Otimização do cálculo de risco

2023 11 02 | Diogo David Sánchez Lima | Rio de Janeiro, RJ

Value At Risk

Resumo

Neste documento, vou propor uma abordagem computacionalmente viável para calcular o impacto de contribuições no Valor em Risco (VaR) de um portfólio, com base em um modelo teórico, e, por fim, utilizar como base para aplicação prática.

Teóricamente

Considere duas distribuições, X e Y (ou dois ativos), que exibem a seguinte característica:

$$\text{COV}(X, Y|X = x) = f(x) \tag{1}$$

Realizando uma simples linearização na margem, podemos expressar Y da seguinte maneira:

$$E[Y|X = k] = \beta_0 + \beta_1 k \tag{2}$$

$$E[Y|X = k] = \beta_0 + \frac{\sigma^2_{Y,X}}{\sigma^2_X} k \tag{3}$$

$$E[Y|X = k] = \beta_0 + \frac{f(X)}{\sigma^2_X} k \tag{4}$$

Agora, suponha que Z seja o valor de $X + \omega \times Y$ (ou um portfólio formado pelos dois ativos, com um peso ω para Y). Considerando que a função VaR é homogênea de grau 1 e que, para valores muito baixos de ω, o VaR se aproximará de $X = VaR(X)$, podemos realizar uma Expansão de Taylor na função VaR para encontrar o VaR de Z em termos de ω:

$$VaR(Z) = VaR(X) + \omega\beta_1 VaR(X) \tag{5}$$

Com base nessas equações, teoricamente, ao encontrar a covariância condicional, o que torna possivel calcular o valor do β_1, é possível calcular o impacto de uma contribuição de tamanho ω no VaR de Z.

Aplicação

Para obter uma estimativa da covariância condicional, os seguintes passos foram seguidos:

1. Foram selecionadas as datas em que a variável X estava próxima do seu próprio Value at Risk (VaR). Por exemplo, foram filtradas as datas em que X se encontrava dentro do intervalo entre VaR(1%) e VaR(9%).

2. A covariância entre X e Y foi calculada na amostra selecionada no passo anterior.

3. O parâmetro β foi estimado.

4. O novo VaR foi calculado como o VaR anterior somado ao produto do parâmetro β pela média (ω) multiplicada pelo VaR anterior. Em outras palavras: **novo VaR = VaR antigo** $\times(1 + \beta\omega)$

A seguir alguns resultados encontrados:

Gráfico 1: AAPL + MSFT.

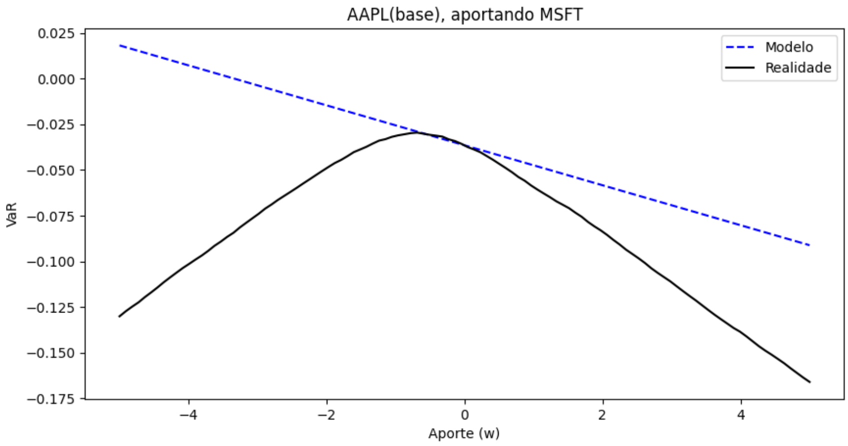


Gráfico 2: AAPL + AMZN.

