Pré-Cálculo

Humberto José Bortolossi

Departamento de Matemática Aplicada

Universidade Federal Fluminense

Parte 3

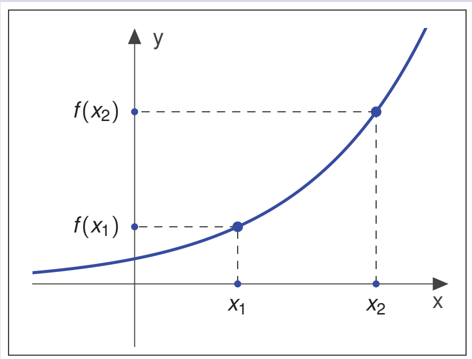
Funções monótonas

Funções crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

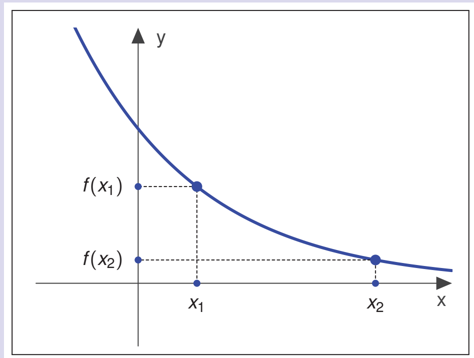


Funções decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

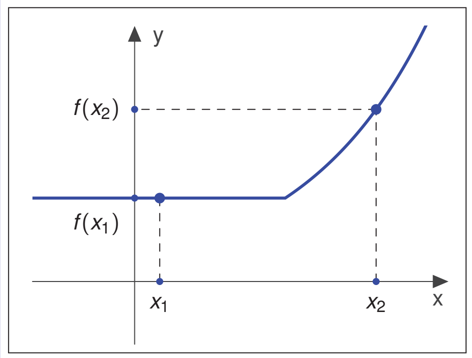


Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

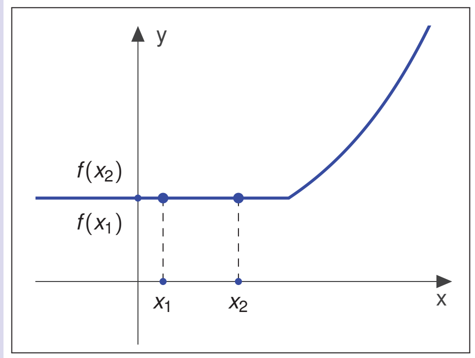


Funções monótonas não-decrescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-decrescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

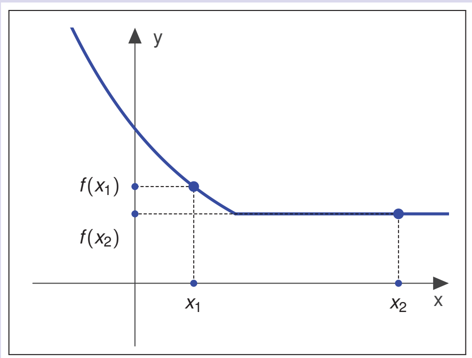


Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

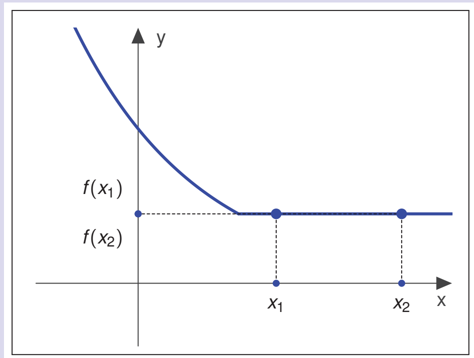


Funções monótonas não-crescentes

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é monótona não-crescente em um subconjunto S de D se

$$\forall x_1, x_2 \in S, \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$



Observações

- Uma função monótona em um conjunto S é uma função que é crescente, decrescente, monótona não-decrescente ou monótona não-crescente neste conjunto.

