MAKRON
Books

CAPÍTULO 5

INTERPOLAÇÃO

5.1 INTRODUÇÃO

A seguinte tabela relaciona calor específico da água e temperatura:

temperatura (ºC)	20	25	30	35	40
calor específico	0.99907	0.99852	0.99826	0.99818	0.99828

temperatura (ºC)	45	50
calor específico	0.99849	0.99878

Suponhamos que se queira calcular:

i) o calor específico da água a 32.5ºC;

ii) a temperatura para a qual o calor específico é 0.99837.

A interpolação nos ajuda a resolver este tipo de problema.

Interpolar uma função f(x) consiste em aproximar essa função por uma outra função g(x), escolhida entre uma classe de funções definida *a priori* e que satisfaça algumas propriedades. A função g(x) é então usada em substituição à função f(x).

A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

a) quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado (como é o caso do exemplo anterior);

b) quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

5.1.1 UM CONCEITO DE INTERPOLAÇÃO

Consideremos (n + 1) pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, chamados *nós da interpolação*, e os valores de f(x) nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$.

A forma de interpolação de f(x) que veremos a seguir consiste em se obter uma determinada função g(x) tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) = f(x_0) \\ g(x_1) = f(x_1) \\ g(x_2) = f(x_2) \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ g(x_n) = f(x_n) \end{cases} \tag{1}$$

GRAFICAMENTE

Se n = 5

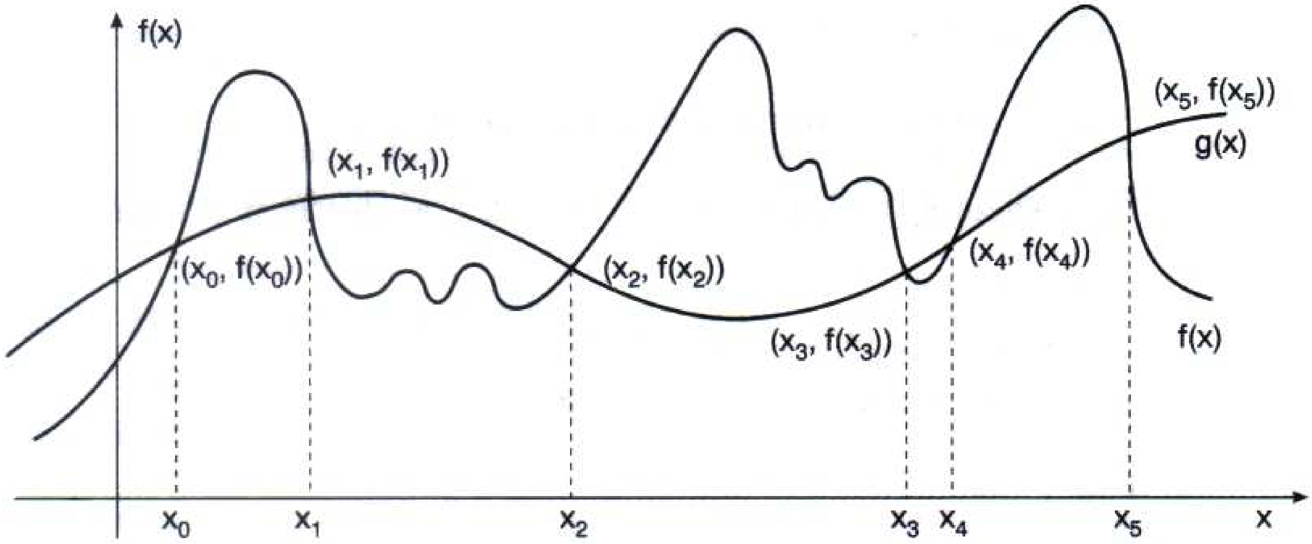

Figura 5.1

Neste texto consideraremos que g(x) pertence à classe das funções polinomiais.

