

Matriz A		$m = n$	$m < n$	$m > n$
Posto Completo		$(\text{posto}(A) = n)$ Compatível determinado	$(\text{posto}(A) = m)$ Infinitas soluções	$(\text{posto}(A) = n)$ $b \in \text{Im}(A)$ , solução única $b \notin \text{Im}(A)$ , incompatível
Posto Deficiente	$b \in \text{Im}(A)$	Infinitas soluções	Infinitas soluções	Infinitas soluções
	$b \notin \text{Im}(A)$	Incompatível	Incompatível	Incompatível

Neste capítulo apresentaremos métodos numéricos para a resolução de sistemas lineares  $n \times n$ .

Os métodos numéricos para resolução de um sistema linear podem ser divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos.

*Métodos diretos* são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Os *métodos iterativos* geram uma sequência de vetores  $\{x^{(k)}\}$ , a partir de uma aproximação inicial  $x^{(0)}$ . Sob certas condições esta sequência converge para a solução  $x^*$ , caso ela exista.

## 3.2 MÉTODOS DIRETOS

### 3.2.1 INTRODUÇÃO

Pertencem a esta classe todos os métodos estudados nos cursos de 1º e 2º graus, destacando-se a regra de Cramer. Este método, aplicado à resolução de um sistema  $n \times n$  envolve o cálculo de  $(n + 1)$  determinantes de ordem  $n$ . Se  $n$  for igual a 20 podemos mostrar que o número total de operações efetuadas será  $21 \times 20! \times 19$  multiplicações mais um número semelhante de adições. Assim, um computador que efetue cerca de cem milhões de multiplicações por segundo levaria  $3 \times 10^5$  anos para efetuar as operações necessárias.

Desta forma, o estudo de métodos mais eficientes é necessário, pois, em geral, os problemas práticos exigem a resolução de sistemas lineares de grande porte, isto é, sistemas que envolvem um grande número de equações e variáveis.

Devemos observar que no caso de sistemas lineares  $n \times n$ , com solução única, o vetor  $x^*$  é dado por:  $x^* = A^{-1}b$ . No entanto, calcular explicitamente a matriz  $A^{-1}$  e em seguida efetuar o produto  $A^{-1}b$  é desaconselhável, uma vez que o número de operações envolvidas é grande, o que torna este processo não competitivo com os métodos que estudaremos a seguir.

### 3.2.2 MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Entre os métodos diretos, destacam-se os métodos de eliminação que evitam o cálculo direto da matriz inversa de  $A$  e além disto não apresentam problemas com tempo de execução como a regra de Cramer.

O método da Eliminação de Gauss consiste em transformar o sistema linear original num sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior, pois estes são de resolução imediata. Dizemos que dois sistemas lineares são *equivalentes* quando possuem a mesma solução.

Veremos a seguir um algoritmo para resolução de sistemas triangulares e estudaremos como o método da Eliminação de Gauss efetua a transformação do sistema linear original no sistema triangular equivalente.

### RESOLUÇÃO DE SISTEMAS TRIANGULARES

Seja o sistema linear  $Ax = b$ , onde  $A$ : matriz  $n \times n$ , triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero. Escrevendo as equações deste sistema, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Da última equação, temos

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$x_{n-1}$  pode então ser obtido da penúltima equação:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

e assim sucessivamente obtém-se  $x_{n-2}$ , ...,  $x_2$  e finalmente  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

### ALGORITMO 1: Resolução de um Sistema Triangular Superior

Dado um sistema triangular superior  $n \times n$  com elementos da diagonal da matriz  $A$  não nulos, as variáveis  $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$  são assim obtidas:

$$x_n = b_n / a_{nn}$$

Para  $k = (n - 1), \dots, 1$

$$\left[ \begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k + 1), \dots, n \\ s = s + a_{kj}x_j \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array} \right.$$

### DESCRIÇÃO DO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

Conforme dissemos anteriormente, o método consiste em transformar convenientemente o sistema linear original para obter um sistema linear equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.

Para modificar convenientemente o sistema linear dado de forma a obter um sistema equivalente, faremos uso do teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [2].



**TEOREMA 1**

Seja  $Ax = b$  um sistema linear. Aplicando sobre as equações deste sistema uma seqüência de operações elementares escolhidas entre:

- i) trocar duas equações;
- ii) multiplicar uma equação por uma constante não nula;
- iii) adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

obtemos um novo sistema  $\tilde{A}x = \tilde{b}$  e os sistemas  $Ax = b$  e  $\tilde{A}x = \tilde{b}$  são equivalentes.

