Otimização do cálculo de risco

2023 11 02 | Diogo David Sánchez Lima | Rio de Janeiro, RJ

Value At Risk

Resumo

Neste documento, vou propor uma abordagem computacionalmente viável para calcular o impacto de contribuições no Valor em Risco (VaR) de um portfólio, com base em um modelo teórico, e, por fim, utilizar como base para aplicação prática.

Modelo

Considere duas distribuições, X e Y (ou dois ativos), a função $VaR(x)$ a função quantilica da ordem de 5%. Seja Z uma váriavel aleatória composta pela soma $X + \omega Y$. Sabemos que para valores muito grandes de ω o VaR será tão grande quanto maior for o valor de ω e terá inclinação igual ao $VaR(Y)$ uma vez que os dias que irão compor os cenários que determinam o $VaR(Z(\omega))$ serão integralmente explicados pelos dias que determinam o $VaR(Y)$. Ou seja, podemos afirmar que:

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{d(VaR(Z(\omega)))}{d(\omega)} = VaR(Y) \tag{1}$$

$$\lim_{\omega \to -\infty} \frac{d(VaR(Z(\omega)))}{d(\omega)} = -VaR(-Y) \tag{2}$$

Usando a mesma abordagem para ω na margem, isto é para váriações muito pequenas de ω, o suficiente para que não ocorra mudança nas datas que compõem o conjunto de dias que explicam o $VaR(Z)$

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{d(VaR(Z(\omega)))}{d(\omega)} = \mathbb{E}[Y|X = VaR(X)] \tag{3}$$

Vamos assumir nessa primeira parte que a distribuição Y é simétrica sendo $Var(Y) = VaR(-Y)$, vamos assumir também que a função derivada $\frac{d(VaR(Z(\omega)))}{d(\omega)}$ é monotonicamente decrescente e limitada pelos valores encontrados nas equações (1) e (2).

Na matemática, existe uma curva a qual a derivada tem o mesmo comportamento, ela é conhecida também como hipérbole. Vamos assumir nesse modelo então, que a função $VaR(Y)$ tem o mesmo formato dessa cônica e iremos encontrar os seus parametros:

Rescrevendo o VaR como uma hipérbole, temos então a seguinte equação:

$$VaR(Z(\omega)) = -\sqrt{1 + \frac{(\omega - h)^2}{a^2}} \times b + k \tag{4}$$

Sendo a,b,h,k os parametros que desejamos estimar. Sabendo que a inclinação da hipérbole com w tendendo a inifnito é de exatamente $-a/b$ e como foi levantado anteriormente em (1) esse valor é de $VaR(Y)$, temos então a seguinte equação:

$$b = -a \times VaR(Y) \tag{5}$$

Para $\omega = 0$ temos $VaR(Z) = VaR(X)$ uma vez que para esse valor de ω as distribuição Z e X são exatamente a mesmas. Sendo assim, podemos afirmar então que:

$$VaR(Z(\omega = 0)) = VaR(X) = -\sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} \times b + k \tag{6}$$

Unindo as equações (5) e (6) temos então:

$$VaR(X) = \sqrt{a^2 + h^2} \times Var(Y) + k \tag{7}$$

Abaixo é escrita a derivada de $VaR(Z)$ em função de ω, seguindo a equação da hipérbole:

$$\frac{d(VaR(Z(\omega)))}{d(\omega)} = -\frac{b(\omega - h)}{a\sqrt{a^2 + (\omega - h)^2}} \tag{8}$$