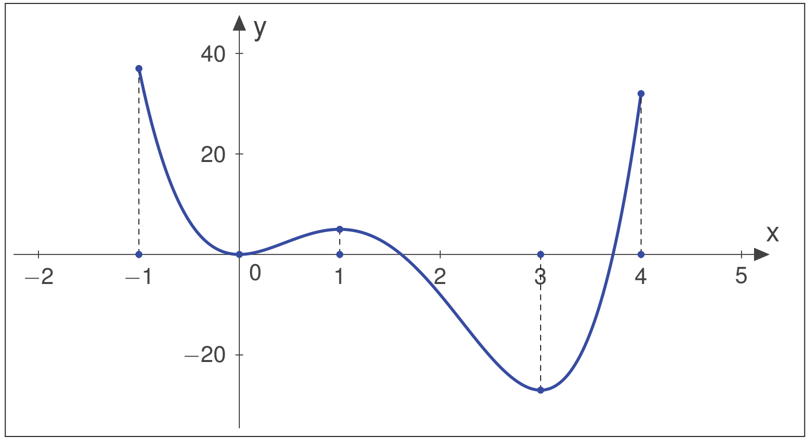
- Note que toda função crescente em um conjunto S também é monótona não-decrescente neste conjunto e que toda função decrescente em um conjunto S também é monótona não-crescente neste conjunto.

- Alguns autores chamam funções monótonas não-decrescentes simplesmente de funções não-decrescentes e funções monótonas não-crescentes simplesmente de funções não-crescentes. Note, contudo, que negar (por exemplo) que uma função seja decrescente em um conjunto S não implica necessariamente que ela seja monótona não-decrescente neste conjunto.

- Uma função é estritamente monótona em um conjunto S se ou ela é crescente ou ela é decrescente neste conjunto.

Observações

- Existem funções que não são monótonas. Por exemplo, a função descrita na figura abaixo não é monótona no conjunto $S = [-1, 4]$. Contudo, ela é monótona em $[-1, 0]$, em $[0, 1]$, em $[1, 3]$ e em $[3, 4]$.



Exemplo

Mostre que a função $y = f(x) = x^2$ é crescente no intervalo $S = [0, +\infty)$.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in S = [0, +\infty)$, com $x_1 < x_2$. Com estas condições, vale que $x_2 > 0$ e

$$x_2 - x_1 > 0.$$

Como $x_1 \geq 0$ e $x_2 > 0$, segue-se que

$$x_2 + x_1 > 0.$$

Como o produto de dois números reais positivos é ainda um número real positivo, temos que

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0.$$

Sendo assim,

$$x_2^2 - x_1^2 > 0$$

e, consequentemente,

$$x_2^2 > x_1^2,$$

isto é, $f(x_2) > f(x_1)$. Mostramos então que $\forall x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Logo, f é uma função crescente em S. ■

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

Em quais intervalos a função f abaixo é crescente?

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$

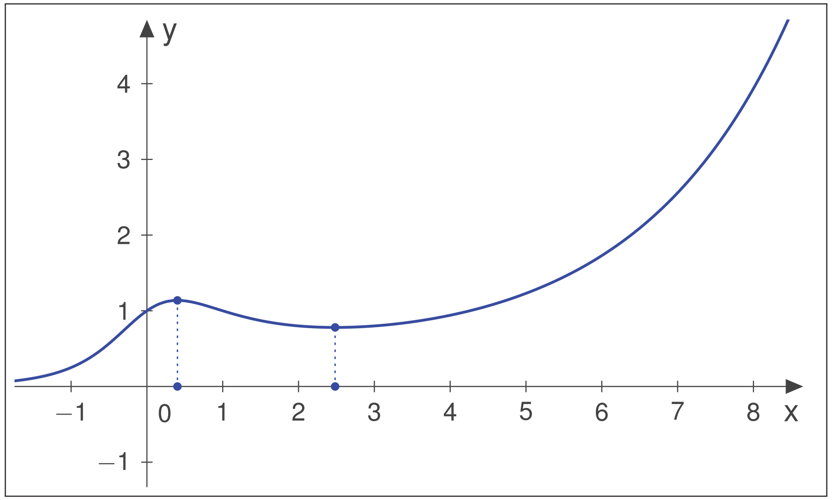
f é crescente nos intervalos

$$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}\right] = (-\infty, 0.402806113\ldots] \text{ e } \left[\frac{1+\sqrt{1-(\ln(2))^2}}{\ln(2)}, +\infty\right) = [2.482583968\ldots, +\infty).$$

A disciplina de Cálculo ensinará novas ferramentas para se resolver questões deste tipo!