Observamos que:

i) existem outras formas de interpolação polinomial como, por exemplo, a fórmula de Taylor e a interpolação por polinômios de Hermite, para as quais as condições de interpolação (1) são outras.

ii) assim como g(x) foi escolhida entre as funções polinomiais, poderíamos ter escolhido g(x) como função racional, função trigonométrica etc.

5.2 INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$,..., $(x_n, f(x_n))$, portanto (n+1) pontos, queremos aproximar f(x) por um polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k) \quad k = 0,1,2,..., n$$

Surgem aqui as perguntas: existe sempre um polinômio $p_n(x)$ que satisfaça estas condições? Caso exista, ele é único?

Representaremos $p_n(x)$ por:

$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$.

Portanto, obter $p_n(x)$ significa obter os coeficientes $a_0, a_1, ..., a_n$.

Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)$, $\forall$ k = 0, 1, 2,..., n, montamos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \quad \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

com n + 1 equações e n + 1 variáveis: $a_0, a_1, ..., a_n$.

A matriz A dos coeficientes é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

que é uma matriz de Vandermonde e, portanto, desde que $x_0, x_1, ..., x_n$ sejam pontos distintos, temos $\det(A) \neq 0$ e, então, o sistema linear admite solução única.

Demonstramos, assim, o seguinte teorema:

TEOREMA 1

Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq$ n, tal que: $p_n(x_k) = f(x_k)$, k = 0, 1, 2, ..., n desde que $x_k \neq x_j$, $j \neq k$.

5.3 FORMAS DE SE OBTER $p_n(x)$

Conforme acabamos de ver, o polinômio $p_n(x)$ que interpola f(x) em x_0, x_1,..., x_n é único. No entanto, existem várias formas para se obter tal polinômio. Uma das formas é a resolução do sistema linear obtido anteriormente. Estudaremos ainda as formas de Lagrange e de Newton.

Teoricamente as três formas conduzem ao mesmo polinômio. A escolha entre elas depende de condições como estabilidade do sistema linear, tempo computacional etc.

5.3.1 RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR

Exemplo 1

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela:

x	–1	0	2
f(x)	4	1	–1

Temos que $p_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$;

$$p_2(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$$
$$p_2(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_0 = 1$$
$$p_2(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1.$$

Resolvendo o sistema linear, obtemos:

$a_0 = 1$, $a_1 = -7/3$ e $a_2 = 2/3$.

Assim, $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ é o polinômio que interpola f(x) em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Embora a resolução do sistema linear neste exemplo tenha sido um processo simples e exato na obtenção de $p_2(x)$, não podemos esperar que isto ocorra para qualquer problema de interpolação, uma vez que, como vimos, a matriz A dos coeficientes do sistema linear é uma matriz de Vandermonde, podendo ser mal condicionada (ver Projeto 1, item (*a*) do Capítulo 3).

Por exemplo, seja obter $p_3(x)$ que interpola $f(x)$ nos pontos x_0, x_1, x_2, x_3, de acordo com a tabela abaixo:

x	0.1	0.2	0.3	0.4
f(x)	5	13	–4	–8

Impondo a condição $p_3(x_k) = f(x_k)$ para k = 0, 1, 2, 3, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + 0.1a_1 + 0.01a_2 + 0.001a_3 = 5 \\ a_0 + 0.2a_1 + 0.04a_2 + 0.008a_3 = 13 \\ a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.027a_3 = -4 \\ a_0 + 0.4a_1 + 0.16a_2 + 0.064a_3 = -8 \end{cases}$$

Usando aritmética de ponto flutuante com três dígitos e o método da eliminação de Gauss, temos como resultado:

$$p_3(x) = -0.66 \times 10^2 + (0.115 \times 10^4)x - (0.505 \times 10^4)x^2 + (0.633 \times 10^4)x^3$$

e, para x = 0.4, obtemos:

$$p_3(0.4) = -10 \neq -8 = f(0.4).$$

5.3.2 FORMA DE LAGRANGE

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$, (n+1) pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, i = 0, ..., n.

