Algoritmos e Estruturas de Dados *(Introdução a Grafos e Árvores)*

Prof. Me. Diogo Tavares da Silva
contato: *diogotavares@unibarretos.com.br*

Grafos

- Modelo matemático que representa relações entre objetos
- Exemplos
  - Navegação na Web
    - Documentos referenciam outros documentos
    - Objetos: Documentos; Conexões: links.
  - Roteiro turístico
    - Qual o caminho mais curto para realizar o roteiro?
  - Partição de um programa em um conjunto de estados

Grafos

- Conjunto de Vértices (V) e Arestas (E)
  - G(V,E)
    - V (Vértices)
      - Conjunto finito não vazio
    - E (Arestas)
      - Conjunto de **pares não ordenados** de elementos distintos de V
      - **Pares não ordenados (Grafos simples)**
      - $e \in E$; $e=(v, w)$
      - v e w, extremidades da aresta, são ditos vértices adjacentes

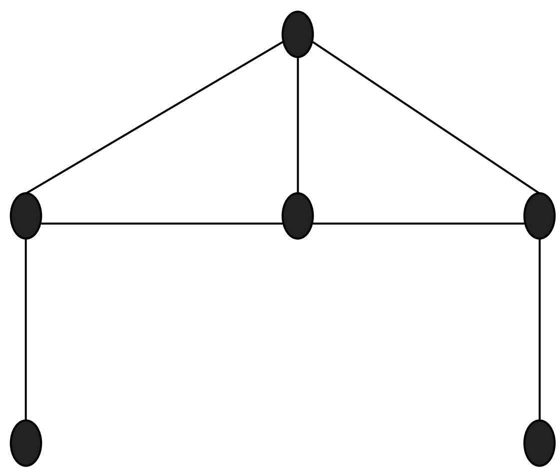
Grafos Direcionados

- Conjunto de Vértices (V) e Arestas (E)
  - G(V,E)
    - V
      - Vértices
      - Conjunto finito não vazio
    - E
      - Arestas
      - Conjunto de **pares ordenados** de elementos distintos de V
      - **Pares ordenados (Grafos direcionados)**

