



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Εργαστήριο ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΩΝ



## ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

# ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΠΕΛΑΣ ΑΕΡΟΣΚΑΦΟΥΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ «WHIRL FLUTTER»

---

ΤΣΙΧΛΑΚΗΣ ΔΙΟΓΕΝΗΣ

A.E.M. 6216

Επιβλέπων : Καθηγητής Νατσιάβας Σωτήριος

Συνεπιβλέπων : Υπ. Διδ. Ντινόπουλος Ιωάννης

Θεσσαλονίκη, Σεπτέμβριος 2022

«*H λέξη επιστήμονας προέρχεται από το ρήμα επίσταμαι ( ἐπ- + ἴσταμαι), το οποίο σημαίνει «ξέρω καλά», «γνωρίζω με βεβαιότητα». Ως επιστήμονες μηχανικοί οφείλουμε να γνωρίζουμε σε βάθος τις θεμελιώδεις φυσικές αρχές και πατώντας πάνω σε αυτές, να επιλύνουμε πραγματικά φυσικά προβλήματα».*

*Αγνωστος X.*

## Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής αποτελεί η αεροελαστική ανάλυση μιας προπέλας αεροσκάφους turboprop και η παραμετρική μελέτη της ευστάθειας της προπέλας, σχετικά με το δυναμικό αεροελαστικό φαινόμενο «Whirl Flutter». Συγκεκριμένα στο 2<sup>o</sup> κεφάλαιο, αφού σχεδιάσουμε το τρισδιάστατο μοντέλο της προπέλας, περιγράφουμε τα σημαντικά φορτία και φαινόμενα που αναπτύσσονται σε αυτήν, κατά την λειτουργία, τα οποία μάλιστα είναι αυτά που θέλουμε να μελετήσουμε στην υπόλοιπη ανάλυση.

Γνωρίζοντας πλέον, τις βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά για προπέλες αεροσκαφών turboprop, προχωράμε στο 3<sup>o</sup> κεφάλαιο, όπου επιλύεται το ρευστομηχανικό πρόβλημα με στόχο τον υπολογισμό των αποκρίσεων των δυνάμεων και των ροπών, αλλά και τον υπολογισμό της κατανομής πίεσης για την προπέλα. Τα φορτία αυτά αναλύονται στο πεδίο της συχνότητας, με εφαρμογή της ανάλυσης Fourier, όπου παρατηρούμε την σημαντική επιρροή των αρμονικών συνιστωσών στην καταπόνηση της κατασκευής.

Με όλες τις βασικές έννοιες, σχετικά με την ρευστομηχανική φύση του προβλήματος, να έχουν παρουσιαστεί έως το σημείο αυτό, εισάγουμε στο μοντέλο μας την ελαστικότητα της κατασκευής. Στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο επιλύεται το αεροελαστικό πρόβλημα, όπου παρατηρούμε αρχικά την επιρροή των συνθηκών λειτουργίας (ταχύτητα περιστροφής και πτήσης) στα χαρακτηριστικά των φυσικών ιδιομορφών/ιδιοσυχνοτήτων. Επιπλέον, βλέπουμε τις διαφορετικές τάξεις μεγέθους των τροπών, τάσεων και μετατοπίσεων για την κατασκευή μας στις διαφορετικές διευθύνσεις, αλλά και την εσωτερική απόσβεση που εισάγεται στο σύστημα λόγω των αεροδυναμικών φορτίων. Τα αεροδυναμικά φορτία παρατηρούμε ότι καταλήγουν να λειτουργούν ως δύναμη περιοδικής διέγερσης στην μόνιμη κατάσταση. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού, γίνεται σύγκριση ανάμεσα στα πλάτη ταλάντωσης των αρμονικών συνιστωσών των δυνάμεων και ροπών, που υπολογίστηκαν από το ρευστομηχανικό πρόβλημα του 3<sup>o</sup> κεφαλαίου για στερεή προπέλα και αυτών που υπολογίστηκαν κατά το αεροελαστικό πρόβλημα. Επίσης, συγκρίνονται και οι διαφορετικές κατανομές του συντελεστή πίεσης για τις ίδιες διατομές ανάμεσα στα δύο προβλήματα.

Στο τελευταίο κομμάτι της διπλωματικής, διαφοροποιούμε το μοντέλο και μελετάμε τα όρια ευστάθειας για το γυροσκοπικό φαινόμενο «Whirl Flutter», το οποίο οφείλεται στην παραμορφώσιμη έδραση του κινητήρα πάνω στην πτέρυγα. Συγκεκριμένα, πραγματοποιείται η κατάστρωση των εξισώσεων του συστήματος με χρήση των εξισώσεων του Lagrange, όπου τα αεροδυναμικά φορτία υπολογίζονται με βάση την θεωρία «Strip Theory». Εφαρμογή στην συνέχεια της μεθόδου των ιδιομορφών, μας δίνει τις περιοχές ευστάθειας και αστάθειας (Whirl Flutter, Static Divergence). Μεταβάλλοντας κατόπιν διαφορετικές παραμέτρους, παίρνουμε τα διαγράμματα ευστάθειας. Επιπλέον, για καλύτερη κατανόηση του φαινομένου παρουσιάζονται και τα διαγράμματα απόκρισης για την πλήμνη της προπέλας για την λειτουργία σε περιοχή ευστάθειας, οριακής ευστάθειας, αστάθειας «Whirl Flutter» και αστάθειας «Static Divergence».

Στο πλαίσιο της διπλωματικής, ο σχεδιασμός του μοντέλου πραγματοποιήθηκε στο λογισμικό Inventor της εταιρίας Autodesk, ενώ το ρευστομηχανικό και αεροελαστικό πρόβλημα επιλύθηκαν στα λογισμικά Fluent και Mechanical της εταιρίας ANSYS. Η μελέτη του φαινομένου ευστάθειας έγινε με αυτοτελή κώδικα σε προγραμματιστική γλώσσα Matlab.

## Abstract

This thesis aims to analyze the aeroelasticity of a turboprop propeller and the parametric study of the propeller's stability with respect to the dynamic aeroelastic phenomenon "Whirl Flutter". Specifically, in chapter two, after designing the three-dimensional model of the propeller, the important loads and phenomena that develop during operation are described and are also the ones that we will study in the rest of the analysis.

Having presented the basic concepts and characteristics of turboprop propellers, we proceed to the third chapter where the fluid mechanics problem is solved in order to calculate the force and moment responses and the pressure distribution for the propeller. These loads are analyzed in the frequency domain by applying "Fourier analysis" and the significant influence of the harmonic components for the structure's stress are observed.

After presenting the basic concepts concerning the fluid-mechanical nature of the problem, the elasticity of the structure is introduced. The aeroelastic problem is solved in chapter four and the influence of the operating conditions (rotation and flight speed) on the characteristics of the physical eigenmodes/eigenfrequencies are observed. Furthermore, the different orders of magnitude of the deformations, stresses, and displacements of the structure in the different directions are observed and the internal damping is introduced in the system due to the aerodynamic loads, which end up acting as a periodic excitation force in the steady state. At the end of chapter four, a comparison is made between the amplitudes of oscillation of the harmonic components of the forces and moments which have been calculated by the fluid mechanics problem in chapter three and those that have been calculated in the analysis of chapter four. The different distributions of the pressure coefficient for the same cross sections between the two problems are also compared.

In the last part of this thesis, the model is modified and the stability limits for the gyroscopic phenomenon "Whirl Flutter" is studied. This phenomenon occurs when the engines support on the wing is considered elastic. More specifically, the system equations are carried out using Lagrange's equations, where the aerodynamic loads are calculated based on the "Strip Theory". Applying then the method of eigenmodes gives us the stability and instability regions (Whirl Flutter, Static Divergence). By altering then different parameters the stability diagrams are obtained. In addition, we present the propeller hub's response diagrams, when the propeller operates in stability region, neutral stability, "Whirl Flutter" instability and "Static Divergence" instability.

In this thesis, the model was design with the use of the computer aided design (CAD) software "Inventor", provided by Autodesk. The fluid-mechanical and aeroelastic simulations were carried out with the use of Fluent and Mechanical by ANSYS. The study of the stability phenomenon was carried out using independent code created in Matlab.

## **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους ανθρώπους που συνέβαλαν στην ακαδημαϊκή μου πορεία έως το σημείο αυτό και στην διεκπεραίωση της διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κύριο Νατσιάβα Σωτήριο. Ο κ. Νατσιάβας μέσα από την υψηλού επιπέδου διδασκαλία του και την επιστημονική καθοδήγηση που παρέχει στους φοιτητές του τμήματος Μηχανολόγων Μηχανικών του ΑΠΘ, μας χάραξε βαθιά στο μυαλό την σημασία και ευθύνη του να είσαι «Επιστήμονας» και «Μηχανικός». Επιπλέον, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω που παρότρυνε τις απορίες μας και ήταν πάντοτε διαθέσιμος να μας προσφέρει τις συμβουλές τους.

Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον υποψήφιο διδάκτορα κύριο Ντινόπουλο Ιωάννη, ο οποίος μου πρόσφερε την καθοδήγηση και υπομονή του σε όλη την διάρκεια της διεξαγωγής της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Ακόμη, θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για την διδασκαλία του στα μαθήματα του εργαστηρίου τα τελευταία χρόνια, μιας και συνεχώς ήταν διαθέσιμος και ιδιαίτερα πρόθυμος να βοηθήσει και να συμβουλέψει τους φοιτητές.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη.....	iii
Abstract .....	iv
Ευχαριστίες.....	v
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1 Αλληλεπίδραση Ρευστού - Κατασκευής .....	1
1.2 Αεροελαστικά φαινόμενα .....	2
1.3 Σκοπός της Διπλωματικής και Περιεχόμενα κεφαλαίων.....	5
2. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΠΡΟΠΕΛΑΣ .....	7
2.1 Προπέλα και Κριτήρια Σχεδιασμού .....	7
2.1.1 Ερμηνεία Προπέλας Αεροσκάφους.....	7
2.1.2 Κριτήρια Σχεδιασμού Προπέλας.....	7
2.2 Σχεδιασμός Προπέλας .....	8
2.3 Τρόπος λειτουργίας και Αναπτυσσόμενες δυνάμεις στην Προπέλα .....	11
2.3.1 Βασικά φορτία και γεωμετρικά μεγέθη.....	11
2.3.2 Δευτερεύοντα φαινόμενα – Αρμονικά Φορτία.....	14
2.4 Αδιάστατοι συντελεστές και Μαθηματικοί συμβολισμοί .....	17
3. ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΠΕΛΑΣ.....	21
3.1 Κατάστρωση εξισώσεων και Αριθμητικές μέθοδοι .....	21
3.1.1 Κατάστρωση εξισώσεων URANS.....	21
3.1.2 Μοντέλο τύρβης SST k -ω .....	28
3.1.3 Μεθοδολογία Αριθμητικής Επίλυσης.....	29
3.2 Μετασχηματισμός Fourier και Ανάλυση σήματος.....	33
3.2.1 Μετασχηματισμός Fourier.....	34
3.2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και FFT .....	35
3.3 Εισαγωγή στα Λογισμικά και Διακριτοποίηση .....	36
3.3.1 Ανεξαρτησία και Έλεγχος ποιότητας Πλέγματος .....	37
3.4 Αποτελέσματα ρευστομηχανικής επίλυσης.....	39
3.4.1 Σύγκριση Πειραματικών – Υπολογιστικών λύσεων.....	39
3.4.2 Συνθήκες προσομοίωσης.....	42
3.4.3 Απόκριση Φορτίων και Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας .....	43
3.4.4 Κατανομή πιέσεων .....	47
4. ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΠΕΛΑΣ .....	49

4.1 Περιγραφή Προβλήματος και Παραμορφώσιμα Σώματα .....	49
4.2 Αεροελαστικότητα.....	50
4.3 Περιστρεφόμενη Δοκός.....	53
4.3.1 Διάγραμμα Campbell.....	59
4.4 Κατάστρωση Εξισώσεων .....	60
4.4.1 Τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας για Περιστρεφόμενες κατασκευές .....	60
4.4.2 Εξισώσεις Προπέλας .....	63
4.4.3 Εξισώσεις Ρευστού .....	68
4.5 Αριθμητικές Μέθοδοι και Συν – προσομοίωση .....	69
4.6 Διακριτοποίηση .....	72
4.7 Αποτελέσματα .....	74
4.7.1 Ανάλυση Ιδιομορφών - Διάγραμμα Campbell .....	74
4.7.2 Απόκριση δυνάμεων και ανάλυση Fourier.....	76
4.7.3 Διαγράμματα Απόκρισης Κατασκευής.....	80
4.8 Σύγκριση FSI – CFD .....	83
<b>5. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ - WHIRL FLUTTER .....</b>	<b>86</b>
5.1 Γυροσκοπικά Φαινόμενα και Αναλυτική Δυναμική .....	86
5.2 Whirl Flutter και αναπτυσσόμενες δυνάμεις.....	91
5.2.1 Φαινόμενο Whirl Flutter.....	91
5.2.2 Ανάλυση δυνάμεων προπέλας.....	94
5.3 Κατάστρωση εξισώσεων .....	96
5.3.1 Εξισώσεις κίνησης - Lagrange .....	96
5.3.2 Αεροδυναμικές Δυνάμεις - Strip Theory .....	98
5.4 Επίλυση Εξισώσεων – Μη συμμετρικά μητρώα.....	106
5.5 Αποτελέσματα .....	110
<b>6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>	<b>119</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>122</b>

# 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

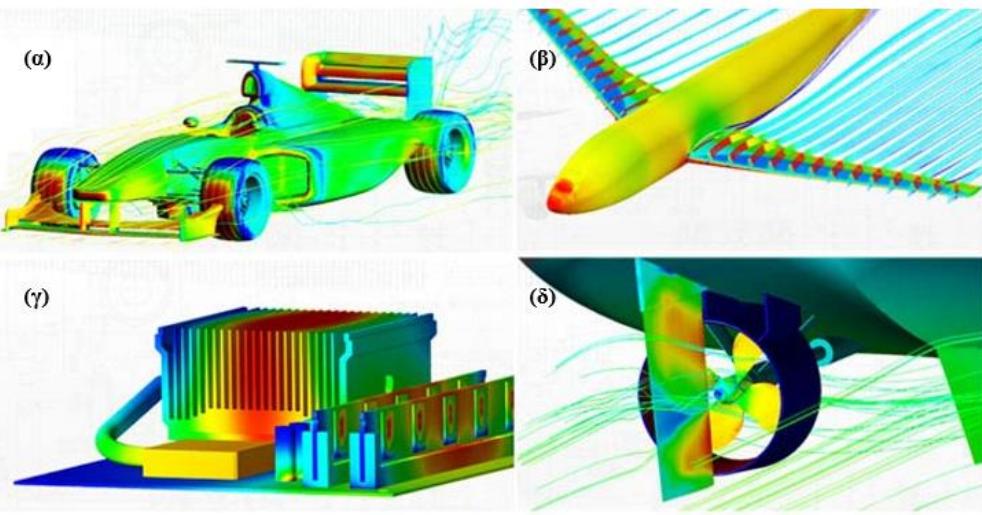
Στο εισαγωγικό κεφάλαιο, παρουσιάζεται η γενική εικόνα των επιστημονικών πεδίων στα οποία θα δουλέψουμε, στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αρχικά, παρουσιάζονται συνοπτικά οι ορισμοί και οι έννοιες του πεδίου της αεροελαστικότητας και των φαινομένων αστάθειας μαζί με ιστορικές αναφορές και στη συνέχεια αναφέρουμε τα στοιχεία του κάθε κεφαλαίου, τα οποία θα παρουσιαστούν στο κυρίως κείμενο της εργασίας.

## 1.1 Αλληλεπίδραση Ρευστού - Κατασκευής

Ανέκαθεν η περιέργεια και η ανάγκη για κατάκτηση υψηλότερων στόχων, που φέρουμε ως άνθρωποι, μας οδήγησε έως την εξέλιξη και τα επιτεύγματα του σήμερα. Εκτός από την αναζήτηση για την εφεύρεση νέων τεχνολογιών και μέσων, μεγάλο μέρος της επιστημονικής κοινότητας ασχολείται με την βελτιστοποίηση αυτών που ήδη διαθέτουμε. Επομένως, βρισκόμαστε σε μια διαρκή αναζήτηση ακριβέστερων διαδικασιών, ικανών να μοντελοποιήσουν με ακρίβεια τα φυσικά μας προβλήματα.

Μια μεγάλη οικογένεια συστημάτων, για τα οποία η επιστημονική κοινότητα δείχνει τα τελευταία χρόνια μεγάλο ενδιαφέρον, είναι τα συστήματα αλληλεπίδρασης ρευστού – κατασκευής (Fluid Structure Interaction ή FSI). Πλέον, μελετώντας ένα σύστημα FSI βρίσκουμε τα ξεχωριστά υποσυστήματα της κατασκευής και του ρευστού συζευγμένα σε ένα σύνθετο πρόβλημα, με αποτέλεσμα η λύση του πρώτου να επηρεάζεται από την λύση του τελευταίου και έτσι, να συμπεριλαμβάνουμε σε κοινό πρόβλημα την διπλή φύση του υπό μελέτη συστήματος (ρευστό-κατασκευή). Στο σχήμα 1.1, παρουσιάζονται κάποιες τυπικές εφαρμογές, στις οποίες η αλληλεπίδραση μεταξύ του ρευστού και της κατασκευής έχει μεγάλη σημασία για τον προσδιορισμό λύσης, που προσεγγίζει την πραγματικότητα. Στόχος μας, ως μηχανικοί, είναι η κατανόηση της συμπεριφοράς και των φαινομένων που αναπτύσσονται σε τέτοια συστήματα, είτε για την αποφυγή(φαινόμενα συντονισμού και αστάθειας) είτε για την εκμετάλλευση αυτών(ηλεκτροπαραγωγή από συστήματα FSI).

Μια υποδιαίρεση της οικογένειας των συστημάτων αυτών, όταν το ρευστό μας είναι ο αέρας, είναι τα αεροελαστικά προβλήματα. Η αεροελαστικότητα είναι ένας σχετικά νέος κλάδος της εφαρμοσμένης μηχανικής, ο οποίος μελετά την αλληλεπίδραση του αέρα (ρευστό) και της κατασκευής. Συγκεκριμένα, αναφέρεται στην αλληλεπίδραση των αεροδυναμικών, ελαστικών και αδρανειακών δυνάμεων. Σε μια απλούστερη διατύπωση, θα μπορούσαμε να πούμε ότι, όταν μια αύξηση στα αεροδυναμικά φορτία επηρεάζει την κατασκευή με τέτοιο τρόπο, ώστε η κατασκευή να αυξήσει με την σειρά της τα αεροδυναμικά φορτία που ασκούνται σε αυτήν, τότε έχουμε ένα αεροελαστικό πρόβλημα. Η ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στα 2 αυτά υποσυστήματα, αποδεικνύεται σημαντική και απαιτείται τελικά, για την σωστή μοντελοποίηση, να την λάβουμε υπόψη. Στο μεγαλύτερο εύρος τους σήμερα, οι αεροελαστικές μελέτες αφορούν αεροοχήματα λόγω της εντονότερης αλληλεπίδρασης, που διακρίνεται σε αυτά (μεγαλύτερα φορτία). Βέβαια, βρίσκει επίσης εφαρμογή και σε επίγειες και θαλάσσιες κατασκευές (ουρανοξύστες, αυτοκίνητα, θαλάσσια σκάφη κλπ.).