Seja $p_n(x)$ o polinômio de grau $\leq$ n que interpola f em $x_0, \ldots, x_n$. Podemos representar $p_n(x)$ na forma $p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \ldots + y_nL_n(x)$, onde os polinômios $L_k(x)$ são de grau n. Para cada i, queremos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \ldots + y_nL_n(x_i) = y_i. \tag{2}$$

A forma mais simples de se satisfazer esta condição é impor:

$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 \text{ se } k \neq i \\ 1 \text{ se } k = i \end{cases}$ e, para isso, definimos $L_k(x)$ por

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \ldots (x_k - x_n)} .$$

É fácil verificar que realmente

$L_k(x_k) = 1$ e
$L_k(x_i) = 0$ se $i \neq k$.

Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma:

$(x - x_i), \quad i = 0, \ldots, n, i \neq k,$

então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n e, assim, $p_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Além disso, para $x = x_i$, $i = 0, \ldots, n$ temos:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i$$

Então, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)$$

onde

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}.$$

Exemplo 2 (Interpolação Linear)

Faremos aqui um exemplo teórico para interpolação em dois pontos distintos: $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Assim, n é igual a 1 e, por isto, a interpolação por dois pontos é chamada *interpolação linear*.

Usando a forma de Lagrange, teremos:

$p_1(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x)$, onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}.$$

Assim, $p_1(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$, ou seja,

$$p_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)}$$

que é exatamente a equação da reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

Exemplo 3

Seja a tabela:

x	–1	0	2
f(x)	4	1	–1

Pela forma de Lagrange, temos que:

$p_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$, onde:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)\,(x-x_2)}{(x_0-x_1)\,(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)\,(x-2)}{(-1-0)\,(-1-2)} = \frac{x^2-2x}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_2)}{(x_1-x_0)\,(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)\,(x-2)}{(0+1)\,(0-2)} = \frac{x^2-x-2}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)\,(x-x_1)}{(x_2-x_0)\,(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)\,(x-0)}{(2+1)\,(2-0)} = \frac{x^2+x}{6}.$$

Assim, na forma de Lagrange,

$$p_2(x) = 4\left(\frac{x^2-2x}{3}\right) + 1\left(\frac{x^2-x-2}{-2}\right) + (-1)\left(\frac{x^2+x}{6}\right).$$

Agrupando os termos semelhantes, obtemos que $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$, que é a mesma expressão obtida no Exemplo 1.

5.3.3 FORMA DE NEWTON

A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n + 1)$ pontos distintos é a seguinte:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + d_n(x-x_0)(x-x_1) \ldots (x-x_{n-1}). \quad (3)$$

No que segue, estudaremos:

i) o operador diferenças divididas, uma vez que os coeficientes d_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ acima são diferenças divididas de ordem k entre os pontos $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, 1, \ldots, k$.

ii) a dedução da expressão de $p_n(x)$ dada por (3).

OPERADOR DIFERENÇAS DIVIDIDAS

Seja $f(x)$ uma função tabelada em $n + 1$ pontos distintos: $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Definimos o *operador diferenças divididas* por:

$$\begin{cases} f[x_0] = f(x_0) & \text{(Ordem Zero)} \\[2ex] f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} & \text{(Ordem 1)} \\[2ex] f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} & \text{(Ordem 2)} \\[2ex] f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} & \text{(Ordem 3)} \\[2ex] \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad\vdots \\[2ex] f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0} & \text{(Ordem n)} \end{cases}$$

Dizemos que $f[x_0, x_1, ..., x_k]$ é a diferença dividida de ordem k da função f(x) sobre os k + 1 pontos: $x_0, x_1, ..., x_k$.