Unindo (8) com (3) para $\omega = 0$, temos:

$$\mathbb{E}[Y|X = VaR(X)] = -\frac{bh}{a\sqrt{a^2 + h^2}} \tag{9}$$

Incluindo (5) e (7) na equação:

$$\mathbb{E}[Y|X = VaR(X)] = \frac{VaR(Y)^2 \times h}{VaR(X) - k} \tag{10}$$

$$h = \frac{\mathbb{E}[Y|X = VaR(X)] \times (VaR(X) - k)}{VaR(Y)^2} \tag{11}$$

Existem duas formas de escrever a reta assintota, utilizando a intuição matemática do problema proposto sabemos que no limite os dias que explicam o $VaR(Z)$ são constantes e são os memos que explicam o $VaR(Y)$, sendo assim o $VaR(Z)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$VaR(Z(\omega)) = \omega * VaR(Y) + \mathbb{E}[X|Y = VaR(Y)] \tag{12}$$

A outra forma seria utilizando a equação da assintota:

$$VaR(Z(\omega)) = \frac{-b}{a} \times (\omega - h) + k \tag{13}$$

Igualando as equações (13) e (12):

$$\omega VaR(Y) + \mathbb{E}[X|Y = VaR(Y)] = VaR(Y)(\omega - h) + k \tag{14}$$

$$\mathbb{E}[X|Y = VaR(Y)] = k - VaR(Y)h \tag{15}$$

$$h = \frac{k - \mathbb{E}[X|Y = VaR(Y)]}{VaR(Y)} \tag{16}$$

Unindo agora as equações (11) e (16)

$$k^* = \frac{\mathbb{E}[Y|X = VaR(X)] \times VaR(X) + \mathbb{E}[X|Y = VaR(Y)] \times VaR(Y)}{\mathbb{E}[Y|X = VaR(X)] + VaR(Y)} \tag{17}$$

Agora que encontramos o valor de k^*, basta substituir nas equações para encontrar h,b e a

$$h^* = \frac{k^* - \mathbb{E}[X|Y = VaR(Y)]}{VaR(Y)} \tag{18}$$

$$a^* = \sqrt{(\frac{VaR(X) - k^*}{VaR(Y)} - (h^*)^2} \tag{19}$$

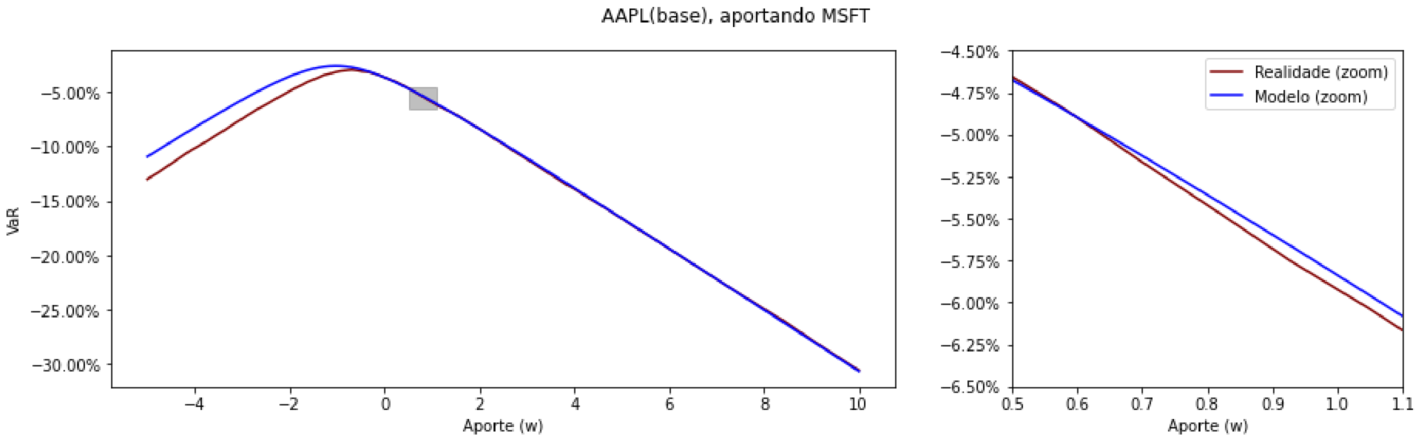
$$b^* = -a^* \times VaR(Y) \tag{20}$$

Aplicação

Para determinar a equação de uma hipérbole, são necessários apenas quatro valores: as expectativas condicionais e os Valores em Risco (VaR) de cada variável. Com esses (quatro) dados em mãos, torna-se possível estimar os parâmetros necessários.