Estudar o crescimento de funções pode ser difícil!

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = \dfrac{2^x}{x^2+1} \end{array}$$



Funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas

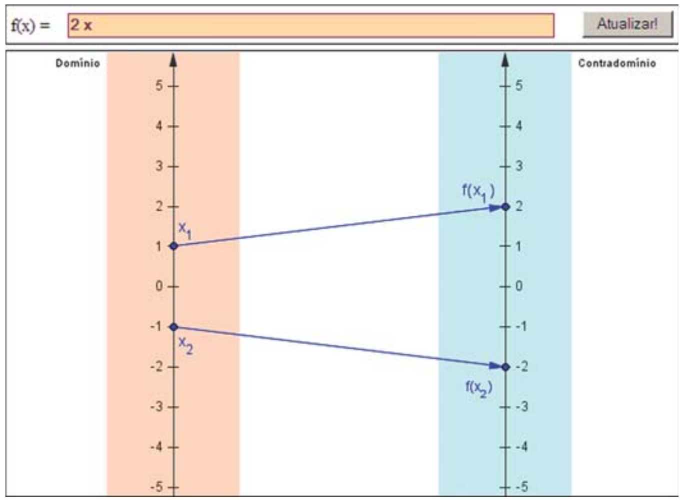
Funções injetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é injetiva se elementos diferentes de D são transformados por f em elementos diferentes em C, isto é, se f satisfaz a seguinte condição: $\forall x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

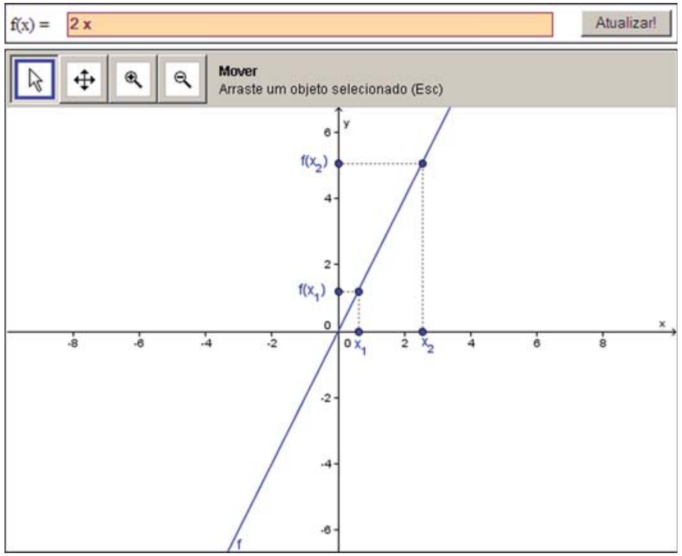
Forma equivalente (usando a contrapositiva): $f\colon D \to C$ é injetiva se ela satisfaz a seguinte condição: $\forall x_1, x_2 \in D$, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Funções injetivas



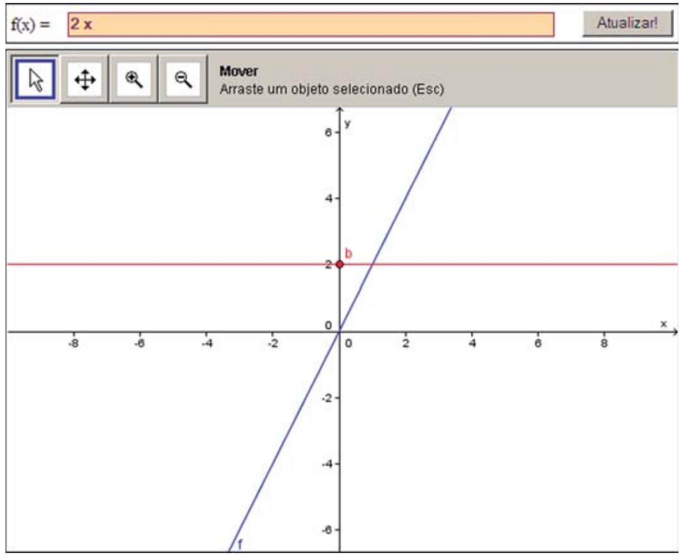
(Ir para o GeoGebra)

Funções injetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções injetivas



(Ir para o GeoGebra)

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2\,x + 1$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad 2\,x_1 + 1 = 2\,x_2 + 1 \quad \Rightarrow \quad 2\,x_1 = 2\,x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

■

Exercício

Mostre que a função $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = x^2$ é injetiva.