Dada uma função f(x) e conhecidos os valores que f(x) assume nos pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, podemos construir a tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	...	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$		.	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	.	
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	.	.	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	.	.	.	
x_4	$f[x_4]$	.	.	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
.	.	.	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
.	.	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

Exemplo 4

Seja f(x) tabelada abaixo

x	–1	0	1	2	3
f(x)	1	1	0	–1	–2

Sua tabela de diferenças divididas é:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	Ordem 4
−1	1				
		0			
0	1		$-\frac{1}{2}$		
		−1		$\frac{1}{6}$	
1	0		0		$-\frac{1}{24}$
		−1		0	
2	−1		0		
		−1			
3	−2				

Onde

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1}{1} = 0$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 1}{1 - 0} = -1$$

.

.

.

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{-1 - 0}{1 + 1} = \frac{-1}{2}$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{-1 + 1}{2 - 0} = 0$$

$$\vdots$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{0 + 1/2}{2 + 1} = \frac{1}{6}$$

$$\vdots$$

Prova–se que as diferenças divididas satisfazem a propriedade a seguir:

$f[x_0, x_1, ..., x_k]$ é simétrica nos argumentos, ou seja, $f[x_0, x_1,..., x_k] = f[x_{j_0}, x_{j_1},..., x_{j_k}]$ onde $j_0, j_1, ... j_k$ é qualquer permutação de 0, 1, ..., k.

Por exemplo,

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0].$$

Para k = 2 teremos

$$f[x_0, x_1, x_2] = f[x_0, x_2, x_1] = f[x_1, x_0, x_2] = f[x_1, x_2, x_0] = f[x_2, x_0, x_1] = f[x_2, x_1, x_0].$$

FORMA DE NEWTON PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

Seja f(x) contínua e com tantas derivadas contínuas quantas necessárias num intervalo [a, b].

Sejam $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, (n + 1) pontos.

Construiremos o polinômio $p_n(x)$ que interpola f(x) em $x_0, x_1,..., x_n$. Iniciaremos a construção obtendo $p_0(x)$ que interpola f(x) em $x = x_0$. E assim, sucessivamente, construiremos $p_k(x)$ que interpola f(x) em $x_0, x_1,..., x_k$, k = 0, 1,..., n.

Seja $p_0(x)$ o polinômio de grau 0 que interpola f(x) em $x = x_0$. Então, $p_0(x) = f(x_0) = f[x_0]$.

Temos que, para todo $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$

$$f[x_0, x] = \frac{f[x] - f[x_0]}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - x_0)f[x_0, x] = f(x) - f(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)\, f[x_0, x]}_{E_0(x)}$$

$$\Rightarrow E_0(x) = f(x) - p_0(x) = (x - x_0)f[x_0, x].$$

Note que $E_0(x) = f(x) - p_0(x)$ é o erro cometido ao se aproximar $f(x)$ por $p_0(x)$. Na Seção 5.4, o erro na interpolação será estudado com detalhes.

Seja agora construir $p_1(x)$, o polinômio de grau ≤ 1 que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1.

Temos que

$$f[x_0, x_1, x] = f[x_1, x_0, x] = \frac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} =$$

$$= \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0]}{(x - x_1)\,(x - x_0)}$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1, x] = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)\, f[x_1, x_0]}{(x - x_0)\,(x - x_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_1, x_0]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x]}_{E_1(x)}.$$

Assim,

$$p_1(x) = \underbrace{f(x_0)}_{p_0(x)} + \underbrace{(x - x_0)\, f[x_0, x_1]}_{q_1(x)} \text{ e}$$

$$E_1(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x].$$

Verificação:

$p_1(x)$ interpola $f(x)$ em x_0 e em x_1?

$p_1(x_0) = f(x_0)$

$$p_1(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)\,\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1).$$

Seja agora construir $p_2(x)$, o polinômio de grau $\leqslant 2$ que interpola $f(x)$ em x_0, x_1, x_2.