Σχήμα 1. 1. Συστήματα FSI (a) Αγωνιστική φόρμουλα (b) Αεροσκάφος (γ) Ψύξη μικροτούπ (δ) Προπέλα θαλάσσιου σκάφους

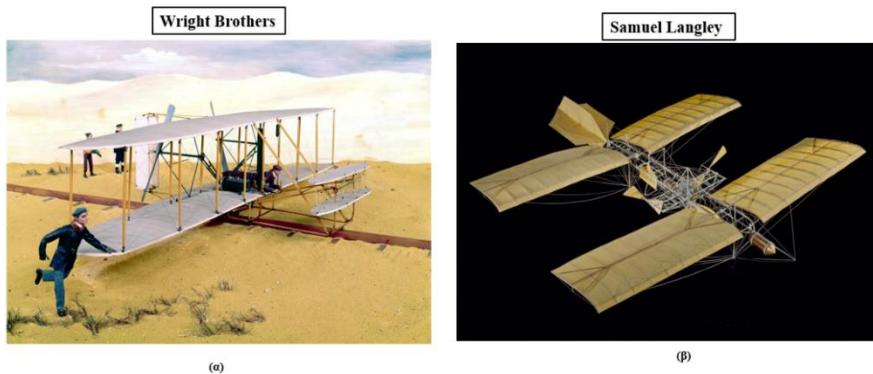
Η επιστήμη της αεροελαστικότητας, θα μπορούσαμε να πούμε, ότι είναι μια βελτίωση της ακρίβειας της λύσης, διότι φέρνει τις μεθόδους ανάλυσης πιο κοντά στο πραγματικό πρόβλημα, με την εισαγωγή της αλληλεπίδρασης των δύο. Η θεωρία και η φυσική πίσω από το πρόβλημα ήταν γνωστά αρκετά χρόνια, προτού βρουν εφαρμογή σε πραγματικά συστήματα, μιας και τα διαθέσιμα υπολογιστικά μέσα, κατά την έναρξη του κλάδου της αεροελαστικότητας, δεν ήταν ικανά να παρέχουν επαρκή αποτελέσματα για πραγματικά μοντέλα. Με την εξέλιξη των μέσων που έχουμε στην διάθεσή μας πλέον (υπολογιστές), και την συνεχή επέκταση των γνώσεων και μεθοδολογιών στα ξεχωριστά υποσυστήματα (ρευστό-κατασκευή), η υποχρέωσή μας, ως μηχανικοί, είναι να κατασκευάσουμε, βασιζόμενοι στις θεμελιώδεις φυσικές αρχές αλλά και εκμεταλλευόμενοι τις νέες τεχνολογίες, αποδοτικότερα και ασφαλέστερα συστήματα. Μια πλήρης περιγραφή και ανάλυση των διαφορετικών πεδίων, τα οποία καταλήγουν πεπλεγμένα σε αεροελαστικές μελέτες, πραγματοποιείται στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο, όπου και γίνεται η εφαρμογή τους.

## 1.2 Αεροελαστικά φαινόμενα

Ο βασικός στόχος κατά την εφαρμογή αεροελαστικής ανάλυσης, είναι ο προσδιορισμός των φαινομένων που προκύπτουν από την αλληλεπίδραση των δύο συστημάτων. Τα περισσότερα καταστροφικά ατυχήματα, που έχουν παρατηρηθεί σε αεροοχήματα, οφείλονται σε φαινόμενα τέτοιου χαρακτήρα. Τα αεροελαστικά φαινόμενα μπορούν να χωριστούν σε στατικά και δυναμικά αεροελαστικά φαινόμενα, όπου η κατηγοριοποίηση αυτών εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά που αλληλεπιδρούν για τα 2 υποσυστήματα. Για παράδειγμα, στα στατικά αεροελαστικά φαινόμενα έχουμε αλληλεπίδραση ανάμεσα στα μη-μόνιμα αεροδυναμικά φορτία και τις ελαστικές ιδιότητες της κατασκευής, ενώ για τα δυναμικά παίρνουν μέρος και οι αδρανειακές ιδιότητες.

Η αεροελαστικότητα αποτελεί σημαντικό κομμάτι της ιστορία των αεροσκαφών. Οι αδερφοί Wright το 1903, για το αεροσκάφος Wright Flyer, που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.2a, κατάφεραν να πετάξουν το αεροσκάφος, αφού πρώτα επιλύσανε το πρόβλημα του πλευρικού ελέγχου, το οποίο μάλιστα θεωρείται το μεγαλύτερό τους επίτευγμα και η 1<sup>η</sup> μηχανοκίνητη πτήση στην ιστορία της αεροπλοΐας. Στην πραγματικότητα βέβαια, λίγο νωρίτερα το 1903, ο Samuel Langley επιχείρησε

2 φορές να πετάξει το αεροπλάνο του (Σχήμα 1.2β), ρίχνοντάς το από την κορυφή ενός ποταμού σπιτου. Λόγω μεγάλης ελαστικότητας και φορτίων για τις πτέρυγες και αλληλεπίδρασης αυτών των δύο, οδήγησε σε αστοχία του αεροπλάνου. Η καταστροφή αυτού του αεροοχήματος, θεωρείται το 1<sup>ο</sup> αεροελαστικό φαινόμενο με καταστροφικές συνέπειες.



Σχήμα 1. 2. Μηχανοκίνητα Αεροοχήματα (α)αδερφών Wright και (β) Samuel Langley

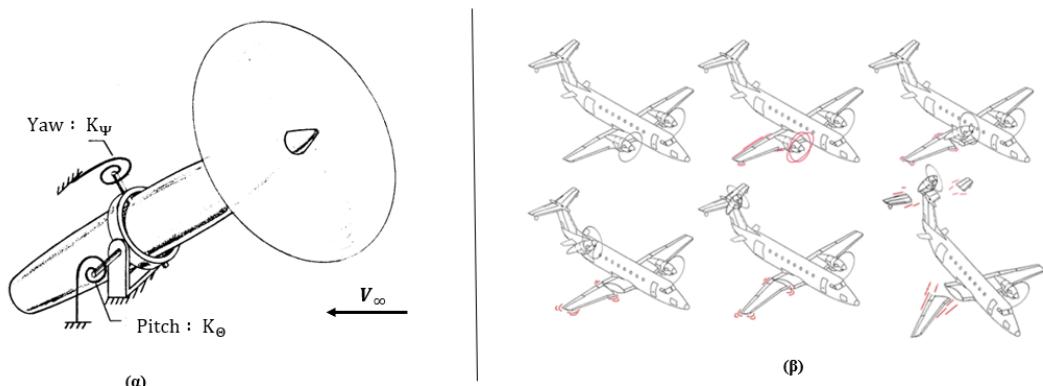
Μέχρι την χρονική στιγμή, που γίνεται η συγγραφή της συγκεκριμένης εργασίας, τα σημαντικότερα χαρτογραφημένα στατικά και δυναμικά αεροελαστικά φαινόμενα που εμφανίζονται σε αεροοχήματα, παρουσιάζονται στον Πίνακα 1.1. Τονίσαμε ότι τα φαινόμενα του πίνακα αναφέρονται στην τρέχουσα χρονική στιγμή, διότι, όπως έχει αποδειχθεί και ιστορικά, τα φαινόμενα αυτά δυστυχώς γίνονται γνωστά και αναλύονται, αφού πρώτα προκληθεί κάποια αστοχία κατασκευής λόγω αυτών. Η πρώτη πλήρης καταγραφή εμφάνισης αεροελαστικού φαινομένου αστάθειας και συγκεκριμένα του flutter, με καταστρεπτικό χαρακτήρα, έγινε το 1916 για το βομβαρδιστικό αεροσκάφος «Handley Page O/400», όπου είχαμε την εμφάνιση βίαιων ταλαντώσεων στην ουρά του αεροσκάφους, λόγω έλλειψης στιβαρότητας στην έδραση των στοιχείων μετάδοσης ισχύος. Παρόλα αυτά, ο σχεδιασμός με στόχο την εξομάλυνση και αποφυγή των αεροελαστικών φαινομένων, έγινε απαραίτητη προϋπόθεση για την πιστοποίηση των αεροοχημάτων κατά την διάρκεια του 1<sup>ου</sup> Παγκοσμίου πολέμου και παραμένει, έως και σήμερα, σημαντικό κομμάτι στην φάση του σχεδιασμού καινούργιων κατασκευών.

Πίνακας 1. 1. Αεροελαστικά φαινόμενα

Στατικά αεροελαστικά φαινόμενα	Δυναμικά αεροελαστικά φαινόμενα
Στρεπτική απόκλιση (Torsional Divergence)	Πτερυγισμός (Flutter)
Αντιστροφή επιφάνειας ελέγχου (Control surface reversion)	Κραδασμοί (Buffeting)
Στατική ισορροπία παραμορφώσιμου αεροσκάφους	Αεροελαστική απόκριση σε δυναμικό φορτίο
	Δυναμική ισορροπία και δυνατότητα ελιγμών
	Έλεγχος αεροσκάφους (Aero - servoelasticity)

Από τα παραπάνω το κυρίαρχο φαινόμενο για την ακεραιότητα της κατασκευής, έχει αποδειχθεί ότι είναι το flutter, έναντι των υπολοίπων. Μια παραλλαγή αυτού, η οποία εμφανίζεται σε προπέλες αεροσκαφών, ονομάζεται έλλειπτικός στροβιλισμός (Whirl Flutter - WF) και είναι το φαινόμενο, για το οποίο διεξάγεται, στην παρούσα εργασία, μια παραμετρική ανάλυση για την εύρεση των ορίων ευστάθειας της κατασκευής. Το WF, γνωστό και ως γυροσκοπικό flutter, αποτελεί ένα

δυναμικό αεροελαστικό φαινόμενο ευστάθειας, το οποίο μπορεί να εμφανιστεί λόγω ελαστικής έδρασης του συστήματος κινητήρας – προπέλα σε αεροοχήματα. Ένα τέτοιο σύστημα απεικονίζεται στο Σχήμα 1.3α. Λόγω των επιπλέον βαθμών ελευθερίας, που εισάγει η ελαστική έδραση, και του φαινομένου της γυροσκοπικής μετάπτωσης που προκαλείται από τις μεγάλες περιστρεφόμενες μάζες των πτερυγίων, έχουμε σύζευξη των ανεξάρτητων ιδιομορφών του συστήματος, η οποία οδηγεί σε σύνθετες αποκρίσεις της κατασκευής. Αν η κίνηση αυτή δεν μπορέσει να αποσβεσθεί από την κατασκευαστική ή την αεροδυναμική απόσβεση, τότε το σύστημα εισέρχεται σε κατάσταση αστάθειας, γεγονός το οποίο συνεπάγεται την αστοχία των κατασκευαστικών στοιχείων του συστήματος. Στο Σχήμα 1.3β, παρουσιάζονται διάφορες μορφές αστοχίας λόγω WF. Στο σχήμα αυτό απεικονίζεται το αεροσκάφος Beechcraft 1900C. Μια πλήρης ανάλυση και αναλυτική κατάστρωση εξισώσεων για το WF και τα φαινόμενα που το επηρεάζουν, θα πραγματοποιηθεί στο  $5^{\circ}$  κεφάλαιο.



Σχήμα 1. 3. (α)Σύστημα προπέλας-κινητήρα με ελαστική έδραση σε 2 διευθύνσεις (Yaw  $\psi$  – Pitch  $\vartheta$ ) (β) Μορφές αστοχίας λόγω Whirl Flutter

Η επιστημονική κοινότητα έδειξε πρακτικό ενδιαφέρον για το φαινόμενο αυτό, μετά από τα δύο θανατηφόρα ατυχήματα των επιβατικών αεροσκαφών Lockheed L-188 C Electra II (Σχήμα 1.4α) το 1959 και το 1960. Για την διερεύνηση της αιτίας των ατυχημάτων, πραγματοποιήθηκαν πειράματα στην διηγητική αεροσύραγγα Langley της NASA. Τα αποτελέσματα των πειραμάτων έδειξαν ότι τα ατυχήματα προκλήθηκαν από τις μεγάλες περιστροφικές ταχύτητες της προπέλας και τις μεγάλες ταλαντώσεις, μορφής ελλειπτικής κίνησης, που εισήγαγε η προπέλα στην πτέρυγα σε συνδυασμό με την χαλαρή έδραση του κινητήρα, με αποτέλεσμα την αποκόλληση της πτέρυγας από το κύριο σώμα του αεροσκάφους. Παρόλη την χαρτογράφηση και μελέτη του φαινομένου WF, περισσότερα αεροσκάφη οδηγήθηκαν στην καταστροφή τα επόμενα χρόνια λόγω αυτού, όπως το επιβατικό αεροσκάφος Beechcraft 1900C (Σχήμα 1.4β) το 1991, και το επιβατικό αεροσκάφος Grumman Turbo Mallard GF73T το 2005 (Σχήμα 1.4γ). Μια πιο αναλυτική παρουσίαση για την καταστροφή των παραπάνω αεροσκαφών λόγω WF, μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [9]. Η αιβεβαιότητα για την αεροελαστική συμπεριφορά που εμφανίζουν οι κατασκευές και οι συνέπειες που μπορεί να έχουν στην ακεραιότητα τους, μας δείχνει την πολυπλοκότητα, αλλά και σημαντικότητα του πεδίου της αεροελαστικότητας.



Σχήμα 1. 4. Επιβατικό αεροσκάφος (α) *Lockheed L-188 C Electra I*, (β) *Beechcraft 1900C*, (γ) *Grumman Turbo Mallard GF73T*

Ο ελλειπτικός στροβιλισμός μπορεί να εμφανιστεί συγκεκριμένα σε turboprop αεροσκάφη, ελικόπτερα και αεροσκάφη με κεκλιμένους ρότορες (tilt – rotor). Από τα τρία διαφορετικά συστήματα, στα οποία έχουμε την εμφάνιση του WF, εμείς θα ασχοληθούμε με τα turboprop αεροσκάφη (Σχήμα 1.4), μιας και τα άλλα 2 εμφανίζουν εξαιρετική πολυπλοκότητα (ελαστικότητα, πολύπλοκο ροϊκό πεδίο) και μεγάλες υπολογιστικές δυσκολίες, οι οποίες ξεφεύγουν από τον σκοπό της παρούσας διπλωματικής.

### 1.3 Σκοπός της Διπλωματικής και Περιεχόμενα κεφαλαίων

Στην παρούσα διπλωματική, διεξάγεται αεροελαστική ανάλυση σε προπέλα αεροσκάφους turboprop και μια παραμετρική μελέτη του συστήματος προπέλα – κινητήρας για την εύρεση των ορίων ευστάθειας του φαινομένου Whirl Flutter. Σκοπός μας είναι να παρατηρήσουμε και να ερμηνεύσουμε, με χρήση θεωρητικών εργαλείων αλλά και επαγγελματικών λογισμικών, όλα τα σύνθετα φαινόμενα που αναπτύσσονται σε συστήματα σαν το δικό μας, και όχι να βρούμε λύσεις για κάποιο πρόβλημα (π.χ. σχεδίαση αποδοτικότερης προπέλας ή αύξηση των συντελεστών ασφαλείας στα εύρη λειτουργίας). Η δουλειά που θα παρουσιαστεί στην εργασία αυτή, αποτελεί ένα πλήρες πρόβλημα. Ξεκινάμε από τον σχεδιασμό του μοντέλου και στη συνέχεια διεξάγουμε την ρευστομηχανική και δυναμική ανάλυση. Προβλήματα τέτοιας μορφής, με όλα τα στάδια της μελέτης, καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μηχανικοί καθημερινά.

Συγκεκριμένα στο 2<sup>o</sup> κεφάλαιο, πραγματοποιείται ο σχεδιασμός της προπέλας με χρήση πραγματικών γεωμετρικών διαστάσεων για τα πτερύγια, που αναφέρονται σε προπέλα- κινητήρα turboprop και παρουσιάζονται τα σχεδιαστικά κριτήρια, ο τρόπος λειτουργίας της και τα σημαντικά δυναμικά φορτία, που αναπτύσσονται κατά την λειτουργία λόγω αλληλεπίδρασης με τον αέρα, τα οποία είναι και αυτά που εισάγουν τις σημαντικότερες καταπονήσεις στην κατασκευή.

Στο 3<sup>o</sup> κεφάλαιο επιλύουμε το ρευστομηχανικό πρόβλημα για την περιστρεφόμενη προπέλα. Συγκεκριμένα, γίνεται αρχικά η κατάστρωση των εξισώσεων URANS (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes) του ροϊκού πεδίου και παρουσιάζονται οι μεθοδολογίες επίλυσης αυτών. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Fourier και ο αλγόριθμος του ταχύ μετασχηματισμού Fourier (FFT). Ο FFT αποτελεί ένα μαθηματικό εργαλείο, με το οποίο στη συνέχεια θα αναλύσουμε τα αποτελέσματά μας. Ακολουθεί ο ορισμός και η διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου, του οποίου η λύση συγκρίνεται με πειραματικά αποτελέσματα για την επαλήθευση του μοντέλου. Το 3<sup>o</sup> κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την παρουσίαση των διαγραμμάτων απόκρισης των δυνάμεων και ροπών, που ασκούνται στην πλήμνη και με παρουσίαση της κατανομής του συντελεστή πίεσης στην προπέλα, για διαφορετικά σετ τιμών προσομοίωσης. Επιπλέον, παρουσιάζεται το περιεχόμενο των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στην προπέλα,

στο πεδίο της συχνότητας. Αφιερώνουμε ένα ολόκληρο κεφάλαιο στην επίλυση του ρευστομηχανικού προβλήματος, χωρίς να αναφερθούμε στην κατασκευή, έτσι, ώστε να γίνει εισαγωγή στο σύνθετο αεροελαστικό μοντέλο του επόμενου κεφαλαίου σταδιακά, με στόχο την καλύτερη κατανόηση.

Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, εισάγεται στο πρόβλημα η παραμορφωσιμότητα της προπέλας και επιλύεται το αεροελαστικό πρόβλημα αλληλεπίδρασης μεταξύ της προπέλας και του ρευστού. Αρχικά, παρουσιάζονται οι έννοιες της παραμορφωσιμότητας και της αεροελαστικότητας. Στη συνέχεια, γίνεται η κατάστρωση των εξισώσεων για περιστρεφόμενη δοκό, με σκοπό να κατανοήσουμε τα φορτία που διέπουν τέτοιας μορφής προβλήματα και την συνεισφορά τους στα τελικά μητρώα της κατασκευής. Η περιστρεφόμενη δοκός μπορεί να θεωρηθεί ως μια απλοποίηση της προπέλας, αντικαθιστώντας κάθε πτερύγιο με μια δοκό. Επιπλέον, παρουσιάζεται η χρήση και η σημασία του διαγράμματος Campbell, το οποίο θα κατασκευάσουμε στα αποτελέσματα και για το δικό μας σύστημα. Αφού έχει γίνει η παρουσίαση των βασικών θεωρητικών εννοιών, προχωράμε στην κατάστρωση των εξισώσεων για το σύστημα της κατασκευής, μιας και οι εξισώσεις που διέπουν το ροϊκό πεδίο παραμένουν ίδιες με το 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Για την προπέλα, διατυπώνουμε την τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας για περιστρεφόμενο απειροστό στοιχείο και καταστρώνουμε τις εξισώσεις κίνησης και ελαστικότητας για τις σχέσεις ανάμεσα στις μετατοπίσεις, τροπές και τάσεις. Τα συνολικά μητρώα για όλη την κατασκευή παράγονται με χρήση της μεθόδου του Galerkin και χρήση των συναρτήσεων μορφής για τρισδιάστατα πεπερασμένα στοιχεία (FEM). Συνεχίζουμε με την παρουσίαση των αρχών συν-προσομοίωσης και του αλγόριθμου Gauss-Seidel, τον οποίο εμείς θα χρησιμοποιήσουμε για την ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στα υποσυστήματα. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιούμε για την επίλυση των εξισώσεων της προπέλας. Στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου, γίνεται η διακριτοποίηση της προπέλας και παρουσιάζονται αρχικά τα αποτελέσματα της επίλυσης και μετέπειτα συγκρίνονται με τις λύσεις από την ρευστομηχανική επίλυση του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

Στο 5<sup>ο</sup> και τελευταίο κεφάλαιο της διπλωματικής, πραγματοποιείται η παραμετρική μελέτη των ορίων ευστάθειας για το φαινόμενο «Whirl Flutter». Για το μοντέλο μας στο κεφάλαιο αυτό, διατηρούμε την προπέλα που σχεδιάσαμε και προσομοιώνουμε τα υπόλοιπα στοιχεία του κινητήρα ως συμπαγή στερεό κύλινδρο, με δυνατότητα αυξομείωσης του μήκους του. Αρχικά, παρουσιάζονται τα θεωρητικά κομμάτια των γυροσκοπικών φαινομένων, που θα μας χρειαστούν για να ερμηνεύσουμε κατόπιν το φαινόμενο WF. Στην συνέχεια, αναλύεται πλήρως το φαινόμενο WF και καταστρώνονται αναλυτικά οι εξισώσεις του συστήματος. Για την κατάστρωση των εξισώσεων, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις του «Lagrange», ενώ η εξαγωγή των εξισώσεων για τα αεροδυναμικά φορτία πραγματοποιείται με χρήση της θεωρίας «Strip Theory». Στο τελευταίο κομμάτι της θεωρίας, παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης των μη συμμετρικών μητρώων που προκύπτουν για τον υπολογισμό των ορίων ευστάθειας αλλά και για τον υπολογισμό της απόκρισης του συστήματος. Ολοκληρώνουμε με την παρουσίαση διαγραμμάτων για τα όρια ευστάθειας για διάφορες μεταβολές των παραμέτρων, αλλά και διαγραμμάτων για την τροχιά της πλήμνης για λειτουργίες στις περιοχές ευστάθειας, οριακής ευστάθειας, αστάθειας και στατικής απόκλισης.

Για την παρούσα διπλωματική, έγινε χρήση του λογισμικού Inventor της εταιρίας Autodesk για τον σχεδιασμό της προπέλας. Η επίλυση του ροϊκού πεδίου, η κατάστρωση του κατασκευαστικού μοντέλου και η συν-προσομοίωση αυτών των δύο πραγματοποιήθηκαν στα λογισμικά Fluent, Mechanical και Workbench αντίστοιχα της εταιρίας ANSYS. Για το τελευταίο κεφάλαιο, η επίλυση των αναλυτικών εξισώσεων του συστήματος πραγματοποιήθηκε με αυτοτελή κώδικα σε προγραμματιστική γλώσσα Matlab.

## 2. ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΠΡΟΠΕΛΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό, πραγματοποιούμε τον σχεδιασμό του μοντέλου μας, βασιζόμενοι στους περιορισμούς και τις απαιτήσεις, που πρέπει να ικανοποιούνται για συστήματα, όπως το δικό μας. Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, για την συγκεκριμένη διπλωματική, το μοντέλο μας αποτελείται από προπέλα η οποία βρίσκει εφαρμογές σε αεροοχήματα που φέρουν turboprop κινητήρες. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται πρώτα ο σχεδιασμός της προπέλας και οι στόχοι που θέλουμε να επιτύχουμε, και μετά ο τρόπος λειτουργίας και τα χαρακτηριστικά μεγέθη, που θα μας απασχολήσουν. Τα σχέδια πραγματοποιήθηκαν με χρήση του λογισμικού Inventor της εταιρίας Autodesk.

### 2.1 Προπέλα και Κριτήρια Σχεδιασμού

#### 2.1.1 Ερμηνεία Προπέλας Αεροσκάφους

Η προπέλα είναι μια συσκευή που μετατρέπει την μηχανική ενέργεια στην δύναμη την οποία ονομάζουμε ώση και είναι υπεύθυνη για την κίνηση του οχήματος, στο οποίο βρίσκεται. Η προπέλα αποτελείται από μια ή περισσότερες επιφάνειες άντωσης, τα επονομαζόμενα πτερύγια(blades). Κάθε πτερύγιο μιας προπέλας λειτουργεί, λόγω της διαμόρφωσής του, σαν μια περιστρεφόμενη πτέρυγα αεροσκάφους και ως προς την διαμόρφωση των διατομών αλλά και ως προς τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις στις διατομές αυτές. Οι διατομές των πτερυγίων αποτελούνται από αεροτομές και λόγω αυτού οι περιστρεφόμενες προπέλες παράγουν μια συνισταμένη ώση και ροπή, με αποτέλεσμα η ώση αυτή να υπερισχύει της αντίστασης που δέχεται το όχημα, και έτσι να κινείται. Οι προπέλες σήμερα, είναι με διαφορά το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μέσο παραγωγής ώσης για αεροσκάφη γενικής αεροπλοΐας.

Οι προπέλες παρέχουν έναν πολύ αποδοτικό τρόπο παραγωγής ώσης, επιταχύνοντας μια μάζα αέρα. Γενικά, όσο μεγαλύτερη η επιτάχυνση αυτή, τόσο μεγαλύτερη χημική ενέργεια (καύσιμο) πρέπει να μετατραπεί σε μηχανική ενέργεια από τον κινητήρα. Έτσι, η παραγωγή ώσης με χρήση προπέλας καταναλώνει πολύ λιγότερο καύσιμο από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο, γεγονός που την καθιστά το πιο αποδοτικό μέσο παραγωγής ώσης. Επιπλέον, η κατασκευή και συντήρηση προπελών έχει πολύ χαμηλότερο κόστος από έναν κινητήρα τζετ. Για τον λόγο αυτό, σε αεροσκάφη χαμηλού κόστους οι προπέλες είναι η βέλτιστη λύση. Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον σχεδιασμό και τον τρόπο λειτουργίας της προπέλας, μπορούν να βρεθούν στην αναφορά [10].

#### 2.1.2 Κριτήρια Σχεδιασμού Προπέλας

Πριν προχωρήσουμε με τον σχεδιασμό, πρέπει να ορίσουμε τους περιορισμούς και τους στόχους μας για την προπέλα. Η προπέλα που θα εισαχθεί στο μοντέλο μας, είναι απαραίτητο να ικανοποιεί κάποια βασικά κριτήρια, τα οποία χρησιμοποιούνται σε πραγματικές εφαρμογές αεροπλοΐας, αλλά και τις προϋποθέσεις οι οποίες θα μας επιτρέψουν να παρατηρήσουμε όλα τα φαινόμενα που μελετάμε στην παρούσα διπλωματική.

Τα πτερύγια της προπέλας συνδέονται σε μια κεντρική πλήμνη και αυτή με την σειρά της συνδέεται στον μειωτήρα του κινητήρα. Επειδή η προπέλα εκμεταλλεύεται την γεωμετρία των διατομών της για την παραγωγή δυνάμεων, αντιλαμβανόμαστε ότι ο σχεδιασμός και τα χαρακτηριστικά της προπέλας επηρεάζουν σημαντικά τα παραγόμενα φορτία και κατά συνέπεια τα φαινόμενα που αναπτύσσονται κατά την λειτουργία. Η πλήρης ανάλυση όλων των αναπτυσσόμενων δυνάμεων στην προπέλα θα πραγματοποιηθεί κατά την περιγραφή του τρόπου λειτουργίας στη συνέχεια.

Στόχος μας στην παρούσα διπλωματική είναι η παρακολούθηση της αλληλεπίδρασης της κατασκευής με το ρευστό και η ανάλυση αεροελαστικών φαινομένων αστάθειας. Επομένως, μας ενδιαφέρει να σχεδιάσουμε μια προπέλα, η οποία να καλύπτει όλες τις βασικές προϋποθέσεις που απευθύνονται σε πραγματικές εφαρμογές, και να λάβουμε υπόψη μας τα χαρακτηριστικά που θα πρέπει να έχει το μοντέλο μας, ώστε τελικά, να μας επιτρέψει να παράγουμε ευδιάκριτα αποτελέσματα για τα φαινόμενα που μελετάμε.

Επιπλέον, επειδή σε εφαρμογές υπολογιστικής ρευστομηχανικής τα αποτελέσματα απαιτούν πειραματική επιβεβαίωση (πειράματα σε αεροσύραγγες), θα πρέπει να σχεδιάσουμε μια προπέλα με γεωμετρικά χαρακτηριστικά κάποιας αντίστοιχης προπέλας που έχει ελεγχθεί πειραματικά, ώστε να μπορέσουμε (με χρήση αδιάστατων συντελεστών) να επιβεβαιώσουμε το υπολογιστικό μοντέλο μας.

Έτσι καταλήγουμε ότι χρειαζόμαστε μια μεγάλων διαστάσεων κατασκευή, που θα μας προσφέρει ευδιάκριτα πλάτη μεταβολών κατά την αλληλεπίδραση με το ρευστό. Επίσης, χρειάζεται οι γεωμετρικές διαστάσεις αυτής να αποκτηθούν από κάποιο πειραματικά ελεγμένο μοντέλο με διαθέσιμα τα αποτελέσματα των ελέγχων.

## 2.2 Σχεδιασμός Προπέλας

Μετά από επικοινωνία με τους συγγραφείς της αναφοράς [14], μας παρείχαν τα διαγράμματα των γεωμετρικών διαστάσεων που παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.1. Οι τιμές αυτές αναφέρονται σε προπέλα που λειτουργεί σε μεγάλα υψόμετρα (στρατόσφαιρα) και σχεδιάστηκε για το αερόχημα KFG-series (αερόστατο). Στην συγκεκριμένη δημοσίευση περιλαμβάνονται και τα αποτελέσματα που αποκτήθηκαν από πειράματα της προπέλας σε αεροσύραγγα, με βάση τα οποία, στο επόμενο κεφάλαιο, θα επιβεβαιώσουμε το υπολογιστικό μας μοντέλο.

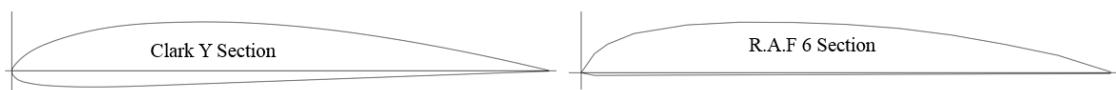
Οι παράμετροι που διακρίνονται στο διάγραμμα αναφέρονται στα :

R : Ακτίνα Πτέρυγας, r : Απόσταση διατομής από την πλήμνη , D : Συνολική διάμετρος προπέλας

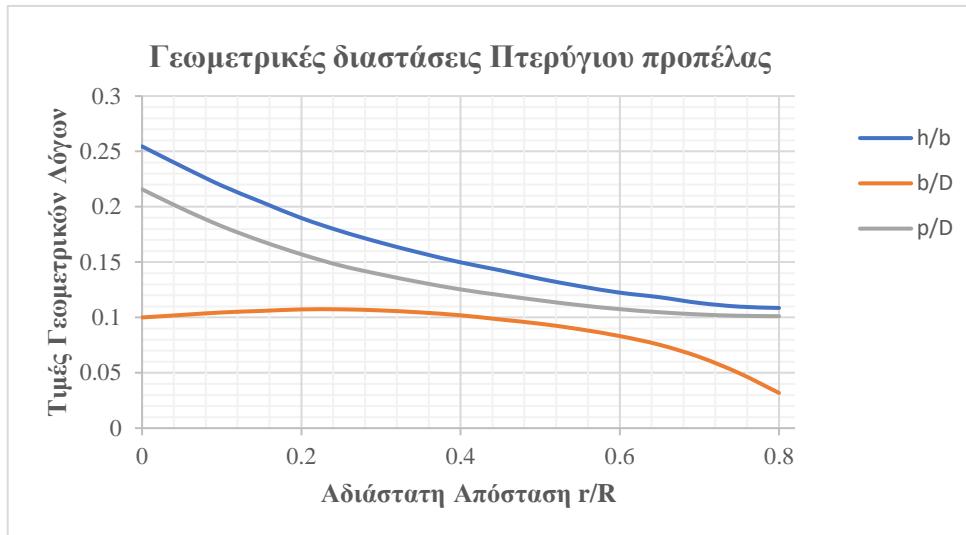
b : Χορδή Αεροτομής h : Πάχος αεροτομής στην αντίστοιχη διατομή

p : Γωνία κλίσης αεροτομής (pitch)

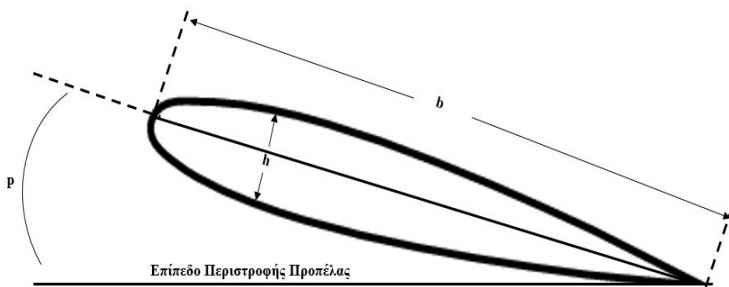
Τα γεωμετρικά αυτά μεγέθη απεικονίζονται στο δισδιάστατο σχέδιο μιας αεροτομής στο Σχήμα 2.2. Για την συγκεκριμένη προπέλα έχουμε στην βάση των πτερυγίων (Root Section) αεροτομή τύπου Clark Y 11.7% και στην κορυφή αεροτομή τύπου R.A.F 6 (Tip Section).



Το ποσοστό 11.7 αναφέρεται στον λόγο του μέγιστου πάχους προς το μήκος της χορδής της αεροτομής . Οι 2 αυτοί τύποι αεροτομών είναι οι βασικοί που χρησιμοποιούνται σε προπέλες αεροσκαφών έως και σήμερα.



Σχήμα 2.1. Γεωμετρικά μεγέθη κατά μήκος της πτέρυγας της προπέλας



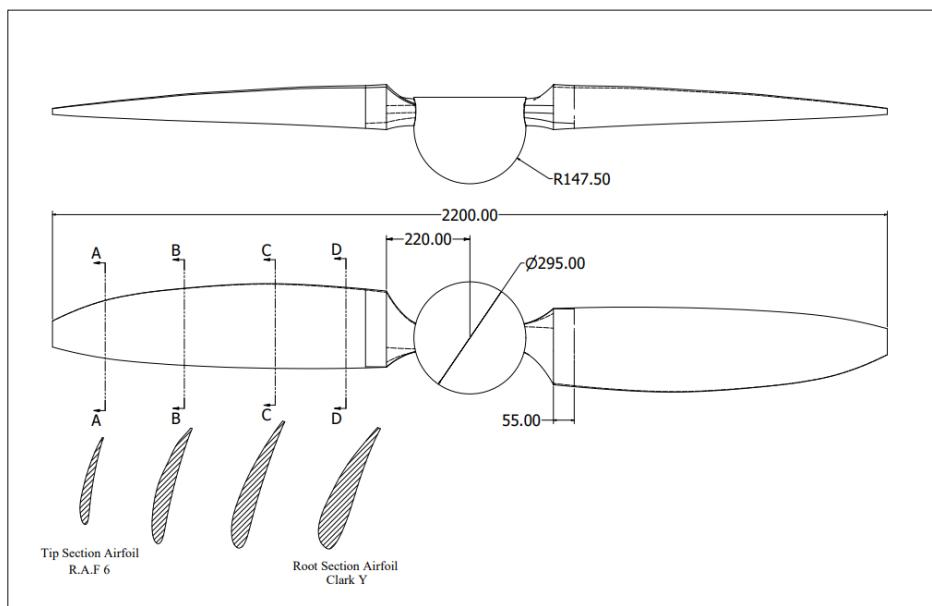
Σχήμα 2.2. Χαρακτηριστικά μεγέθη αεροτομής

Παρατηρούμε, στο Σχήμα 2.1, ότι η γωνία κλίσης για κάθε διατομή της πτέρυγας διαφοροποιείται, με αποτέλεσμα να έχουμε ελικοειδή διαμόρφωση της πτέρυγας από την βάση προς την κορυφή. Η διαμόρφωση αυτή είναι χαρακτηριστική για προπέλες αεροσκαφών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, λόγω περιστροφής της προπέλας, τα τμήματα που βρίσκονται πιο μακριά από την πλήμνη, μεταφέρονται ταχύτερα από τα τμήματα που βρίσκονται πιο κοντά στην πλήμνη. Αν η προπέλα είχε την ίδια γωνία κλίσης σε όλες τις διατομές της, σε μεγάλες ταχύτητες πτήσης (υψηλά rpm) θα είχαμε, λόγω παραμόρφωσης αλλά και σχετικής γωνίας προσβολής της προπέλας, αρνητικές γωνίες pitch για τις αεροτομές κοντά στην πλήμνη. Αυτό θα οδηγούσε σε μεγάλες διαφορές δυνάμεων στα διάφορα τμήματα ή και σε απώλεια στήριξης της προπέλας στις κορυφές των πτερυγίων. Οι διαφορετικές γωνίες έχουν ως αποτέλεσμα τα διαφορετικά τμήματα των πτερυγίων να βλέπουν την ίδια περίπου σχετική ταχύτητα και έτσι, η κατανομή των φορτίων πάνω στα πτερύγια να πλησιάζει όσο γίνεται περισσότερο την ομοιόμορφη κατανομή.

Ένα σημείο, που θα πρέπει να προσέξουμε, είναι η επιλογή της συνολικής διαμέτρου για την προπέλα. Ανάλογα με τις συνθήκες που θα επιλέξουμε να επιλύσουμε το μοντέλο μας (ταχύτητα αεροσκάφους, περιστροφική ταχύτητα προπέλας), θα πρέπει η διάμετρος της προπέλας να είναι

τέτοια, ώστε να μην δημιουργούνται περιοχές στις κορυφές των πτερυγίων με ηχητικές ταχύτητες. Για τον λόγο αυτό και εξαιτίας των συνθηκών προσομοίωσης που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια της ανάλυσης, επιλέγουμε συνολική διάμετρο προπέλας ίση με 2.2 μέτρα. Η διάσταση αυτή είναι επαρκής, ώστε να μας δώσει ικανοποιητικά γυροσκοπικά φορτία για την παρατήρηση των φαινομένων αστάθειας που θέλουμε, σε λογικά εύρη λειτουργίας.

