Lista 2 de Finanças Quantitativas
Diogo Wolff Surdi

April 17, 2020

Questão 1

A distribuição da GPD é:

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi\frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}},\ \xi \neq 0 \\ 1 - exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}),\ \xi = 0 \end{cases}$$

Note que $F_{\mu,\sigma,\xi}(x)$, a c.d.f. da GPD, equivale a $\mu + \sigma X$, onde $X \sim Pareto(\frac{1}{\xi})$. Sabemos que a esperança de uma distribuição de Pareto é $\frac{\alpha}{\alpha-1}$. Com isso, temos que:

$$\mathbb{E}[\mu + \sigma X] = \mu + \sigma \mathbb{E}[X] = \mu + \sigma \frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\xi} - 1} = \mu + \frac{\sigma}{1 - \xi}$$

A mean excess function é $e(l) = \mathbb{E}[X - l | X > l]$. Temos então que:

$$e(l) = \frac{\mathbb{E}[(X-l)\mathbb{1}_{X>l}]}{\mathbb{P}(X > l)} = \frac{\int_x^\infty 1 - F(u)du}{1 - F_x} = \frac{\sigma + \xi(u - \mu)}{\xi - 1}$$

Essa função é linear em u, como esperado.

Questão 2.2

1.1

$$X \sim Pareto(\frac{1}{\xi}) \Rightarrow F_X = \begin{cases} 1 - (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}\ se\ x > 0 \\ 0\ c.c. \end{cases}$$

1.2

$Q = F^{-1}$. Com isso, temos que:

$$1 - (1 + \xi Q)^{-\frac{1}{\xi}} = p \Longrightarrow Q = \frac{(1-p)^{-\xi} - 1}{\xi}$$

1.3

Para gerar amostras de F, basta-se tomar valores de $Q(U)$.

2

Para essa distribuição, a probabilidade de se estar em um intervalo é a probabilidade de ele ocorrer em cada distribuição, dado que foi escolhida alguma delas, multiplicada pela probabilidade de se escolher tal distribuição. Com isso, f_y é combinação linear das duas distribuições.

$$f_y(y) = \frac{1}{3}\frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2} - \frac{2}{3}\left(1+\frac{y}{2}\right)^{-3}$$

3

O processo seria o mesmo do item anterior, gerando a CDF de y, encontrando sua inversa e então utilizando $F_y^{-1}(U)$.

Questão 2.3

1.1

$$F_L(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-rx} & x \geq 0 \end{cases}$$

Basicamente, o valor da perda é 0 para um retorno não-negativo, e tem a distribuição dada pela questão para retornos negativos.

1.2

Questão 2.4

1

O arquivo PCS tem 381 observações, logo geraremos 1905 amostras. Devo observar que o R não estava encontrando a função rpareto, então tive que instalar outro pacote (gPdtest) para gerar as amostras. Esse pacote gera amostras sem o fator de localização m, então somei a estimação dele na amostra.

```
library(Rsafd)
library(gPdtest)
PCS.index <- PCS[,2]
PCS.lmom <- gpd.lmom(PCS.index)$param.est

> PCS.lmom
m        lambda              xi
```

```
0.06824332  0.66804349  0.71179240

PCS.rlmom <- rgp(n=1905, shape=PCS.lmom[3], scale=PCS.lmom[2])
m=PCS.lmom[1]
samplelmom <- PCS.rlmom + m

> head(sample)
[1] 0.3949272 0.8675918 0.4172077 0.6950772 0.7066541 5.0894675
```

