Lista 2 de Econometria
Diogo Wolff Surdi

April 3, 2020

Questão 1

(a)

$$(XX')' = (X')'X' = XX'$$

(b)

Primeiramente, note que

$$[(X'X)^{-1}]' = [(X'X)']^{-1} = [X'(X')']^{-1} = (X'X)^{-1}$$

Com isso, temos que:

$$N' = [X(X'X)^{-1}X']' = (X')'[(X'X)^{-1}]'X' = X(X'X)^{-1}X' = N$$

Para $M = I - N$, temos que:

$$M' = (I - N)' = I' - N' = I - N = M$$

Questão 2

(a)

TCL (Lindeberg-Levy; versão vetorial): Seja $\{z_i\}$ $i.i.d.$ com $\mathbb{E}[z_i] = \mu$ e $Var(z_i) = \Sigma$. Então:

$$\sqrt{n}(\bar{z}_n - \mu) \underset{d}{\rightarrow} N(0, \Sigma)$$

(b)

LGN fraca:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\bar{z}_n] = \mu,\ \lim_{n\to\infty} Var(\bar{z}_n) = 0 \Longrightarrow \bar{z}_n \underset{p}{\rightarrow} \mu$$

(c)

Como pode se ver nas definições, a lei dos grandes números garante a convergência em probabilidade da média amostral à média teórica (esperança). Por sua vez, o teorema central do limite garante a convergência em distribuição da média amostral corrigida por $\sqrt{n}$ a uma distribuição normal.

Questão 3

Como $\hat{\beta}_1$ é consistente, temos que $plim(\hat{\beta}_1) = \beta_1$. Ademais, pela LGN, sabemos que $\bar{y} \underset{p}{\rightarrow} \mathbb{E}[y]$ e $\bar{x} \underset{p}{\rightarrow} \mathbb{E}[x]$. Com isso, $\hat{\beta}_0 = \bar{y} + \hat{\beta}_1\bar{x}$ implica que $plim(\hat{\beta}_0)$ existe, pois é função contínua de variáveis que possuem $plim$. Logo:

$$plim(\hat{\beta}_0) = plim(\bar{y} + \hat{\beta}_1\bar{x}) = \mathbb{E}[y] + \beta_1\mathbb{E}[x] = \beta_0$$

Questão 4

(a)

Seja $y = X\hat{\beta}$. Nosso objetivo é encontrar

$$b = \underset{\hat{\beta}_0}{argmin}(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta})$$

Sabemos que $(y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) = y'y - \hat{\beta}'X'y - y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta} = y'y - 2y'X\hat{\beta} + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}$. Derivando em $\hat{\beta}$ encontramos que:

$$\frac{\partial(y'X\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = X'y; \;\; \frac{\partial(\hat{\beta}'X'X\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}} = 2X'X\hat{\beta}$$

Igualando a derivada a 0, encotramos que $2X'y = 2X'X\hat{\beta}$. Logo

$$X'y = X'X\hat{\beta} \Longrightarrow \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y$$

(b)

Basta provar que $plim\hat{\beta} = \beta$. Sabemos que $y = X\beta + \epsilon$, logo

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'(X\beta + \epsilon) \\ &= (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'\epsilon \;\; \therefore\end{aligned}$$

$$\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'\epsilon$$

Com isso, podemos reescrever essa equação em termos de médias amostrais:

$$\hat{\beta} - \beta = \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}X'\epsilon\right)$$

$$plim(\hat{\beta}) = \beta + \left(plim\frac{1}{n}X'X\right)^{-1} plim\left(\frac{1}{n}X'\epsilon\right)$$

Pela LGN, $\left(plim\frac{1}{n}X'X\right)^{-1} = S_{XX}^{-1}$. Ademais, $plim\left(\frac{1}{n}X'\epsilon\right) = \mathbb{E}[X'\epsilon] = 0$. Logo, temos

$$plim(\hat{\beta}) = \beta + S_{XX}^{-1} \times 0 = \beta$$

(c)

Seja $A = (X'X)^{-1}X'$, e note que $AA' = (X'X)^{-1}X'[(X'X)^{-1}X']' = (X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}$

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}|X) &= Var(\hat{\beta} - \beta|X) \\
&= Var(A\epsilon|X) \\
&= AVar(\epsilon|X)A' \\
&= A\mathbb{E}[\epsilon\epsilon'|X]A' \\
&= A(\sigma^2 I_n)A' \\
&= \sigma^2 AA' \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}
\end{aligned}$$

(d)

Temos que $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) = \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}X'\epsilon\right)$. Pelo TCL, $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}X'\epsilon\right) \underset{d}{\to} N(0, \sigma^2 S_{XX})$. Agora, basta utilizar o teorema de Slutsky.