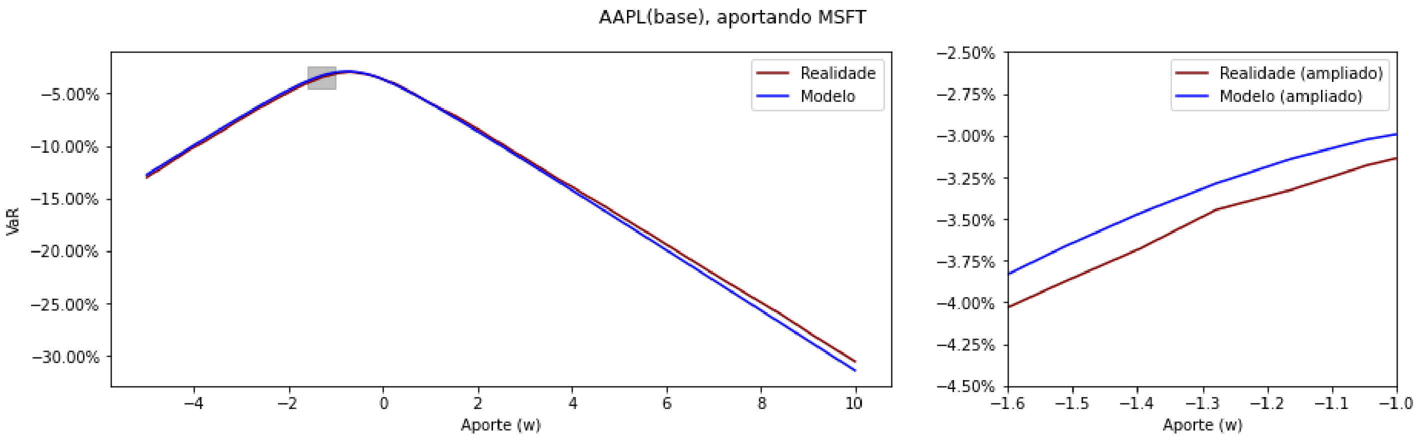
A figura a seguir apresenta uma comparação entre o modelo e a realidade, utilizando um portfólio de base composto por ações da AAPL. O eixo x representa um aporte em ações da MSFT, enquanto o eixo y representa o VaR resultante.

Gráfico 1: AAPL + MSFT.



Conforme era esperado, considerando que as distribuições são simétricas, o resultado na posição vendida se mostrou insatisfatório. No entanto, para corrigir essa questão, basta seguir os mesmos passos, mas agora considerando a simetria na posição vendida, em vez de na posição comprada. Abaixo, apresento um exemplo:

Gráfico 2: AAPL + MSFT.



O exemplo anterior, que considerou simetria com base na posição vendida, demonstrou estar mais adequado para valores negativos de ω. No entanto, para abordar esse problema de forma mais abrangente, existem duas soluções viáveis: a primeira é generalizar a equação da hipérbole por meio de uma rotação, enquanto a segunda sugere um caminho mais simples como o uso de modelos distintos para posições compradas e posições vendidas.

Continuarei utilizando a função curve_fit do SciPy para estimar os resultados.

Nos gráficos abaixo estão os resultados finais, como é possivel notar, não há grandes perdas na estimação da curva quando se utiliza poucos pontos:

Conclusão

É possivel concluir que, com um investimento computacional muito baixo, é viável estimar o impacto de um aporte no Valor em Risco (VaR) de um portfólio para infinitos pontos. Além disso, é possível identificar o aporte ideal que minimiza o VaR histórico.

O trabalho sugere a possibilidade de encontrar parâmetros ou facilitar a convergência computacional usando equações, o que deixa essa perspectiva em aberto para futuras investigações.