

Exame de Ingresso Unificado das Pós-graduações em Física

CCNH(UFABC), DFUFPR(UFPR), IFGW(UNICAMP), IFSC(USP)
IFT(UNESP), IFUSP(USP), PG/FIS(ITA), PPGF(UFSCAR)

2º Semestre/2009

Parte 1 — 14/4/2009

Instruções

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **primeira parte** do exame de ingresso à Pós-Graduação em Física das seguintes Instituições:
CCNH(UFABC), DFUFPR(UFPR), IFGW(UNICAMP), IFSC(USP)
IFT(UNESP), IFUSP(USP), PG/FIS(ITA), PPGF(UFSCAR).

Ela contém problemas de

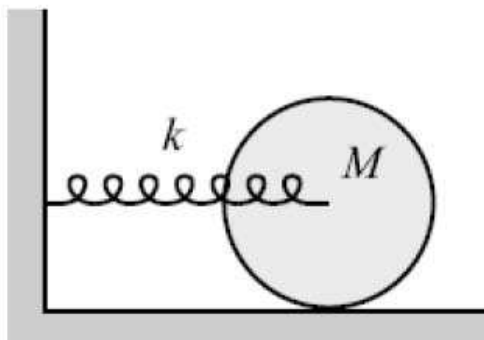
Mecânica Clássica, Física Moderna e Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.

- O tempo de duração dessa prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**. Procure fazer todos os problemas.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q1, ou Q2, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.
Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas.**
- **NÃO** escreva nada no formulário; **DEVOLVA-O** ao fim da prova, pois ele será utilizado amanhã.

Boa prova!

Q1. Um disco uniforme, de seção reta circular de raio R , massa M e momento de inércia I (com relação ao eixo perpendicular ao plano do disco e que passa pelo seu centro), encontra-se preso a uma mola de constante k , massa desprezível e um certo comprimento de repouso, como é mostrado na figura abaixo. O disco rola sobre a superfície sem deslizar e seu movimento está confinado ao plano da figura.

1. Escreva a equação para a energia mecânica do sistema em função da velocidade do centro de massa e da distensão da mola.
2. Obtenha a equação de movimento para o centro de massa do disco.
3. Determine a frequência angular de oscilação do centro de massa do disco.



Q2. Uma partícula de massa m move-se em um potencial $V(r) = -C/(3r^3)$, sendo C uma constante positiva. Considere que a partícula possua momento angular L diferente de zero.

1. Escreva a equação para a energia mecânica da partícula em termos da distância r à origem, da sua derivada temporal \dot{r} , do momento angular L , da massa m e da constante C .
2. Considerando os termos que só dependem de r na energia mecânica como um potencial efetivo $V_{ef}(r)$, esboce o gráfico de $V_{ef}(r)$.
3. Existem órbitas circulares para essa partícula? Em caso afirmativo, determine o raio de cada uma dessas possíveis órbitas e discuta a estabilidade das mesmas.
4. Calcule a energia mecânica mínima, E_{min} , acima da qual a partícula vinda do infinito é capturada pelo potencial, ou seja, não retorna mais para o infinito.

Q3. (a) As seguintes afirmações referem-se ao efeito fotoelétrico. Responda Verdadeiro (V) ou Falso (F) e justifique brevemente a sua resposta (máximo de três linhas). Respostas sem justificativas ou com justificativas erradas não serão consideradas. Responda na folha de Respostas.

1. Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de elétrons. Para que ocorra a emissão de elétrons no mesmo material basta que se aumente suficientemente a intensidade da luz incidente.
2. Incide-se luz num material fotoelétrico e não se observa a emissão de elétrons. Para que ocorra a emissão de elétrons no mesmo material basta que se aumente suficientemente a frequência da luz incidente.
3. No contexto do efeito fotoelétrico, o potencial de corte é a tensão necessária para deter os elétrons que escapam do metal com a menor velocidade possível.

4. Quando luz azul incide sobre uma placa de zinco, ela não produz efeito fotoelétrico, mas quando iluminada com luz vermelha ocorre emissão de elétrons.
5. Quanto maior for a frequência da luz incidente, maior será a energia cinética dos elétrons emitidos.

(b) Considere o efeito fotoelétrico inverso, ou seja, a emissão de fótons em consequência do bombardeio de um material com elétrons de alta velocidade. Calcule a frequência máxima que podem ter os fótons emitidos se a superfície é bombardeada com elétrons com velocidade $c/2$, onde c é a velocidade da luz.

Q4. A energia da radiação de corpo negro, por unidade de volume e por unidade de intervalo de frequência, é dada por:

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1} ,$$

onde ν representa a frequência do fóton e T a temperatura da radiação.

