Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Computação
2020 S1 CO – Projeto e Análise de Algoritmos
Prof. Nielsen Simões paa@ic.ufmt.br

Revisão Matemática

Funções Monotônicas

Considere $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- **Monotonicamente Crescente (ou Crescente)**
  Uma função $f(x)$ é *monotonicamente crescente* se e somente se $f(m) \leq f(n)\ \forall_{m \leq n}$.
- **Monotonicamente Decrescente (ou Decrescente)**
  Uma função $f(x)$ é *monotonicamente decrescente* se e somente se $f(m) \geq f(n)\ \forall_{m \leq n}$.
- **Estritamente Crescente**
  Uma função $f(x)$ é *estritamente crescente* se e somente se $f(m) < f(n)\ \forall_{m < n}$.
- **Estritamente Decrescente**
  Uma função $f(x)$ é *estritamente decrescente* se e somente se $f(m) > f(n)\ \forall_{m < n}$.

Piso, Teto e Arimética Modular

Considere $x \in \mathbb{R}_+$ e $a, b, r, n \in \mathbb{Z}_+$, em que $n \neq 0$.

- **Piso (floor)**
  Para $b \neq 0$, o **piso** de $\frac{a}{b} \Rightarrow \lfloor \frac{a}{b} \rfloor = max\{n \mid n \leq \frac{a}{b}\}$.
  $\lfloor x \rfloor = max\{n \mid n \leq x\}$.
  Logo, o **piso** de x é o maior inteiro menor ou igual a x.

  $\lfloor \frac{15}{4} \rfloor = 3 \qquad \lfloor \frac{50}{12} \rfloor = 4 \qquad \lfloor \frac{10}{7} \rfloor = 1 \qquad \lfloor 3,3333\ldots \rfloor = 3 \qquad \lfloor x + c \rfloor = \lfloor x \rfloor + c,\ \forall c \in \mathbb{Z}$

- **Teto (ceil)**
  Para $b \neq 0$, o **teto** de $\frac{a}{b} \Rightarrow \lceil \frac{a}{b} \rceil = min\{n \mid n \geq \frac{a}{b}\}$.
  $\lceil x \rceil = min\{n \mid n \geq x\}$.
  Logo, o **teto** de x é o menor inteiro maior ou igual a x.

  $\lceil \frac{15}{4} \rceil = 4 \qquad \lceil \frac{50}{12} \rceil = 5 \qquad \lceil \frac{10}{7} \rceil = 2 \qquad \lceil 3,3333\ldots \rceil = 4 \qquad \lceil x + c \rceil = \lceil x \rceil + c,\ \forall c \in \mathbb{Z}$

- **Aritmética Modular**
  Se r é o inteiro que respresenta o resto da divisão inteira de a por n, denotado por $r = a \bmod n$ (a **módulo** n), então $0 \leq r \leq n$, e $r \times n \leq a$. Dessa forma, podemos espressar $a \bmod n = a - \lfloor \frac{a}{n} \rfloor \times n$.
  Se $a \bmod n = b \bmod n$, então $a \equiv b \pmod n$ (congruência). Dessa forma,
  $(a + c) \bmod n = (b + c) \bmod n$ e $(a \times c) \bmod n = (b \times c) \bmod n$.
- **Relações importantes**
  Para $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.
  $(a \times b) \bmod n = ((a \bmod n) \times b) \bmod n$.
  Se $a \equiv b \pmod n$, então $(a - b) \bmod n = 0$.
- **Progressão Aritmética**
  Considere uma sequência numérica da forma $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \ldots)$. Esta sequência é denominada **Progressão Aritmética** (**PA**) se e somente se um termo qualquer a_n, a partir do segundo, puder ser obtido pela soma de seu predecessor a uma constante r (**razão da PA**), i.e.,

  $$a_n = a_{n-1} + r, \qquad \forall_n \in \mathbb{N} | n \geq 2$$

Como a razão da PA é constante, um termo qualquer também pode ser expresso em função de outros termos como se segue:

$$a_n = a_1 + (n-1) * r), \qquad \forall_n \in \mathbb{N} | n \geq 2$$

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}, \qquad \forall_p \in \mathbb{N} | p < n$$

$$a_n = a_p + (n-p+1) * r, \qquad \forall_p \in \mathbb{N} | p < n$$

A Soma dos termos de uma PA é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) * n}{2}$$

