MS211 - Projeto 1 - Representante de turma

Diogo Teles Sant'Anna - RA: 169966
Luciano Gigantelli Zago - RA: 182835

Introdução

Foi utilizado o programa GNU Octave para o desenvolvimento do trabalho, por ser um software livre. Usamos também o Git para versionamento e armazenamento do código.
O objetivo do projeto foi resolver um sistema linear computacionalmente. Para isso foi preciso determinar a forma matricial desse sistema, escolher um método de resolução e determinar precisão dessa resolução.

Procedimentos

Iniciamos o desenvolvimento trabalhando para obter a matriz de probabilidades P.
Para isso, criamos um vetor indicando quantas pessoas da turma cada pessoa conhece (obtido através da soma dos valores das linhas da matriz A) e percorremos esse vetor populando a matriz P: para cada pessoa j do vetor, se ela não conhece ninguém, é atribuído o valor 1/n a todos os elementos da coluna j; caso contrário, à coluna j de P é atribuído os valores da linha j de A dividida pelo número de conhecidos de j (elemento j do vetor).

Em seguida, trabalhamos com a equação do enunciado para determinar o sistema linear e facilitar a manipulação do mesmo. O raciocínio seguido é exposto abaixo:

Expandindo a equação $x_i = \alpha(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j) + (1 - \alpha)\, v_i \quad \forall i = 1, \dots, n$, temos:

$x_1 = \alpha(p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \cdots + p_{1n}x_n) + (1 - \alpha)\, v_1$
$x_2 = \alpha(p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + \cdots + p_{2n}x_n) + (1 - \alpha)\, v_2$
...
$x_n = \alpha(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \cdots + p_{nn}x_n) + (1 - \alpha)\, v_n$

Isolando os termos independentes:
$x_1(1 - \alpha p_{11}) - x_2\alpha p_{12} - \cdots - x_n\alpha p_{1n} = (1 - \alpha)\, v_1$
$-x_1\alpha p_{21} + x_2(1 - \alpha p_{22}) - \cdots - x_n\alpha p_{2n} = (1 - \alpha)\, v_2$
...
$-x_1\alpha p_{n1} - x_2\alpha p_{n2} - \cdots + x_n(1 - \alpha p_{nn}) = (1 - \alpha)\, v_n$

Modificando agora os termos de forma que:
$P = I_n - \alpha P$
e
$v = (1 - \alpha)\, v$

temos:
$x_1p_{11} + x_2p_{12} + \cdots + x_np_{1n} = v_1$

$$x_1 p_{21} + x_2 p_{22} + \cdots + x_n p_{2n} = v_2$$
...
$$x_1 p_{n1} + x_2 p_{n2} + \cdots + x_n p_{nn} = v_n$$

Que pode facilmente ser representado pela sistema linear matricial:
$$Px = v$$

Explicitada a equação matricial, obtivemos o valor do vetor x através do método de Gauss Seidel, que julgamos mais apropriado por não ser iterativo e principalmente pela matriz P se tratar de uma matriz esparsa, sendo um método eficiente para esse sistema.

O método de Gauss Seidel pôde ser usado também porque conseguimos provar que a matriz P não tem diagonal nula, da seguinte forma:

Pela matriz P exposta anteriormente, sabemos que o valor do iézimo elemento da diagonal da matriz é $1 - \alpha p_{ii}$, portanto para garantir uma diagonal não nula temos que garantir que $\alpha p_{ii} \neq 1$.
Do enunciado do projeto, tem-se que

$$p_{ij} = \begin{cases} a_{ji}/(\text{no. conhecidos de } j), & \text{se } j \text{ conhece pelo menos um aluno da turma,} \\ 1/n, & \text{se } j \text{ não conhece nenhum aluno da turma.} \end{cases}$$

onde
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{o aluno } i \text{ conhece o aluno } j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas foi convencionado que nenhum aluno deve conhecer a si mesmo, então $a_{ii} = 0 \ \forall \ i = 1, \ldots, n$ e consequentemente $p_{ii} = 0$ para o caso do aluno i conhecer pelo menos um aluno da turma, e $p_{ii} = 1/n$ caso contrário. Para $p_{ii} = 0$ é impossível obtermos $\alpha p_{ii} = 1$, agora para $p_{ii} = 1/n$, sabendo que no nosso caso n = 88, precisaríamos ter $\alpha = 88$, o que também é impossível devido a restrição do enunciado de que $0 < \alpha \leq 1$.

