APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL EM MATRIZ COMPLEXA GERADA PELA ANÁLISE DE UM CIRCUITO ELÉTRICO

Eloane Junia Pereira [1]

Cintia Lemes [2]

Leandro Blass [3]

Resumo:

Neste estudo foi analisado um circuito de corrente alternada, no qual foi aplicada a Lei de Kirchhoff das Tensões e a Lei de Ohm, o que resultou em um sistema de duas equações lineares e duas variáveis. Para a resolução desses sistemas foram aplicados os conhecimentos de Cálculo e Métodos Numéricos, mais especificamente a Regra de Cramer e o método iterativo de Gauss-Seidel. Posteriormente, o resultado foi confrontado com os resultados produzidos pelo software VCN. O objetivo do problema proposto era inferir o valor da corrente I0 através de análise de malhas. O valor encontrado por ambos os métodos, e também no VCN, foi de I0 = 6,12 ? 144,78º. Este resultado mostra que, para essa situação particular, o método de Gauss-Seidel pode ser aplicado mesmo sendo a matriz linear das correntes do sistema uma matriz complexa. Tal uso traz uma boa perspectiva de estudos para a resolução de circuitos CA, uma vez que os métodos diretos possuem limitações que os métodos iterativos superam, pois a Regra de Cramer, a Eliminação Gaussiana e retrosubstituição só podem ser utilizados para sistemas lineares quadrados e este procedimento para matrizes maiores se torna extremamente trabalhoso. Assim, o estudo aprofundado de Cálculo Numérico para a engenharia possui um grande valor educacional e é uma ferramenta valiosa para a resolução de problemas de circuitos elétricos que podem surgir no cotidiano do profissional de engenharia.

Palavras-chave: Cálculo Numérico, Circuitos Elétricos, Matriz Complexa

Modalidade de Participação: Iniciação Científica

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL EM MATRIZ COMPLEXA GERADA PELA ANÁLISE DE UM CIRCUITO ELÉTRICO

[1] Aluno de graduação. eloanejnia.pereira@gmail.com. Autor principal

[2] Aluno de Graduação. cintialemes95@gmail.com. Co-autor

[3] Docente. leandroblass@unipampa.edu.br. Orientador

APLICAÇÃO DO MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL EM MATRIZ COMPLEXA GERADA PELA ANÁLISE DE UM CIRCUITO ELÉTRICO

1 INTRODUÇÃO

A utilização do Cálculo Numérico em ciências exatas e engenharias é um instrumento importante na resolução de problemas de alta complexidade. Através dele é possível chegar a resultados que métodos analíticos somente não são capazes de encontrar. Paralelamente, a atual oferta de computadores, com capacidade de processar uma grande quantidade de informações e a realizar de cálculos complexos em frações de segundo, auxilia no ensino de através de *softwares* que facilitam a visualização dos métodos numéricos (MOTA, 2011).

Esse aprendizado é importante na área de engenharia, por exemplo, quando é necessária a manutenção em um determinado ponto de um circuito e, para tanto, faz-se mister a quantificação do valor da corrente ou tensão nesse ponto. Quando este valor não é conhecido, utiliza-se a análise de correntes ou tensões para sua determinação (SADIKU, 2013).

A análise matemática de um circuito CA seria um tanto impraticável no domínio do tempo, envolvendo cálculos trabalhosos. Para fins de simplificação, utiliza-se o *fasor* que "é um número complexo que contém informações da amplitude e do ângulo de fase de de uma função senoidal" (NILSSON, 2009, p. 234). Os fasores são baseados na identidade de Euler:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\,sen\,\phi \qquad (1)$$

O cos ϕ representa a parte real de um número complexo, enquanto seno ϕ representa a parte imaginária. Assim, pode-se representar a função da tensão através de fasores, da seguinte forma (NILSSON, 2009).

$$V = Vm.\cos(\omega t + \phi) = Vm \angle\phi \qquad (2)$$

Por outro lado, um circuito também possui, além da fonte de tensão, os chamados elementos passivos que são definidos como os resistores (R), capacitores (C) e indutores (L). Estes elementos têm seu comportamento modelado pela lei de Ohm:

$$V = Z.I \qquad (3)$$

onde, V = tensão, Z = impedância do circuito e I = Corrente circulante no circuito.

Figura 1. Relação V-I dos elementos passivos de um circuito CA.

Elemento	Domínio do tempo	Domínio da frequência
R	$v = Ri$	$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$
L	$v = L\frac{di}{dt}$	$\mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I}$
C	$i = C\frac{dv}{dt}$	$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$

Fonte: Nilsson, 2009.