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) = \left(\frac{1}{n}X'X\right)^{-1}\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}X'\epsilon\right) \underset{d}{\to} S_{XX}^{-1}N(0, \sigma^2 S_{XX}) = N(0, \sigma^2 S_{XX}^{-1})$$

Questão 5

Se funds e risctol são positivamente correlacionados, então o aumento de funds gerará não só um aumento direto em pctação como também um aumento direto em risctol, e esse aumento gerará um aumento secundário em pctação, levando a um aparente impacto maior de funds em pctação. Com isso, o coeficiente de inclinação de funds será sobreestimado. Desse modo, a estimação assintótica também será enviesada. Matematicamente, temos que $plim\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \beta_2\frac{Cov(x_1,x_2)}{Var(x_1)}$.

Questão 6

```
A <- matrix(
c(0,1/4,1/8,1/4,1/8,1/10,1/8,1/10,1/10),
ncol=3, nrow=3,
byrow=TRUE
)

I <- diag(3)

approx = I+A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6+A^7+A^8+A^9
```

A aproximação é:

```
approx

> approx
     [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.3333321 0.1428571
[2,] 0.3333321 1.1428571 0.1111111
[3,] 0.1428571 0.1111111 1.1111111
```

O valor real é:

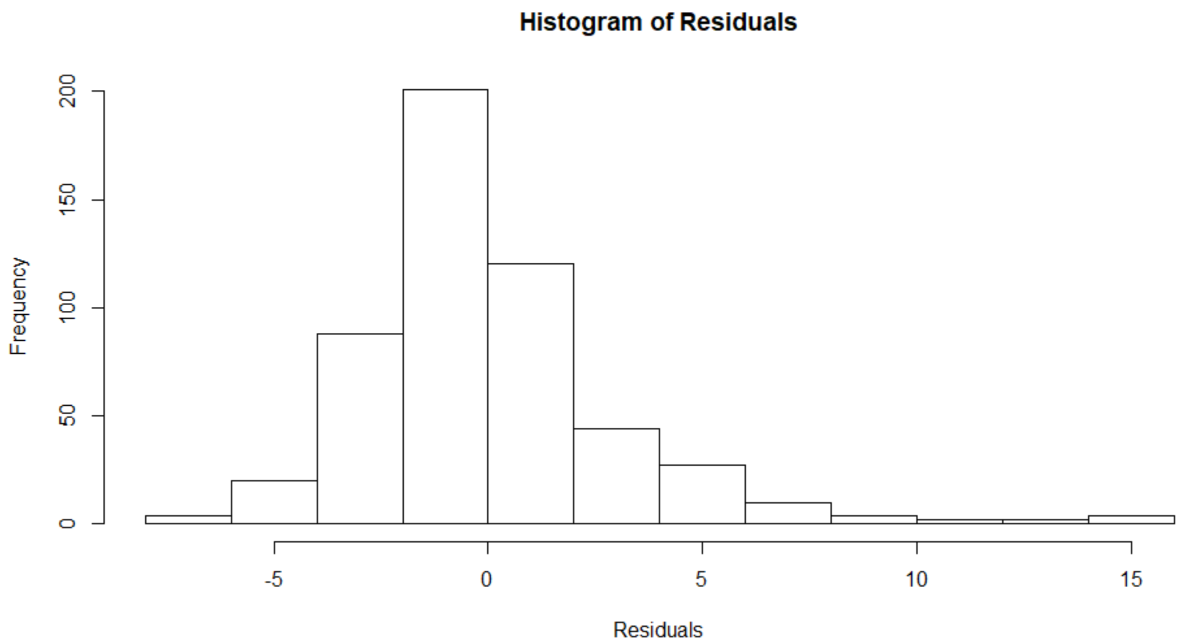
```
solve(I-A)

> solve(I-A)
     [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.1086109 0.3386432 0.1916008
[2,] 0.3386432 1.2610003 0.1871449
[3,] 0.1916008 0.1871449 1.1585162
```

A aproximação tem precisão variada, entre 1 e 2 casas decimais.