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Temos que

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_1^2 - x_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0.$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ ou $x_1 + x_2 = 0$, isto é, $x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$. No caso em que $x_1 = -x_2$, como $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, concluímos que obrigatoriamente $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Em particular, $x_1 = x_2$. ■

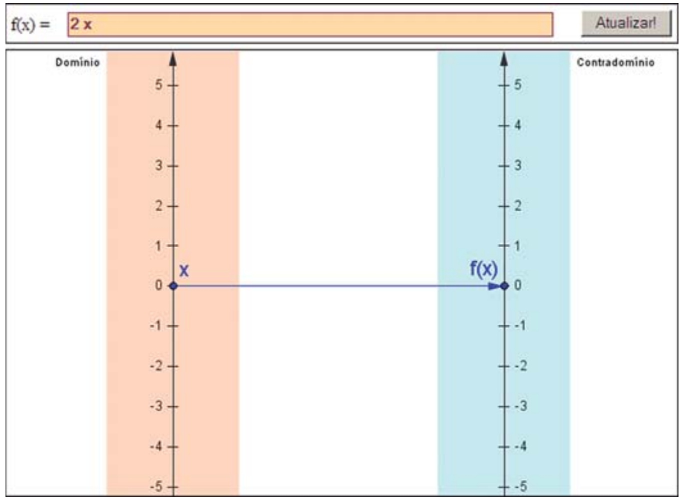
Outra demonstração. sejam $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, com $x_1 \neq x_2$. Então $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$. Como f é crescente em $[0, +\infty)$, segue-se que $f(x_1) < f(x_2)$ ou $f(x_2) < f(x_1)$. Nos dois casos, $f(x_1) \neq f(x_2)$. ■

Funções sobrejetivas

Definição

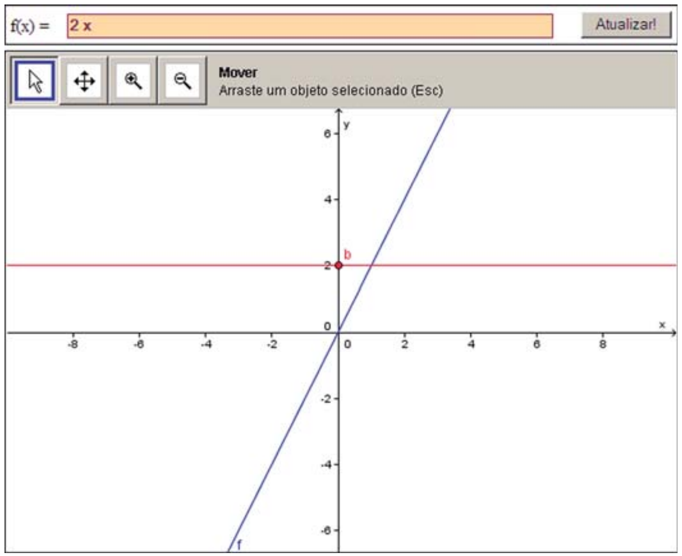
Dizemos que $f\colon D \to C$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contradomínio, isto é, se para todo $y \in C$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Funções sobrejetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções sobrejetivas



(Ir para o GeoGebra)

Funções sobrejetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 1 \end{array}$$

não é injetiva!

Mas

$$\begin{array}{rccl} g\colon & \mathbb{R} & \to & \{1\} \\ & x & \mapsto & g(x) = 1 \end{array}$$

é injetiva!

Exemplo

Mostre que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = f(x) = 2x + 1$ é sobrejetiva.

Demonstração. Seja $y \in \mathbb{R}$. Observe que

$$f(x) = y \;\Leftrightarrow\; 2x + 1 = y \;\Leftrightarrow\; 2x = y - 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{y-1}{2}.$$

Assim, $x = (y-1)/2 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x) = y$. Isto mostra que f é sobrejetiva. ■

Atenção!