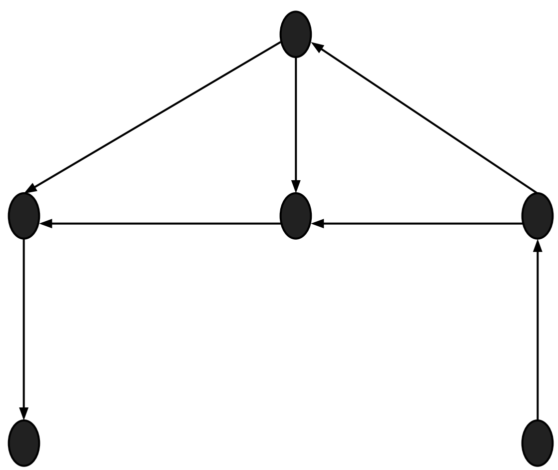
Grafos

- Representação geométrica

Grafo Trivial



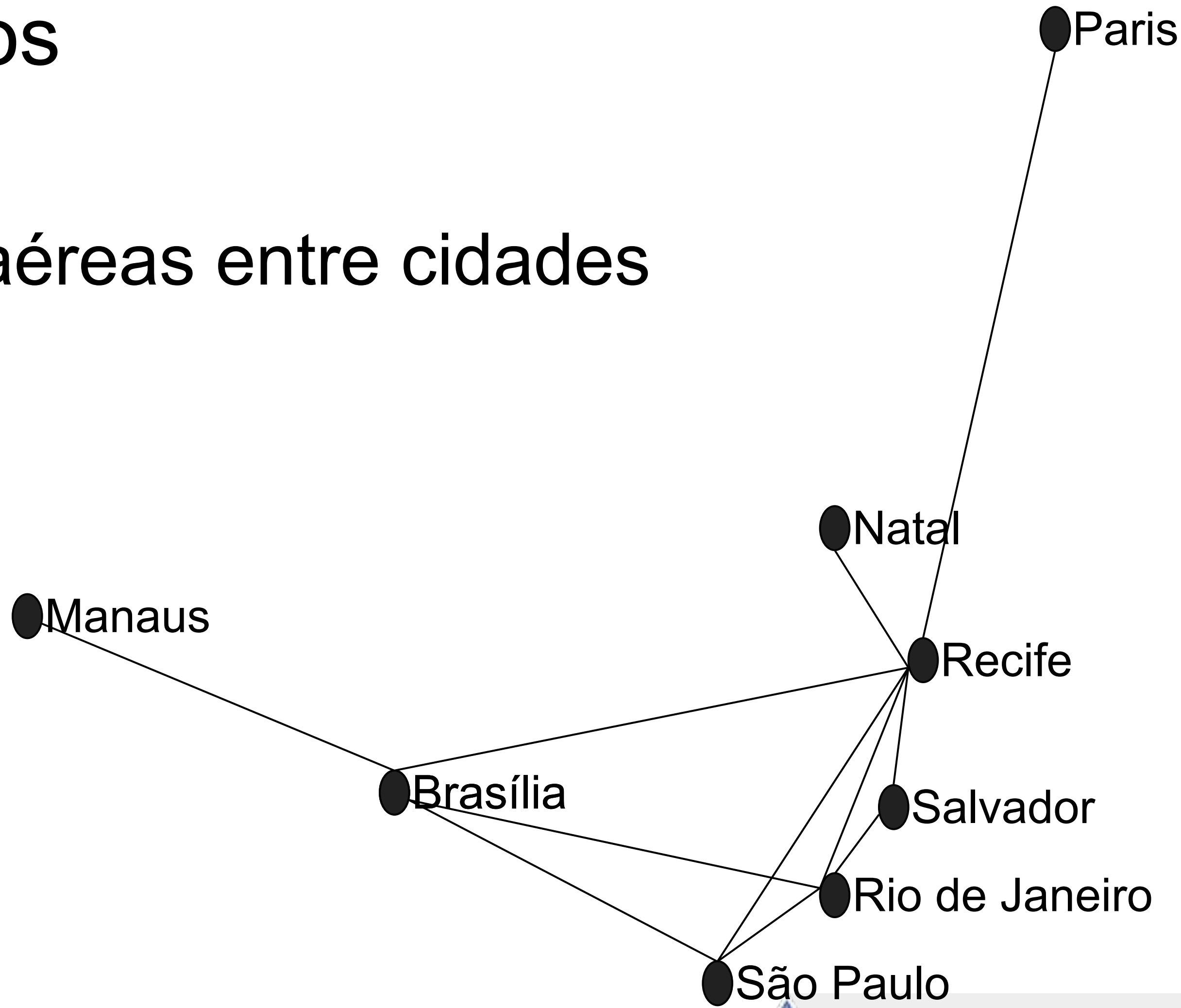
Grafo (Grafo Simples)