Temos que:

$$f[x_0, x_1, x_2, x] = f[x_2, x_1, x_0, x] = \frac{f[x_1, x_0, x] - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{f[x_0, x] - f[x_1, x_0]}{x - x_1} - f[x_2, x_1, x_0]}{x - x_2} =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)} - f[x_1, x_0]}{(x - x_1)} - f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_2)} =$$

$$= \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f[x_1, x_0] - (x - x_0)\,(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0]}{(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Então,

$$p_2(x) = \underbrace{f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1]}_{p_1(x)} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]}_{q_2(x)} \text{ e}$$

$$E_2(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) f[x_0, x_1, x_2, x].$$

Observamos que, assim como para $p_1(x)$ e $p_2(x)$, $p_k(x) = p_{k-1}(x) + q_k(x)$, onde $q_k(x)$ é um polinômio de grau k.

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio para

$x_0, x_1, x_2, x_3;$
$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4;$
.
.
.
$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n,$

teremos a forma de Newton para o polinômio de grau $\leq$ n que interpola f(x) em $x_0, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots \\ & + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n] \end{aligned}$$

e o erro é dado por

$$E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]$$

De fato, $p_n(x)$ interpola f(x) em $x_0, x_1, \dots, x_n$, pois sendo

$f(x) = p_n(x) + E_n(x)$, então, para todo nó x_k, $k = 0, \dots, n$, temos

$$f(x_k) = p_n(x_k) + \underbrace{E_n(x_k)}_{=0} = p_n(x_k).$$

Exemplo 5

Usando a forma de Newton, o polinômio $p_2(x)$, que interpola $f(x)$ nos pontos dados abaixo

x	−1	0	2
f(x)	4	1	−1

, é:

$$p_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2].$$

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
−1	4		
		−3	
0	1		$\frac{2}{3}$
		−1	
2	−1		

$$p_2(x) = 4 + (x + 1)(-3) + (x + 1)(x - 0)\,\frac{2}{3}.$$

Observamos que, agrupando os termos semelhantes, obtemos $p_2(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 1$, que é a mesma expressão obtida nos Exemplos 1 e 3.

Observamos ainda que é conveniente deixar o polinômio na forma de Newton, sem agrupar os termos semelhantes, pois, quando calcularmos o valor numérico de $p_n(x)$, para $x = \alpha$, evitaremos o cálculo de potências. O número de operações pode ainda ser reduzido se usarmos a forma dos *parênteses encaixados* descrita a seguir:

dado

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)\, f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)\, f[x_0, x_1, x_2] + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \ldots + \\ & + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

temos

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) \{f[x_0, x_1] + (x - x_1) \{f[x_0, x_1, x_2] +$$
$$+ (x - x_2) \{f[x_0, x_1, x_2, x_3] + \ldots + (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \ldots\}\}\}.$$

Um algoritmo para se calcular $p_n(\alpha)$ usando esta forma de parênteses encaixados será visto na lista de exercícios, no final deste capítulo.

5.7 FUNÇÕES SPLINE EM INTERPOLAÇÃO

Se a função f(x) está tabelada em (n+1) pontos e a aproximarmos por um polinômio de grau n que a interpola sobre os pontos tabelados, o resultado dessa aproximação pode ser desastroso, conforme vimos no Exemplo 12.

Uma alternativa é interpolar f(x) em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômio de grau menor, e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma certa ordem.

A Figura 5.4 mostra o caso em que aproximamos a função por uma função linear por partes, que denotaremos $S_1(x)$.