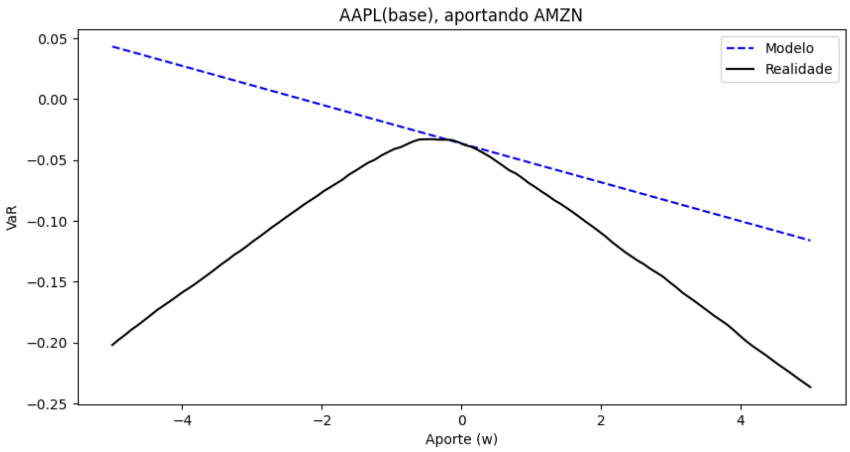
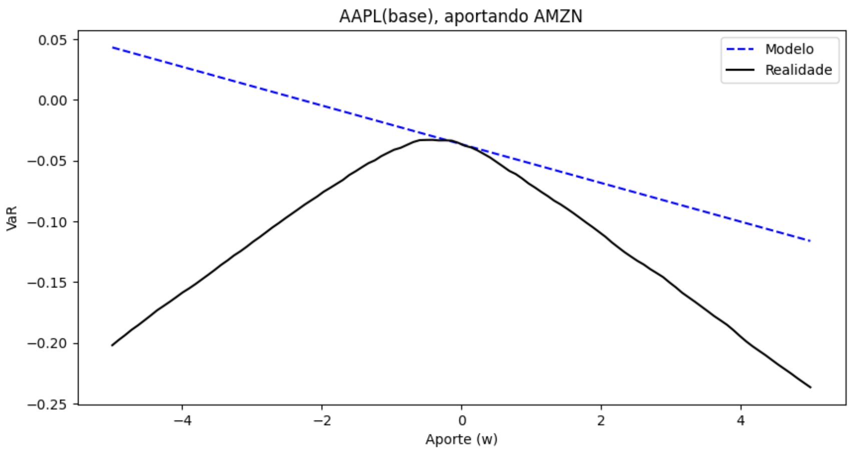


Gráfico 3: AAPL + NVDA.

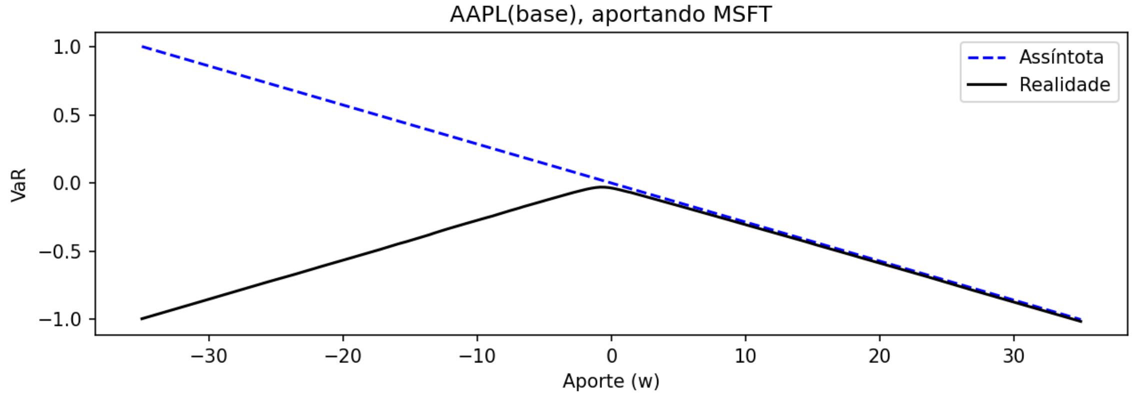


Ao observar os gráficos, é evidente que a derivada permanece constante para determinados níveis de aporte. Podemos afirmar que, para esses níveis de aporte, o conjunto de dias que pertencem ao Valor em Risco (VaR) permanece inalterado, e o efeito de Y em Z mantém-se constante em relação ao retorno esperado nos eventos de cauda.

Com a percepção de que, para aportes extremamente grandes ou extremamente pequenos, a taxa de variação permanece constante, surgem duas retas assintóticas e uma curva intermediária que as conecta. Em outras palavras, obtemos uma curva que se assemelha muito a uma hipérbole.