Grafo Direcionado

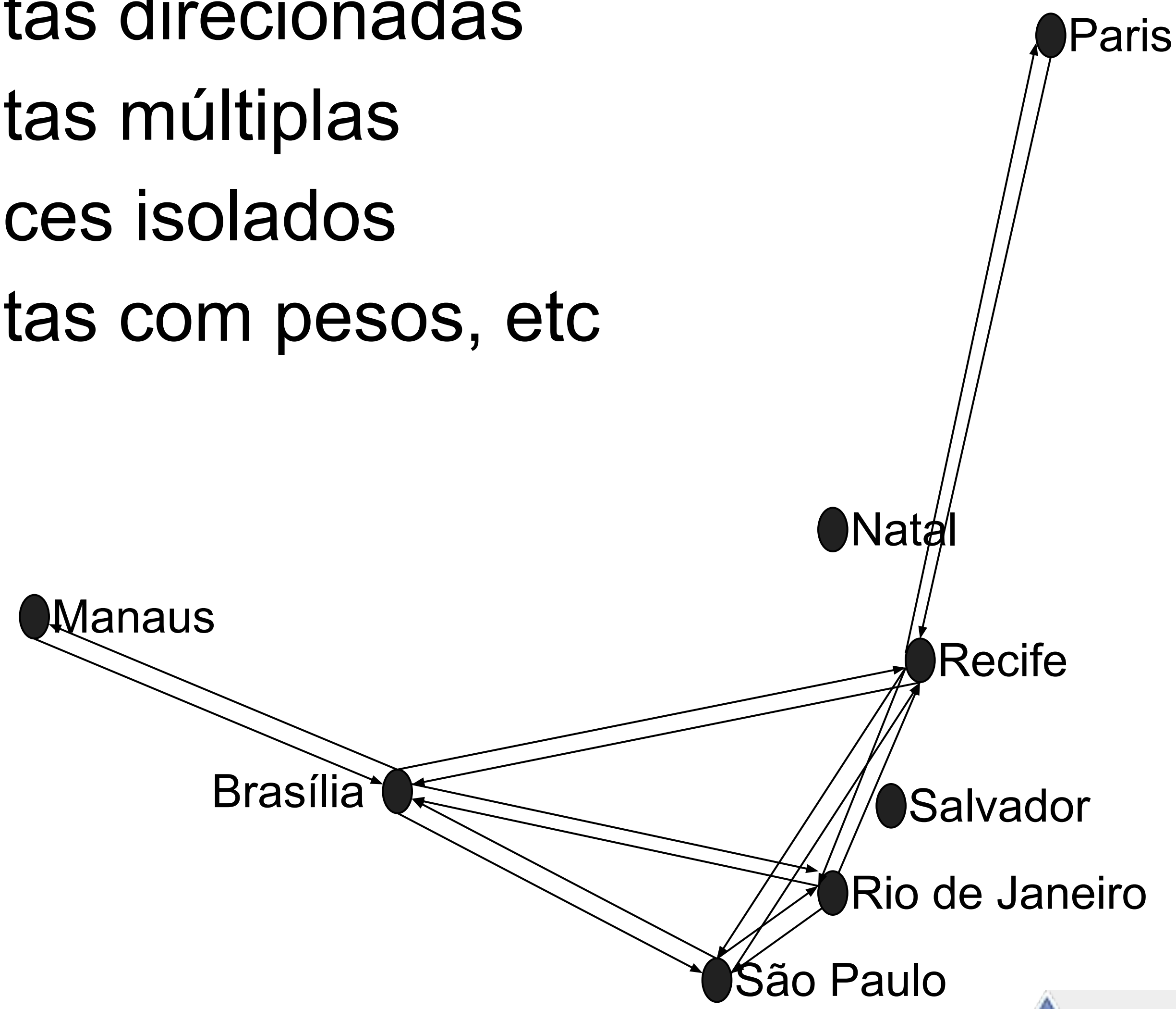
Grafos

- Modelo matemático que representa relações entre objetos
- Exemplos
  - Ligações aéreas entre cidades



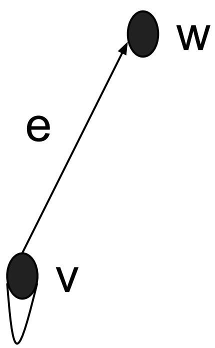
Grafos (variações)

- Arestas direcionadas
- Arestas múltiplas
- Vértices isolados
- Arestas com pesos, etc



Grafos

- Arestas tipo (v,v)
  - Laços
- Aresta e=(v,w)
  - e é incidente a v e a w
  - v é **adjacente** a w



Grafo - G(V, E)