Questão 7

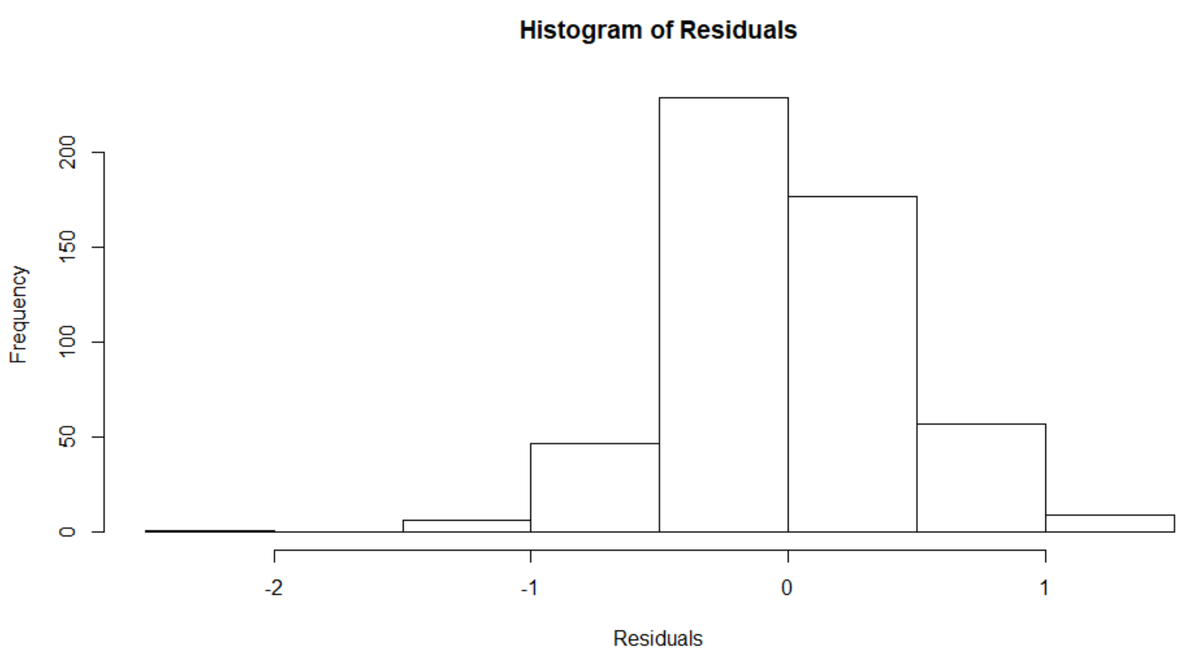
(a)

```
library(foreign)
dados <- read.dta('C:/.../wage1.dta')
reg <- lm(wage ~ educ + exper + tenure, dados)
Residuals <- resid(reg)
hist(Residuals)
```



(b)

```
lreg <- lm(log(wage) ~ educ + exper + tenure, dados)
Residuals <- resid(lreg)
hist(Residuals)
```