Descreveremos a seguir como o método da Eliminação de Gauss usa este teorema para triangularizar a matriz  $A$ . Vamos supor que  $\det(A) \neq 0$ .

A eliminação é efetuada por colunas e chamaremos de etapa  $k$  do processo a fase em que se elimina a variável  $x_k$  das equações  $k + 1, k + 2, \dots, n$ .

Usaremos a notação  $a_{ij}^{(k)}$  para denotar o coeficiente da linha  $i$  e coluna  $j$  no final da  $k$ -ésima etapa, bem como  $b_i^{(k)}$  será o  $i$ -ésimo elemento do vetor constante no final da etapa  $k$ .

Considerando que  $\det(A) \neq 0$ , é sempre possível reescrever o sistema linear de forma que o elemento da posição  $a_{11}$  seja diferente de zero, usando apenas a operação elementar (i):

$$\text{Seja } A^{(0)} | b^{(0)} = A | b = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & b_n^{(0)} \end{array} \right)$$

onde  $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ ,  $b_i^{(0)} = b_i$  e  $a_{11}^{(0)} \neq 0$ .

**Etapla 1:**

A eliminação da variável  $x_1$  das equações  $i = 2, \dots, n$  é feita da seguinte forma: da equação  $i$  subtraímos a 1ª equação multiplicada por  $m_{i1}$ . Observamos que para que esta eliminação seja efetuada, a única escolha possível é  $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ ,  $i = 2, \dots, n$ .

Os elementos  $m_{i1} = \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$ ,  $i = 2, \dots, n$  são os *multiplicadores* e o elemento  $a_{11}^{(0)}$  é denominado *pivô* da 1ª etapa.

Ao final desta etapa teremos a matriz:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array} \right)$$

onde

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

$$b_1^{(1)} = b_1^{(0)}$$

e

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - m_{i1} a_{1j}^{(0)} \quad i = 2, \dots, n \quad \text{e } j = 1, \dots, n$$

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - m_{i1} b_1^{(0)} \quad i = 2, \dots, n$$

**Etapla 2:**

Deve-se ter pelo menos um elemento  $a_{i2}^{(1)} \neq 0$ , para  $i = 2, \dots, n$ , caso contrário,  $\det(A^{(1)}) = 0$ , o que implica que  $\det(A) = 0$ ; mas  $\det(A) \neq 0$ , por hipótese.

Então, é sempre possível reescrever a matriz  $A^{(1)}$ , sem alterar a posição da linha 1, de forma que o pivô,  $a_{22}^{(1)}$ , seja não nulo.

Os multiplicadores desta etapa serão os elementos  $m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$  para  $i = 3, \dots, n$ .

A variável  $x_2$  é eliminada das equações  $i = 3, \dots, n$  da seguinte forma: da equação  $i$  subtraímos a segunda equação multiplicada por  $m_{i2}$ .

Ao final, teremos a matriz  $A^{(2)} \mid b^{(2)}$ :

$$A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{array} \right)$$

onde  $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$  para  $i = 1, 2$  e  $j = i, i+1, \dots, n$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} \text{ para } i = 1, 2$$

e

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i2} a_{2j}^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n \text{ e } j = 2, \dots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i2} b_2^{(1)} \text{ para } i = 3, \dots, n$$

Seguindo raciocínio análogo, procede-se até a etapa  $(n - 1)$  e a matriz, ao final desta etapa, será:

$$A^{(n-1)} \mid b^{(n-1)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \dots & a_{1n}^{(n-1)} & b_1^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \dots & a_{2n}^{(n-1)} & b_2^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \dots & a_{3n}^{(n-1)} & b_3^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n-1)} & b_n^{(n-1)} \end{array} \right)$$

e o sistema linear  $A^{(n-1)}x = b^{(n-1)}$  é triangular superior e equivalente ao sistema linear original.

## Exemplo 2

Seja o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

### Etapa 1:

Eliminar  $x_1$  das equações 2 e 3:

Para facilitar o entendimento do processo, de agora em diante usaremos a notação  $L_i$  para indicar o vetor linha formado pelos elementos da linha  $i$  da matriz  $A^{(k)} \mid b^{(k)}$ . Assim, nesta etapa,  $L_1 = (3 \ 2 \ 4 \ 1)$ .