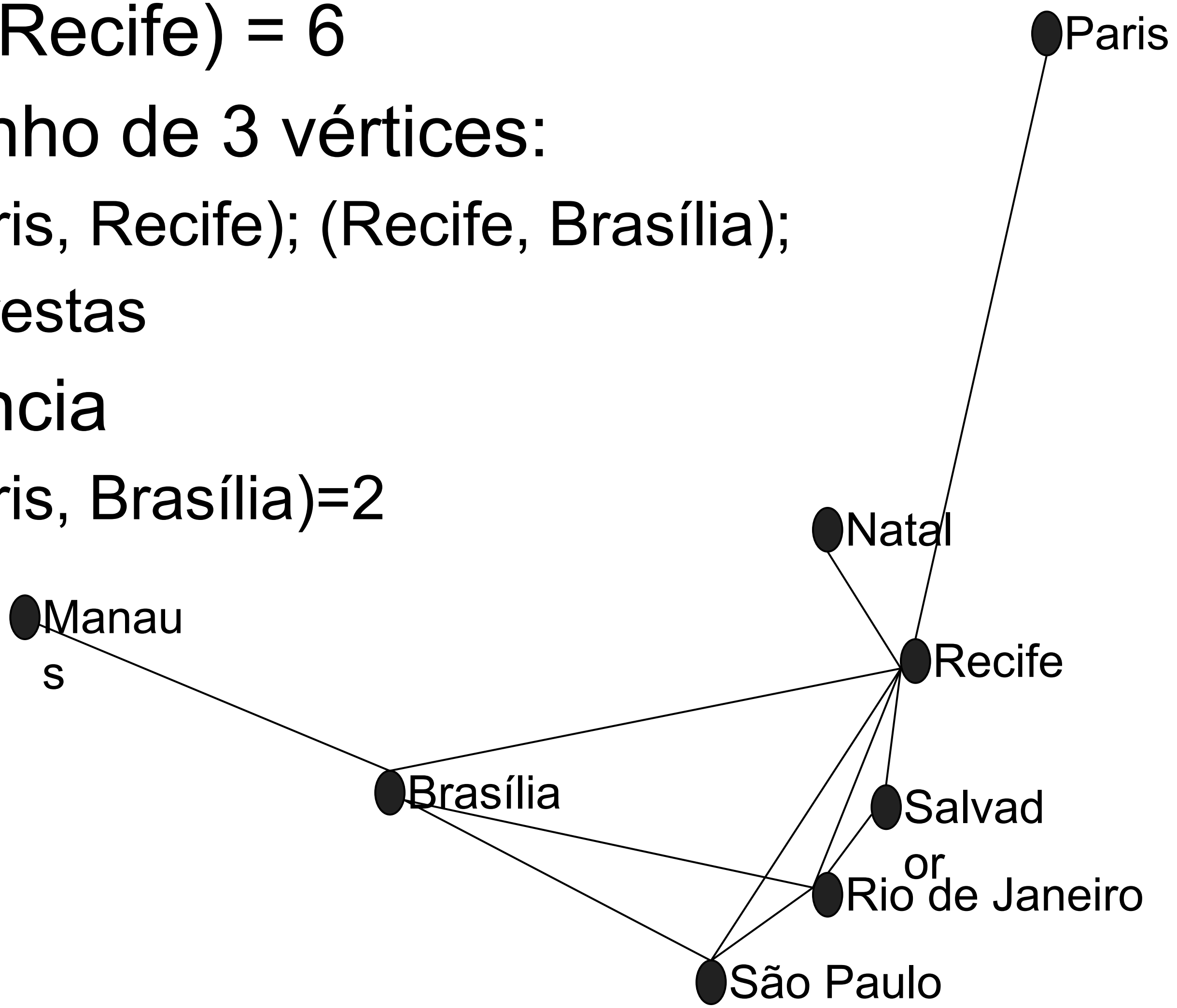
- **Grau de um vértice v – grau(v)**
  - Define-se **grau de um vértice** v ∈ V, como o número de vértices adjacentes a v.

- Caminho de k vértices
  - Um caminho de k vértices é formado por (k – 1) arestas $(v_1,v_2),(v_2,v_3),\ldots,(v_{k-1},v_k)$.
  - O valor (k – 1) é o **comprimento do caminho** .
  - Caminho fechado (ciclo): $v_1 = v_k$

- Distância
  - A **distância** d(v,w) entre dois vértices v, w é o comprimento do menor caminho entre v e w.

Grafos

- Grau(Recife) = 6
- Caminho de 3 vértices:
  - (Paris, Recife); (Recife, Brasília);
  - 2 arestas
- Distância
  - (Paris, Brasília)=2