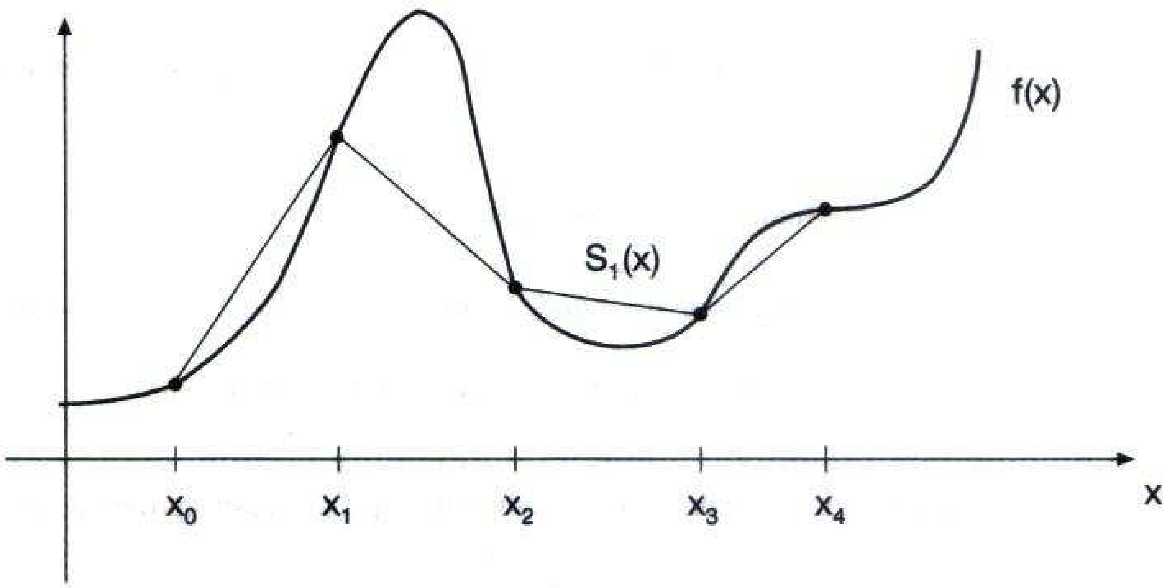

Figura 5.4

Observamos que a função $S_1(x)$ é contínua, mas não é derivável em todo o intervalo (x_0, x_4), uma vez que $S'_1(x)$ não existe para $x = x_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$.

Podemos optar também por, a cada 3 pontos: x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, passar um polinômio de grau 2 e, neste caso, teremos também garantia só de continuidade da função que vai aproximar f(x).

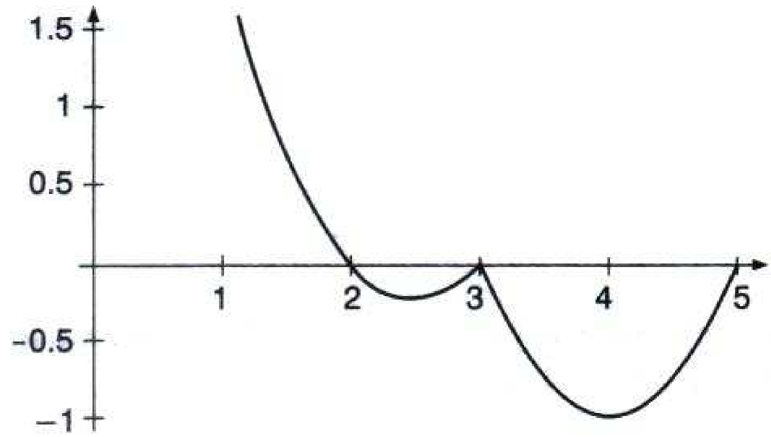

Figura 5.5

No caso das funções spline, a opção feita é aproximar a função tabelada, em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, por um polinômio de grau p, com algumas imposições sobre a função conforme a definição a seguir.

DEFINIÇÃO:

Considere a função f(x) tabelada nos pontos $x_0 < x_1 < ... < x_n$.

Uma função $S_p(x)$ é denominada *spline de grau p* com nós nos pontos x_i, i = 0, 1, ..., n, se satisfaz as seguintes condições:

a) em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, i = 0, 1,..., (n − 1), $S_p(x)$ é um polinômio de grau p: $s_p(x)$.

b) $S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem (p − 1) em [a, b].

Se, além disto, $S_p(x)$ também satisfaz a condição:

c) $S_p(x_i) = f(x_i)$, i = 0,1,...,n, então será denominada spline interpolante.