Questão 1

Para avaliarmos a qualidade da solução obtida, primeiramente quantificamos o número de condicionamento da matriz P usada no sistema linear: 15.592. Sabendo que quanto menor é esse valor, maior é a proximidade do resíduo relativo (possível de se calcular numericamente) com o erro relativo, o resíduo relativo calculado pode ser usado para encontrar um intervalo do erro relativo.
Calculando o resíduo absoluto e relativo como:
$R_a = \|v - Px\|$ e $R_r = \dfrac{\|v - Px\|}{\|v\|}$

Utilizando x0 = [0...0], kmax = 100 e tau = 1.e-7 na função de Gauss-Seidel, obtemos um resíduo absoluto de $2,0681 \times 10^{-9}$ e um resíduo relativo de $1,2133 \times 10^{-6}$. Pelo condicionamento da matriz e o resíduo relativo, podemos garantir que o erro relativo se encontra no intervalo $9,8 \times 10^{-8} < E_r < 1,9 \times 10^{-5}$.
O representante escolhido foi o de RA 172281 e o vice-representante de RA 170134, com representatividades, respectivamente, de 0,042408 ± 0,000001 e 0,035685 ± 0,000001, utilizando o erro absoluto que pode ser obtido através do erro relativo.
Dessa forma, a qualidade da solução obtida foi suficiente para permitir distinguir o representante e seu vice.
Eles não tiveram o maior número de amigos nem foram os mais indicados no formulário, conforme observado, na saída do programa, a seguir:

Saída do programa:

QUESTÃO 1
a = 0.85000

Para o cálculo usando o método de Gauss Seidel:
Número de condicionamento da matriz P: 15.592
Inverso do número de condicionamento da matriz P: 0.081081
Resíduo absoluto: 2.0681e-09
Resíduo relativo: 1.2133e-06
Erro relativo mínimo: 9.8376e-08
Erro relativo máximo: 1.8918e-05

O REPRESENTANTE escolhido foi:
Índice: 54, RA: 172281, Representatividade: 0.042408

O VICE-REPRESENTANTE escolhido foi:
Índice: 84, RA: 170134, Representatividade: 0.035685

O representante foi indicado 9 vezes
O representante fez 9 indicações

O vice-representante foi indicado 11 vezes
O vice-representante fez 4 indicações

O mais indicado recebeu 12 indicações
Quem indicou mais pessoas fez 12 indicações

Questão 2

Sim, como o termo $(1 - \alpha) \times v_i$ estabelece uma segunda probabilidade de se selecionar o i-ésimo aluno como representante da turma, alterando-se os valores desse termo para que os valores nos indices desejados sejam os maiores, podemos fazer com que sejamos selecionados representantes e vice-representantes. Pelo enunciado, $0 < \alpha \leq 1$ e $\Sigma v_i = 1$.

Portanto, para uma maior representatividade, a constante α pode diminuir, e v_i nas posições i: 36 e 43 (RA{36} = 169966 e RA{43} = 182835) pode aumentar, enquanto as outras posições diminuem. De forma simples, caso v_i seja inicialmente um vetor de 0, e $v_{36} = 0.6;\ v_{43} = 0.4$, para qualquer $\alpha \neq 1$, o aluno de índice 36 será representante e o aluno de índice 43 será vice-representante.

Saída do programa:

QUESTÃO 2
a = 0.10000

Para o cálculo usando o método de Gauss Seidel:
Número de condicionamento da matriz P: 15.592
Inverso do número de condicionamento da matriz P: 0.081081
Resíduo absoluto: 4.1374e-08
Resíduo relativo: 7.6618e-08
Erro relativo mínimo: 6.2123e-09
Erro relativo máximo: 1.1946e-06

O REPRESENTANTE escolhido foi:
Índice: 36, RA: 169966, Representatividade: 1.0303

O VICE-REPRESENTANTE escolhido foi:
Índice: 43, RA: 182835, Representatividade: 0.77408

Conclusões

Da questão 1, usando $\alpha = 0.85$ e $v_i = 1/n$ resolvemos o sistema linear proposto obtendo como representante o aluno de RA 172281 e como vice-representante o aluno de RA 170134. A resolução do sistema linear resultou em um resíduo relativo de *1.2133e-06*, obtido de uma matriz com número de condicionamento 15.592, sendo assim, um erro relativo máximo de *1.8918e-05*. Uma solução com qualidade suficiente para determinar o representante e seu vice.

Para a questão 2, concluímos que é possível manipular os valores de α e v_i's de modo a tornar os autores deste trabalho representante e vice-representante da turma: deixando todos os v_i's zerados com exceção dos referentes aos autores do trabalho - para os quais estabelecemos os valores de 0.6 e 0.4 para manter a soma de todos os v_i's = 1 -, usando qualquer valor entre de 0 e 1 para α os autores do trabalho se tornariam representante e vice-representante da turma.