Mostrar que a função $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $y = f(x) = x^2$ é sobrejetiva

é bem mais complicado!

Para fazer isto, precisaríamos do conceito de continuidade, que será visto em Cálculo I -A-.

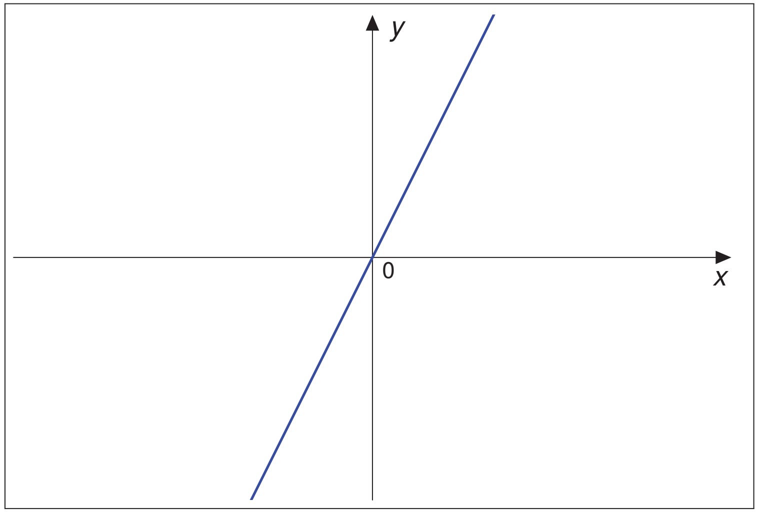
Funções bijetivas

Definição

Dizemos que $f\colon D \to C$ é bijetiva se ela é injetiva e sobrejetiva.

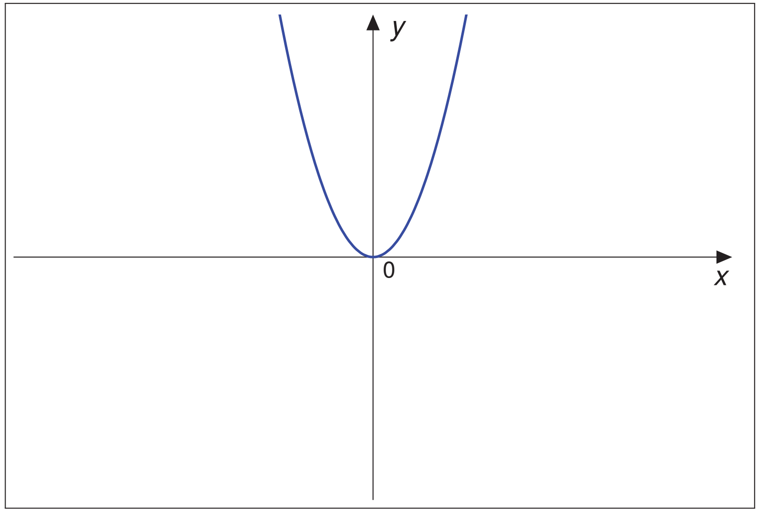
Funções bijetivas

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) = 2x + 1 \end{array} \text{ é bijetiva.}$$



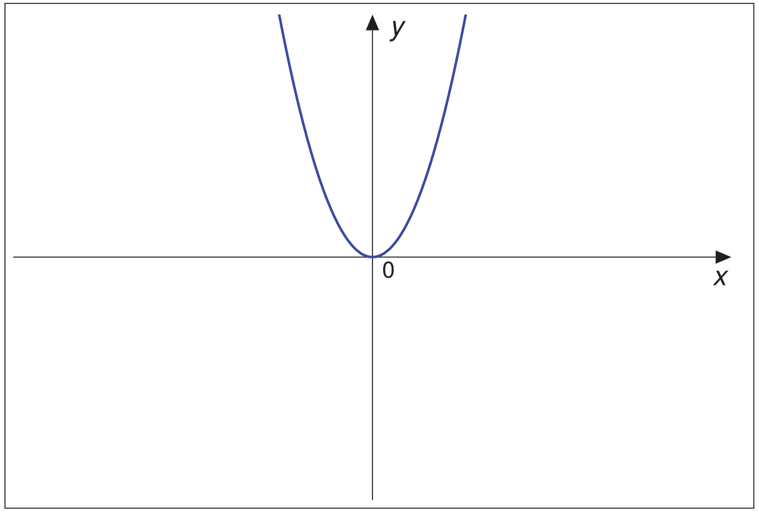
Funções bijetivas

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva e nem sobrejetiva.