$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & b_1^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} & b_2^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} & b_3^{(0)} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

Pivô:  $a_{11}^{(0)} = 3$

$$m_{21} = 1/3$$

$$m_{31} = 4/3$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - m_{21} L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{31} L_1$$

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 1/3 & -22/3 & 5/3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & b_3^{(1)} \end{array} \right)$$

## Etapa 2:

Eliminar  $x_2$  da equação 3:

Pivô:  $a_{22}^{(1)} = 1/3$

$$m_{32} = \frac{1/3}{1/3} = 1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - m_{32} L_2$$

$$\Rightarrow A^{(2)} \mid b^{(2)} = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$



Assim, resolver  $Ax = b$  é equivalente a resolver  $A^{(2)}x = b^{(2)}$ :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 1/3x_2 + 2/3x_3 = 5/3 \\ -8x_3 = 0 \end{cases}$$

A solução deste sistema é o vetor  $x^* = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

## ALGORITMO 2: Resolução de $Ax = b$ através da Eliminação de Gauss.

Seja o sistema linear  $Ax = b$ ,  $A: n \times n$ ,  $x: n \times 1$ ,  $b: n \times 1$ .

Supor que o elemento que está na posição  $a_{kk}$  é diferente de zero no início da etapa  $k$ .

$$\text{Eliminação} \left[ \begin{array}{l} \text{Para } k = 1, \dots, n-1 \\ \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Para } i = k+1, \dots, n \\ \quad m = \frac{a_{ik}}{a_{kk}} \\ \quad a_{ik} = 0 \\ \quad \text{Para } j = k+1, \dots, n \\ \quad \quad a_{ij} = a_{ij} - ma_{kj} \\ \quad \quad b_i = b_i - mb_k \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\text{Resolução do sistema:} \left[ \begin{array}{l} x_n = b_n / a_{nn} \\ \text{Para } k = (n-1), \dots, 2, 1 \\ \quad \left[ \begin{array}{l} s = 0 \\ \quad \text{Para } j = (k+1), \dots, n \\ \quad \quad s = s + a_{kj} x_j \\ \quad x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

O algoritmo acima efetua, na fase da eliminação,  $(4n^3 + 3n^2 - 7n)/6$  operações e, para resolver o sistema triangular superior, o número de operações efetuadas é  $n^2$ .

Assim, o total de operações para se resolver um sistema linear pelo método da Eliminação de Gauss é  $(4n^3 + 9n^2 - 7n)/6$ .

## ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO

Vimos que o algoritmo para o método da Eliminação de Gauss requer o cálculo dos multiplicadores:

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad i = k + 1, \dots, n$$

em cada etapa  $k$  do processo.

O que acontece se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero?

Estes dois casos merecem atenção especial pois é impossível trabalhar com um pivô nulo. E trabalhar com um pivô próximo de zero pode conduzir a resultados totalmente imprecisos. Isto porque em qualquer calculadora ou computador os cálculos são efetuados com aritmética de precisão finita, e pivôs próximos de zero dão origem a multiplicadores bem maiores que a unidade que, por sua vez, origina uma ampliação dos erros de arredondamento.

Para se contornar estes problemas deve-se adotar uma *estratégia de pivoteamento*, ou seja, adotar um processo de escolha da linha e/ou coluna pivotal.

## ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO PARCIAL

Esta estratégia consiste em:

- i) no início da etapa  $k$  da fase de eliminação, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes:  $a_{ik}^{(k-1)}$ ,  $i = k, k + 1, \dots, n$ ;
- ii) trocar as linhas  $k$  e  $i$  se for necessário.

**Exemplo 3** $n = 4$  e  $k = 2$ 

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array} \right)$$

Início da etapa 2:

i) escolher pivô

$$\max_{j=2,3,4} |a_{j2}^{(1)}| = |a_{32}^{(1)}| = 3 \Rightarrow \text{pivô} = -3$$

ii) trocar linhas 2 e 3.

Assim,

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 15 \end{array} \right)$$

e os multiplicadores desta etapa serão:

$$m_{32} = \frac{1}{-3} = -1/3$$

$$m_{42} = \frac{2}{-3} = -2/3$$

Observamos que a escolha do maior elemento em módulo entre os candidatos a pivô faz com que os multiplicadores, em módulo, estejam entre zero e um, o que evita a ampliação dos erros de arredondamento.

## ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO COMPLETO

Nesta estratégia, no início da etapa  $k$  é escolhido para pivô o elemento de maior módulo, entre todos os elementos que ainda atuam no processo de eliminação:

$$\max_{\forall i, j \geq k} |a_{ij}^{(k-1)}| = |a_{rs}^{(k-1)}| \Rightarrow \text{pivô} = a_{rs}^{(k-1)}$$

Observamos que, no Exemplo 3, se fosse adotada esta estratégia, o pivô da etapa 2 seria  $a_{34}^{(1)} = 7$ , o que acarretaria a troca das colunas 2 e 4 e, em seguida, das linhas 2 e 3, donde:

$$A^{(1)} | b^{(1)} = \left( \begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & -5 & -3 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 15 \end{array} \right)$$

Esta estratégia não é muito empregada, pois envolve uma comparação extensa entre os elementos  $a_{ij}^{(k-1)}$ ,  $i, j \geq k$  e troca de linhas e colunas, conforme vimos no exemplo anterior; é evidente que todo este processo acarreta um esforço computacional maior que a estratégia de pivoteamento parcial.

### Exemplo 4

Consideremos o sistema linear

$$\begin{cases} 0.0002x_1 + 2x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$$



Inicialmente vamos resolvê-lo sem a estratégia de pivoteamento parcial e vamos supor que temos de trabalhar com aritmética de três dígitos. Nosso sistema é:

$$\begin{cases} 0.2 \times 10^{-3}x_1 + 0.2 \times 10^1x_2 = 0.5 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^1x_1 + 0.2 \times 10^1x_2 = 0.6 \times 10^1 \end{cases}$$

Então,

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left( \begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \end{array} \right)$$

### **Etapas 1:**

Pivô:  $0.2 \times 10^{-3}$

$$m_{21} = (0.2 \times 10^1)/(0.2 \times 10^{-3}) = 1 \times 10^4 = 0.1 \times 10^5 \text{ e } a_{21}^{(1)} = 0$$

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)} &= a_{22}^{(0)} - a_{12}^{(0)} \times m_{21} = 0.2 \times 10^1 - (0.2 \times 10^1) \times (0.1 \times 10^5) = \\ &= 0.2 \times 10^1 - 0.2 \times 10^5 = -0.2 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2^{(1)} &= b_2^{(0)} - b_1^{(0)} \times m_{21} = 0.6 \times 10^1 - (0.5 \times 10^1) \times (0.1 \times 10^5) = \\ &= 0.6 \times 10^1 - 0.5 \times 10^5 = -0.5 \times 10^5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left( \begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \\ 0 & -0.2 \times 10^5 & -0.5 \times 10^5 \end{array} \right)$$

E a solução do sistema  $A^{(1)}x = b^{(1)}$  resultante é

$$-0.2 \times 10^5x_2 = -0.5 \times 10^5 \Rightarrow x_2 = (0.5) / (0.2) = 2.5 = 0.25 \times 10$$

$$\Rightarrow 0.2 \times 10^{-3}x_1 + 0.2 \times 10^1 \times 0.25 \times 10^1 = 0.5 \times 10^1$$

$$\Rightarrow 0.2 \times 10^{-3}x_1 = 0.5 \times 10^1 - 0.05 \times 10^2 = 0.5 \times 10^1 - 0.5 \times 10^1 = 0$$

e, portanto,  $\bar{x} = (0 \ 2.5)^T$ .

É fácil verificar que  $\bar{x}$  não satisfaz a segunda equação, pois

$$2 \times 0 + 2 \times 2.5 = 5 \neq 6.$$

Usando agora a estratégia de pivoteamento parcial (e ainda aritmética de três dígitos), temos

$$A^{(0)} \mid b^{(0)} = \left( \begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \\ 0.2 \times 10^{-3} & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \end{array} \right)$$

Assim o pivô é  $0.2 \times 10^1$  e  $m_{21} = (0.2 \times 10^{-3})/(0.2 \times 10^1) = 0.1 \times 10^{-3}$ . De forma análoga ao que fizemos acima, obtemos o novo sistema

$$A^{(1)} \mid b^{(1)} = \left( \begin{array}{cc|c} 0.2 \times 10^1 & 0.2 \times 10^1 & 0.6 \times 10^1 \\ 0 & 0.2 \times 10^1 & 0.5 \times 10^1 \end{array} \right)$$

cuja solução é  $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.25 \times 10^1 \end{pmatrix}$

E o vetor  $\bar{x}$  é realmente a solução do nosso sistema, pois

$$0.2 \times 10^{-3} \times 0.5 + 0.2 \times 10^1 \times 0.25 \times 10^1 = 0.1 \times 10^{-3} + 0.05 \times 10^2 = 0.5 \times 10^1 = 5$$

e

$$\begin{aligned} 0.2 \times 10^1 \times 0.5 + 0.2 \times 10^1 \times 0.25 \times 10^1 &= 0.1 \times 10^1 + 0.05 \times 10^2 = \\ &= 0.01 \times 10^2 + 0.05 \times 10^2 = 0.06 \times 10^2 = 0.6 \times 10^1 = 6. \end{aligned}$$

### 3.2.3 FATORAÇÃO LU

Seja o sistema linear  $Ax = b$ .