1. Deduza a expressão para a energia total E de um gás de fótons em um volume V . Qual é a dependência de E com a temperatura?
2. Esboce gráficos de $u_\nu(\nu)$ para duas temperaturas T_1 e T_2 , sendo $T_1 < T_2$.
3. Escreva as formas assintóticas de $u_\nu(\nu)$ no caso de frequências muito altas (lei de radiação de Wien) e no caso de frequências muito baixas (lei de radiação de Rayleigh-Jeans).
4. Imagine que o Universo seja uma cavidade esférica de paredes impenetráveis e raio 10^{28} cm, contendo um gás de fótons em equilíbrio térmico. Se a temperatura dentro da cavidade for de 3 K , estime a quantidade de energia contida nessa cavidade.
5. Supondo que o Universo se expanda adiabaticamente, calcule a temperatura que ele terá quando o seu volume for o dobro do valor atual (a entropia do gás de fótons é $S \propto VT^3$).

Q5. Considere um sistema de N átomos localizados e não interagentes. Cada átomo pode estar em um dos três estados quânticos rotulados pelo número quântico k , com $k = -1, 0, 1$. Um átomo tem a mesma energia $\varepsilon_1 > 0$ no estado $k = 1$ ou no estado $k = -1$. Um átomo no estado $k = 0$ tem energia $\varepsilon_0 = 0$. Determine:

1. A função de partição do sistema.
2. A probabilidade p_0 de um átomo se encontrar no estado com energia 0. Determine o comportamento de p_0 nos limites de altas e baixas temperaturas e esboce o gráfico de p_0 versus T .
3. As expressões para a energia interna e para a entropia como função da temperatura T . Determine os valores assintóticos da energia e da entropia nos limites de altas e baixas temperaturas. A terceira lei da termodinâmica é observada?
4. Esboce o gráfico da entropia como função da temperatura.

Exame de Ingresso Unificado das Pós-graduações em Física

CCNH(UFABC), DFUFPR(UFPR), IFGW(UNICAMP), IFSC(USP)
IFT(UNESP), IFUSP(USP), PG/FIS(ITA), PPGF(UFSCAR)

2º Semestre/2009

Parte 2 — 15/4/2009

Instruções

- **NÃO ESCREVA O SEU NOME NA PROVA.** Ela deverá ser identificada **apenas através do código (EUFxxx)**.
- Esta prova constitui a **segunda parte** do exame de ingresso à Pós-Graduação em Física das seguintes Instituições:

CCNH(UFABC), DFUFPR(UFPR), IFGW(UNICAMP), IFSC(USP)
IFT(UNESP), IFUSP(USP), PG/FIS(ITA), PPGF(UFSCAR).

Ela contém problemas de

Eletromagnetismo, Mecânica Quântica e Termodinâmica e Mecânica Estatística. Todas as questões têm o mesmo peso.

- O tempo de duração dessa prova é de **4 horas**. O tempo mínimo de permanência na sala é de **90 minutos**. Procure fazer todos os problemas.
- **NÃO** é permitido o uso de **calculadoras** ou outros instrumentos eletrônicos.
- **Resolva cada questão na página correspondente do caderno de respostas.** As folhas serão reorganizadas para a correção. Se precisar de mais espaço, utilize as folhas extras do caderno de respostas. **Não esqueça de escrever nas folhas extras o número da questão (Q6, ou Q7, ou ...) e o seu código de identificação (EUFxxx).** Folhas extras sem essas informações não serão corrigidas.
Use uma folha extra diferente para cada questão. Não destaque a folha extra.
- Se precisar de rascunho, use as folhas indicadas por RASCUNHO, que se encontram no fim do caderno de respostas. **NÃO AS DESTAQUE.** As folhas de rascunho serão descartadas e **questões nelas resolvidas não serão consideradas.**
- **NÃO** é necessário devolver o Formulário.

Boa prova!

Q6. No instante inicial $t = 0$, uma partícula de massa m e carga q encontra-se na posição $x_0\hat{x}$ e com velocidade $v_0\hat{y}$. Os campos de força agindo sobre a partícula são devidos somente ao potencial elétrico ϕ e ao potencial vetor \vec{A} , dados por

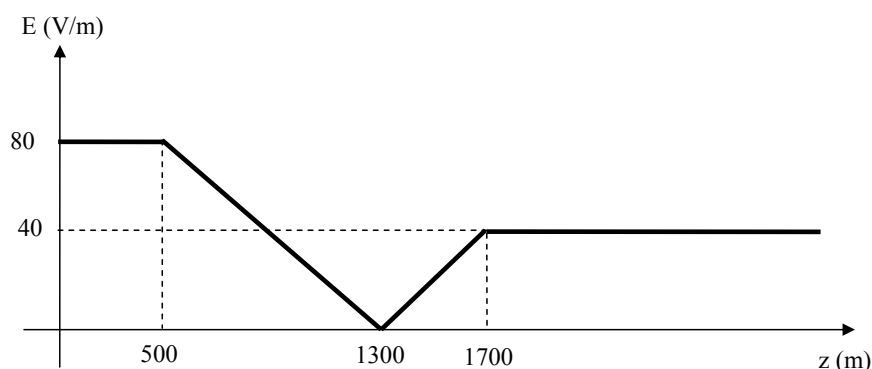
$$\begin{aligned}\Phi(\vec{r}) &= \alpha_0 x + a\alpha_1, \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\beta_0}{2}(\hat{z} \times \vec{r}) + a\beta_1 \hat{u} e^{\hat{u} \cdot \vec{r}/a},\end{aligned}$$

onde α_0 , α_1 , a , β_0 e β_1 são constantes reais e \hat{u} é um versor constante e real.