A origem do nome spline vem de uma régua elástica, usada em desenhos de engenharia, que pode ser curvada de forma a passar por um dado conjunto de pontos (x_i, y_i), que tem o nome de spline. Sob certas hipóteses (de acordo com a teoria da elasticidade) a curva definida pela régua pode ser descrita aproximadamente como sendo uma função por partes, cada qual um polinômio cúbico, de tal forma que ela e suas duas primeiras derivadas são contínuas sempre. A terceira derivada, entretanto, pode ter descontinuidades nos pontos x_i. Tal função é uma spline cúbica interpolante com nós nos pontos x_i, segundo a definição anterior.

5.7.1 SPLINE LINEAR INTERPOLANTE

A função spline linear interpolante de f(x), $S_1(x)$, nos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, i = 1, 2, ..., n como

$$s_i(x) = f(x_{i-1}) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad \forall\ x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Verificação:

a) $S_1(x)$ é polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por definição;

b) $S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i), por definição, e, nos nós x_i, realmente S_1 está bem definida, pois:

$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$ é contínua em [a, b] e, portanto, $S_1(x)$ é spline linear;

c) $S_1(x_i) = s_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$ é spline linear interpolante de f(x) nos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Exemplo 13

Achar a função spline linear que interpola a função tabelada:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1	2	5	7
f(x)	1	2	3	2.5

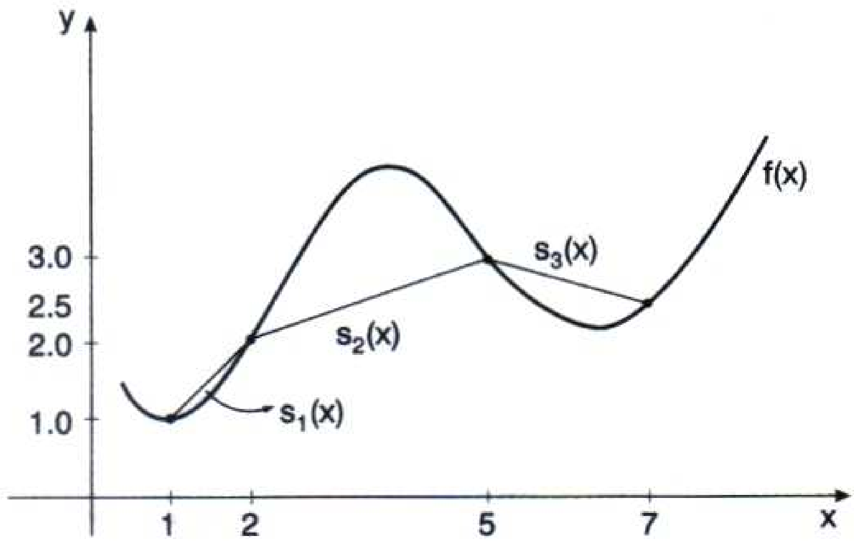

Figura 5.6

De acordo com a definição,

$$s_1(x) = f(x_0)\,\frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} + f(x_1)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} =$$

$$= 1\,\frac{2 - x}{2 - 1} + 2\,\frac{x - 1}{2 - 1} = 2 - x + 2x - 2 = x,\ x \in [1, 2]$$

$$s_2(x) = f(x_1)\,\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\,\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$= 2\,\frac{5 - x}{5 - 2} + 3\,\frac{x - 2}{5 - 2} = \frac{2}{3}\,(5 - x) + x - 2 = \frac{1}{3}\,(x + 4),\ x \in [2, 5]$$

$$s_3(x) = f(x_2)\,\frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} + f(x_3)\,\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

$$= 3\,\frac{7 - x}{7 - 5} + 2.5\,\frac{x - 5}{7 - 5} = \frac{1}{2}\,(-0.5x + 8.5),\ x \in [5,7].$$