Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

DATA: 18/04/2023 FOLHA DE PROBLEMAS #3 ANO: 2022/2023

1. Considere o problema de valor de fronteira

$$-\epsilon u'' + u' = 1 \text{ em } (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

onde $\epsilon > 0$.

(a) Verifique que a solução exacta é dada por

$$u(x) = x - \frac{e^{x/\epsilon} - 1}{e^{1/\epsilon} - 1}.$$

(b) Trace o gráfico da solução para $\epsilon = 10^{-k}$, $k = 1, 2, 3$ (é necessário uma abordagem inteligente para evitar o *overflow* para o caso em que $\epsilon = 10^{-3}$).

(c) Calcule e trace o gráfico da solução usando um método de diferenças finitas numa rede uniforme de espaçamento $h = 1/(N+1)$,

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1,$$

com $x_j = jh$.

(d) Investigue a convergência do método numérico quando $h$ decresce usando a norma máxima e a norma

$$\|u\|_p = \left( h \sum_{j=1}^{N} |u(x_j)|^p \right)^{1/p},$$

quando $p = 1$ e $p = 2$. Descreva o comportamento da convergência e como varia para os três valores de $\epsilon$ considerados.