- **Progressão Geométrica**
  Considere uma sequência numérica da forma $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$. Esta sequência é denominada **Progressão Geomética** (**PG**) se e somente se um termo qualquer a_n, a partir do segundo, puder ser obtido pelo produto de seu predecessor a uma constante q (**razão da PG**), em que $q \neq 0$, i.e.,

  $$a_n = a_{n-1} \times q, \qquad \forall_n \in \mathbb{N} | n \geq 2$$

  Como a razão da PG é constante, um termo qualquer também pode ser expresso em função de outros termos como se segue:

  $$a_n = a_1 \times q^{n-1}, \qquad \forall_n \in \mathbb{N} | n \geq 2$$

  $$a_n = a_p \times q^{n-p}, \qquad \forall_p \in \mathbb{N} | p < n$$

  $$(a_n)^2 = a_{n-p} \times a_{n+p}, \qquad \forall_p \in \mathbb{N} | p < n$$

  $$\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

  A Soma Finita dos termos de uma PG é dada por:

  $$S = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

  E a Soma Infinita dos termos de uma PG, quando $|q| < 1$, é dada por:

  $$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

  O Produto dos termos de uma PG é dado por:

  $$P = (a_1)^n \times q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

  ou por

  $$P = (a_1 \times a_n)^{\frac{n}{2}}$$

Somatórios e Produtórios

- **Somatórios**
  Considere $k, n\mathbb{Z}_+$, e $c, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

  $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
  $\sum_{k=1}^{n} (c \cdot a_k + b_k) = c \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$
  $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$
  $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$
  $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
  $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

- **Produtórios**
  Considere $k, n\mathbb{Z}_+$, e $c, a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_k$

$\lg \prod_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \lg a_k$

$\prod_{k=1}^{n} c^k = c^{\sum_{k=1}^{n} k}$

- **Potência e Exponenciação**
  Considere $a, m, n \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

  $a^0 = 1$
  $1^m = 1$
  $a^1 = a$

  $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
  $(a^m)^n = a^{mn}$

  $a^m a^n = a^{m+n}$
  $a^m = a \cdot a^{m-1}$

- **Logaritmos**
  Considere $a, b, c, n, x \in \mathbb{R}$, sendo $a, b, c > 0$.

  $\log_b a = x \Longleftrightarrow b^x = a$

  Principais propriedades
  $\log_b 1 = 0$
  $b^{\log_b a} = a$
  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$
  $\log_b a^n = n \log_b a$
  $\log_b (a \cdot c) = \log_b a + \log_b c$
  $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$
  $\log_b \frac{1}{a} = \log_{\frac{1}{b}} a = -\log_b a$
  $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$
  $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

  Padronização da base b
  $\lg a = \log_2 a$
  $\ln a = \log_e a$
  $\log a = \log_{10} a$
  $\log_b^x a = (\log_b a)^x$

  Logaritmo repetido
  $\lg^{(2)} n = \lg(\lg n)$
  $\lg^{(i)} n = \underbrace{\lg(\lg(\cdots(\lg n)\cdots)}_{ivezes}$
  $\lg^* n = \min\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\}$

- **Polinômios**
  Polinômio **n** de grau **d** é definido da forma:
  $p_d(n) = \sum_{i=0}^{d} (a_i \cdot n^i)$
  em que $a_i \in \mathbb{R}$ representam os coeficientes do polinômio, e $a_d \neq 0$.

Limites e Integrais

Recomenda-se uma revisão de **limites** e **integrais** que serão necessários para a parte inicial desta disciplina.

Bibliografia

T.H. Cormen; C.E. Leiserson; R.L. Rivest, C. Stein. *Introduction to Algorithms*, 2nd. edition, MIT Press, 2001. (português):