Επιλέγουμε η προπέλα μας να έχει 2 πτερύγια. Στο Σχήμα 2.3, παρουσιάζεται ένα δισδιάστατο σχέδιο της προπέλας και κάποιες βασικές διαστάσεις αυτής. Επιπλέον, στο ίδιο σχήμα διακρίνουμε τις τέσσερις τομές κατά μήκος του πτερυγίου της προπέλας, όπου μπορούμε να δούμε τα διαφορετικά χαρακτηριστικά (γωνία κλίσης, πάχος κλπ.) των διατομών. Βλέπουμε ότι έχει δοθεί στην πλήμνη σφαιρικό σχήμα από την μεριά πρόσκρουσης με τον αέρα, έτσι ώστε να μειώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο την αντίσταση που εισάγεται από το πεδίο ροής.



Σχήμα 2.3. Δισδιάστατο σχέδιο προπέλας και βασικές διαστάσεις

Για την προπέλα μας επιλέγουμε ως υλικό aluminium alloy γενικού τύπου. Η επιλογή αυτού του υλικού είναι η πιο συχνά χρησιμοποιούμενη στην βιομηχανία για κατασκευή προπέλας και θεωρείται καλή επιλογή, διότι έχει χαμηλό βάρος, μεγάλο λόγο σκληρότητας προς το βάρος και χαμηλό κόστος. Βέβαια, με την εξέλιξη των μέσων ανάλυσης κατασκευάζονται πλέον προπέλες από σύνθετα υλικά, έτσι ώστε να μπορούμε να προσδώσουμε τις ιδιότητες που επιθυμούμε σε συγκεκριμένες περιοχές και διευθύνσεις, διατηρώντας παράλληλα τις επιθυμητές μηχανικές ιδιότητες και το χαμηλό κόστος κατασκευής. Για το δικό μας υλικό, οι μηχανικές ιδιότητες του aluminium alloy γενικού τύπου παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.1.

Με χρήση του υλικού αυτού, υπολογίζεται, μέσα από το λογισμικό σχεδίασης Inventor, το συνολικό βάρος της προπέλας ίσο με  $m_p = 58.581 \text{ kg}$ . Στο Σχήμα 2.4, απεικονίζεται το τρισδιάστατο σχέδιο της προπέλας μας. Έχοντας σχεδιάσει πλήρως την προπέλα και ορίσει τα χαρακτηριστικά της, προχωράμε στην περιγραφή της λειτουργίας της.

Πίνακας 2. 1 Μηχανικές Ιδιότητες υλικού aluminum alloy

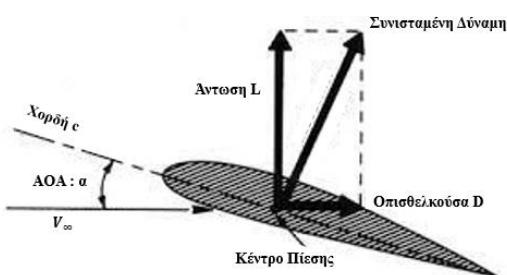
Πυκνότητα	$\rho = 2770 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
Μέτρο Ελαστικότητας (Young's Modulus)	$E = 71 [GPa]$
Λόγος Poisson's	$\nu = 0.33$
Όριο διαρροής σε εφελκυσμό	$\sigma_\delta = 280 \left[ \frac{N}{mm^2} \right]$
Μέγιστη αντοχή σε εφελκυσμό	$\sigma_o = 310 \left[ \frac{N}{mm^2} \right]$



Σχήμα 2.4. Τρισδιάστατο σχέδιο προπέλας στο περιβάλλον του λογισμικού Inventor

## 2.3 Τρόπος λειτουργίας και Αναπτυσσόμενες δυνάμεις στην Προπέλα

### 2.3.1 Βασικά φορτία και γεωμετρικά μεγέθη



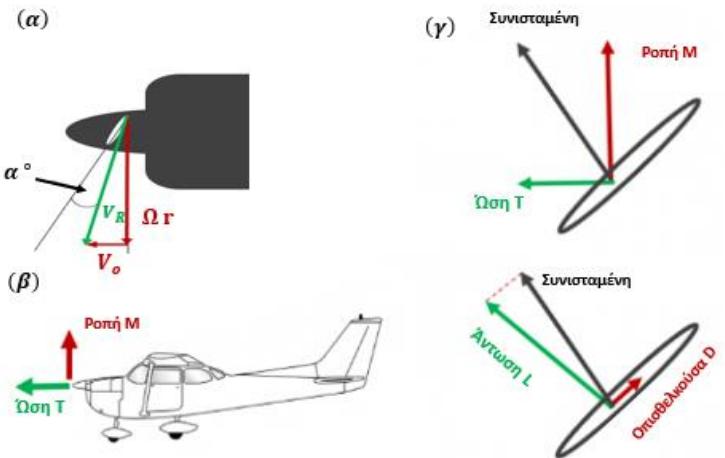
Σχήμα 2.5. Σκαρίφημα αεροτομής και βασικά μεγέθη

παράγει μια συνισταμένη δύναμη στο κέντρο πίεσης της αεροτομής. Η δύναμη αυτή αναλύεται σε συνιστώσες, κάθετα στην ταχύτητα της ελεύθερης ροής (άντωση  $L$ ) και παράλληλα (οπισθελκούσα  $D$ ). Ο κύριος παράγοντας που επηρεάζει το μέγεθος των δυνάμεων αυτών, είναι η γωνία προσβολής  $\alpha$  (angle of attack ή AOA), η οποία σχηματίζεται από την διεύθυνση της ταχύτητας της ελεύθερης ροής με την χορδή της αεροτομής. Στις 2 αυτές συνιστώσες, έχουν μικρή συνεισφορά επίσης και οι διατμητικές τάσεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στην επιφάνεια της αεροτομής και τον αέρα, μέσα στο οριακό στρώμα. Το οριακό στρώμα είναι μια πολύ λεπτή περιοχή στην επιφάνεια της αεροτομής και καρακτηρίζεται από υψηλά επίπεδα τύρβης, υψηλές μεταβολές ταχυτήτων ή και αποκόλληση της ροής. Το οριακό στρώμα μπορεί να θεωρηθεί ως η μεταβατική περιοχή ανάμεσα στην επιφάνεια μιας κατασκευής και στην αδιατάραχτη ροή. Το οριακό στρώμα αποτελεί την κύρια δυσκολία επίλυσης των ροϊκών πεδίων και όλες οι συνεχώς εξελισσόμενες νέες θεωρίες έχουν ως στόχο, την έκφραση των φαινομένων τύρβης μέσα σε αυτό. Περισσότερα για τα μοντέλα που περιγράφουν το οριακό στρώμα (μοντέλα τύρβης), θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Συγκεκριμένα τώρα η προπέλα, όπως αναφέραμε, μπορεί να θεωρηθεί ως μια περιστρεφόμενη πτέρυγα αεροσκάφους με διαφορετικές γωνίες κλίσης των αεροτομών της στην κάθε διατομή. Η περιστροφική αυτή κίνηση έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη δυνάμεων κατά μήκος του κάθε

Στην ενότητα αυτή, περιγράφουμε τον τρόπο λειτουργίας και τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις που εμφανίζονται στην προπέλα. Αρχικά, για την αναπαράσταση των βασικών μεγεθών ξεκινάμε από την θεώρηση της κλασικής αεροτομής πτέρυγας αεροσκάφους. Στο σχήμα 2.5, βλέπουμε το σκαρίφημα μιας γενικού τύπου αεροτομής. Η γεωμετρία της αεροτομής έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη διαφορετικών πιέσεων στην κάτω και στην επάνω επιφάνεια της. Η διαφορά αυτή πίεσης

πτερυγίουν. Έτσι, η προπέλα παράγει, όπως και η απλή αεροτομή, δυνάμεις άντωσης και οπισθελκούσας στην κάθε διατομή της. Βέβαια, επειδή οι διευθύνσεις των δυνάμεων αυτών είναι παράλληλη και κάθετη στην ελεύθερη ροή αντίστοιχα, είναι πιο λογικό να εκφράσουμε την συνισταμένη στην διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο περιστροφής (Ωση T) και παράλληλη στο επίπεδο περιστροφής (Ροπή M).



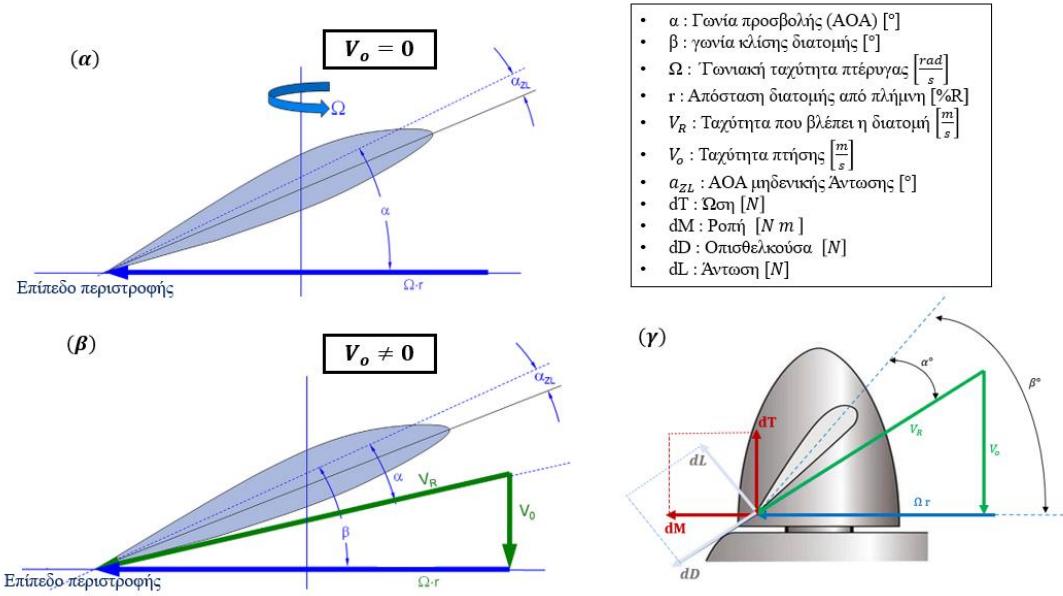
Σχήμα 2.6(α) Ταχύτητες (β) Δυνάμεις Προπέλας και (γ) Δυνάμεις στις διατομές των πτερυγίων

Παίρνοντας το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων αυτών, κατά μήκος των πτερυγίων, προκύπτει η συνολική Ωση και Ροπή της προπέλας, η οποία ώστε αποτελεί την δύναμη που κινεί το αεροσκάφος μέσα στον αέρα. Οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.6β και 2.6γ. Στο Σχήμα 2.6α παρατηρούμε τις διαφορετικές ταχύτητες από τις οποίες απαρτίζεται η σχετική συνισταμένη ταχύτητα, και την γωνία προσβολής που βλέπει παρατηρητής επάνω στο πτερύγιο της προπέλας.

Στο Σχήμα 2.7 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη της αεροτομής του πτερυγίου προπέλας σε τυχαία απόσταση από την πλήμνη  $r$  (%R) για σταθερό και κινούμενο όχημα. Στο Σχήμα 2.7α απεικονίζεται η αεροτομή του πτερυγίου για μηδενική ταχύτητα πτήσης, ενώ στο Σχήμα 2.7β για διαφορετική του μηδενός ταχύτητα πτήσης. Αναγράφονται επίσης οι διαφορετικές μεταβλητές και οι ορισμοί τους. Στην επάνω αεροτομή του σχήματος, το μπλε διάνυσμα ( $\Omega r$ ) αντιστοιχεί στην εισερχόμενη ροή, όπως την βλέπει παρατηρητής επάνω στο πτερύγιο, για μηδενική ταχύτητα αεροσκάφους. Έτσι, η γωνία προσβολής εξαρτάται αποκλειστικά από την περιστροφική ταχύτητα της προπέλας. Αντίθετα, για ταχύτητα αεροσκάφους  $V_o$  διάφορη του μηδενός, η ταχύτητα που βλέπει ο ίδιος παρατηρητής, προκύπτει από το διανυσματικό άθροισμα της περιστροφικής ταχύτητας της προπέλας και της ταχύτητας του αεροσκάφους  $V_R = \sqrt{V_o^2 + (\Omega r)^2}$ , όπου  $V_R$  η σχετική ταχύτητα για την αεροτομή στην τυχαία θέση  $r$ . Η γωνία  $a_{ZL}$  αποτελεί την γωνία ανάμεσα στην χορδή της αεροτομής και την διεύθυνση στην οποία έχουμε μηδενική άντωση για την συγκεκριμένη αεροτομή. Για 3D σώματα, μας βολεύει να μετράμε την γωνία προσβολής  $\alpha$ , από την διεύθυνση της γωνίας  $a_{ZL}$  διότι, με βάση την σύμβαση αυτή, για  $\alpha = 0^\circ$ , μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μηδενική άντωση.

Η γωνία  $\beta$  αποτελεί την γωνία κλίσης της προπέλας και συνήθως για προπέλες μη σταθερής γωνίας  $\beta$ , ορίζεται στις προδιαγραφές ως η τιμή στο 75% της ακτίνας του πτερυγίου. Για να

παραχθεί ώση από την προπέλα με φορά προς τα εμπρός, θα πρέπει η γωνία προσβολής ανάμεσα στην χορδή και την σχετική ταχύτητα του αέρα ( $V_o$ ) να είναι θετική. Σε περίπτωση που σε κάποια διατομή η γωνία α είναι μικρότερη του μηδενός, τότε έχουμε αντίθετη φορά στην ώση για την συγκεκριμένη διατομή, γεγονός το οποίο έχει ως αποτέλεσμα άνιση κατανομή της ώσης κατά μήκος του πτερυγίου. Για να έχουμε θετική γωνία α παντού, πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλη γωνία κλίσης προπέλας (pitch β).



Σχήμα 2.7 Γεωμετρικά μεγέθη αεροτομής πτερυγίου, στην επάνω εικόνα για μηδενική ταχύτητα πτήσης και στην κάτω για διάφορη του μηδενός.

Στο Σχήμα 2.7γ απεικονίζονται οι διαφορετικές συνιστώσες στις οποίες μπορούμε να αναλύσουμε την δύναμη που ασκείται στην αεροτομή. Οι συνιστώσες αυτές συμβολίζονται ως απειροστές ποσότητες, αφού οι συνολικές δυνάμεις προκύπτουν από το ολοκλήρωμα των επιμέρους κατανομών κατά μήκος των πτερυγίων. Από την στιγμή που η γωνία προσβολής διαφοροποιείται κατά μήκος του πτερυγίου, θα έχουμε και διαφορετικές τιμές για τις αναπτυσσόμενες δυνάμεις.

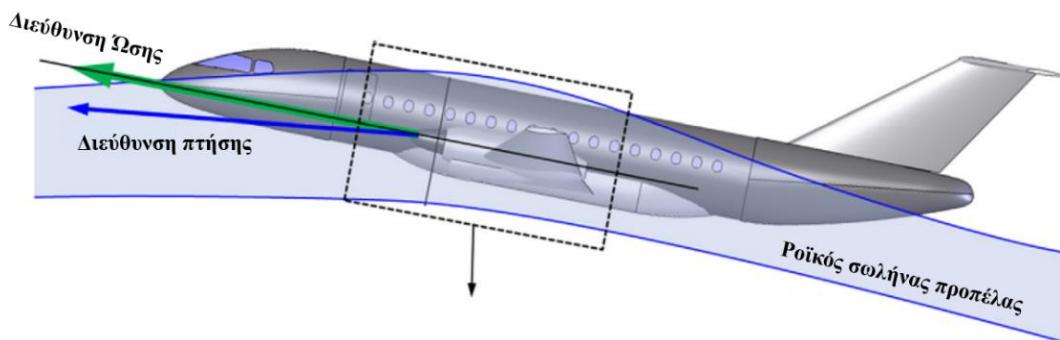
Για τον υπολογισμό των δυνάμεων αυτών υπάρχουν διάφορες μεθοδολογίες που μας δίνουν, μετά την εισαγωγή απλοποιήσεων, ακριβείς λύσεις. Αρχικά η μεθοδολογία ‘Blade element theory’ χρησιμοποιεί τους αδιάστατους συντελεστές άντωσης και οπισθελκούσας για τον υπολογισμό των διαφορικών της ώσης και της ροπής και στην συνέχεια με ολοκλήρωση αυτών σε ολόκληρη την επιφάνεια του πτερυγίου, γίνεται ο υπολογισμός των συνισταμένων δυνάμεων. Μια ακόμα μέθοδος είναι η θεωρία ‘Integral Momentum Theorem’, η οποία είναι μια μαθηματική διατύπωση της εξίσωσης συνέχειας του ρυθμού πεδίου και βασίζεται στο ότι ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός όγκου ελέγχου που κινείται, ισούται με τις επιφανειακές δυνάμεις και τις εσωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο ρευστό. Αυτές οι μεθοδολογίες μπορούν να μας δώσουν με ικανοποιητική ακρίβεια τις δυνάμεις που αναζητάμε.

Βέβαια στην παρούσα διπλωματική, για τα κεφάλαια 3(CFD) και 4(FSI), τα αποτελέσματα που εξάγουμε χρησιμοποιούν αριθμητικές μεθοδολογίες, με στόχο τον υπολογισμό του ροϊκού πεδίου (ταχύτητες και πιέσεις), όπου στην συνέχεια με ολοκλήρωση στην εκάστοτε επιφάνεια, μπορούμε να πάρουμε τις δυνάμεις και τις ροπές σε όλες τις διευθύνσεις. Επιπλέον στο  $5^{\circ}$  κεφάλαιο, όπου διεξάγεται η μελέτη ευστάθειας, τα αεροδυναμικά φορτία υπολογίζονται αναλυτικά με βάση την θεωρία ‘Strip Theory’, κατά την οποία χωρίζεται το κάθε πτερύγιο σε επιμέρους τμήματα, υπολογίζονται τοπικά οι δυνάμεις και στην συνέχεια αθροίζονται για την εύρεση των συνισταμένων ποσοτήτων. Οι παραπάνω μεθοδολογίες και εξισώσεις που εφαρμόζονται, θα παρουσιαστούν στα επιμέρους κεφάλαια αναλυτικά.

### 2.3.2 Δευτερεύοντα φαινόμενα – Αρμονικά Φορτία

Κατά την λειτουργία της προπέλας, εκτός από τις κατανομές άντωσης και οπισθελκούσας, οι οποίες προκαλούν την ώση και την ροπή της προπέλας, η προπέλα καταπονείται και σε δυναμικά φορτία, τα γνωστά και ως nP φορτία (1P,2P,3P κλπ.). Ο παράγοντας P αναφέρεται στις n επαναλήψεις της φόρτισης για μια περιστροφή της προπέλας. Οι δυνάμεις αυτές αποτελούν κυκλικές φορτίσεις, οι οποίες είναι οι κύριες πηγές φόρτισης για κινητήρες turboprop και είναι απαραίτητη η μελέτη τους τόσο για την διάρκεια ζωής της κατασκευής (αντοχή σε κόπωση) όσο και για την ακεραιότητα της κατασκευής (αστοχία μειωτήρα, κινητήρα ή και πτέρυγας). Στόχος των κατασκευαστών κινητήρων turboprop είναι ο περιορισμός του μεγέθους για τα φορτία αυτά στο εύρος λειτουργίας του κινητήρα και του αεροσκάφους (περιστροφική ταχύτητα, ταχύτητα πτήσης, υψόμετρο κλπ.) και η αποφυγή συντονισμού των συχνοτήτων τους με τις συχνότητες της κατασκευής.