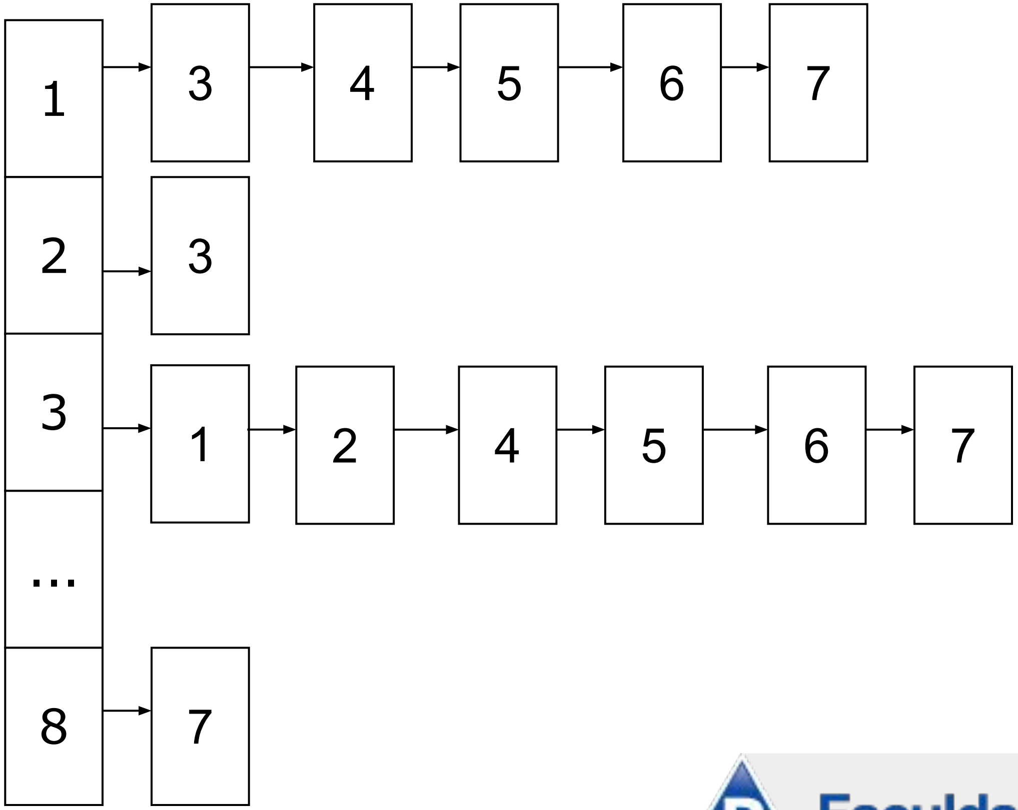
Representação Interna

- Matriz de adjacências
  - Binária (1 ou 0)
  - Inteira ou reais (pesos)
  - Existe ou não aresta entre dois pontos
  - $O(n^2)$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	1	1	1	1	1	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	1	1	1	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0
5	0	0	1	1	0	1	1	0
6	0	0	1	0	1	0	1	0
7	0	0	1	0	1	1	0	1
8	0	0	0	0	0	0	1	0

Representação Interna

- Listas de Adjacências
  - Cada célula do array possui um apontador para uma lista de arestas que incidem neste vértice.
  - O(n+2m)



Grafos

- Subgrafo
  - Um **subgrafo** G'(V', E') de G(V, E) é um grafo tal que:
  - $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$
  - ou seja, é um subconjunto de um grafo maior

- Grafos Conexos
  - São grafos onde existe um caminho de um vértice para qualquer outro.

Grafos e Árvores

- Listas, Pilhas e Filas
  - Estruturas lineares
  - Cada nó possui um antecessor e um sucessor
- Árvores (estruturas não-lineares)
  - Cada nó pode ter vários sucessores e apenas um antecessor
  - Relação Hierárquica

Árvores

Árvore genealógica

Árvores

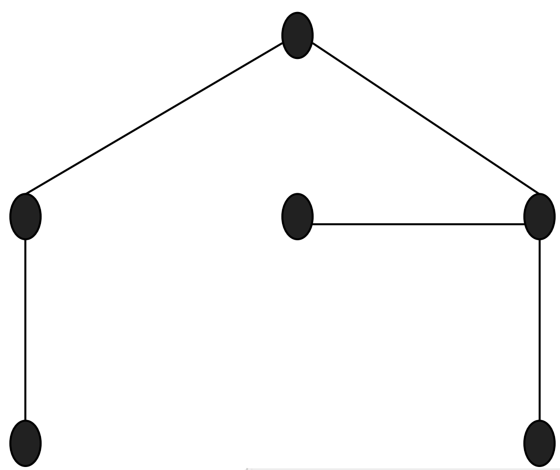
- Definição formal
  - **Árvore enraizada**
  - Conjunto finito de um ou mais nós, tais que:
    - existe um nó denominado raiz
    - os demais nós formam
      - s_1, s_2, ... s_m, m >= 0, conjuntos disjuntos
      - Cada um desses conjuntos (s_1, s_2, ... s_m) também é uma árvore (sub-árvore)

Árvores

- Terminologia
  - **RAIZ**
    - Nó de origem da árvore;
  - **FOLHAS**
    - Nós que não têm filhos;
  - **GRAU DE UM NÓ**
    - Número de filhos de cada nó (número de sub-árvores de um nodo);
  - **NÍVEL DE UM NÓ**
    - Para a raiz o nível é zero (por definição)
    - Para os demais nós é a distância do nodo até o nodo raiz;
  - **ALTURA DA ÁRVORE**
    - É o nível mais alto da árvore;

Árvores (T)