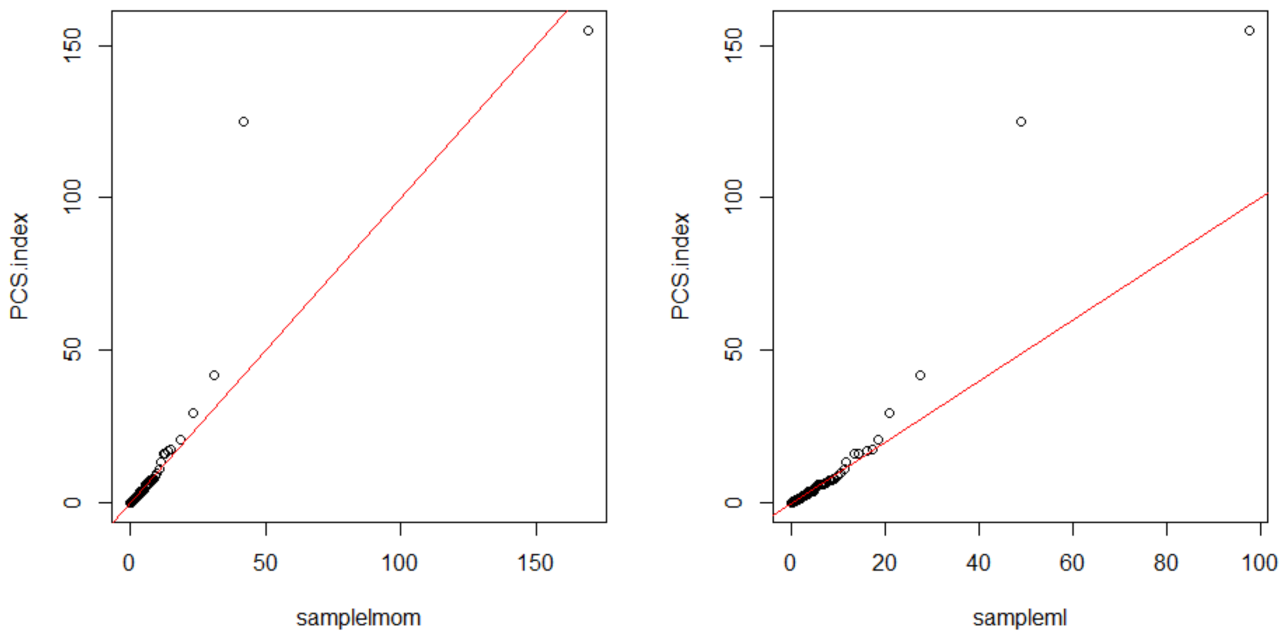
Acima gerei a amostra com o método de L-momentos. Também irei gerar a amostra com o método de máxima verossimilhança:

```
PCS.ml <- gpd.ml(PCS.index)$param.est

> PCS.ml
m       lambda          xi
0.0700000  0.7130693  0.6335170

PCS.rml <- rgp(n=1905, shape=PCS.ml[3], scale=PCS.ml[2])
m2=PCS.ml[1]
sampleml <- PCS.ml+m2

> head(sampleml)
[1] 0.2020278 3.0497405 0.8195610 0.3338650 0.8188285 2.0959607
```

2

Nesse item, vou plotar os QQ-plots de ambos os métodos, e tentar ver se algum deles é melhor.

```
par(mfrow=c(1,2))

qqplot(samplelmom, PCS.index)+abline(0,1, col='red')
qqplot(sampleml, PCS.index)+abline(0,1, col='red')
```



Como pode-se ver, ambos têm problemas na estimação para os últimos quantis.

3

```
> ks.test(samplelmom, PCS.index)

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  samplelmom and PCS.index
D = 0.071391, p-value = 0.07861
alternative hypothesis: two-sided
```