É importante lembrar que a impedância Z de um circuito é um número complexo no domínio da frequência, sendo representado nas formas retangular e polar, respectivamente:

$$Z = R + jX = |Z|\angle\phi \qquad (4)$$

O problema a ser resolvido neste estudo envolve, inicialmente, a aplicação da Lei de Ohm e da Lei de Kirchhoff para tensão na estruturação das equações de corrente do circuito. Posteriormente, para fins de comparação, utilizar-se-á dois métodos para a resolução das equações, o método direto de Cramer e o iterativo de Gauss-Seidel.

2 PROBLEMA E METODOLOGIA

Para a resolução de circuitos em forma de malhas, aplica-se a LKT, também conhecida como lei das malhas, que afirma que as tensões ao longo de um caminho fechado têm soma algébrica igual a zero. Em outras palavras, a soma das elevações de tensão é igual à soma das quedas de tensão (SADIKU, 2013). Expressa matematicamente, essa lei diz que:

$$\sum_{m=1}^{M} Vm = 0 \tag{5}$$

onde, M o número de tensões na malha e *Vm* é a m-ésima tensão.

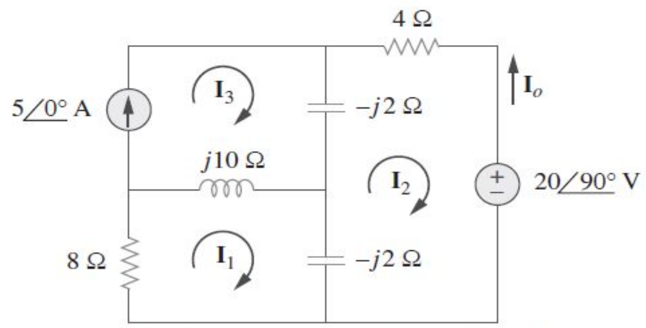
Após a determinação do sistema de equações característico do circuito, deve-se aplicar métodos diretos ou iterativos para sua resolução, explicitando-se os valores das variáveis analisadas. O primeiro método a ser aplicado é a Regra de Cramer: um método direto que fornece a solução exata de um sistema linear complexo.

O método iterativo utilizado foi o de Gauss-Seidel, utiliza-se do pressuposto de que conhecendo a estimativa inicial $x^{(0)}$ é possível obter os valores de $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ $\ldots X^{(n)}$. Contudo, após o cálculo de $X_j^{(k+1)}$, usa-se os valores $x_1^{(K+1)},\ldots,x_{j-1}^{(K+1)}$ obtidos para a próxima equação, e assim nas posteriores (RUGGIERO, 1988).

3 RESULTADOS e DISCUSSÃO

O circuito utilizado para exemplificação do uso dos métodos de Cramer e de Gauss-Seidel está representado abaixo. Neste, o objetivo é determinar a corrente $\mathbf{I}_0$ utilizando a análise de malhas.

Figura 2. Circuito elétrico problema.



Fonte: Sadiku, 2013.

Ao aplicar-se a LKT na resolução deste circuito, na malha 1, tem-se:

$$(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 - j10\,\mathbf{I}_3 = 0$$

Para a malha 2,

$$(4 - j2 - j2)\mathbf{I}_2 - (-j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_3 + 20\angle 90º = 0$$

Na malha 3, a corrente $\mathbf{I}_3$ já é conhecida, pois possui uma fonte de corrente. Então $\mathbf{I}_3$= 5 ∠ 0º A. Portanto, ao substituir este valor nas equações acima e reorganizando o sistema, chega-se à composição de um sistema linear complexo:

$$\begin{gathered}(8 + j10 - j2)\mathbf{I}_1 - (-j2)\mathbf{I}_2 = j50 \\ j2\mathbf{I}_1 + (4 - j4)\mathbf{I}_2 = -j20 - j10\end{gathered} \tag{6}$$

3.1 Regra de Cramer

Prosseguindo com o cálculo do sistema complexo, pode-se convertê-lo em uma matriz complexa:

$$\begin{bmatrix} 8+j8 & j2 \\ j2 & 4-j4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j50 \\ -j30 \end{bmatrix}$$

Utilizando a Regra de Cramer, tem-se os determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8+j8 & j2 \\ j2 & 4-j4 \end{vmatrix} = 32(1+j)(1-j)+4 = 68$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8+j8 & j50 \\ j2 & -j30 \end{vmatrix} = 340 - j240 = 416{,}17\underline{/-35{,}22^\circ}$$