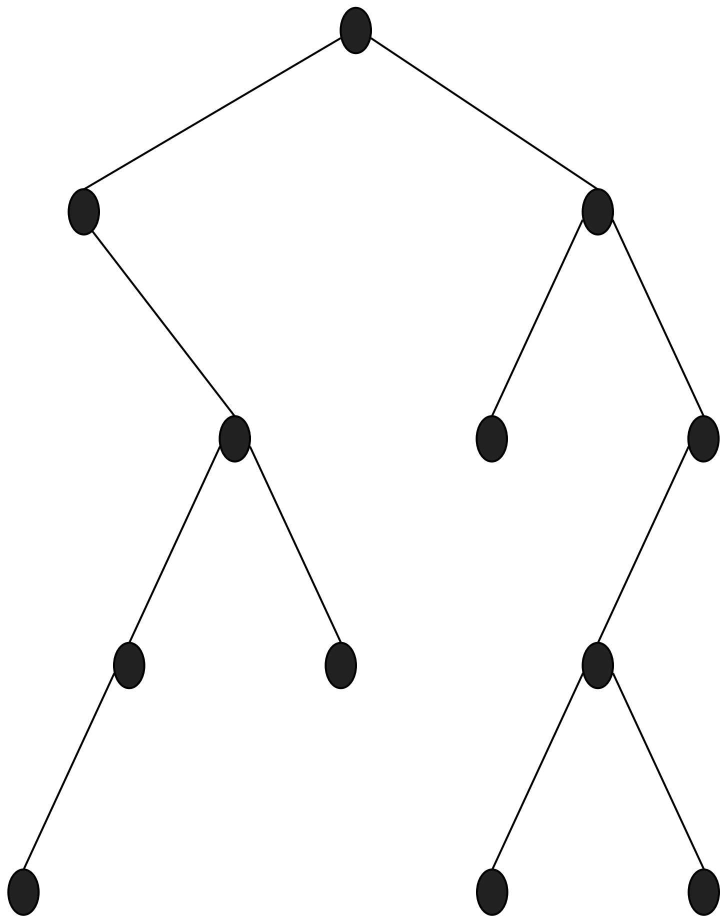
- Uma árvore T(V,E) é um grafo acíclico e conexo
- Uma árvore T(V,E) é um grafo(simples), conexo com n-1 arestas (onde n é o número de vértices).



Árvore Binária

- Definição recursiva:
- Conjunto finito de nós que
  - Ou não contém nenhum nó
  - Ou, é formada por três conjuntos disjuntos de nós
    - Raiz
    - Sub-árvore da esquerda
    - Sub-árvore da direita
  - Se tem apenas 1 filho, indica-se se é da direita ou da esquerda

Árvore Binária



Árvore Binária

Raiz?

Folhas?

Intermediários?

Pai?

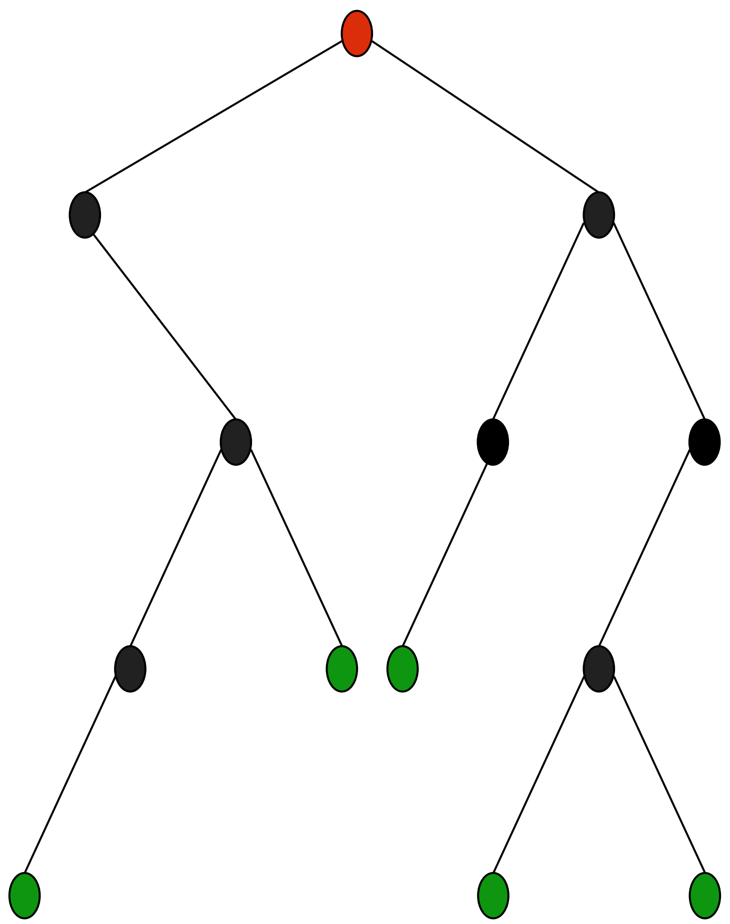
Filho esquerdo?

Filho direito?

Ascendentes?

Descendente?

Intermediários?