Τα φορτία αυτά δημιουργούνται κυρίως, όταν το αεροσκάφος βρίσκεται σε κατάσταση απογείωσης (take-off) ή κατά την διάρκεια εκτέλεσης στροφής και ελιγμών. Στο Σχήμα 2.8 παρουσιάζεται ένα αεροσκάφος σε κατάσταση απογείωσης και ο ροϊκός σωλήνας της προπέλας. Ο ροϊκός σωλήνας είναι ένας νοητός σωλήνας ροϊκών γραμμών με διάμετρο περίπου ίση με την διάμετρο της προπέλας και περιλαμβάνει τα μόρια του αέρα που διέρχονται από την προπέλα. Στο σχήμα αυτό, βλέπουμε ότι δημιουργείται μια γωνία ανάμεσα στην διεύθυνση της παραγόμενης ώσης και την πορεία της πτήσης. Η γωνία αυτή οδηγεί στην ανάπτυξη των δυναμικών φορτίσεων της προπέλας.



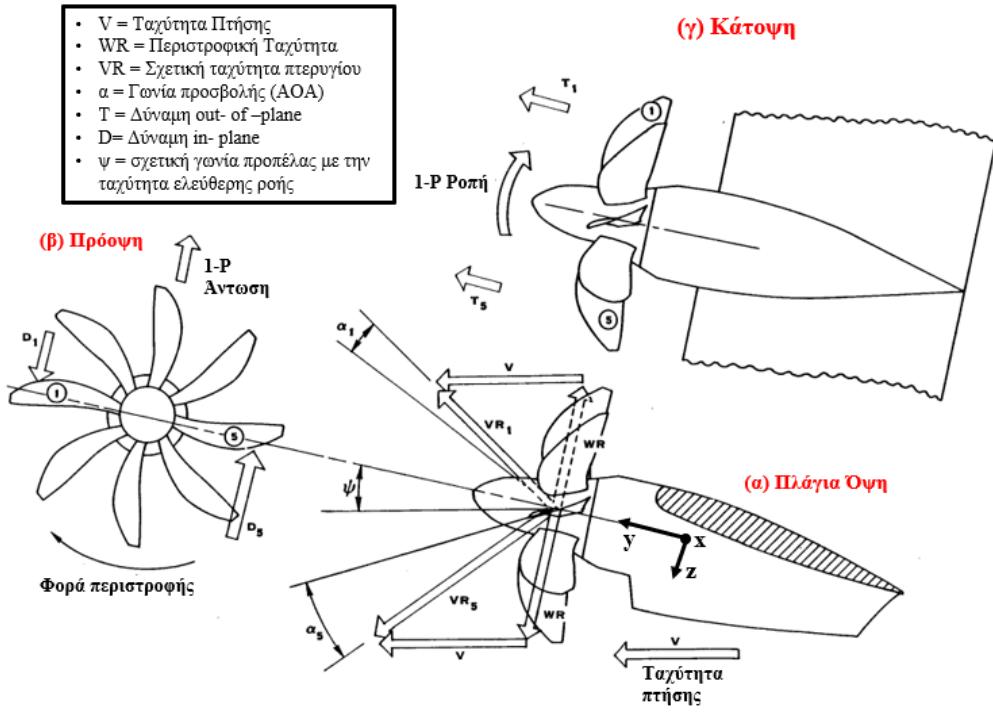
Σχήμα 2.8 Ροϊκός σωλήνας προπέλας αεροσκάφους κατά την διάρκεια απογείωσης

Στο Σχήμα 2.9 απεικονίζονται τρεις διαφορετικές όψεις ενός κινητήρα που βρίσκεται σε κατάσταση απογείωσης(π.χ. του αεροσκάφους του σχήματος 2.8). Με χρήση του σχήματος αυτού και των μεγεθών που αναγράφονται σε αυτό, θα αναλύσουμε τις αναπτυσσόμενες δυναμικές φορτίσεις στην προπέλα.

Από τα δυναμικά nP φορτία που αναφέραμε προηγουμένως, σημαντικότερα αυτών είναι τα φορτία 1P (ανά 1 περιστροφή προπέλας). Ως 0P αναφερόμαστε στα στατικά φορτία, ενώ ως nP (n=2,3,4...) στις αρμονικές συνιστώσες της συνολικής φόρτισης, οι οποίες καταπονούν τα πτερύγια της προπέλας με συχνότητες ακέραια πολλαπλάσιες της συχνότητας περιστροφής της προπέλας. Τα φορτία nP των διευθύνσεων x,z ασκούνται στο επίπεδο περιστροφής της προπέλας, με αποτέλεσμα να καταπονούν την άτρακτο που συνδέει την προπέλα με τον μειωτήρα, με τέτοιο τρόπο ώστε να κάμπτεται ο άξονάς της. Επιπλέον, η σημαντικότητα τους οφείλεται στα πολύ μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης έναντι των υπόλοιπων αρμονικών συνιστώσων για τις διευθύνσεις του επίπεδου περιστροφής.

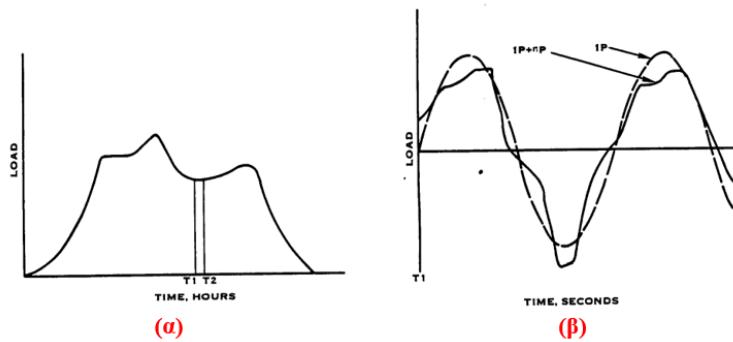
Λόγω της γωνίας ψ (σχήμα 2.9α) του άξονα περιστροφής της προπέλας και της διεύθυνσης της πτήσης, έχουμε διαφορά στην σχετική γωνία προσβολής που βλέπουν τα πτερύγια 1 και 5 της προπέλας(σχήμα 2.9β). Το πτερύγιο 1 που ανεβαίνει, όπως φαίνεται στο σχήμα, βλέπει μια μειωμένη γωνία α, ενώ το πτερύγιο 5, που κατεβαίνει, βλέπει μια αυξημένη γωνία α. Στα επάνω και κάτω πτερύγια (κατακόρυφη θέση) η γωνία προσβολής είναι ίδια. Για τον λόγο αυτό το κάθε πτερύγιο της προπέλας υπόκειται σε μια ημιτονοειδή μεταβολή στο φορτίο, σε κάθε περιστροφή. Η διαφορά στο φορτίο ανάμεσα στα πτερύγια 1 και 5, έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη μιας σταθερής κάθετης δύναμης (1-P άντωση), όπως φαίνεται στην πρόοψη του κινητήρα. Ενώ η διαφορά στην ώση ανάμεσα στα 2 πτερύγια οδηγεί στην ανάπτυξη ροπής (1-P Ροπή), όπως φαίνεται στην κάτοψη του κινητήρα. Τα nP φορτία αποτελούν τις αρμονικές συνιστώσες των συνολικών φορτίων και οι συχνότητες τους, όπως προαναφέραμε, είναι ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας περιστροφής της προπέλας.

Να επισημάνουμε στο σημείο αυτό ότι οι συχνότητες των συνιστώσων 1P,2P κλπ., αναφέρονται στα φορτία που καταπονούν τα επιμέρους πτερύγια της προπέλας. Επειδή έχουμε 2 συμμετρικά πτερύγια για την δικιά μας προπέλα, τα μεγάλα εύρη θα προκύπτουν στις 2P συνιστώσες, αφού το φαινόμενο που περιγράφαμε έως τώρα, θα επαναλαμβάνεται μια φορά για κάθε πτερύγιο σε κάθε περιστροφή της προπέλας. Η ανάλυση που θα διεξάγουμε για τον υπολογισμό των αρμονικών συνιστώσων, την σημασία και την συμπεριφορά τους, βασίστηκε στην αναφορά [13] στην οποία τα φορτία αυτά υπολογίζονται για κινητήρα Prop – Fan. Επιπλέον, μια πιο συνοπτική μελέτη των αρμονικών συνιστώσων σε προπέλα αεροσκάφους, πραγματοποιείται στην αναφορά [12].



Σχήμα 2.9 Διαφορετικές όψεις κινητήρα σε κατάσταση απογείωσης και βασικά μεγέθη περιγραφής P φορτίσεων

Στο Σχήμα 2.10, απεικονίζεται ένα παράδειγμα επαλληλίας κυκλικών φορτίσεων με την στατική λύση, οι οποίες αναπτύσσονται σε κλασικές εφαρμογές προπελών. Στο σχήμα 2.10α, βλέπουμε την απόκριση του συνολικού φορτίου που αναπτύσσεται στην διάρκεια της πτήσης συναρτήσει του χρόνου, ενώ αντίστοιχα στο σχήμα 2.10β βλέπουμε την απόκριση της 1P φόρτισης για μια περίοδο και την διαφοροποίησή της μετά την προσθήκη υψηλότερης τάξης αρμονικών συνιστώσων.



Σχήμα 2.10 Αρμονικές Συνιστώσες φόρτισης

Η εξαγωγή και υπολογισμός των αρμονικών συνιστώσων της συνολικής φόρτισης πραγματοποιείται με χρήση του μετασχηματισμού Fourier και του αλγόριθμου του ταχύ μετασχηματισμού Fourier (FFT). Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί ένα καθαρά μαθηματικό εργαλείο, το οποίο θα παρουσιαστεί αναλυτικά στο επόμενο κεφάλαιο.

## 2.4 Αδιάστατοι συντελεστές και Μαθηματικοί συμβολισμοί

Στην ενότητα αυτή ορίζουμε βασικές εξισώσεις και μαθηματικούς συμβολισμούς που θα χρειαστούμε για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων και την κατάστρωση των εξισώσεων. Σε προβλήματα μηχανικής ρευστών συνηθίζεται να γίνεται χρήση αδιάστατων αριθμών για την περιγραφή των χαρακτηριστικών της ροής. Οι αδιάστατοι αυτοί συντελεστές προκύπτουν από την εφαρμογή διαστατικής ανάλυσης στο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Χρησιμοποιώντας τους συντελεστές αυτούς, μπορούμε να συγκρίνουμε ροϊκά πεδία και τα αποτελέσματά τους για διαφορετικά συστήματα. Οι αδιάστατοι αριθμοί μειώνουν τον αριθμό των μεταβλητών που περιγράφουν ένα σύστημα, μειώνοντας έτσι τον όγκο των πειραματικών δεδομένων που απαιτούνται για τη συσχέτιση των φυσικών φαινομένων. Επιπλέον, μας επιτρέπουν να μελετήσουμε ένα πρόβλημα, στο αδιάστατο ανάλογό του υπό κλίμακα. Στην συνέχεια παρουσιάζουμε τους βασικούς αδιάστατους συντελεστές, που θα χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή των αποτελεσμάτων μας, με βάση την αναφορά [7].

**Αριθμός Mach  $Ma = \frac{V}{c}$ .** Ο αριθμός αυτό είναι ο λόγος της ταχύτητας της ροής προς την ταχύτητα του ήχου  $c = \left[\frac{m}{s}\right]$ . Η τιμή του αριθμού Ma χαρακτηρίζει την ροή ως υποχηλητική ( $Ma < 1$ ), ηχητική ( $0.8 < Ma < 1.2$ ), υπερηχητική ( $Ma > 1.2$ ) και υπερ-υπερηχητική ( $Ma > 5$ ). Επίσης, για τιμές  $Ma > 0.3$  η ροή θεωρείται συμπιεστή. Ανάλογα με την τιμή του αριθμού Ma στην οποία βρισκόμαστε, έχουμε και εμφάνιση διαφορετικών φαινομένων για την ροή μας.

**Αριθμός Reynolds  $Re = \frac{\rho V D}{\mu}$ .** Όπου  $\rho$   $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$  η πυκνότητα,  $V$   $\left[\frac{m}{s}\right]$  η ταχύτητα της ροής,  $D$  [m] ένα χαρακτηριστικό μήκος της ροής μας και  $\mu$   $\left[\frac{kg}{m \cdot s}\right]$  το δυναμικό ιξώδες της ροής. Ο αριθμός Reynolds είναι ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις ιξώδους. Χρησιμοποιούμε τον αριθμό Re, για τον χαρακτηρισμό της ροής ως στρωτή, μεταβατική ή τυρβώδη. Τα εύρη τιμών για τον κάθε χαρακτηρισμό εξαρτώνται από το πρόβλημά που μελετάμε.

Οι αδιάστατοι συντελεστές δυνάμεων και ροπών, προκύπτουν από την διαίρεση της εκάστοτε δύναμης και ροπής προς το γινόμενο της πυκνότητας με την ταχύτητα και ένα χαρακτηριστικό μήκος. Συγκεκριμένα οι συντελεστές που μας ενδιαφέρουν για την προπέλα, είναι οι ακόλουθοι.

- Συντελεστής ώστης  $C_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4}$
- Συντελεστής ροπής  $C_M = \frac{M}{\rho n^2 D^5}$

Όπου T, M, n, D είναι η πίεση, η ροπή, οι στροφές της προπέλας και η διάμετρος της.

- Δυναμική πίεσης  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_R^2$  [Pa]
- $V_R = \sqrt{V_0^2 + (\Omega r)^2}$
- Συντελεστής Άντωσης  $C_L = \frac{L}{q_\infty S}$
- Συντελεστής Οπισθελκούσας  $C_D = \frac{D}{q_\infty S}$
- Συντελεστής Πίεσης  $C_p = \frac{p_1 - p_\infty}{q_\infty}$

Όπου L,D σε [N] είναι η άντωση και η οπισθελκούσα αντίστοιχα, S μια χαρακτηριστική διάσταση,  $V_R$  η σχετική ταχύτητα στο σημείο που υπολογίζουμε,  $(p_1 - p_\infty)$  η σχετική πίεση στο σημείο που υπολογίζουμε μετρημένη σε Pa.

- Συντελεστής Ισχύος  $C_{Power} = \frac{Power}{\rho n^3 D^5}$

Όπου Power [Watt], είναι η ισχύς που καταλήγει στην προπέλα.

- Αναλογία ταχυτήτων(Advance Ratio) προπέλας  $J = \frac{V_\infty}{nD}$

Ο λόγος  $J$ , θα χρησιμοποιηθεί αρκετά κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Η σημασία του βρίσκεται στο γεγονός ότι για τον ίδιο αριθμό  $J$  ανεξάρτητα την ταχύτητα της ροής ή την περιστροφική ταχύτητα της προπέλας, η προπέλα βλέπει στις διατομές των πτερυγίων της την ίδια γωνία προβολής α ΑΟΑ.

Κατά την κατάστρωση των εξισώσεων, θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες θεμελιώδεις μαθηματικές έννοιες και συμβολισμούς, οι οποίοι παρουσιάζονται στην συνέχεια με βάση τις αναφορές [4], [5], [7].

### Τανυστές

Ο τανυστής τάξης  $n$  είναι ένα σύνολο  $N^n$  ποσοτήτων που μετατρέπονται από το ένα σύστημα  $x_i$  στο  $x'_i$  με χρήση ενός κανόνα μετασχηματισμού, ο οποίος εξαρτάται από την τάξη  $n$ , με τους μετασχηματισμούς να ορίζονται ως :

$n$	Τάξη	Κανόνας μετασχηματισμού
0	Βαθμωτό $\alpha$	$a(x'_i) = a(x_i)$
1	Διάνυσμα $x_i$	$x'_i = a_{ij}x_j$
2	Τανυστής $T_{ij}$	$T'_{ij} = a_{ik}a_{jl}T_{kl}$

Ο τανυστής αντιπροσωπεύει μια ποσότητα με φυσική σημασία. Η ποσότητα αυτή υπάρχει ανεξάρτητα από το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιούμε. Το μητρώο ποσοτικοποιεί τον τανυστή σε σχέση με ένα συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Οι τιμές του πίνακα εξαρτώνται από το συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων και τροποποιούνται με συστηματικό τρόπο, αν αλλάζει το σύστημα αναφοράς. Γενικά για τους τανυστές αποδεικνύεται ότι :

$$A' = R A R^T$$

Όπου  $R$  το μητρώο μετασχηματισμού συντεταγμένων (μητρώο περιστροφής) ανάμεσα σε 2 συστήματα με διαφορετικό προσανατολισμό. Επιπλέον, οι συνιστώσες ενός διανύσματος μετασχηματίζονται ως :

$$x'_i = a_{ij}x_j \text{ σε } x_j = a_{ij}x'_i$$

Έτσι με αντικατάσταση έχουμε την εξίσωση :  $x_j = a_{ij}a_{il}x_l$ , η οποία είναι έγκυρη μόνο αν

$$a_{ij}a_{il} = \delta_{jl}$$

Για τους μετασχηματισμούς που ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη, λέμε ότι είναι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί. Οι τανυστές που ικανοποιούν ορθογώνιο μετασχηματισμό, λέγονται καρτεσιανοί τανυστές. Οι τανυστές εκφράζουν φυσικές ποσότητες, ενώ οι τιμές τους εξαρτώνται από το σύστημα αναφοράς. Οι ποσότητες που εκφράζουν έχουν αναλλοίωτα χαρακτηριστικά μεγέθη. Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα μπορεί να έχει διαφορετικές συντεταγμένες σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς. Παρόλα αυτά το μήκος του παραμένει σταθερό.

## Grad - Div - Curl

Για το βαθμωτό, διανυσματικό και τανυστικό πεδίο χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς :

1. Βαθμωτό πεδίο :  $\Phi = \Phi(x, t)$ ,  $\underline{\Phi} = \underline{\Phi}(\underline{x}, t)$
2. Διανυσματικό πεδίο :  $v_i = v_i(x_i, t)$ ,  $\underline{v} = \underline{v}(\underline{x}, t)$
3. Τανυστικό πεδίο :  $T_{ij} = T_{ij}(x_i, t)$ ,  $\underline{T} = \underline{T}(\underline{x}, t)$

Στην ουσία το βαθμωτό πεδίο αποτελεί μια αριθμητική τιμή, το διανυσματικό πεδίο είναι ένα διάνυσμα και το τανυστικό πεδίο είναι ένας πίνακας.

Ο διαφορικός τελεστής  $\nabla$  ονομάζεται del ή Nabla τελεστής και ορίζεται ως :

$$\nabla = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ο διαφορικός τελεστής  $\Delta$  ονομάζεται Laplacian τελεστής και ορίζεται ως :

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Οι βασικοί διαφορικοί τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε για βαθμωτά και διανυσματικά πεδία, είναι οι εξής :

$$grad \Phi = \nabla \Phi = \Phi_i \underline{e}_i \quad (\text{διάνυσμα})$$

$$div \underline{v} = \nabla \cdot \underline{v} = v_{i,i} \quad (\beta\alphaθμωτό)$$

$$curl \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \epsilon_{ijk} v_{k,j} \quad (\deltaιάνυσμα)$$

To  $curl$ , δηλώνει τον στροβιλισμό της ροής. Γενικά υπάρχουν παρόμοιοι κανόνες για τανυστές.