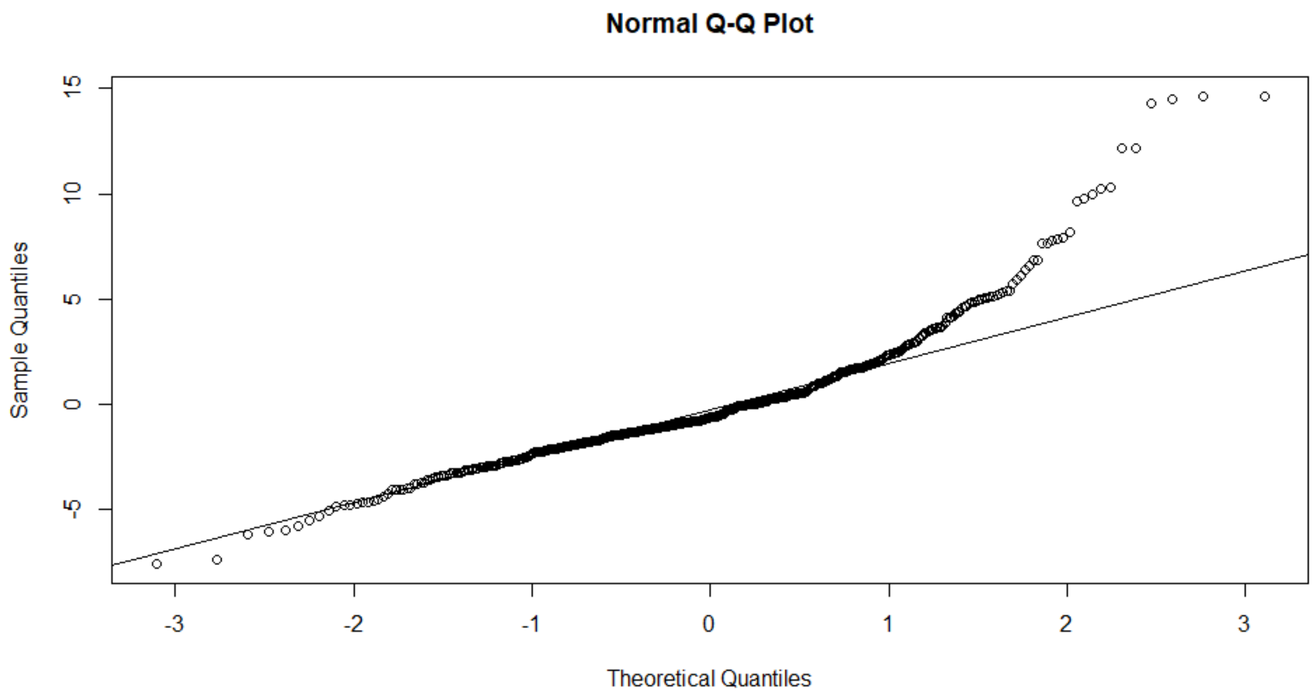


(c)

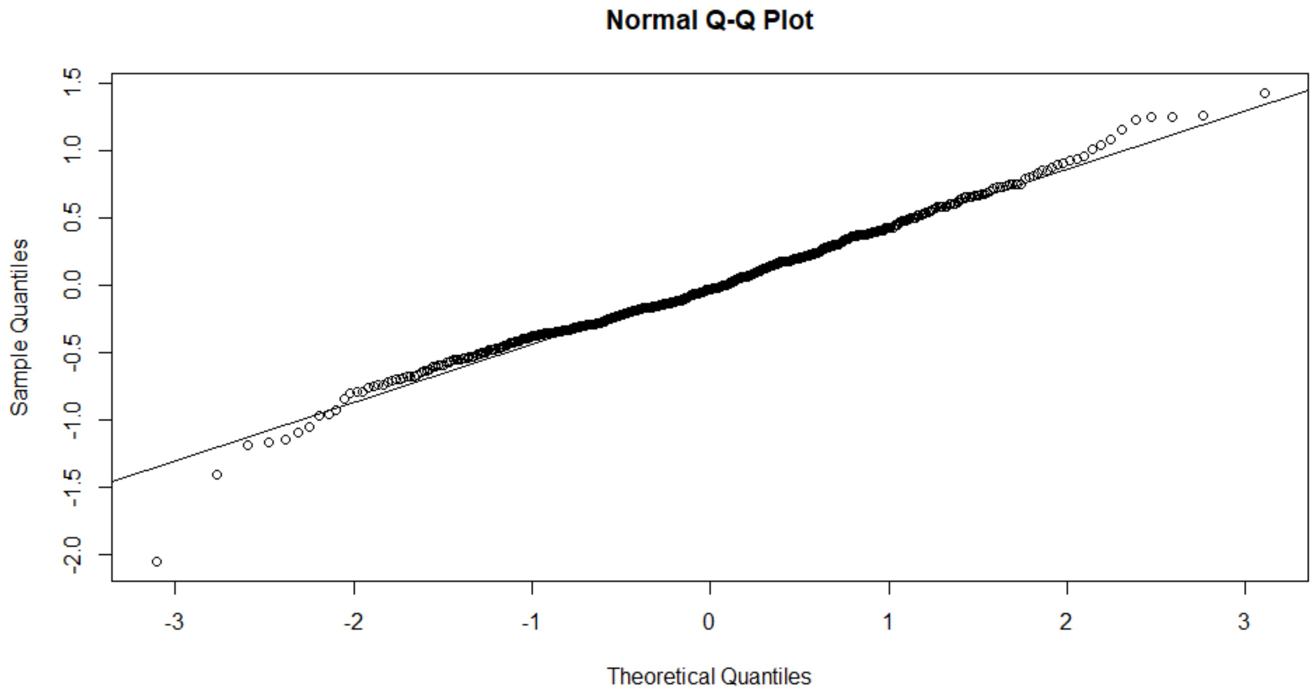
MLR.6: O erro populacional é independente das variáveis do modelo e tem distribuição normal.

Para averiguar qual das distribuições mais se aproxima de uma normal, vou utilizar um QQ-plot empírico e comparar qual aparenta maior semelhança.

```
reg <- lm(wage ~ educ + exper + tenure, dados)
Residuals <- resid(reg)
qqnorm(Residuals); qqline(Residuals)
```




```
lreg <- lm(log(wage) ~ educ + exper + tenure, dados)
lResiduals<- resid(lreg)
qqnorm(lResiduals); qqline(lResiduals)
```



Os quantis da regressão log-linear são muito mais próximos dos quantis da normal do que os quantis da regressão linear. Com isso, a MLR.6 provavelmente é melhor satisfeita com o modelo log-linear.