Árvore Binária

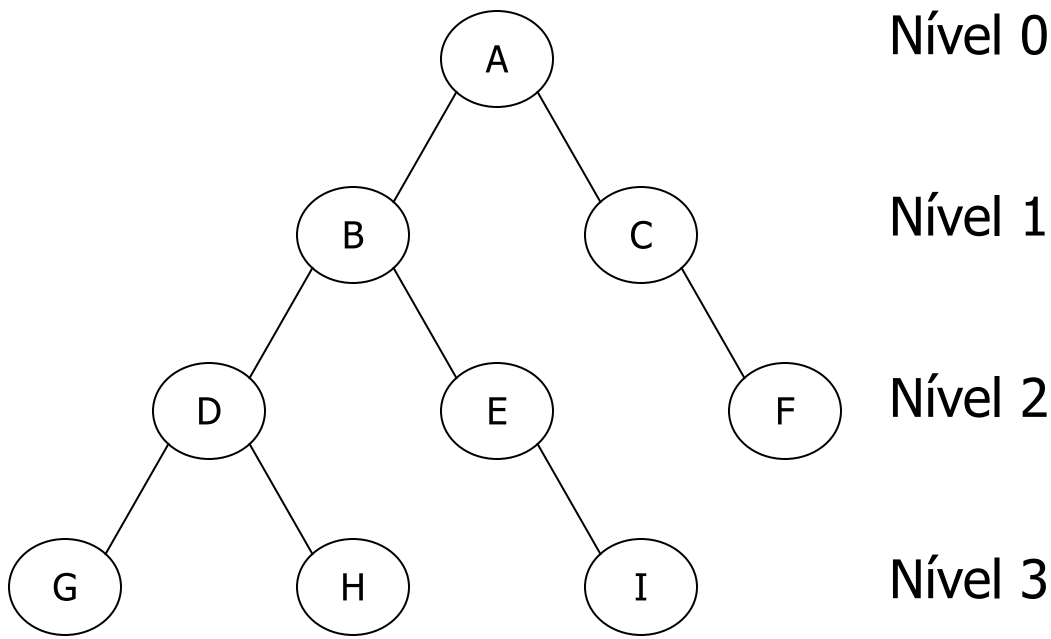
Profundidade: distância de um vértice (nó) em relação a raiz

Altura (h): número máximo de arestas em qualquer caminho da raiz até uma folha.

Número máximo de elementos: $n_{max}=2^{h+1} - 1$ elementos

Árvores Binárias: Profundidade

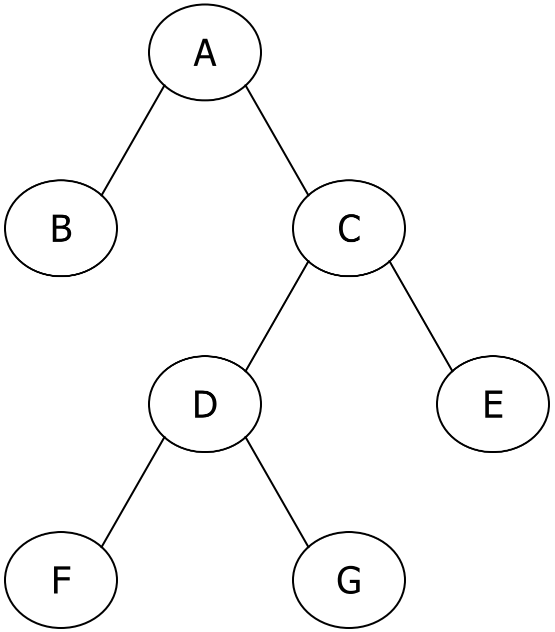
- A profundidade ou altura de uma árvore binária é determinada pelo seu maior nível.



A profundidade ou altura (h) da árvore binária acima é 3 (h=3).