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{416{,}17\underline{/-35{,}22^\circ}}{68} = 6{,}12\underline{/-35{,}22^\circ}\text{ A}$$

Não é necessário o cálculo da corrente $\mathbf{I}_1$ pois o objetivo é encontrar a corrente $\mathbf{I}_0$.

$$\boldsymbol{I}_0 = -\boldsymbol{I}_2 = 6{,}12 \angle 144{,}78^\text{o}$$

3.2 Método de Gauss-Seidel

Primeiramente, tendo em vista tratar-se de um sistema complexo, não é possível aplicar diretamente o referido método. Dessa forma, pode-se fazer uso de um artifício matemático de decomposição da matriz complexa A.X = B em outras matrizes reais contendo a informação imaginária implicitamente (BERGAMASCHI, 2018).

$$A = M + Nj$$
$$X = s + tj$$
$$B = c + dj$$

Onde as matrizes M, N, s, t, c, d são reais. Substituindo-as na equação A.X=B, resulta em:

$$(M + Nj)(s + tj) = c + dj \Rightarrow Ms - Nt + (Ns + Mt)j = c + dj \qquad (7)$$

Rearranjando este sistema tem-se,

$$A.X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 8 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Entretanto, ainda não se pode aplicar o método de Gauss-Seidel pois esta matriz não converge. Para corrigir esse problema, utilizamos a eliminação Gaussiana para transformá-la em matriz triangular superior. As transformações elementares a serem feitas nessa matriz são:

$$\begin{aligned} &1)\, L3 = L1 * (-1) * (8/8) + L3 \\ &2)\, L4 = L1 * (-1) * (2/8) + L4 \\ &3)\, L3 = L2 * (-1) * (2/4) + L3 \\ &4)\, L4 = L2 * (-1) * (-4/4) + L4 \end{aligned} \qquad (8)$$

E estas transformações geram a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \\ -30 \end{bmatrix}$$

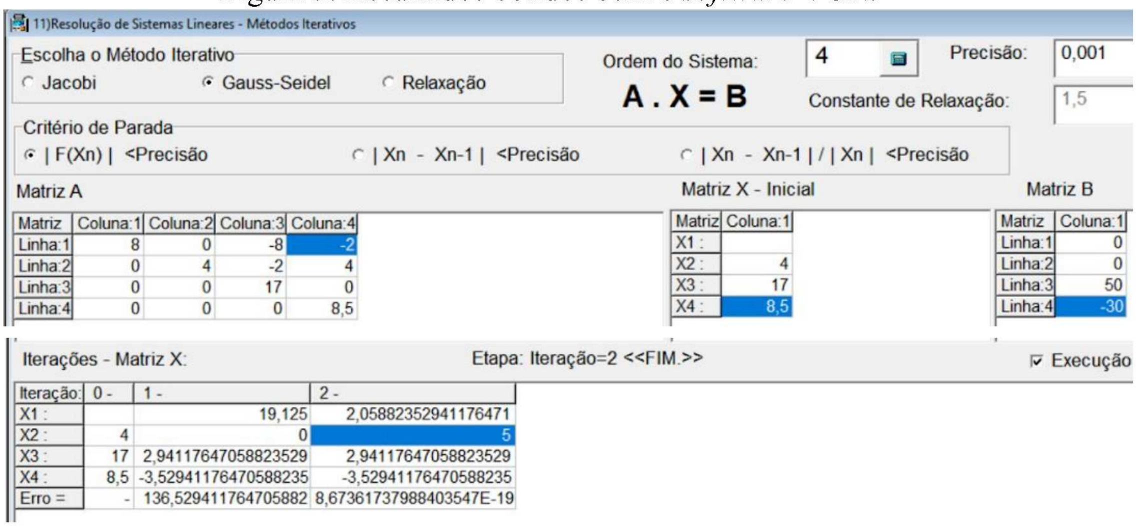
Por fim, ao iniciar o processo iterativo, necessita-se de um valor inicial e um critério de parada. O critério de parada foi definido como $F(x_n)$ < precisão de 10^{-3} pelos autores. Como o valor inicial é desconhecido, inseriu-se a matriz no *software* Visual Cálculo Numérico (VCN), no qual foi testado o processo iterativo com diferentes valores iniciais arbitrários e todos convergiram para o mesmo resultado. Para efeitos de demonstração, definir-se-á o vetor valor inicial como $\boldsymbol{x}^k = [8 ; 4; 17; 8{,}5]$.