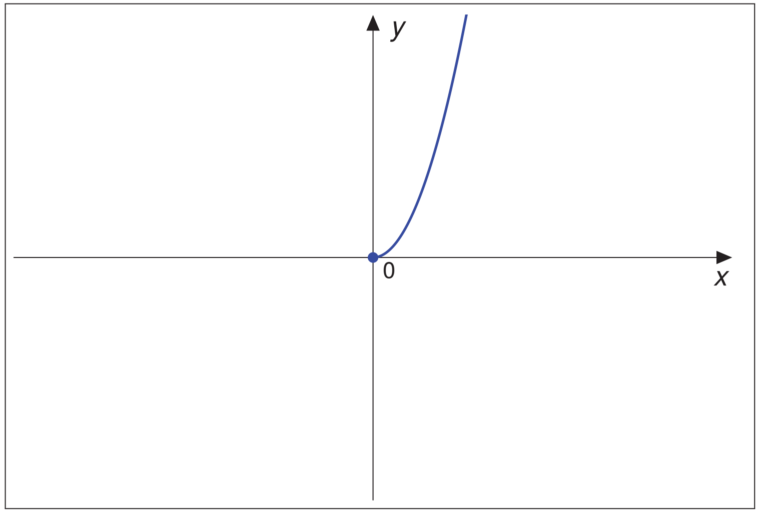
Funções bijetivas

$$f\colon \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & [0,+\infty) \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ não é bijetiva, pois não é injetiva (mas é sobrejetiva).



Funções bijetivas

$$f\colon \begin{array}{rcl} [0,+\infty) & \to & [0,+\infty) \\ x & \mapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$ é bijetiva.



Novas funções a partir de antigas: operações com funções

Operações com funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ e $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ duas funções reais. Definimos as funções soma $f+g$, diferença $f-g$, produto $f \cdot g$ e quociente f/g da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x), && \text{com } D_{f+g} = D_f \cap D_g\\
(f-g)(x) &= f(x)-g(x), && \text{com } D_{f-g} = D_f \cap D_g\\
(f\cdot g)(x) &= f(x)\cdot g(x), && \text{com } D_{f\,\cdot\, g} = D_f \cap D_g\\
(f\,/\,g)(x) &= f(x)\,/\,g(x), && \text{com } D_{f\,/\,g} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Exemplo: soma

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$
$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-2} + x - 3 = x - 2 + \sqrt{x-2},$$
$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: diferença

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$
$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \sqrt{x-2} - (x-3) = 4 - x + \sqrt{x-2},$$
$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: produto

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$
$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (1 + \sqrt{x-2}) \cdot (x-3),$$
$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g = [2, +\infty).$$

Exemplo: quociente

$$f(x) = 1 + \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = x - 3.$$
$$D_f = [2, +\infty), \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \frac{1+\sqrt{x-2}}{x-3},$$
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = [2, +\infty) - \{3\}.$$

Cuidado!

$$f(x) = x, \qquad g(x) = x.$$
$$D_f = \mathbb{R}, \qquad D_g = \mathbb{R}.$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x} = 1,$$
$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Composição de funções

Composição de funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$.
A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

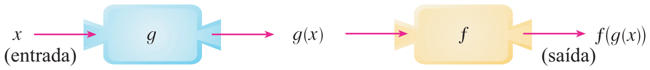
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Composição de funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$. A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