Sabendo que a inclinação da assintota é extamente o VaR de Y, ou matemáticamente, $-a/b$, temos então que os valores de a e b que solucionam o problema são respectivamente $(-b \times VaR(Y))$ e (b).

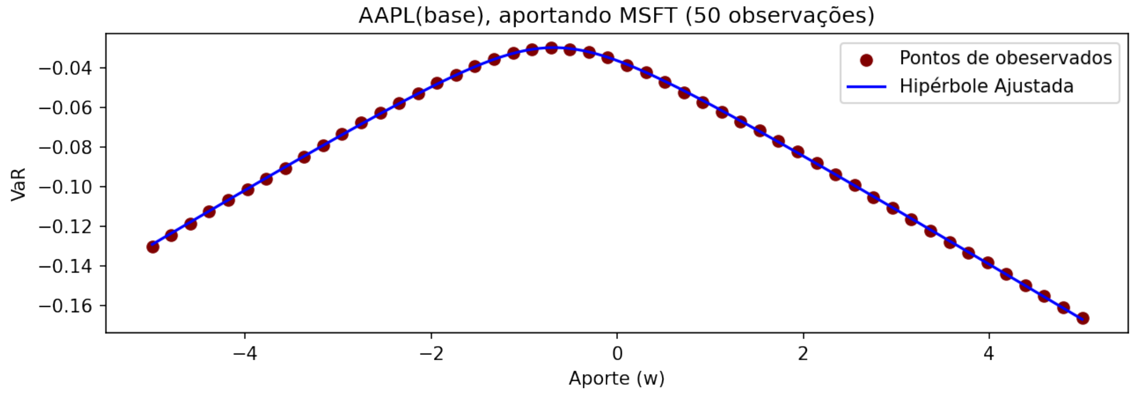
Gráfico 4: AAPL + MSFT.



Continuarei utilizando a função curve_fit do SciPy para estimar os resultados.

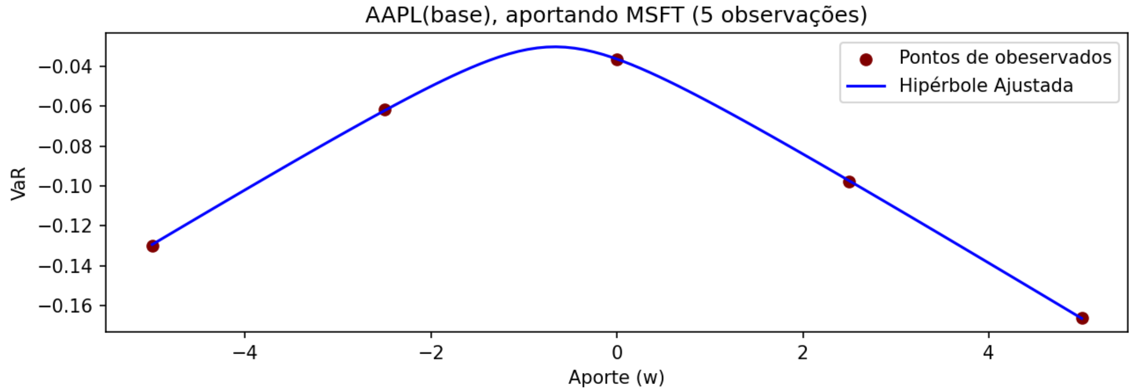
Nos gráficos abaixo estão os resultados finais, como é possivel notar, não há grandes perdas na estimação da curva quando se utiliza poucos pontos:

Gráfico 5: AAPL + MSFT (50 simulações).



Parâmetros estimados: -0.68173744; -0.00506535; 0.02468402; 0.8774106

Gráfico 6: AAPL + MSFT (5 simulações).



Parâmetros estimados: -0.66701775; -0.00427158; 0.02590701; 0.91654833

Conclusão

É possivel concluir que, com um investimento computacional muito baixo, é viável estimar o impacto de um aporte no Valor em Risco (VaR) de um portfólio para infinitos pontos. Além disso, é possível identificar o aporte ideal que minimiza o VaR histórico.

O trabalho sugere a possibilidade de encontrar parâmetros ou facilitar a convergência computacional usando equações, o que deixa essa perspectiva em aberto para futuras investigações.