Depois de satisfazer o critério de parada, temos os resultados para a matriz complexa X: s_1=2,0588; s_2=5; t_1=2,94117 e t_2=-3,529. Lembrando que, na verdade, essa matriz foi decomposta em duas partes, a real e a imaginária, o valor complexo para as correntes do circuitos será composto de $\boldsymbol{I}_1 = s_1+jt_1$ e $\boldsymbol{I}_2 = s_2+jt_2$. Portanto, o valor que procuramos é:

$$\boldsymbol{I}_0 = -\boldsymbol{I}_2 = -(s_2+jt_2) = -5 + j3{,}529 = \mathbf{6{,}12 \angle 144{,}78^o}$$

Este valor foi o mesmo encontrado na seção 3.1, e isto implica que, para o problema proposto, o método de Gauss-Seidel pode ser utilizado para resolver matrizes complexas resultantes da análise de circuitos CA. Os resultados foram verificados no VCN:

Figura 3: Resultados obtidos com o *software* VCN.



Matriz	Coluna:1	Coluna:2	Coluna:3	Coluna:4
Linha:1	8	0	-8	-2
Linha:2	0	4	-2	4
Linha:3	0	0	17	0
Linha:4	0	0	0	8,5

Matriz	Coluna:1
X1 :	
X2 :	4
X3 :	17
X4 :	8,5

Matriz	Coluna:1
Linha:1	0
Linha:2	0
Linha:3	50
Linha:4	-30

Iteração:	0 -	1 -	2 -
X1 :		19,125	2,05882352941176471
X2 :	4	0	5
X3 :	17	2,94117647058823529	2,94117647058823529
X4 :	8,5	-3,52941176470588235	-3,52941176470588235
Erro =	-	136,529411764705882	8,67361737988403547E-19

Fonte: do autor, 2018.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo foi analisado um circuito de corrente alternada, no qual foi aplicada a Lei de Kirchhoff das Tensões e a Lei de Ohm, o que resultou em um sistema de duas equações lineares e duas variáveis. Para a resolução desses sistemas foram aplicados os conhecimentos de Cálculo e Métodos Numéricos, mais especificamente a Regra de Cramer e o método iterativo de Gauss-Seidel. Posteriormente, o resultado foi confrontado com os resultados produzidos pelo *software* VCN.

O objetivo do problema proposto era inferir o valor da corrente I_0 através de análise de malhas. O valor encontrado por ambos os métodos, e também no VCN, foi de $I_0 = 6{,}12 \angle 144{,}78°$. Este resultado mostra que, para essa situação particular, o método de Gauss-Seidel pode ser aplicado mesmo sendo a matriz linear das correntes do sistema uma matriz complexa.

Tal uso traz uma boa perspectiva de estudos para a resolução de circuitos CA, uma vez que os métodos diretos possuem limitações que os métodos iterativos superam, pois a Regra de Cramer, a Eliminação Gaussiana e retrosubstituição só podem ser utilizados para sistemas lineares quadrados (2x2, 3x3, 4x4,...,NxN) e este procedimento para matrizes maiores se torna extremamente trabalhoso. Assim, o estudo aprofundado de Cálculo Numérico para a engenharia possui um grande valor educacional e é uma ferramenta valiosa para a resolução de problemas de circuitos elétricos que podem surgir no cotidiano do profissional de engenharia.

5 REFERÊNCIAS

BERGAMASCHI, Flaulles B. **Cálculo numérico com MATLAB**. Notas de Aula. Disponível em: <http://www.uesb.br/professor/flaulles/download/cursos/APCN.pdf> Acesso em 28 mai. 2018.

MOTA, Rafael Perazzo Barbosa. **Código livre Scilab para o ensino de Cálculo Numérico**. in: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 22., 2011. Aracaju. Anais do XXII SBIE - XVII WIE Aracaju: 2011. p. 1.

NILSSON, James W; RIEDEL, Susan A. **Circuitos elétricos**. Revisão técnica: Antônio Emílio Angueth de Araújo, Ivan José da Silva Lopes; tradução: Arlete Simile Marques. 8 ed. SÃO PAULO: Prentice Hall, 2009.

RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. **Cálculo numérico aspectos teóricos e computacionais**. 2 ed. SÃO PAULO: Pearson, 1988.

SADIKU, Matthew N. O; ALEXANDER, Charles K.. **Fundamentos de circuitos elétricos.**Tradução: José Lucimar do Nascimento; revisão técnica: Antônio Pertence Júnior. 5 ed. 867 p. PORTO ALEGRE: AMGH, 2013.