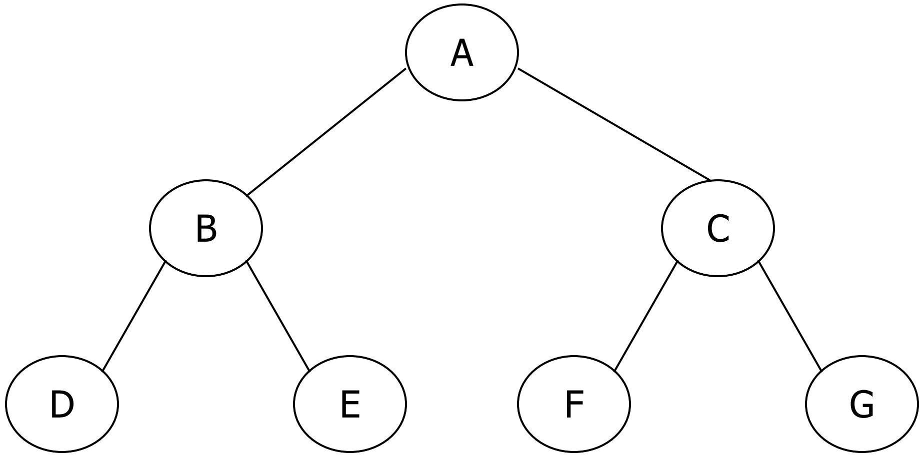
Árvores Binárias: Tipos

- Árvore Estritamente Binária:
  - Todo nó não-folha deve ter sub-árvores esquerda e direita não vazias.



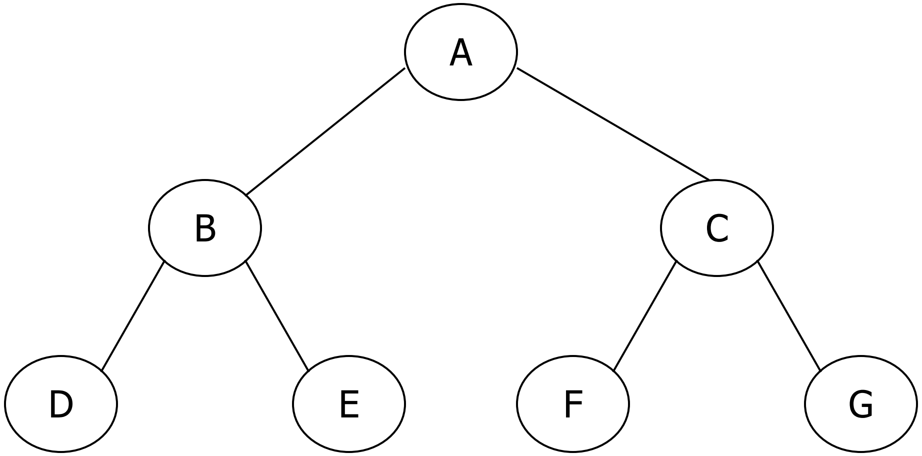
Árvores Binárias: Tipos

- Árvore Binária Completa:
  - É uma árvore estritamente binária em que todas as folhas estão no nível máximo da árvore.



Árvores Binárias Completas

- Cálculo do Número de Nós:
  - O número de nós (n) é obtido com a fórmula abaixo, sendo fornecida a altura (h) da mesma.

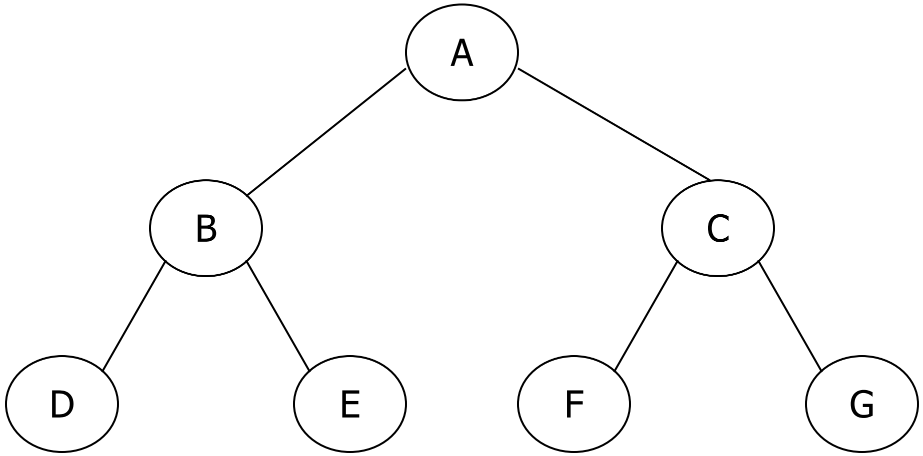


$$n = 2^{h+1} - 1$$

Ex.: Na árvore acima de altura h=2, obtemos facilmente com a fórmula ao lado que o número de nós desta árvore binária completa é n=7.

Árvores Binárias Completas

- Cálculo da Altura:
  - Sabendo-se o número de nós (n), pode-se com a fórmula abaixo obter-se a sua altura (h).



$$h = \log_2^{n+1} - 1$$

Ex.: Na árvore binária completa acima, cujo número de nós é n=7, obtemos com a fórmula ao lado que sua altura é h=2.