Código

main.m:

```
load DadosProjeto1.mat

% Questao 1
disp(['QUESTÃO 1'])

% Inicializo n com o numero de linhas
n = size(A, 1);

% Para iniciar o projeto precisamos determinar qual a matriz de probabilidades
% de indicacao, ou seja, uma matrix P com Pij tais que Pij corresponde a prob.
% do aluno j indicar o aluno i
P = getProbabilityMatrix(A, n);

%%%%% Variáveis de amortecimento
% Inicializamos a constante de amortecimento (alpha)
a = 0.85

% Inicializa o vetor de proporcionalidade
v = getProportionVector(A, n);

P *= a;
P = eye(n) - P;

v *= 1 - a;

% Agora já podemos dizer que Px = v

[x,~]=MetodoGaussSeidel(P,v);
con = cond(P);
rcon = rcond(P);
r_abs = norm(v - P*x, inf);
r_rel = norm(v - P*x, inf)/norm(v, inf);
e_min = rcon * r_rel;
e_max = con * r_rel;
disp([''])
disp(['Para o cálculo usando o método de Gauss Seidel:'])
disp(['Número de condicionamento da matriz P: ' num2str(con)])
disp(['Inverso do número de condicionamento da matriz P: ' num2str(rcon)])
disp(['Resíduo absoluto: ' num2str(r_abs)]) % norma inf, faz abs e max
disp(['Resíduo relativo: ' num2str(r_rel)])
disp(['Erro relativo mínimo: ' num2str(e_min)])
```

```
disp(['Erro relativo máximo: ' num2str(e_max)])

[representante, vice] = getMax(RA, x);
disp([''])
disp(['O representante foi indicado ' num2str(sum(A(:,representante))) ' vezes'])
disp(['O representante fez ' num2str(sum(A(representante,:))) ' indicações'])
disp([''])
disp(['O vice-representante foi indicado ' num2str(sum(A(:,vice))) ' vezes'])
disp(['O vice-representante fez ' num2str(sum(A(vice,:))) ' indicações'])
disp([''])
disp(['O mais indicado recebeu ' num2str(max(sum(A))) ' indicações']) % maximo da soma das linhas (i=27)
disp(['Quem indicou mais pessoas fez ' num2str(max(sum(A,2))) ' indicações']) % maximo da soma das colunas (i=59)

% Questao 2
disp([''])
disp(['QUESTÃO 2'])

a = 0.1

v = zeros(n,1);
v(36) = 0.6;
v(43) = 0.4;
v *= 1-a;

[x,~]=MetodoGaussSeidel(P,v);
con = cond(P);
rcon = rcond(P);
r_abs = norm(v - P*x, inf);
r_rel = norm(v - P*x, inf)/norm(v, inf);
e_min = rcon * r_rel;
e_max = con * r_rel;
disp([''])
disp(['Para o cálculo usando o método de Gauss Seidel:'])
disp(['Número de condicionamento da matriz P: ' num2str(con)])
disp(['Inverso do número de condicionamento da matriz P: ' num2str(rcon)])
disp(['Resíduo absoluto: ' num2str(r_abs)]) % norma inf, faz abs e max
disp(['Resíduo relativo: ' num2str(r_rel)])
disp(['Erro relativo mínimo: ' num2str(e_min)])
disp(['Erro relativo máximo: ' num2str(e_max)])

[representante, vice] = getMax(RA, x);
disp([''])
disp(['O representante foi indicado ' num2str(sum(A(:,representante))) ' vezes'])
disp(['O representante fez ' num2str(sum(A(representante,:))) ' indicações'])
```

disp([''])
disp(['O vice-representante foi indicado ' num2str(sum(A(:,vice))) ' vezes'])
disp(['O vice-representante fez ' num2str(sum(A(vice,:))) ' indicações'])

getMax.m:

```
function [representante, vice] = getMax(RA, x)

  [~, xsort] = sort(x); % ordena os indices por valor crescente
  representante = xsort(end); % pega o indice do maior valor
  vice = xsort(end-1); % pega o indice do 2 maior valor

  disp([''])
  disp(['O REPRESENTANTE escolhido foi: '])
  disp(['Índice: ' num2str(representante) ', RA: ' num2str(RA{representante}) ',
Representatividade: ' num2str(x(representante))])
  disp([''])
  disp(['O VICE-REPRESENTANTE escolhido foi: '])
  disp(['Índice: ' num2str(vice) ', RA: ' num2str(RA{vice}) ', Representatividade: '
num2str(x(vice))])

end
```

getProbabilityMatrix.m:

```
function P = getProbabilityMatrix(A, n)
        % Crio um vetor que corresponde a soma das linhas da matrix A. Ou seja, o
elemento
        % conhecidos_de(i) representa quantas pessoas o aluno i conhece na turma
        conhecidos_de = sum(A, 2);

        for j = 1:n
        conhecidos_de_j = conhecidos_de(j);
        if conhecidos_de_j > 0
        % Copia a linha j de A dividida pelo escalar conhecidos_de_j
        % para a coluna j de P
        P(:, j) = A(j, :) / conhecidos_de_j;
        else
        % Preenche todas os elementos da coluna j com 1/n
        P(:, j) = 1/n;
        end
        end
end
```

getProportionVector.m:

```
function v = getProportionVector(A, n)
        v = zeros(n, 1);
```

v(:) = 1/n;
end

MetodoGaussSeidel.m:
Obtido de *http://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/m-files/MetodoGaussSeidel.m*