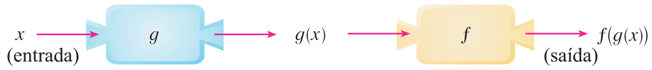


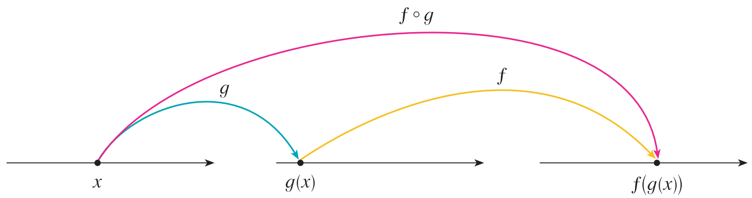
Composição de funções

Definição

Sejam $f\colon D_f \to C_f$ e $g\colon D_g \to C_g$ duas funções reais tais que $C_g \subset D_f$. A composição de f e g é a função $f \circ g\colon D_g \to C_f$ definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$





Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 3 = x + 3.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Exemplo

$$f(x) = x^2 + 3, \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

$$(f \circ g)(x) = x + 3, \qquad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 3}.$$

Moral: (em geral) $f \circ g \neq g \circ f$.

A operação de composição de funções não é comutativa!

Identificando composições

$$h(x) = (x^2 + 1)^{10} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = x^{10} \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + 1.$$

Identificando composições

$$h(x) = \operatorname{tg}(x^5) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^5.$$

Identificando composições

$$h(x) = \sqrt{4 - 3\,x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 4 - 3\,x.$$

Identificando composições

$$h(x) = 8 + \sqrt{x} = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 8 + x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

Identificando composições

$$h(x) = 1/(x+1) = (f \circ g)(x)$$

onde

$$f(x) = 1/x \qquad \text{e} \qquad g(x) = x + 1.$$

Funções inversíveis

Funções inversíveis

Definição

Dizemos que uma função $f\colon D \to C$ é inversível se existe função $g\colon C \to D$ tal que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in D$$

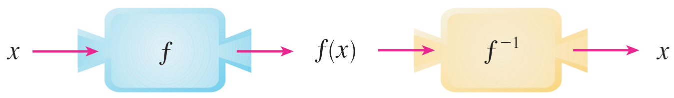
e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x, \quad \text{para todo } x \in C.$$

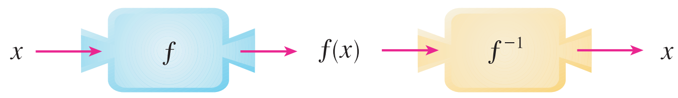
Neste caso, dizemos que g é a inversa de f e escreveremos:

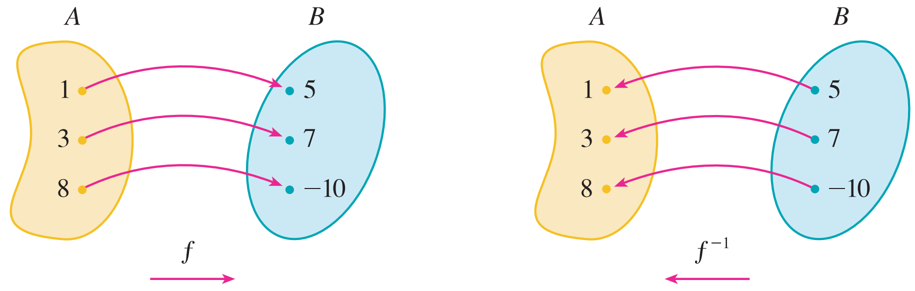
$$g = f^{-1}.$$

Exemplo



Exemplo





Exemplo

A função

$$\begin{array}{rccl} f\colon & D=\mathbb{R} & \to & C=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=f(x)=2\,x+1 \end{array}$$

é inversível, pois

$$\begin{array}{rccl} g\colon & C=\mathbb{R} & \to & D=\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & y=g(x)=(x-1)/2 \end{array}$$

é tal que

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(2\,x+1)=((2\,x+1)-1)/2=x,\quad \forall x\in D=\mathbb{R}$$

e

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f((x-1)/2)=2((x-1)/2)+1=x,\quad \forall x\in C=\mathbb{R}.$$

Podemos então escrever que $f^{-1}(x)=g(x)=(x-1)/2$.

Cuidado

Cuidado!

$$f^{-1}(x) \qquad \text{e} \qquad (f(x))^{-1}$$

denotam objetos diferentes!

$f^{-1}(x)$ é a função inversa de f calculada em x.

$(f(x))^{-1}$ é igual a $1/f(x)$.