## 3.3 MÉTODOS ITERATIVOS

### 3.3.1 INTRODUÇÃO

A idéia central dos métodos iterativos é generalizar o método do ponto fixo utilizado na busca de raízes de uma equação que foi visto no Capítulo 2.

Seja o sistema linear  $Ax = b$ , onde:

$A$ : matriz dos coeficientes,  $n \times n$ ;

$x$ : vetor das variáveis,  $n \times 1$ ;

$b$ : vetor dos termos constantes,  $n \times 1$ .

Este sistema é convertido, de alguma forma, num sistema do tipo  $x = Cx + g$  onde  $C$  é matriz  $n \times n$  e  $g$  vetor  $n \times 1$ . Observamos que  $\varphi(x) = Cx + g$  é uma função de iteração dada na forma matricial.

É então proposto o esquema iterativo:

Partimos de  $x^{(0)}$  (vetor aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= Cx^{(0)} + g = \varphi(x^{(0)}), & (\text{primeira aproximação}), \\ x^{(2)} &= Cx^{(1)} + g = \varphi(x^{(1)}), & (\text{segunda aproximação}) \text{ etc.} \end{aligned}$$

De um modo geral, a aproximação  $x^{(k+1)}$  é calculada pela fórmula  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ , ou seja,  $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$ ,  $k = 0, 1, \dots$

É importante observar que se a seqüência de aproximações  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  é tal que,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = \alpha$ , então  $\alpha = C\alpha + g$ , ou seja,  $\alpha$  é solução do sistema linear  $Ax = b$ .

### 3.3.2 TESTES DE PARADA

O processo iterativo é repetido até que o vetor  $x^{(k)}$  esteja suficientemente próximo do vetor  $x^{(k-1)}$ .

Medimos a distância entre  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$  por  $d^{(k)} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$ .

Assim, dada uma precisão  $\varepsilon$ , o vetor  $x^{(k)}$  será escolhido como  $\bar{x}$ , solução aproximada da solução exata, se  $d^{(k)} < \varepsilon$ .

Da mesma maneira que no teste de parada dos métodos iterativos para zeros de funções, podemos efetuar aqui o teste do erro relativo:

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^{(k)}|}.$$

Computacionalmente usamos também como teste de parada um número máximo de iterações.

### 3.3.3 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI

A forma como o método de Gauss-Jacobi transforma o sistema linear  $Ax = b$  em  $x = Cx + g$  é a seguinte:

Tomamos o sistema original:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

e supondo  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , isolamos o vetor  $x$  mediante a separação pela diagonal, assim:



$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}). \end{cases}$$

Desta forma, temos  $x = Cx + g$ , onde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & -a_{13}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & -a_{23}/a_{22} & \dots & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & -a_{n3}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$g = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}.$$

O método de Gauss-Jacobi consiste em, dado  $x^{(0)}$ , aproximação inicial, obter  $x^{(1)}$  ...,  $x^{(k)}$  ... através da relação recursiva  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ :

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) \end{cases}$$

### Exemplo 10

Resolva o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

pelo método de Gauss-Jacobi com  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$  e  $\varepsilon = 0.05$ .

O processo iterativo é

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10} (7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = 0x_1^{(k)} - \frac{2}{10} x_2^{(k)} - \frac{1}{10} x_3^{(k)} + \frac{7}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5} (-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{1}{5} x_1^{(k)} + 0x_2^{(k)} - \frac{1}{5} x_3^{(k)} - \frac{8}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} (6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}) = -\frac{2}{10} x_1^{(k)} - \frac{3}{10} x_2^{(k)} + 0x_3^{(k)} + \frac{6}{10} \end{cases}$$

Na forma matricial  $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g}$  temos

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2/10 & -1/10 \\ -1/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 7/10 \\ -8/5 \\ 6/10 \end{pmatrix}.$$

