diferentes valores para as malhas em cada aproximação. Definimos ainda a função a ser integrada, e os limites de integração.

```
for i = 1:length(T)

    fprintf('Valor de T = %d K:\n', T(i));
    fprintf('Valor de R = %d K:\n', R);
    fprintf('Valor de M = %d K:\n', M);

    for j = 1:length(n_vals)

    f = @(v) ((4.*sqrt(pi)).*(M./(2*R*T(i))).^(3./2)) .* (v.^3 .* exp(-M*v.^2 ./ (2*R*T(i)))); %defi

    %define a malha
    a = 0; %Limite inferior
    b = 1500;
    %b = sqrt(8*R*T(i)/M*pi);
    n = n_vals(j);
    h(j) = (b-a)/n;
```

Definimos M+1 pontos e os pontos médios. Implementamos as fórmulas do Ponto Médio, do Trapézio e de Simpson dentro do ciclo de modo a serem calculadas aproximações para diferentes malhas e valores de M, R e T. Procedemos ao calculo do valor real do integral e do erro absoluto entre o valor real e cada aproximação.

```
        x = linspace(a,b,n+1); % M+1 pontos
        pm = (x(1:n)+x(2:n+1))/2; % pontos médios

        %Ponto Médio
        I_PM = h(j)*sum(f(pm));
        %Trapézio
        I_T = h(j)/2*(f(x(1))+2*sum(f(x(2:n)))+f(x(n+1)));
        %Simpson
        I_S = h(j)/6*(f(x(1))+4*sum(f(pm))+2*sum(f(x(2:n)))+f(x(n+1)));
        %Valor real do integral
        V_R = integral(f, a, b);

        E_PM(j) = abs(V_R - I_PM);
        E_T(j) = abs(V_R - I_T);
        E_S(j) = abs(V_R - I_S);

        %fprintf dos resultados
        fprintf('n = %d:\n', n);
        fprintf('Regra do Ponto Médio: %.6f m/s\n', I_PM);
        fprintf('Regra do Trapézio: %.6f m/s\n', I_T);
        fprintf('Regra de Simpson: %.6f m/s\n', I_S);
        fprintf('Valor real do integral: %.6f m/s\n', V_R);
        fprintf('Erro do PM: %.6f\n', E_PM(j));
        fprintf('Erro do T: %.6f\n', E_T(j));
        fprintf('Erro de S: %.6f\n', E_S(j))
        fprintf('\n');
```

c) Nesta alínea é pedido que comparemos os resultados obtidos em cada aproximação com o valor real do integral e para evidenciar a ordem de convergência de cada método utilizado.

Ora, como já foi visto na alínea anterior de que forma obtemos o valor do erro absoluto entre o valor real e o valor de uma aproximação, resta agora, criar um ciclo que nos permita determinar a ordem de convergência de cada método. Uma vez que $|erro| \leq Ch^p$ onde C não depende de n nem de h, implentamos o ciclo representado na próxima figura que determina as ordens de convergência para cada método.

```
%Calcular a ordem de convergência para cada método
for k = 1:length(n_vals)-1

    p_PM = (log(E_PM(k+1)/E_PM(k)))/(log(h(k+1)/h(k)));
    p_T = (log(E_T(k+1)/E_T(k)))/(log(h(k+1)/h(k)));
    p_S = (log(E_S(k+1)/E_S(k)))/(log(h(k+1)/h(k)));

end
```

Segue agora um exemplo dos resultados obtidos:

Command Window

```
Valor de T = 250 K:
Valor de R = 2.277000e+00 K:
Valor de M = 8.002805e-03 K:
n = 200:
Regra do Ponto Médio: 1337.055246 m/s
Regra do Trapézio: 1337.055245 m/s
Regra de Simpson: 1337.055246 m/s
Valor real do integral: 1337.055246 m/s
Erro do PM: 0.000000
Erro do T: 0.000002
Erro de S: 0.000001

n = 400:
Regra do Ponto Médio: 1337.055247 m/s
Regra do Trapézio: 1337.055245 m/s
Regra de Simpson: 1337.055246 m/s
Valor real do integral: 1337.055246 m/s
Erro do PM: 0.000000
Erro do T: 0.000001
Erro de S: 0.000000

n = 600:
Regra do Ponto Médio: 1337.055247 m/s
Regra do Trapézio: 1337.055246 m/s
Regra de Simpson: 1337.055246 m/s
Valor real do integral: 1337.055246 m/s
Erro do PM: 0.000000
Erro do T: 0.000001
Erro de S: 0.000000

Ordem de convergência da regra do Ponto Médio: 1.51
Ordem de convergência da regra do Trapézio: 1.75
Ordem de convergência da regra de Simpson: 4.00
```

Command Window

```
Valor de T = 300 K:
Valor de R = 2.277000e+00 K:
Valor de M = 8.002805e-03 K:
n = 200:
Regra do Ponto Médio: 1464.634774 m/s
Regra do Trapézio: 1464.634709 m/s
Regra de Simpson: 1464.634753 m/s
Valor real do integral: 1464.634753 m/s
Erro do PM: 0.000021
Erro do T: 0.000044
Erro de S: 0.000001

n = 400:
Regra do Ponto Médio: 1464.634759 m/s
Regra do Trapézio: 1464.634742 m/s
Regra de Simpson: 1464.634753 m/s
Valor real do integral: 1464.634753 m/s
Erro do PM: 0.000006
Erro do T: 0.000012
Erro de S: 0.000000

n = 600:
Regra do Ponto Médio: 1464.634756 m/s
Regra do Trapézio: 1464.634748 m/s
Regra de Simpson: 1464.634753 m/s
Valor real do integral: 1464.634753 m/s
Erro do PM: 0.000003
Erro do T: 0.000005
Erro de S: 0.000000

Ordem de convergência da regra do Ponto Médio: 1.97
Ordem de convergência da regra do Trapézio: 1.98
Ordem de convergência da regra de Simpson: 4.00
```

```
Command Window
Valor de T = 350 K:
Valor de R = 2.277000e+00 K:
Valor de M = 8.002805e-03 K:
n = 200:
Regra do Ponto Médio: 1581.787377 m/s
Regra do Trapézio: 1581.787074 m/s
Regra de Simpson: 1581.787276 m/s
Valor real do integral: 1581.787276 m/s
Erro do PM: 0.000100
Erro do T: 0.000202
Erro de S: 0.000001

n = 400:
Regra do Ponto Médio: 1581.787302 m/s
Regra do Trapézio: 1581.787225 m/s
Regra de Simpson: 1581.787276 m/s
Valor real do integral: 1581.787276 m/s
Erro do PM: 0.000025
Erro do T: 0.000051
Erro de S: 0.000000

n = 600:
Regra do Ponto Médio: 1581.787288 m/s
Regra do Trapézio: 1581.787254 m/s
Regra de Simpson: 1581.787276 m/s
Valor real do integral: 1581.787276 m/s
Erro do PM: 0.000011
Erro do T: 0.000023
Erro de S: 0.000000

Ordem de convergência da regra do Ponto Médio: 1.99
Ordem de convergência da regra do Trapézio: 2.00
Ordem de convergência da regra de Simpson: 4.00
>>
```

Conseguimos observar que à medida que os valores de n aumentam, e os valores de T são percorridos, os erros entre absolutos são cada vez menores, e que, como seria de esperar o erro de Simpson é menor que do Trapézio e que o do Ponto Médio.

Durante o percorrer dos ciclos a ordem de convergência torna-se mais precisa, sendo que, na última iteração do ciclo, para além de já se aproximarem dos valores esperados nas iterações anteriores, as ordens de convergência encontram-se realmente muito próximas dos valores: 4 para o método de Simpson e 2 para os métodos do Trapézio e do Ponto Médio.

Por fim, e, após várias tentativas, conseguimos observar que os resultados parecem apresentar consistência.