No exemplo anterior,

$f^{-1}(x)=(x-1)/2$, enquanto que $(f(x))^{-1}=(2\,x+1)^{-1}=1/(2\,x+1)$.

Proposição

Proposição

$f: D \to C$ é uma função inversível se, e somente se, f é bijetiva, isto é, se, e somente se,

1. f é injetiva: para todo $x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$ e, ao mesmo tempo,
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in C$, existe pelo menos um $x \in D$ tal que $f(x) = y$.

Demonstração: ($\Rightarrow$)

Se $f: D \to C$ é inversível, então existe uma função $g: C \to D$ tal que $\forall x \in D, (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$ e $\forall x \in C, (f \circ g)(x) = f(g(x)) = x$.

Suponha, por absurdo, que f não seja injetiva. Então existem $x_1, x_2 \in D$ tais que $x_1 \neq x_2$ e $f(x_1) = f(x_2)$. Mas, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, isto é, $x_1 = x_2$, uma contradição. Assim $f: D \to C$ é injetiva.

Seja $y \in C$. Se $x = g(y)$, então $f(x) = f(g(y)) = y$. Isso mostra que $f: D \to C$ é sobrejetiva.

Como $f: D \to C$ é injetiva e sobrejetiva, segue-se que $f: D \to C$ é bijetiva.

Demonstração: ($\Leftarrow$)

Como $f: D \to C$ é sobrejetiva, para todo $y \in C$, existe $x \in D$ tal que $f(x) = y$. Mais ainda: como f é injetiva, esse x é único. Considere então a função $g: C \to D$ definida por $g(y) = x =$ o único elemento de D tal que $f(x) = y$. Observe que $g(f(x)) = g(y) = x, \forall x \in D$ e $f(g(y)) = f(x) = y, \forall y \in C$. Sendo assim, f é inversível e sua inversa é $f^{-1} = g$. ■

Observações

Provar que uma função é inversível pode não ser uma tarefa fácil seja com a definição, seja com a proposição anterior.

A disciplina de Cálculo ensinará novas ferramentas para estudar se uma função é inversível (localmente).

O gráfico da função inversa

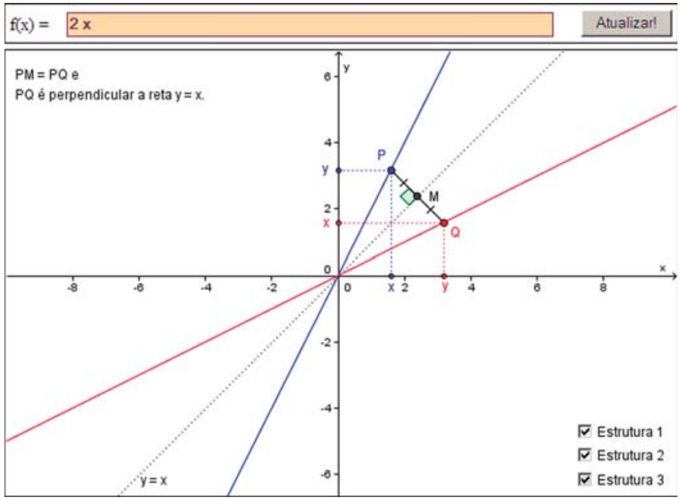
Seja f uma função real inversível.

Se $f(1) = 2$, então $f^{-1}(2) = 1$.
Assim, o ponto $(1, 2)$ pertence ao gráfico de f e $(2, 1)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(2) = 3$, então $f^{-1}(3) = 2$.
Assim, o ponto $(2, 3)$ pertence ao gráfico de f e $(3, 2)$ pertence ao gráfico de f^{-1}.

Se $f(x) = y$, então $f^{-1}(y) = x$.
Assim, o ponto (x, y) pertence ao gráfico de f e (y, x) pertence ao gráfico de f^{-1}.

O gráfico da função inversa



(Ir para o GeoGebra)

O gráfico da função inversa

Qual é a relação entre o gráfico de uma função e sua inversa?

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
os gráficos de f e f^{-1} são simétricos com relação a reta $y = x$.

Se uma mesma escala foi usada para os eixos x e y,
o gráfico da inversa f^{-1} é obtido
fazendo-se uma reflexão do gráfico de f com relação a reta $y = x$.