## Θεώρημα απόκλισης

Για ένα χωρίο  $V$  με σύνορο το  $A$ , ο παρακάτω ολοκληρωτικός μετασχηματισμός ισχύει για τον τανυστή πρώτης τάξεως(διάνυσμα)  $\underline{g}$ :

$$\int_V div(\underline{g}) dV = \int_V \nabla \cdot (\underline{g}) dV = \int_A \underline{n} \cdot \underline{g} dA$$

Όπου  $\underline{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο  $A$ . Το θεώρημα απόκλισης μας λέει ότι το ολοκλήρωμα της απόκλισης(div) του  $\underline{g}$  επί του χωρίου  $dV$  ισούται με την προς τα έξω ροή ενός διανυσματικού πεδίου  $\underline{g}$  μέσω μιας κλειστής επιφάνειας με σύνορο  $dA$ .

## Φυσικό – Υπολογιστικό πεδίο

Ένας ακόμα διαχωρισμός ανάμεσα σε 2 έννοιες που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαιο, είναι η διαφοροποίηση ανάμεσα στον Φυσικό και Υπολογιστικό χώρο του κάθε

προβλήματος. Ως φυσικός χώρος είναι εύκολο να αντιληφθούμε τι ορίζεται. Ο φυσικός χώρος περιλαμβάνει το σύστημά μας είτε αυτό είναι μια κατασκευή είτε αποτελείται επίσης και από κάποιο ρευστό. Οπτικά, για τα περισσότερα προβλήματα, ο ανθρώπινος νους οριοθετεί αυτόματα τον φυσικό χώρο, στον οποίο ορίζεται το κάθε πρόβλημα και αναγνωρίζει τις συνθήκες στα σύνορα, που το συνοδεύουν.

Από την άλλη μεριά βέβαια, η έννοια του υπολογιστικού πεδίου, όταν το σύστημά μας περιλαμβάνει ρευστό, δεν είναι τόσο ξεκάθαρη. Για παράδειγμα, σε μια κατασκευή το πεδίο στο οποίο επιλύουμε και ορίζουμε τις εξισώσεις μας, αποτελείται από τον χώρο που καλύπτει η ίδια η κατασκευή και τα σύνορα του χώρου μας ορίζονται από την επιφάνεια της κατασκευής. Για τα ρευστά όμως, θα πρέπει εμείς να ορίσουμε το υπολογιστικό μας πεδίο και μετέπειτα να ορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες στον χώρο αυτό. Επομένως με έναν ορισμό θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπολογιστικό πεδίο αποτελεί ο χώρος με γνωστές συνθήκες στα σύνορά του, στον οποίο ορίζονται και επιλύονται οι εξισώσεις που εκφράζουν το σύστημα. Για παράδειγμα, κατά την εφαρμογή μεθόδων CFD (Computational Fluid Dynamics), χρειάζεται να ορίσουμε τον όγκο ελέγχου (υπολογιστικό πεδίο), στον οποίο μετά την διακριτοποίησή του, θα επιλύσουμε τις εξισώσεις για τον υπολογισμό των μεταβλητών του ροϊκού πεδίο. Για την επιλογή της γεωμετρίας και των διαστάσεων του όγκου αυτού, ο κάθε μηχανικός θα πρέπει να βασιστεί στις ρευστομηχανικές του γνώσεις και σε γνώσεις που ο ίδιος διαθέτει, σχετικά με την φύση του προβλήματος.

### 3. ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΠΕΛΑΣ

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο θεωρούμε την προπέλα μας στερεή. Η θεώρηση αυτή αποτελεί μια απλοποίηση, η οποία μειώνει την ακρίβεια της λύσης μας. Θα μπορούσε επομένως κάποιος να αναρωτηθεί, γιατί να εισάγουμε την απλοποίηση αυτή. Σε πολύπλοκα συστήματα, όπως το δικό μας, όπου αναπτύσσονται σύνθετα φαινόμενα, η θεώρηση του στερεού μάς επιτρέπει να διεξάγουμε μια προκαταρκτική μελέτη στο σύστημα, το οποίο μας προσφέρει πληροφορίες που κινούνται γύρω από τις λύσεις του ακριβέστερου μοντέλου. Μια πιο αναλυτική παρουσίαση των διαφορών ανάμεσα σε παραμορφώσιμα και στερεά σώματα θα παρουσιαστεί στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, όπου η προπέλα του μοντέλου μας θεωρείται παραμορφώσιμη.

Στόχος μας στο κεφάλαιο αυτό είναι η παρουσίαση των βασικών αρχών που διέπουν τις προπέλες αεροσκαφών και των φαινομένων που εμφανίζονται σε αυτές. Με τον τρόπο αυτό εισερχόμαστε σταδιακά στις πιο περίπλοκες έννοιες, που θα παρουσιαστούν στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Βασική μας επιδίωξη είναι να μπορέσουμε να δώσουμε μια αρχική εικόνα και να εξάγουμε τα αποτελέσματα, τα οποία θα συγκριθούν στην συνέχεια με τα ακριβέστερα αποτελέσματα από την λύση της αλληλεπίδρασης ρευστού – κατασκευής στο τέλος του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε αποκλειστικά το ρευστομηχανικό κομμάτι για την προπέλα. Για την δομή του κειμένου, αρχικά παρουσιάζεται όλη η θεωρία, γίνεται κατάστρωση των εξισώσεων, περιγράφονται οι μεθοδολογίες για τον τρόπο επίλυσης και δίνονται όλα τα απαραίτητα εργαλεία που θα χρειαστούμε για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων μας. Αφού αναλυθεί όλο το θεωρητικό κομμάτι, κάνουμε εισαγωγή στα κατάλληλα λογισμικά και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας.

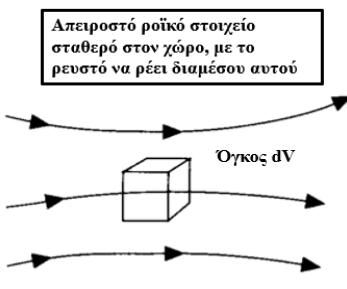
#### 3.1 Κατάστρωση εξισώσεων και Αριθμητικές μέθοδοι

Όταν αναφερόμαστε σε επίλυση του ροϊκού πεδίου, εννοούμε τον υπολογισμό της ταχύτητας, πίεσης, πυκνότητας, θερμοκρασίας κλπ. Για τον υπολογισμό αυτών των ποσοτήτων χρειάζεται πρώτα να καταστρώσουμε τις εξισώσεις που εκφράζουν το ροϊκό μας πεδίο. Αφού γίνει η κατάστρωση, στην συνέχεια επικαλούμαστε απλοποιητικά μοντέλα, τα οποία καθιστούν εφικτή την επίλυση των εξισώσεων, μιας και στην πλήρη μορφή τους, με τα σημερινά μέσα, για σύνθετες γεωμετρίες δεν είναι εφικτή η εύρεση λύσης (είτε αριθμητικής είτε αναλυτικής). Αφού γίνει η κατάστρωση των εξισώσεων, η ενότητα αυτή κλείνει με τις αριθμητικές μεθοδολογίες που χρησιμοποιούμε για την επίλυση των εξισώσεων. Η κατάστρωση των εξισώσεων πραγματοποιείται με βάση την αναφορά [8].

##### 3.1.1 Κατάστρωση εξισώσεων URANS

Οι εξισώσεις που διέπουν το ροϊκό πεδίο, σε οποιαδήποτε μορφή και να παρουσιάζονται, βασίζονται σε τρεις θεμελιώδεις φυσικές αρχές :

- 1) Η μάζα διατηρείται.
- 2) 2<sup>ος</sup> νόμος του Newton,  $\mathbf{F}=\mathbf{ma}$ .
- 3) Η ενέργεια διατηρείται.



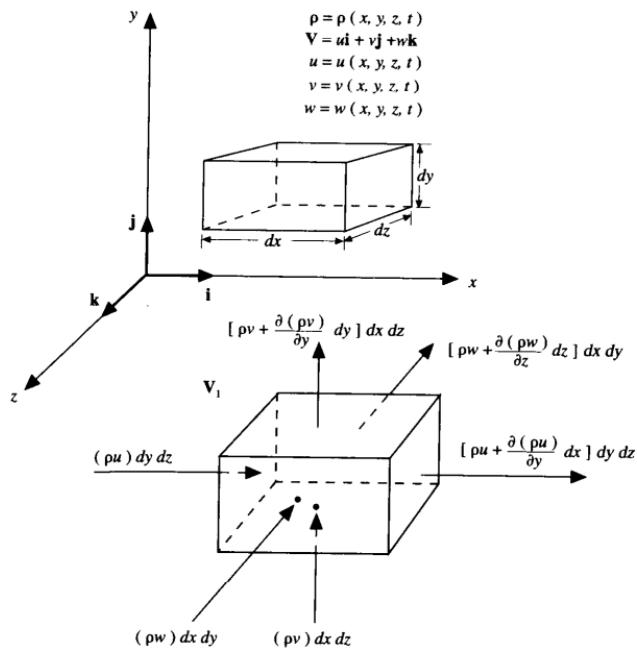
Σχήμα 3. 1 Ακίνητο απειροστό ροϊκό στοιχείο

Εφαρμόζοντας κάθε μία από τις αρχές αυτές σε ένα κατάλληλο μοντέλο, μας δίνουν ένα σετ εξισώσεων. Ξεκινάμε με την θεώρηση απειροστού ροϊκού στοιχείου, το οποίο παραμένει σταθερό στον χώρο και το ρευστό ρέει διαμέσου αυτού, όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.1. Η επιλογή αυτού του μοντέλου για την κατάστρωση των εξισώσεων του ροϊκού πεδίου, οδηγεί στην συντηρητική μορφή των εξισώσεων. Εφαρμόζοντας τις παραπάνω αρχές, μία προς μία, παίρνουμε τις εξισώσεις του πεδίου μας :

- 1) Η μάζα διατηρείται → Εξίσωση Συνέχειας
- 2)  $\mathbf{F} = \mathbf{ma}$  → Εξίσωση Ορμής (Navier – Stokes εξισώσεις)
- 3) Η ενέργεια διατηρείται → Εξίσωση Ενέργειας

### Εξίσωση Συνέχειας

Στο Σχήμα 3.2 παρουσιάζονται οι ποσότητες του ροϊκού στοιχείου και οι ροές μάζας διαμέσου αυτού, εκφρασμένες ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ως ροή μάζας ορίζεται το γινόμενο της ταχύτητας με την πυκνότητα, το οποίο μας δίνει την ροή μάζας ανά μονάδα επιφάνειας ( $\rho u$ ,  $\rho v$ ,  $\rho w$ ). Όλες οι ποσότητες του ροϊκού πεδίου έχουν χωρική και χρονική εξάρτηση.



Σχήμα 3. 2 Μοντέλο απειροστού στοιχείου και ροές μάζας στις επιφάνειες του στοιχείου

Αφαιρώντας τις ποσότητες που εισέρχονται και εξέρχονται από το στοιχείο, για την ίδια διεύθυνση υπολογίζουμε την ροή μάζας μέσα από το στοιχείο. Για παράδειγμα στην διεύθυνση του x έχουμε:

$$\left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} dx \right] dy dz - (\rho u) dy dz = \frac{\partial(\rho u)}{\partial y} dx dy dz$$

Αθροίζοντας τις ροές και για τις 3 διευθύνσεις έχουμε :

$$\Sigma \text{νολική ροή μάζας} = \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.1)$$

Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας μέσα στο στοιχείο ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του στοιχείου επί τον όγκο του. Έτσι έχουμε :

$$Pυθμός μεταβολής μάζας στοιχείου = \frac{\partial(\rho)}{\partial t} (dx dy dz) \quad (3.2)$$

Εξισώνουμε τις σχέσεις (3.1) και (3.2) και γράφοντας τις μερικές παραγώγους σε συμπαγή μορφή με χρήση του διαφορικού τελεστή  $\text{div}(\nabla)$  του όρου  $\rho \underline{V}$  :

$$\nabla(\rho) = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Έχουμε :

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{V}) = 0 \quad (3.3)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί μια μερική διαφορική εξίσωση και είναι η συντηρητική μορφή της εξίσωσης συνέχειας του ροϊκού πεδίου.

### Εξίσωση Ορμής (Navier – Stokes)

Στο Σχήμα 3.3 παρουσιάζεται το ροϊκό στοιχείο και όλες οι διατμητικές τάσεις και πιέσεις (ορθές τάσεις), που ασκούνται σε αυτό σε όλες τις διευθύνσεις. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο στοιχείο απαρτίζονται από τις επιφανειακές δυνάμεις, τις οποίες διακρίνουμε στο σχήμα και τις εσωτερικές δυνάμεις  $f$  (π.χ βαρυτικές, φυγόκεντρες, ηλεκτρικές), οι οποίες ασκούνται από απόσταση. Οι εσωτερικές δυνάμεις μπορούν να γραφούν ανά μονάδα μάζας ως :

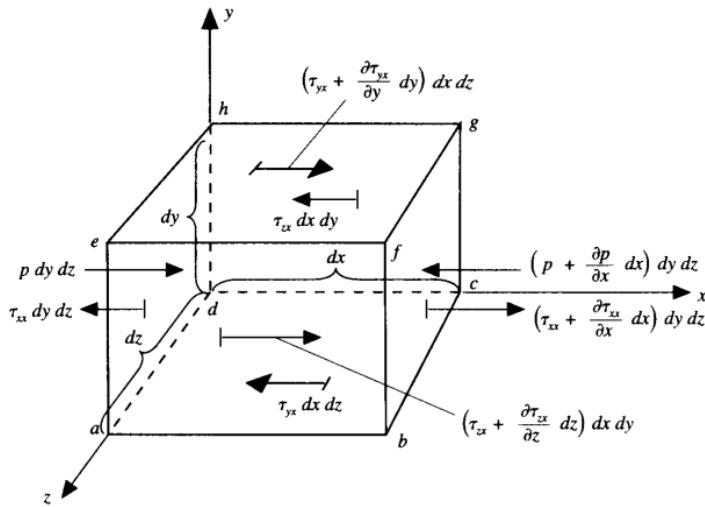
$$Eσωτερικές δυνάμεις διευθυνσης x = f_x \rho (dx dy dz) \quad (3.4)$$

Αντίστοιχα αθροίζοντας τις επιφανειακές δυνάμεις που ασκούνται στην διεύθυνση x, όπως φαίνεται στο σχήμα, έχουμε :

$$Eπιφανειακές δυνάμεις = \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.5)$$

Επίσης, η μάζα του στοιχείου δίνεται από την σχέση :  $m = \rho dx dy dz$  (3.6). Μένει επομένως να υπολογίσουμε τον όρο της επιτάχυνσης στον 2<sup>o</sup> νόμο του Newton. Με χρήση του θεωρήματος της απόκλισης για διανυσματικές ποσότητες έχουμε για την x διεύθυνση :

$$\rho a = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \underline{V}) \quad (3.7)$$



Σχήμα 3. 3 Διάγραμμα δυνάμεων για απειροστό, σταθερό στον χώρο, ροϊκό στοιχείο

Εισαγωγή των σχέσεων (3.4) έως (3.7) στον 2<sup>o</sup> νόμο του Newton( $F=ma$ ) μας δίνει την εξίσωση ορμής για την x, διεύθυνση. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για τις άλλες 2 διευθύνσεις, παίρνουμε την συντηρητική μορφή των εξισώσεων Navier – Stokes και για τις 3 διευθύνσεις στην πλήρη τους μορφή:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho u \underline{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho v \underline{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho w \underline{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \end{cases}$$

Σύμφωνα με τον Newton οι διατμητικές τάσεις που εμφανίζονται στις εξισώσεις αυτές, είναι ανάλογες του ρυθμού μεταβολής των τροπών, όπου ως τροπή ορίζεται η κλίση της ταχύτητας. Έτσι μπορούν να γραφούν ως :

$$\tau_{xx} = \lambda \nabla(\underline{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yy} = \lambda \nabla(\underline{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{zz} = \lambda \nabla(\underline{V}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right]$$

Όπου με είναι το δυναμικό ιξώδες του ρευστού και λ ο δεύτερος συντελεστής ιξώδους, ο οποίος σύμφωνα με την υπόθεση του Stokes ισούται  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ . Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις διατμητικές τάσεις στις εξισώσεις Navier – Stokes και γράφοντας το σύστημα που προκύπτει σε συμπαγή μορφή έχουμε :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \underline{V}) + \nabla(\rho \underline{V} \underline{V}) = -\nabla p + \nabla(\bar{\tau}) + \underline{F} \quad (3.8)$$

όπου ρ η στατική πίεση, V το διάνυσμα της ταχύτητας του ρευστού, ρ η πυκνότητα του ρευστού,  $\underline{F}$  το διάνυσμα των εσωτερικών δυνάμεων και  $\bar{\tau}$  ο τανυστής των τάσεων.

### Εξίσωση Ενέργειας

Για συστήματα τα οποία δεν περιλαμβάνουν διάχυση ενέργειας, θερμική διάχυση, χημικές μεταβολές και φαινόμενα συμπιεστότητας, οι εξισώσεις συνέχειας και ορμής που παράγθηκαν έως τώρα, είναι ικανές να υπολογίζουν τις ποσότητες του ροϊκού πεδίου. Για το δικό μας σύστημα λόγω των υψηλών περιστροφικών ταχυτήτων της προπέλας, υπάρχουν περιοχές πάνω στα πτερύγια της, οι οποίες εμφανίζουν αριθμούς Mach συμπιεστή ροής ( $M = \frac{V}{a}$ ). Για τιμές του αριθμού αυτού μικρότερες του 0.3, η ροή μπορεί να θεωρηθεί πλήρως ασυμπίεστη, ενώ για τιμές μεγαλύτερες του 0.3 χρειάζεται στην επίλυση να συμπεριλάβουμε την εξίσωση της ενέργειας.