Questão 2.6

1

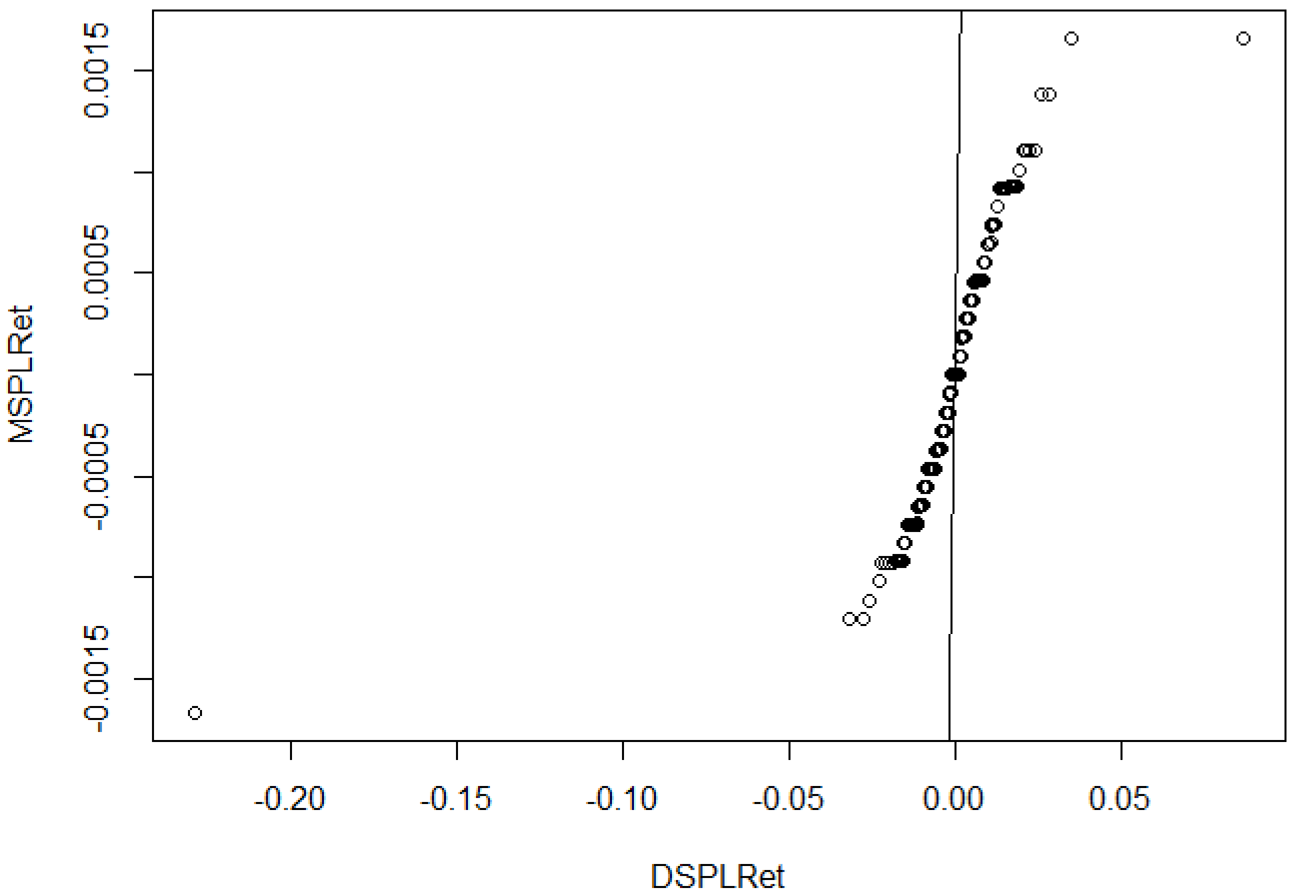
```
DSPLRet <- diff(log(DSP))

> head(DSPLRet)
[1]  0.007980092 -0.004314643 -0.007344383 -0.003188190 -0.012344792
 -0.006144413
```

2

```
MSPLRet <- diff(log(MSP))

> head(MSPLRet)
[1] -0.0016680571  0.0002782028  0.0009267841  0.0004630702  0.0000000000
0.0011104943
```

3

```
qqplot(DSPLRet, MSPLRet)+abline(0,1)
```



Pelo formato do Q-Q plot, os retornos diários aparentam ter caudas mais pesadas do que os retornos minuto a minuto.

4

```
> mean(DSPLRet)
[1] 0.0002717871
```

```
> var(DSPLRet)
[1] 8.418932e-05

> mean(MSPLRet)
[1] 2.446315e-05

> var(MSPLRet)
[1] 2.4412e-07
```

Os valores esperados são parecidos, porém a variância dos retornos diários é muito maior, logo eles provavelmente não vêm da mesma distribuição.

5

Novamente, o R não está reconhecendo a função fit.gpd do pacote Rsafd. Vou utilizar a função fit.gpd do pacote gld.

```
> fit.gpd(DSPLRet)
Region A:
Estimate      Std. Error
alpha      0.0005402    0.0001341
beta       0.0072581    0.0001206
delta      0.4844521    0.0094871
lambda    -0.1590021    0.0106103

Region B:
Estimate      Std. Error
alpha     -0.0005888    0.0003339
beta       0.2720552    0.0034761
delta      0.5112843    0.0036330
lambda     6.1343819    0.0648509

> fit.gpd(MSPLRet)
Region A:
Estimate      Std. Error
alpha     -1.093e-08    4.942e-05
beta       6.388e-04    5.300e-05
delta      5.211e-01    3.873e-02
lambda     9.971e-02    5.149e-02

Region B:
Estimate    Std. Error
alpha     7.162e-05   6.537e-05
beta      9.745e-03   6.286e-04
delta     4.868e-01   1.707e-02
lambda    4.456e+00   2.474e-01
```