1. Calcule o vetor campo elétrico em todo o espaço, $\vec{E}(\vec{r})$.
2. Determine o vetor indução magnética em todo o espaço, $\vec{B}(\vec{r})$.
3. Existe algum valor para a velocidade inicial v_0 tal que a trajetória da partícula seja uma reta? Em caso afirmativo, calcule-o.

Q7. Durante uma tempestade, uma nuvem cobre a cidade de São Paulo a uma altura $h = 500$ m em relação ao solo. Vamos supor que a largura da nuvem seja bem maior que essa altura h . Um balão meteorológico equipado com um sensor de campo elétrico é então lançado verticalmente a partir do solo. Os dados coletados pelo sensor estão ilustrados na figura abaixo, onde $E(z)$ é o *módulo* do campo elétrico em função da altitude ($z = 0$ no solo). A espessura da nuvem na direção vertical é igual a 1200 m e sabe-se que a densidade de carga elétrica é sempre negativa no seu interior.

1. Indique, em um diagrama, a direção e sentido do campo elétrico nas regiões abaixo, dentro e acima da nuvem.
2. Calcule a densidade volumétrica de carga na atmosfera em função da altitude, $\rho(z)$, e esboce o seu gráfico.
3. Para quais valores de z o potencial elétrico é máximo ou mínimo? Calcule o potencial elétrico nesses pontos? Tome $V = 0$ no solo.



Q8. Responda as questões abaixo o mais detalhadamente possível. Não deixe nada indicado. Conclua.

Considere um operador hermitiano H e mostre que:

- 1) os autovalores de H são necessariamente reais;
- 2) os autovetores de H correspondentes a autovalores diferentes são ortogonais.

Um operador A , que corresponde ao observável a , tem dois autoestados normalizados, $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$, com autovalores a_1 e a_2 , respectivamente, e $a_1 \neq a_2$. Um outro operador B , que corresponde ao observável b , tem dois autoestados normalizados, $|\chi_1\rangle$ e $|\chi_2\rangle$, com autovalores b_1 e b_2 , respectivamente, e $b_1 \neq b_2$. Os dois conjuntos de autoestados (ou bases) estão relacionados por:

$$|\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(|\chi_1\rangle + 3|\chi_2\rangle) \quad \text{e} \quad |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(3|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle).$$

- 3) Encontre a relação inversa entre as bases, ou seja, os $|\chi\rangle$ s em termos dos $|\varphi\rangle$ s.

Sobre esse sistema, podem ser feitas medidas em sequência. Calcule as probabilidades pedidas nos casos abaixo:

- 4) a é medido e é encontrado o autovalor a_1 . Imediatamente após, b é medido e é encontrado o autovalor b_1 . Em seguida, a é medido novamente. Qual é a probabilidade de se obter novamente o autovalor a_1 nessa última medida?
- 5) a é medido e é encontrado o autovalor a_1 . Após essa medida de a , mede-se b e novamente a , nessa ordem. Qual é a probabilidade de se obter nessa sequência de medidas os autovalores b_1 (na medida de b) e a_1 (na medida de a)?

Q9. Sendo a energia potencial de um sistema quântico unidimensional dada por um *poço quadrado infinito*,

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & \text{em outro caso,} \end{cases} \quad (1)$$

- 1) encontre os autovalores da energia e suas respectivas autofunções, indicando as condições de contorno que estas devem obedecer. OBS.: Não é necessário normalizar as autofunções; suponha que a constante de normalização de cada estado (n) é conhecida e vale N_n .

A esse sistema é acrescentada uma perturbação da forma:

$$\Delta V(x) = a \delta(x - L/2), \quad (2)$$

onde $\delta(x - x_0)$ é a *função delta de Dirac* e a uma constante real.

- 2) Todos os níveis de energia são afetados por essa perturbação? Se a resposta for negativa, o que caracteriza os níveis que são e os que não são afetados? Como diferenciá-los? Explique.
- 3) Calcule a correção aos níveis de energia em primeira ordem em teoria de perturbação.

Q10. Um mol de um gás ideal percorre um ciclo formado por uma expansão adiabática ($1 \rightarrow 2$), uma transformação isobárica ($2 \rightarrow 3$) e uma transformação isocórica ($3 \rightarrow 1$). Considere dados V_1 , V_2 , P_3 , C_V , γ e R . Em uma transformação adiabática não há troca de calor; em uma transformação isobárica a pressão P é mantida constante e em uma transformação isocórica o volume V é mantido constante.

1. Esboce o ciclo no diagrama $P - V$.
2. Determine o calor trocado e o trabalho realizado em cada trecho do ciclo.
3. Ache o rendimento η de um motor que opera segundo esse ciclo em termos de V_1 e V_2 .
4. Encontre a variação de entropia em cada trecho do ciclo.