Εφαρμόζοντας την 3<sup>η</sup> θεμελιώδη αρχή, για απειροστό ροϊκό στοιχείο, ακίνητο στον χώρο, μπορούμε να πούμε ότι το ισοζύγιο διατήρησης της ενέργειας έχει ως εξής :

$$A = B + C$$

Όπου :

A= Ρυθμός μεταβολής ενέργειας μέσα στο στοιχείο

B= Ροή θερμότητας στο στοιχείο

C= Ρυθμός μεταβολής έργου από εσωτερικές και επιφανειακές δυνάμεις

Ασχολούμαστε με τους παραπάνω όρους έναν προς έναν. Για το δικό μας σύστημα ο όρος της ροής θερμότητας είναι μηδενικός (B=0), αφού δεν υπάρχει κάποια πηγή μεταφοράς θερμότητας και επιπλέον οι τιμές του αριθμού Mach πάνω την προπέλα είναι μικρότερες του 5. Αρχικά, για τον όρο C, το έργο που παράγεται από τις εσωτερικές δυνάμεις των σωματιδίων για ένα στοιχείο ρευστού που κινείται με ταχύτητα  $V$ , προκύπτει από την σχέση :  $\rho f V(dx dy dz)$  (3.9). Για τις επιφανειακές δυνάμεις ο ρυθμός μεταβολής του έργου στις 3 διευθύνσεις ισούται με την συνισταμένη δύναμη επί την ταχύτητα στην εκάστοτε διεύθυνση. Έτσι για την x διεύθυνση έχουμε

$$C_x = \left[ -\frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(u\tau_{yx})}{\partial y} + \frac{\partial(u\tau_{zx})}{\partial z} \right] dx dy dz \quad (3.10)$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζονται οι εξισώσεις και για τις άλλες 2 διευθύνσεις. Ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας μέσα στο στοιχείο (A) έχει συνεισφορές από την εσωτερική (e) και την κινητική ενέργεια  $(\frac{V^2}{2})$  που περιέχει. Έτσι, η ενέργεια ανά μονάδα μάζας που βρίσκεται μέσα στο απειροστό στοιχείο, ισούται με το άθροισμα των 2 αυτών ποσοτήτων.

$$A_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right) (dx dy dz) \quad (3.11)$$

Η μάζα που εισέρχεται μέσα στο στοιχείο, προσθέτει μια ποσότητα ενέργειας και η μάζα που φεύγει από αυτό, αφαιρεί. Έτσι, η ροή της ενέργειας στην x διεύθυνση, από τις επιφάνειες του στοιχείου προκύπτει :

$$A_{2x} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} (dxdydz) \left( e + \frac{V^2}{2} \right)$$

$$\text{Και για τις 3 διευθύνσεις γίνεται : } A_2 = +\nabla \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \underline{V} \right]$$

$$\text{Επομένως : } A = A1 + A2 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right) + \nabla \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \underline{V} \right] \quad (3.12)$$

Εισάγοντας τις εξισώσεις (3.9) έως (3.12) στο ισοζύγιο ενέργειας  $A=B+C$ , παίρνουμε την συντηρητική εξίσωση ενέργειας σε διανυσματική μορφή:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \right) + \nabla \left[ \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) \underline{V} \right] = -\nabla [\underline{V} p] + \nabla [\bar{\tau} \underline{V}] + \rho f \underline{V} \quad (3.13)$$

Οι εξισώσεις συνέχειας (3.3), ορμής (3.8) και ενέργειας (3.13), στην πλήρη τους μορφή, αποτελούν τις μη μόνιμες εξισώσεις του ροϊκού πεδίου. Μια αναλυτικότερη περιγραφή της πορείας παραγωγής των εξισώσεων, αλλά και τα διαφορετικά μοντέλα, με βάση τα οποία παράγονται οι εξισώσεις (π.χ. κινούμενου ροϊκού στοιχείου), μπορούν να βρεθούν στην αναφορά [8].

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν μόνο για πολύ απλά προβλήματα με απλές γεωμετρίες, ενώ, όταν ασχολούμαστε με ροές υψηλών αριθμών Reynolds και μεγάλες ποσότητες τύρβης, οι παραπάνω εξισώσεις είναι αδύνατον να επιλυθούν. Οι τυρβώδεις ροές εκδηλώνονται σε πολύ μικρές χωρικές κλίμακες. Προσεγγιστικά θεωρούμε ότι η μικρότερη κλίμακα τύρβης είναι  $10^9$  φορές μικρότερη από την μεγαλύτερη κατασκευή του συστήματος. Αν οι διαστάσεις του συστήματός μας αναφέρονται σε μέτρα, τότε αυτό σημαίνει ότι για την περιγραφή του προβλήματος χρειαζόμαστε  $10^{12}$  αριθμό στοιχείων. Αντιλαμβανόμαστε ότι, από υπολογιστική σκοπιά με τα σημερινά δεδομένα, αυτό είναι αδύνατο για έναν υπολογιστή, όταν αναζητάμε λόση του μεταβατικού φαινομένου (χρονικά εξαρτώμενου).

Μια εναλλακτική μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καταστήσει τις εξισώσεις αυτές επιλύσιμες έτσι ώστε οι μικρές κλίμακες της τύρβης να μην χρειαστεί να υπολογιστούν άμεσα. Η μέθοδος ‘Favre – Averaging ή Compressible Reynolds - Averaging’ εισάγει πρόσθετους όρους για την τύρβη στις εξισώσεις, ώστε να μετασχηματιστούν σε ένα επιλύσιμο σετ εξισώσεων. Μετά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής οι εξισώσεις που παίρνουμε, ονομάζονται ‘Unsteady Compressible Reynolds – Averaged Navier Stokes (URANS)’.

Από πειράματα έχουμε δει ότι οι ταχύτητες του πεδίου ροής εμφανίζουν αποκλίσεις γύρω από μια μέση τιμή. Οι μέσες τιμές των ταχυτήτων, οι οποίες θεωρούνται μόνο χωρικά εξαρτώμενες, συμβολίζονται ως  $\bar{u}(x, y, z)$ ,  $\bar{v}(x, y, z)$ ,  $\bar{w}(x, y, z)$  και οι αποκλίσεις οι οποίες θεωρούνται ότι φέρουν τόσο την χρονική όσο και την χωρική εξάρτηση του πεδίου, συμβολίζονται  $u'(x, y, z, t)$ ,  $v'(x, y, z, t)$ ,  $w'(x, y, z, t)$ . Οι αποκλίσεις αυτές αναφέρονται στις αποκλίσεις της εκάστοτε μεταβλητής από την μέση τιμή. Οι μέσες τιμές λαμβάνονται αρχικά ως μέσες τιμές στον χρόνο :

$$\tilde{u}(x, y, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta T} u(x, y, z, t) dt$$

$$\tilde{\rho}(x, y, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta T} \rho(x, y, z, t) dt$$

$$\tilde{\rho u}(x, y, z) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta T} \rho(x, y, z, t) u(x, y, z, t) dt$$

Στην συνέχεια εισάγουμε έναν σταθμισμένο μέσο όρο ως προς την πυκνότητα :

$$\bar{u} = \frac{\tilde{\rho u}}{\tilde{\rho}}$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και για τις 3 συνιστώσες της ταχύτητας, έχουμε :

$$u(x, y, z, t) = \bar{u}(x, y, z) + u'(x, y, z, t)$$

$$v(x, y, z, t) = \bar{v}(x, y, z) + v'(x, y, z, t)$$

$$w(x, y, z, t) + \bar{w}(x, y, z) + w'(x, y, z, t)$$

Η ίδια λογική εφαρμόζεται για την πίεση, την πυκνότητα και για όλες τις βαθμωτές ποσότητες, έστω φ, του πεδίου ροής.

$$\tilde{\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_T^{T+\Delta T} \varphi dt$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\tilde{\rho} \tilde{\varphi}}{\tilde{\rho}}$$

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$$

Αντικατάσταση των εκφράσεων αυτών στις εξισώσεις συνέχειας και ορμής μας δίνει :

$$\text{Εξίσωση Συνέχειας : } \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \underline{V}) = 0 \quad (3.14)$$

Εξισώσεις ορμής :

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{u})}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \bar{u} \underline{V}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nabla(\mu \nabla \bar{u}) + \left[ -\frac{\partial(\bar{\rho} u'^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho} u' v')}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho} u' w')}{\partial z} \right] + F_x \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial(\bar{\rho} \bar{v})}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \bar{v} \underline{V}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nabla(\mu \nabla \bar{v}) + \left[ -\frac{\partial(\bar{\rho} u' v')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho} v'^2)}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho} v' w')}{\partial z} \right] + F_y \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho} \bar{w})}{\partial t} + \nabla(\bar{\rho} \bar{w} \underline{V}) \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nabla(\mu \nabla \bar{w}) + \left[ -\frac{\partial(\bar{\rho} u' w')}{\partial x} - \frac{\partial(\bar{\rho} w' v')}{\partial y} - \frac{\partial(\bar{\rho} w'^2)}{\partial z} \right] + F_z \end{aligned} \quad (3.17)$$

Για προβλήματα με μικρό αριθμό Mach ( $M < 1$ ), σύμφωνα με την αναφορά [16], δεν χρειάζεται να επιλυθεί η εξίσωση της ενέργειας, από την στιγμή που η επιρροή της συμπιεστότητας λαμβάνεται μέσα στις εξισώσεις λόγω του σταθμισμένου μέσου όρου ως προς την πυκνότητα. Οι εξισώσεις (3.14) – (3.17) θεωρούνται ικανές να υπολογίσουν το πεδίο ροής και να λάβουν υπόψη τους τα

φαινόμενα συμπιεστότητας. Επικαλούμαστε την γραφή με δείκτες για τις παραπάνω εξισώσεις και προκύπτει το σύστημα εξισώσεων (I) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} u_i) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} u_i u_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \bar{u}_i' \bar{u}_j') + F_i \end{cases} \quad (I)$$

όπου  $i, j = 1, 2, 3$  με την αντιστοιχία με το καρτεσιανό σύστημα να είναι,  $1 = x, 2 = y, 3 = z$  και με τον συμβολισμό  $\bar{u}_i' \bar{u}_j'$  αναφερόμαστε στον τανυστή των τάσεων Reynolds, που έχει την μορφή:

$$\bar{u}_i' \bar{u}_j' = \begin{bmatrix} \bar{u}_1' \bar{u}_1' & \bar{u}_1' \bar{u}_2' & \bar{u}_1' \bar{u}_3' \\ \bar{u}_2' \bar{u}_1' & \bar{u}_2' \bar{u}_2' & \bar{u}_2' \bar{u}_3' \\ \bar{u}_3' \bar{u}_1' & \bar{u}_3' \bar{u}_2' & \bar{u}_3' \bar{u}_3' \end{bmatrix}$$

### 3.1.2 Μοντέλο τύρβης SST k -ω

Στο σημείο αυτό χρειάζεται να ορίσουμε ένα μοντέλο ικανό να περιγράψει τις μεταβλητές τύρβης των εξισώσεων URANS. Οι καινούργιοι όροι στις παραπάνω εξισώσεις  $(u_i', u_j')$  αναπαριστούν τα φαινόμενα της τύρβης. Οι τάσεις αυτές σύμφωνα με την υπόθεση του Boussinesq σχετίζονται με την κλίση της μέσης ταχύτητας, που δίνεται από την εξίσωση :

$$\rho \bar{u}_i' \bar{u}_j' = \mu_t \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \rho k + \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}$$

Όπου  $\mu_t$  το ιξώδες της τύρβης και  $k$  η κινητική ενέργεια της τύρβης. Το όφελος της έκφρασης των τάσεων με αυτήν την υπόθεση, είναι το χαμηλό υπολογιστικό κόστος που σχετίζεται με τον υπολογισμό του όρου  $\mu_t$ . Η υπόθεση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί στο μοντέλο τύρβης SST k-ω (Shear Stress Transport μοντέλο).

Τα προτερήματα του SST k-ω βρίσκονται στην ικανότητά του να εκφράζει τις μεγάλες διαφορές στις κλίσεις πίεσης μέσα στο ροϊκό πεδίο και την αποκόλληση της ροής στα τοιχώματα. Απαραίτητη προϋπόθεση για την σωστή λειτουργία του μοντέλου, είναι η σωστή διακριτοποίηση και ο μικρός αριθμός  $y^+$  στα τοιχώματα. Περισσότερα για τον αριθμό αυτό θα παρουσιαστούν κατά την διακριτοποίηση του ροϊκου πεδίου.

Το μοντέλο SST k – ω χρησιμοποιεί μια συνάρτηση ανάμειξης, έτσι ώστε να εξασφαλίζει σταδιακή μετάβαση από το κλασικό k-ω μοντέλο κοντά στα τοιχώματα στο μοντέλο υψηλού αριθμού Reynolds k-ε στα πιο απομακρυσμένα κομμάτια του οριακού στρώματος. Το μοντέλο αποτελείται από 2 εξισώσεις, οι οποίες συμπληρώνουν τις εξισώσεις URANS με την χρήση του ιξώδους τύρβης και υπολογίζουν τα φαινόμενα μεταφοράς που οφείλονται στις κύριες διατμητικές τάσεις. Οι 2 αυτές εξισώσεις είναι :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\omega u_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right) + G_\omega - Y_\omega - D_\omega + S_k$$

- $G_k$  : Η δημιουργία τυρβώδους κινητικής ενέργειας κ λόγω της κλίσης των μέσων ταχυτήτων.
- $G_\omega$  : Η δημιουργία ειδικής διασποράς της τύρβης ω λόγω της κλίσης των μέσων ταχυτήτων.
- $\Gamma_k$  και  $\Gamma_\omega$  : Συντελεστές διάχυσης των κ και ω.
- $Y_k$  και  $Y_\omega$  : Η διασπορά των κ και ω λόγω τύρβης
- $D_\omega$  : Δευτερεύων όρος διάχυσης
- $S_k$  : Απροσδιόριστοι όροι πηγής

Πλέον, έχουμε ολοκληρώσει την κατάστρωση των εξισώσεων που χρειάζονται για τον υπολογισμό του ροϊκού πεδίου και την αναπαράσταση των χαρακτηριστικών τυρβώδους ροής. Το σύστημα αυτό αποτελείται από τις εξισώσεις URANS και τις εξισώσεις του μοντέλου τύρβης. Στην επόμενη υποενότητα παρουσιάζουμε τις αριθμητικές μεθόδους που θα χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση των εξισώσεων αυτών.

### 3.1.3 Μεθοδολογία Αριθμητικής Επίλυσης

Για την αριθμητική επίλυση των μη μόνιμων εξισώσεων ‘Reynolds-Averaged Navier-Stokes’ χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων (FVM). Για τις περιοχές του πλέγματος που εμφανίζουν σχετική κίνηση μεταξύ τους (περιστρεφόμενο πλέγμα προπέλας), εισάγεται στις εξισώσεις της FVM η διαφοροποίηση της μεθόδου ‘Sliding Mesh’. Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι 2 αυτές προσεγγίσεις ξεχωριστά, με χρήση ενός παραδείγματος εφαρμογής της κάθε μεθόδου.

#### Μέθοδος Πεπερασμένων Όγκων (FVM)

Η μέθοδος των πεπερασμένων όγκων αποτελεί μια μέθοδο διακριτοποίησης για τον προσεγγιστικό υπολογισμό μιας εξίσωσης ή ενός συστήματος μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), που εκφράζουν την διατήρηση ή την ισορροπία μιας ή πολλών ποσοτήτων. Για την εφαρμογή της μεθόδου γίνεται αρχικά η κατασκευή χωρικού πλέγματος, το οποίο αποτελείται από στοιχεία που ονομάζονται όγκοι ελέγχου. Περισσότερες πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά αυτών των στοιχείων θα παρουσιαστούν στην ενότητα 3.5. Η ολοκλήρωση των ΜΔΕ σε κάθε όγκο ελέγχου μας δίνει μια εξίσωση ισορροπίας για κάθε όγκο. Το σύστημα όλων των εξισώσεων ισορροπίας στην συνέχεια διακριτοποιείται χωρικά ως προς τους αγνώστους που αναζητάμε, με στόχο τον υπολογισμό των μεταβλητών που θέλουμε στις επιφάνειες του κάθε στοιχείου όγκου. Το κύριο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε είναι η χωρική διακριτοποίηση των ροών στα σύνορα των όγκων ελέγχου. Ως ροή ορίζεται κάθε φαινόμενο που μετακινείται διαμέσου μιας επιφάνειας (π.χ. ροή μάζας στον  $x = \rho u x dy dz$ ). Η διαφορά της μεθόδου FVM με την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είναι ότι η διακριτοποίηση στην FVM γίνεται στις εξισώσεις ισορροπίας (μετά την ολοκλήρωση), ενώ στην μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών γίνεται απευθείας στις ΜΔΕ. Μετά την διακριτοποίηση το σύστημα που προκύπτει, αποτελείται από χρονικές παραγώγους και αλγεβρικές εξισώσεις γραμμικές ή και μη γραμμικές και αφού εκτελεστεί και η χρονική διακριτοποίηση, μπορεί να επιλυθεί είτε αναλυτικά είτε με επαναληπτικές μεθόδους

(γραμμικό ή μη-γραμμικό πρόβλημα). Το σύστημα των διακριτοποιημένων εξισώσεων που προκύπτει, εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του μηχανικού προβλήματος που αντιμετωπίζουμε.

Οι εξισώσεις URANS και οι εξισώσεις του μοντέλου τύρβης μπορούν να γραφούν για μια γενική μεταβλητή φ, η οποία μπορεί να αντιπροσωπεύει όλες τις ποσότητες των εξισώσεων Navier – Stokes, των εξισώσεων του μοντέλου τύρβης αλλά και όλες τις ιδιότητες που προστίθενται από την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων. Για να καταλάβουμε τον τρόπο εφαρμογής της μεθόδου FVM, την εφαρμόζουμε στην γενική μορφή της εξισώσης διατήρησης (γενική διατύπωση της εξισώσης συνέχειας) για την βαθμοτή ποσότητα φ:

$$\frac{\partial(\rho\varphi)}{\partial t} + \nabla(\rho\varphi\underline{u}) = \nabla(\Gamma_\varphi\nabla\varphi) + S_\varphi$$

Ολοκληρώνοντας την εξισώση αυτή σε τυχαίο όγκο ελέγχου του πλέγματός μας παίρνουμε :

$$\int_{CV} \frac{\partial \rho\varphi}{\partial t} dV + \oint \rho\varphi \underline{u} \underline{dA} = \oint \Gamma_\varphi \nabla \varphi \underline{dA} + \int_{CV} S_\varphi dV = 0 \quad (3.18)$$

Όπου :

- $\rho = \text{πυκνότητα}$
- $u = \text{διάνυσμα ταχύτητας στις 3 \text{ διαστάσεις}$
- $A = \text{διανυσματική επιφάνεια}$
- $\Gamma_\varphi, S_\varphi = \text{όρος διάχυσης και όρος πηγής του } \varphi \text{ ανά μονάδα όγκου}$
- $\nabla\varphi = \text{Κλίση του } \varphi$
- $CV = \text{όγκος ελέγχου (control volume)}$

Η εξισώση (3.18) εφαρμόζεται σε κάθε όγκο ελέγχου, του υπολογιστικού πεδίου. Μετά την επίλυση των ολοκληρωμάτων οι χωρικά διακριτοποιημένες εξισώσεις που παίρνουμε, είναι στην μορφή :

$$\frac{\partial \rho\varphi}{\partial t} V + \sum_f^N \rho_f \underline{u}_f \varphi_f \underline{A}_f = \sum_f^N \Gamma_\varphi \nabla \varphi_f \underline{A}_f + S_\varphi V \quad (3.19)$$

όπου :

- $N = \text{αριθμός των επιφανειών που περιβάλουν το στοιχείο όγκου}$
- $\varphi_f = \text{τιμή του } \varphi \text{ που μεταδίδεται μέσω της επιφάνειας } f$
- $\rho_f \underline{u}_f \underline{A}_f = \text{ροή μάζας μέσα από την επιφάνεια } f \text{ (όρος συναγωγής)}$
- $|\underline{A}_f| = \text{εμβαδόν επιφάνειας } f$
- $\nabla \varphi_f = \text{κλίση του } \varphi \text{ στην επιφάνεια } f$
- $V = \text{όγκος του στοιχείου}$

Η διαδικασία υπολογισμού της χρονικής παραγώγου που διακρίνεται στην εξισώση αυτή, θα υπολογιστεί στην συνέχεια. Η εξισώση (3.19) περιλαμβάνει την άγνωστη βαθμοτή ποσότητα φ στο κέντρο του στοιχείου, αλλά και τις άγνωστες τιμές διαφόρων ποσοτήτων στις γειτονικές επιφάνειες  $f$ , που ορίζουν το στοιχείο. Η εξισώση αυτή γενικά είναι μη γραμμική. Στόχος της χωρικής διακριτοποίησης είναι η παρεμβολή των τιμών της μεταβλητής φ στα κέντρα των στοιχείων όγκου, έτσι ώστε να υπολογίσουμε τις τιμές της μεταβλητής στις επιφάνειες του όγκου

$(\varphi_f)$ . Πριν προχωρήσουμε στα σχήματα διακριτοποίησης πρέπει να πούμε ότι οι κλίσεις των ποσοτήτων του πεδίου  $\nabla \varphi$ , στο κέντρο του στοιχείου όγκου, που εμφανίζονται στις εξισώσεις, υπολογίζονται με χρήση του θεωρήματος ‘Green-Gauss’. Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό οι κλίσεις υπολογίζονται από την εξίσωση :

$$\nabla \varphi = \frac{1}{V} \sum_f \underline{\varphi}_f \underline{A}_f$$

Το άθροισμα περιλαμβάνει όλες τις επιφάνειες του στοιχείου όγκου και ο όρος  $\varphi_f$  στις επιφάνειες υπολογίζεται με χρήση των διακριτοποίησεων που παρουσιάζονται στην συνέχεια.

