Lista 3
Finanças Quantitativas
Diogo Wolff Surdi

May 1, 2020

Questão 3.11

11.1

A P.D.F. de uma variável normal (0,1) é:

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}, \qquad -\infty < y < \infty$$

Ao tirar seu módulo ('dobrar' ela em 0), temos a P.D.F.:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{x^2}{2}}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \geq 0$$

Para encontrar o valor esperado, basta calcular a integral

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Integrando por partes, encontramos então que $\mathbb{E}[|X|] = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

11.2

Para o valor esperado, basta notar que, em valor esperado, o termo entre parênteses se cancela, tornando a equação inteira 0. Para a variância, é preciso calcular a variância de $|X|$. Resolvendo a integral definida

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Encontramos $\mathbb{E}[|X|^2] = 1$, logo a variância de $|X|$ é $1 - \frac{2}{\pi}$. Para a variância de Y, basta utilizar algumas propriedades da variância.

$$Var(Y) = \frac{1}{1 - \frac{2}{\pi}} Var(|X|) = \frac{1 - \frac{2}{\pi}}{1 - \frac{2}{\pi}} = 1$$

Basta mostrar que $Cov(X,Y) = 0$. Primeiramente, temos que $\mathbb{E}[X] = 0$, logo $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY]$. Também devido ao valor esperado nulo, temos

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}\left[\frac{X|X|}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{\pi}}}\mathbb{E}[X|X|]$$

Note que o valor esperado de $\mathbb{E}[X|X|]$ é

$$-\int_{-\infty}^{0} x^2 f_x dx + \int_{0}^{\infty} x^2 f_x dx$$

Como a normal é simétrica, tais valores se anulam, logo a covariância é 0, e as variáveis não são correlacionadas.

Questão 3.12

12.1

Temos que a cópula de X e Y é definida por:

$$C(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$

Note que $\mathbb{P}(\max(X,Y) \leq t)$ é a probabilidade de cada uma das variáveis seja menor ou igual a t, isto é:

$$\mathbb{P}(\max(X,Y) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t, Y \leq t)$$

Logo vale a igualdade requisitada.

12.2

O evento do mínimo ser menor ou igual a t equivale à união dos eventos de que cada distribuição é menor ou igual a t. Com isso, note que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Sabendo que a cópula é a distribuição conjunta, isto é, a distribuição da interseção dos eventos, basta substituir os valores:

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq t) = F_X(t) + F_Y(t) - C(F_X(t), F_Y(t))$$

Questão 1

(a)

Temos uma partição de uma distribuição normal multivariada, e queremos mostrar que cada termo da partição também é uma normal multivariada. Como os elementos do vetor da partição são elementos do vetor original, e como sabemos que o vetor original é uma normal multivariada, então cada um de seus elementos é uma variável normal. Com isso, qualquer combinação linear de elementos da partição, isto é, qualquer $Y = a^T X_1$, é uma combinação linear de variáveis normais, logo é normal, logo X_1 é uma distribuição normal multivariada.

(b)

Sabe-se que a distribuição condicional de uma gaussiana multivariada é também gaussiana. Com isso, basta encontrar sua média e variância.
Seja $Y = X_1 + KX_2$ (onde $K = -\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}$), então, a covariância entre Y e X_2 é:

$$\begin{aligned}
cov(Y, X_2) &= cov(X_1, X_2) + Kcov(X_2, X_2) \\
&= \Sigma_{1,2} + KVar(X_2) \\
&= \Sigma_{1,2} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, as variáveis não são correlacionadas, e, como são parte de uma variável gaussiana conjunta, elas são independentes, logo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1|X_2] &= \mathbb{E}[Y - KX_2|X_2] \\
&= \mathbb{E}[Y|X_2] - KX_2 \\
&= \mathbb{E}[Y] - KX_2
\end{aligned}$$

Pelas propriedades do valor esperado, temos que $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_1] + K\mathbb{E}[X_2] = \mu_1 + K\mu_2$. Com isso:

$$\mathbb{E}[X_1|X_2] = \mu_1 + K\mu_2 - KX_2 = \mu_1 + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}(X_2 - \mu_2)$$

Basta agora calcular a variância condicional de X_1. Note que

$$\begin{aligned}
Var(X_1|X_2) &= Var(Y - KX_2|X_2) \\
&= Var(Y|X_2) + Var(AX_2|X_2) - ACov(Y, -X_2) - Cov(Y, -X_2)A^T \\
&= Var(Y|X_2) \\
&= Var(Y)
\end{aligned}$$

E com isso:

$$\begin{aligned}
Var(X_1|X_2) &= Var(X_1) + AVar(X_2)A^T + ACov(X_1, X_2) + Cov(X_2, X_1)A^T \\
&= \Sigma_{1,1} + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1} - 2\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1} \\
&= \Sigma_{1,1} + \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1} - 2\Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1} \\
&= \Sigma_{1,1} - \Sigma_{1,2}\Sigma_{2,2}^{-1}\Sigma_{2,1}
\end{aligned}$$

Questão 2

(a)

(b)

Para $\theta = 1$, temos que a fórmula da cópula é igual a uv, logo as variáveis são independentes.
Para $\theta \to \infty$, a fórmula se torna $\min u, v$, logo há dependência completa.