Assim ( $k = 0$ ) temos

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -0.2x_2^{(0)} - 0.1x_3^{(0)} + 0.7 = -0.2(-1.6) - 0.1 \times 0.6 + 0.7 = 0.96 \\ x_2^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.2x_3^{(0)} - 1.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.2 \times 0.6 - 1.6 = -1.86 \\ x_3^{(1)} = -0.2x_1^{(0)} - 0.3x_2^{(0)} + 0.6 = -0.2 \times 0.7 - 0.3(-1.6) + 0.6 = 0.94 \end{cases}$$

ou

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{C}\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0.96 \\ -1.86 \\ 0.94 \end{pmatrix}.$$

Calculando  $d_r^{(1)}$ , temos:

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 0.26$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.26 \quad \Rightarrow \quad d_r^{(1)} = \frac{0.34}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = \frac{0.34}{1.86} = 0.1828 > \epsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.34$$

Prosseguindo as iterações, temos:

para  $k = 1$ :

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.978 \\ -1.98 \\ 0.966 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.12}{1.98} = 0.0606 > \varepsilon$$

e para  $k = 2$ :

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = \frac{0.0324}{1.9888} = 0.0163 < \varepsilon.$$

Então, a solução  $\bar{x}$  do sistema linear acima, com erro menor que 0.05, obtida pelo método de Gauss-Jacobi, é

$$\bar{x} = x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.9994 \\ -1.9888 \\ 0.9984 \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo tomamos  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ b_3/a_{33} \end{pmatrix}$ . No entanto, o valor de

$x^{(0)}$  é arbitrário, pois veremos mais adiante que a convergência ou não de um método iterativo para a solução de um sistema linear de equações é independente da aproximação inicial escolhida.

## UM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Daremos aqui um teorema que estabelece uma condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Jacobi.



**TEOREMA 4: (Critério das linhas)**

Seja o sistema linear  $Ax = b$  e seja  $\alpha_k = \left( \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$ . Se  $\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$ , então o

método de Gauss-Jacobi gera uma sequência  $\{x^{(k)}\}$  convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial,  $x^{(0)}$ .

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência [30], Capítulo 9.

**Exemplo 11**

Analisando a matriz  $A$  do sistema linear do Exemplo 10,

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \text{ temos}$$

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0.3 < 1; \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0.4 < 1; \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = 0.5 < 1 \text{ e}$$

então  $\max_{1 \leq k \leq 3} \alpha_k = 0.5 < 1$  donde, pelo critério das linhas, temos garantia de convergência

para o método de Gauss-Jacobi.

**Exemplo 12**

Para o sistema linear  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$  o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência

convergente para a solução exata  $x^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ . (Verifique!) No entanto, o critério das

linhas não é satisfeito, visto que  $\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$ . Isto mostra que a condição do Teorema 4 é apenas suficiente.

**Exemplo 13**

A matriz  $A$  do sistema linear  $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$  não satisfaz o critério das linhas

pois  $\alpha_1 = \frac{3+1}{1} = 4 > 1$ . Contudo, se permutarmos a primeira equação com a segunda,

temos o sistema linear  $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$  que é equivalente ao sistema original e a

matriz  $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$  deste novo sistema satisfaz o critério das linhas.

Assim, é conveniente aplicarmos o método de Gauss-Jacobi a esta nova disposição do sistema, pois desta forma a convergência está assegurada.

Concluindo, sempre que o critério das linhas não for satisfeito, devemos tentar uma permutação de linhas e/ou colunas de forma a obtermos uma disposição para a qual a matriz dos coeficientes satisfaça o critério das linhas. No entanto, nem sempre é possível obter tal disposição, como facilmente verificamos com o sistema linear do Exemplo 12.

**3.3.4 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL**

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear  $Ax = b$  é escrito na forma equivalente  $x = Cx + g$  por separação da diagonal.

O processo iterativo consiste em, sendo  $x^{(0)}$  uma aproximação inicial, calcular  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  por:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \dots - a_{3n}x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) \end{array} \right.$$

Portanto, no processo iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular  $x_j^{(k+1)}$  usamos todos os valores  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$  que já foram calculados e os valores  $x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$  restantes.

### Exemplo 14

Resolva o sistema linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \end{array} \right.$$

pelo método de Gauss-Seidel com  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\epsilon = 5 \times 10^{-2}$ .

O processo iterativo é:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = 1 - 0.2x_2^{(k)} - 0.2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1.5 - 0.75x_1^{(k+1)} - 0.25x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0 - 0.5x_1^{(k+1)} - 0.5x_2^{(k+1)}. \end{array} \right.$$

Como  $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

( $k = 0$ ):

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 1 - 0 - 0 = 1 \\ x_2^{(1)} = 1.5 - 0.75 \times 1 - 0 = 0.75 \\ x_3^{(1)} = -0.5 \times 1 - 0.5 \times 0.75 = -0.875 \end{cases} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.75 \\ -0.875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| = 1$$

$$|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| = 0.75 \quad \Rightarrow d_r^{(1)} = \frac{1}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(1)}|} = 1 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| = 0.875.$$

Assim, ( $k = 1$ ) e

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = 1 - 0.2 \times 0.75 + 0.2 \times 0.875 = 1.025 \\ x_2^{(2)} = 1.5 - 0.75 \times 1.025 - 0.25 \times (-0.875) = 0.95 \\ x_3^{(2)} = -0.5 \times 1.025 - 0.5 \times 0.95 = -0.9875 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.025 \\ 0.95 \\ -0.9875 \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$$|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.025$$

$$|x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.20 \quad \Rightarrow d_r^{(2)} = \frac{0.2}{\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^{(2)}|} = \frac{0.2}{1.025} = 0.1951 > \varepsilon$$

$$|x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.1125$$



Continuando as iterações obtemos:

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix} \Rightarrow d_r^{(3)} = 0.0409 < \epsilon.$$

Assim, a solução  $\bar{\mathbf{x}}$  do sistema linear dado com erro menor que  $\epsilon$ , pelo método de Gauss-Seidel, é

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1.0075 \\ 0.9912 \\ -0.9993 \end{pmatrix}.$$

O esquema iterativo do método de Gauss-Seidel pode ser escrito na forma matricial da seguinte maneira:

Inicialmente escrevemos a matriz  $A$ , dos coeficientes, como  $A = L + D + R$ , onde:

$L$  : matriz triangular inferior com diagonal nula;

$D$  : matriz diagonal com  $d_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;

$R$  : matriz triangular superior com diagonal nula.

O modo mais simples de se escrever  $A$  nesta forma é

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Portanto, } Ax = b \Leftrightarrow (L + D + R)x = b \Leftrightarrow Dx = b - Lx - Rx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = D^{-1}b - D^{-1}Lx - D^{-1}Rx.$$

No método de Gauss-Seidel o vetor  $x^{(k+1)}$  é calculado por:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}b - D^{-1}Lx^{(k+1)} - D^{-1}Rx^{(k)}.$$

Agora, podemos ainda escrever  $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$ , considerando que  $A = D(L_1 + I + R_1)$  onde:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{33}} & \frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

então  $Ax = b \Leftrightarrow$

$$D(L_1 + I + R_1) x = b \Leftrightarrow$$

$$(L_1 + I + R_1) x = D^{-1} b \Leftrightarrow$$

$x = -L_1 x - R_1 x + D^{-1} b$  e o método de Gauss-Seidel é

$$x^{(k+1)} = -L_1 x^{(k+1)} - R_1 x^{(k)} + D^{-1} b,$$

donde  $(I + L_1) x^{(k+1)} = -R_1 x^{(k)} + D^{-1} b$

$$\text{ou } x^{(k+1)} = \underbrace{-(I + L_1)^{-1} R_1}_{C} x^{(k)} + \underbrace{(I + L_1)^{-1} D^{-1} b}_{g} = Cx^{(k)} + g$$

## INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA NO CASO 2 x 2

Consideremos a aplicação geométrica dos métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel ao sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3. \end{cases}$$

Preparação:

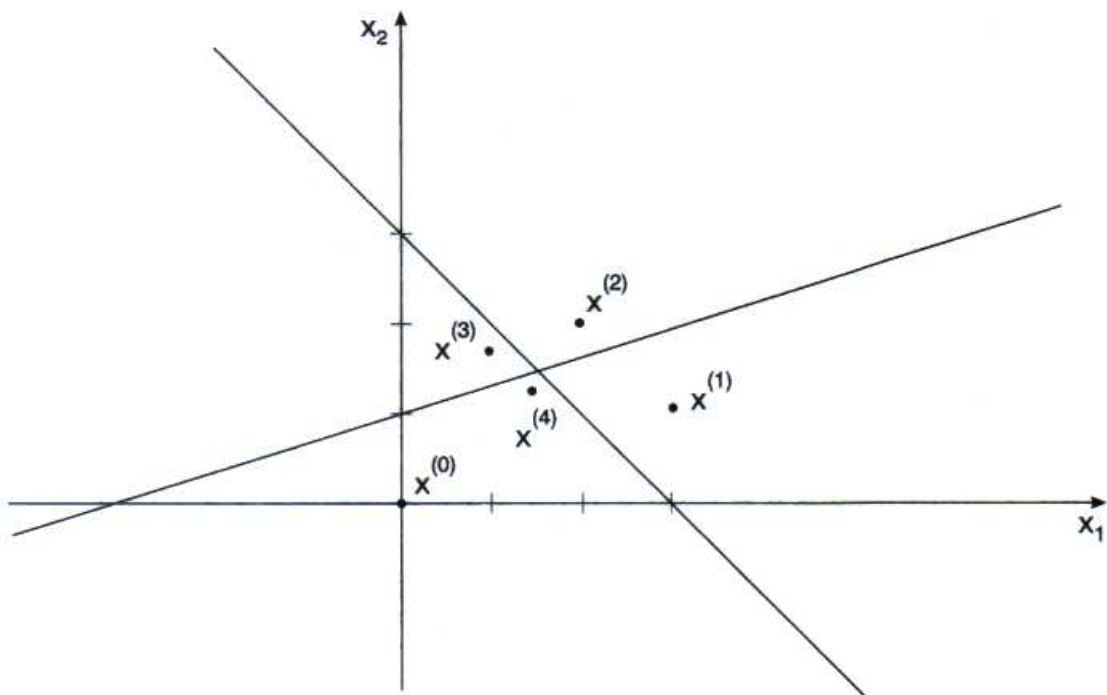
$$\begin{cases} x_1 = 3 - x_2 \\ x_2 = \frac{1}{3} (3 + x_1). \end{cases}$$

O esquema iterativo para Gauss-Jacobi é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3} (3 + x_1^{(k)}) \end{cases}$$

Teremos:

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5/3 \end{pmatrix}; \quad x^{(4)} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$



**Figura 3.10**

O esquema iterativo para Gauss-Seidel é:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 3 - x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3} (3 + x_1^{(k+1)}) \end{cases}$$



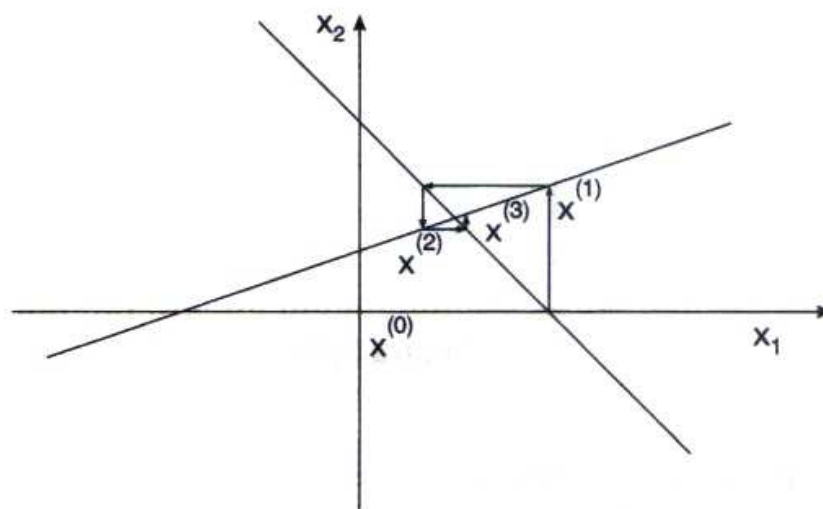
Para melhor visualização gráfica, marcaremos no gráfico os pontos  $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ ;  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$ ;  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ , ... para  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 14/9 \end{pmatrix}, \dots$$

Observamos que os pontos  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)})$  satisfazem a primeira equação e os pontos  $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$  satisfazem a segunda equação.



**Figura 3.11**

Embora a ordem das equações num sistema linear não mude a solução exata, as seqüências geradas pelos métodos de Gauss-Seidel e de Gauss-Jacobi dependem fundamentalmente da disposição das equações.

É fácil verificar que a seqüência  $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$  está convergindo para a solução exata do sistema linear que é  $x^* = (1.5, 1.5)$ , tanto no método de Gauss-Jacobi quanto no de Gauss-Seidel.

No entanto, o método de Gauss-Seidel gera uma seqüência divergente para este mesmo sistema escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

para a qual o esquema iterativo será:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -3 + 3x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 3 - x_1^{(k+1)} \end{cases}$$

Para  $x^{(0)} = (0, 0)^T$  teremos:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -12 \end{pmatrix}, \dots \end{aligned}$$