### ➤ Χωρική Διακριτοποίηση

Χρησιμοποιούμε ένα σχήμα 2<sup>nd</sup> τάξης πεπερασμένων διαφορών προς τα εμπρός για τους όρους συναγωγής ( $\rho_f \underline{u}_f \varphi_f \underline{A}_f$ ). Η διεύθυνση εμπρός ορίζεται στην φορά της κάθετης συνιστώσας της ταχύτητας στην συγκεκριμένη επιφάνεια (2<sup>nd</sup> order upwind). Για τους όρους διάχυσης ( $\Gamma_\varphi \nabla \varphi_f \underline{A}_f$ ) διακριτοποιούμε με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές, οι οποίες πάντα έχουν ακρίβεια 2<sup>nd</sup> τάξης. Οι εξισώσεις των παραπάνω τύπων διακριτοποίησης είναι :

Για τους όρους συναγωγής, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor την μεταβλητή στο κέντρο του στοιχείου όγκου :

$$\varphi_{f,SOU} = \varphi + \nabla \varphi \underline{r}$$

Όπου :

- $\varphi$  και  $\nabla \varphi$  = Τιμή της φ και κλίση της τιμής της φ στο κέντρο του στοιχείου όγκου
- $\underline{r}$  = διάνυσμα μετατόπισης από το κέντρο του στοιχείου προς την επιφάνεια που θέλουμε να υπολογίζουμε την ποσότητα  $\varphi_f$
- Ο συμβολισμός SOU = Second Order Upwind

Για τους όρους διάχυσης :

$$\varphi_{f,CD} = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{1}{2}(\nabla \varphi_0 \underline{r}_0 + \nabla \varphi_1 \underline{r}_1)$$

Οι όροι στην παραπάνω εξίσωση έχουν την ίδια ερμηνεία με το προηγούμενο σχήμα διακριτοποίησης με την διαφορά τώρα ότι οι δείκτες 0,1 αναφέρονται στις 2 επιφάνειες που εφαρμόζουμε την κεντρική διαφορά.

### ➤ Χρονική Διακριτοποίηση

Για τις χρονικές παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση (3.19) εφαρμόζουμε 2<sup>nd</sup> τάξης διακριτοποίηση με βάση το σχήμα :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{3\varphi^{n+1} - 4\varphi^n + \varphi^{n-1}}{2\Delta t}$$

$$\text{Έτσι έχουμε : } \frac{3\varphi^{n+1} - 4\varphi^n + \varphi^{n-1}}{2\Delta t} = F(\varphi)$$

Όπου η συνάρτηση  $F$  περιλαμβάνει όλους τους όρους από την χωρική διακριτοποίηση. Το μόνο που απομένει είναι να ορίσουμε για ποιο χρονικό βήμα θα υπολογίζουμε τις ποσότητες της συνάρτησης  $F$ . Εφαρμόζουμε μια έμμεση μέθοδο χρονικής ολοκλήρωσης (Implicit Time Integration). Έτσι η συνάρτηση  $F$  υπολογίζεται για το χρονικό βήμα  $n+1$ :

$$\frac{3\varphi^{n+1} - 4\varphi^n + \varphi^{n-1}}{2\Delta t} = F(\varphi^{n+1}) \quad (3.20)$$

Η εξίσωση (3.20), επειδή περιλαμβάνει όρους για την χρονική στιγμή  $(n+1)$ , λύνεται επαναληπτικά για κάθε χρονικό βήμα και στην συνέχεια προχωράμε στον επόμενο χρόνο. Το προτέρημα από την χρήση ενός πλήρως έμμεσου σχήματος διακριτοποίησης είναι ότι κατά την αριθμητική μας επίλυση ανεξαρτήτως της επιλογής του χρονικού βήματος, η επίλυση παραμένει αριθμητικά ευσταθής. Διαφορετικά σχήματα διακριτοποίησης τόσο χρονικά όσο και χωρικά, αλλά και περιγραφή των προτερημάτων του κάθε σχήματος, μπορούν να βρεθούν στις αναφορές [8], [16].

### **Sliding Mesh Μέθοδος**

Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση του ροϊκού πεδίου στις επιφάνειες, ανάμεσα στις εμφανίζεται σχετική κίνηση μεταξύ των πλεγμάτων, όπως: ‘Single Rotating Frame’, ‘Multiple Rotating Frame’, ‘Sliding Mesh Method’.

Για τις 2 πρώτες μεθόδους, δεν υπάρχει κίνηση μεταξύ των διαφορετικών όγκων ελέγχου του υπολογιστικού μας πεδίου, αλλά υπάρχουν κινούμενα συστήματα συντεταγμένων. Οι μεταβλητές του πεδίου υπολογίζονται ως προς τα περιστρεφόμενα συστήματα και στην συνέχεια εισάγονται στους κατάλληλους κόμβους όροι ροπής και επιτάχυνσης, οι οποίοι αντιπροσωπεύουν την υποθετική κίνηση του πλέγματος. Αυτές οι προσεγγίσεις είναι καλές και με μεγάλη ταχύτητα, κυρίως για λύσεις της μόνιμης κατάστασης και λιγότερο για μεταβατικά φαινόμενα, λόγω του ότι δεν μπορούν να προβλέψουν μη μόνιμα φαινόμενα μεταξύ των σχετικά κινούμενων όγκων ελέγχου.

Για μεγαλύτερη ακρίβεια χρησιμοποιούμε την 3<sup>η</sup> μέθοδο, η οποία περιλαμβάνει σχετική περιστροφή μεταξύ των πλεγμάτων διαφορετικών όγκων ελέγχου. Οι υπολογιζόμενες μεταβλητές στην συνέχεια εκφράζονται ως προς το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των μη μόνιμων φαινομένων και ποσοτήτων ανάμεσα στις κινούμενες επιφάνειες.

Η μέθοδος ‘Sliding Mesh’ είναι μια από τις πολλές μεθόδους, που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό μη μόνιμων πεδίων ροής, όταν μας ενδιαφέρει να παρατηρήσουμε την απόκριση των μεταβλητών του πεδίου. Συγκεκριμένα η λύση που μας προσφέρει η μέθοδος, εκφράζεται με περιοδικό τρόπο, με περίοδο που σχετίζεται με την ταχύτητα κίνησης των κινούμενων όγκων στο σύστημά μας, όπου για εμάς είναι η ταχύτητα περιστροφής της προπέλας. Στην συνέχεια, παρουσιάζεται μια εφαρμογή της μεθόδου για καλύτερη κατανόηση. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση συνέχειας για δυναμικά μεταβαλλόμενα πλέγματα (κινούμενα στον χρόνο). Η εξίσωση αυτή για μια τυχαία βαθμωτή ποσότητα  $\varphi$  του πεδίου ροής είναι :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varphi dV + \int_{\partial V} \rho \varphi (\underline{u} - \underline{u}_m) \underline{dA} = \int_{\partial V} \Gamma \nabla \varphi \underline{dA} + \int_V S_\varphi dV$$

Παρατηρούμε ότι η διαφοροποίηση της εξίσωσης αυτής σε σχέση με αυτήν που παρουσιάστηκε στην εφαρμογή της μεθόδου FVM, έγκειται στον όρο ταχύτητας του πλέγματος  $\underline{u}_m$ . Η χρονική παράγωγος του ολοκληρώματος στην παραπάνω εξίσωση, αντικαθίσταται από μια πεπερασμένη διαφορά 1<sup>ης</sup> τάξης προς τα πίσω.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varphi dV = \frac{[(\rho \varphi)^{n+1} - (\rho \varphi)^n]V}{\Delta t}$$

Όπου :

- $V$  = τυχαίος όγκος ελέγχου
- $\underline{u}$  = ταχύτητα ροής
- $\underline{u}_m$  = ταχύτητα κινούμενου πλέγματος
- $\Gamma, S_\varphi$  = όρος διάχυσης και όρος πηγής αντίστοιχα για εμάς  $S_\varphi = 0$
- $\delta V$  = σύνορο του όγκου  $V$

Τα  $n$  και  $n+1$  αντιπροσωπεύουν τις ποσότητες στις παρενθέσεις τις χρονικές στιγμές  $n$  και  $n+1$ . Η παραπάνω εξίσωση εφαρμόζεται σε όλα τα στοιχεία όγκου του πλέγματος που κινούνται με διαφορετική ταχύτητα από αυτήν του αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων. Η χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων πραγματοποιείται με την ίδια διαδικασία που αναφέραμε και στο προηγούμενο κομμάτι.

Η μέθοδος ‘Sliding Mesh’ θεωρείται ως μια ειδική περίπτωση των δυναμικά κινούμενων πλεγμάτων, όπου όλα τα επιμέρους κελιά (επιμέρους όγκοι ελέγχου) μπορούν να κινούνται στερεά, το ένα ως προς το άλλο στις περιοχές επαφής. Με τον όρο στερεά εννοούμε ότι το ένα πλέγμα δεν αλληλοκαλύπτεται με το άλλο και επίσης διατηρείται μια συνέχεια στην κατανομή των κόμβων του πλέγματος, 2 κόμβοι που είναι δίπλα, παραμένουν δίπλα.

Ως ολοκλήρωση της κατάστρωσης εξισώσεων του συστήματος και των μεθοδολογιών επίλυσης, να πούμε ότι για την βελτίωση της ταχύτητας κατά τον υπολογισμό του ροήκού πεδίου, χρησιμοποιείται μια διαδικασία υποχαλάρωσης. Συγκεκριμένα για κάθε ποσότητα που υπολογίζουμε με τις διαδικασίες που παρουσιάστηκαν (π.χ.  $\varphi$ ), εφαρμόζουμε μια επαναληπτική διαδικασία βελτίωσης της λύσης στην μορφή :

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \omega \left( \bar{\varphi}_{i,j}^{n+1} - \varphi^n \right)$$

Όπου  $\omega$  το βήμα επανάληψης, ω ο συντελεστής υποχαλάρωσης ( $\omega < 1$ ) και  $\bar{\varphi}_{i,j}^{n+1}$  η μέση τιμή για την ποσότητα  $\varphi$  των όγκων ελέγχου που περιβάλλουν τον κεντρικό όγκο ελέγχου, για τον οποίο υπολογίζουμε το  $\varphi$ .

### 3.2 Μετασχηματισμός Fourier και Ανάλυση σήματος

Είναι σημαντικό, όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 2, να υπολογίζουμε τις αρμονικές συνιστώσες των δυνάμεων της προπέλας, διότι έχουν μεγάλη σημασία για την διάρκεια ζωής της κατασκευής αλλά και ολόκληρου του κινητήρα μας. Τα αποτελέσματα που παράγουμε από την επίλυση του συστήματος, βρίσκονται σε μορφή σήματος σε διακριτές χρονικές στιγμές. Για την ανάλυση σημάτων και την εξαγωγή των αρμονικών χαρακτηριστικών αυτών (εύρους και συχνότητας),

χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό Fourier. Συγκεκριμένα, επειδή αναφερόμαστε σε διακριτούς χρόνους, γίνεται χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier. Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται η θεωρία του μετασχηματισμού Fourier και 2 μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση αυτού. Οι μέθοδοι αυτοί είναι ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier και ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (FFT). Οι σχέσεις και η θεωρία που παρουσιάζουμε στην ενότητα αυτή βασίζονται στην αναφορά [2].

### 3.2.1 Μετασχηματισμός Fourier

Ο μετασχηματισμός Fourier αποτελεί έναν ολοκληρωματικό μετασχηματισμό, ο οποίος για χρονικά εξαρτώμενες συναρτήσεις μας πηγαίνει από το πεδίο του χρόνου στο πεδίο της συχνότητας. Με την διαδικασία αυτή, η χρονικά εξαρτώμενη συνάρτηση αναλύεται σε συνιστώσες με εύρος και φάση εξαρτώμενες από την εκάστοτε συχνότητα(φορτία 1P,2P..κλπ.). Θεωρούμε μια περιοδική συνάρτηση  $f(t) = f(t + T)$ , με θεμελιώδη συχνότητα  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ . Σύμφωνα με την θεωρία του Fourier, η συνάρτηση αυτή μπορεί να εκφρασθεί σε μορφή απειροσειράς ημιτόνων και συνημιτόνων. Εκμεταλλεύμενοι την ταυτότητα του Euler  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + \sin(\varphi)$ , ο κάθε όρος της απειροσειράς μπορεί να γραφεί στην μιγαδική του μορφή ως :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\omega t} \quad (3.21), \quad \text{με } f_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{in\omega t} dt \quad (3.22)$$

Σε περίπτωση που δεν είναι περιοδική η συνάρτηση  $f(t)$ , θεωρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις (3.21),(3.22) για  $T \rightarrow \infty$ , με την θεμελιώδη συχνότητα να τείνει στο 0. Έτσι, ο όρος  $n\Omega$  για  $n \rightarrow \infty$  τείνει να γίνει συνεχής μεταβλητή, έστω  $\omega$ . Θέτοντας τώρα την θεμελιώδη συχνότητα ίση με την πεπερασμένη τιμή του πολύ μικρού τμήματος Δω, η σχέση (3.22) γίνεται :

$$f_n \rightarrow \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = \frac{\Delta\omega}{2\pi} F(\omega)$$

Με

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (3.23)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης  $f(t)$ . Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία και στην σχέση (3.21) έχουμε ότι :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.24)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier της  $f(t)$  και μαζί με την (3.23) καλούνται εξισώσεις του ζεύγους μετασχηματισμού Fourier.

Βασικό κριτήριο, για να υπάρχει ο μετασχηματισμός, είναι να συγκλίνει το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  σε πεπερασμένη τιμή. Επιπλέον, η  $f(t)$  πρέπει σε κάθε διάστημα να έχει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων και να μην εμφανίζει άπειρη ασυνέχεια. Μια επιπλέον σημαντική ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier είναι ότι για άρτια συνάρτηση  $f(t)$  ο μετασχηματισμός Fourier είναι

άρτια συνάρτηση και περιλαμβάνει μόνο όρους συνημιτόνου, ενώ για περιττή  $f(t)$  ο μετασχηματισμός Fourier είναι περιττή συνάρτηση και περιλαμβάνει μόνο όρους ημιτόνου.

Επιπλέον, επειδή ο μετασχηματισμός Fourier στην γενική περίπτωση είναι μιγαδική συνάρτηση, μπορούμε να γράψουμε :

$$F(\omega) = Re(\omega) + iIm(\omega) = A(\omega)e^{i\theta(\omega)}$$

$$\text{όπου : } Re(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \quad \text{και} \quad Im(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

$$\text{το εύρος της συνάρτησης } A(\omega) = \sqrt{R(\omega)^2 + Im(\omega)^2}$$

$$\text{η φάση } \theta(\omega) = \tan^{-1} \left( \frac{Im(\omega)}{Re(\omega)} \right).$$

### 3.2.2 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier και FFT

Ο αναλυτικός υπολογισμός των εξισώσεων του μετασχηματισμού Fourier είναι δύσκολος και ακόμη δυσκολότερος είναι ο υπολογισμός των μιγαδικών ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στον αντίστροφο μετασχηματισμό (3.24). Επιπλέον, επειδή η απόκριση των δυνάμεων που παίρνουμε, δεν είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου, αλλά διακριτές τιμές στον χρόνο, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier γίνεται αριθμητικά. Για την αριθμητική επίλυση, αρχικά ορίζεται ο διακριτός μετασχηματισμός Fourier και στην συνέχεια εφαρμόζεται σε αυτόν ο αλγόριθμος του ταχύ μετασχηματισμού Fourier (FFT), ο οποίος επιταχύνει την επίλυσή μας.

Για τον ορισμό του διακριτού Fourier στην ουσία μετατρέπουμε τα ολοκληρώματα σε αθροίσματα. Συγκεκριμένα, χωρίζουμε το χρονικό μας διάστημα σε  $N$  ισαπέχοντα διαστήματα με χρονικό βήμα  $\Delta t$ . Έτσι, έχουμε τον χρόνο  $t_m = m\Delta t$ , με  $m = 1 \dots N$ , την τιμή για την συνάρτηση  $f_m = f(t_m)$ . Ορίζουμε επιπλέον την συνολική διάρκεια των μετρήσεων ως  $T = N\Delta t$  και την περίοδο  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ . Εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαφορές στην σχέση (3.23), έχουμε :

$$\begin{aligned} F_n &= F(n\Omega) = \sum_{m=1}^N f(t_m) e^{-i(n\Omega)(m\Delta t)} \Delta t \Rightarrow \\ &\Rightarrow F_n = \Delta t \sum_{m=1}^N f_m e^{-\frac{2i\pi mn}{N}} \quad (3.25), \quad \text{με } n = 1, 2 \dots N \end{aligned}$$

Η σχέση (3.25) αποτελεί τον διακριτό μετασχηματισμό Fourier. Ακολουθώντας την ίδια πορεία, προκύπτει και ο διακριτός αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier :

$$F_m = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^N F_n e^{-\frac{2i\pi mn}{N}} \quad (3.26), \quad \text{με } m = 1..N,$$

Ο αλγόριθμος του FFT (Fast Fourier Transformation) μας οδηγεί στην αποφυγή ορισμένων υπολογισμών, εκμεταλλεύμενος την περιοδικότητα της συνάρτησης  $e^{i\theta}$ . Συγκεκριμένα, γράφουμε τις σχέσεις (3.25) και (3.26) στην μορφή :

$$A_m = \sum_{n=1}^N B_n W_N^{mn} , \text{ με } W_N = e^{-\frac{2i\pi}{N}} \quad (3.27)$$

Από την σχέση αυτή βλέπουμε ότι χρειάζονται  $N$  πολλαπλασιασμοί και  $N$  αθροίσεις μιγαδικών αριθμών. Έτσι, ο υπολογισμός όλων των  $A_m$  χρειάζεται  $N^2$  πολλαπλασιασμούς. Παρατηρώντας όμως την περιοδικότητα της συνάρτησης  $W_N$ , μειώνουμε τον αριθμό των υπολογισμών ραγδαία. Συγκεκριμένα, για  $N$  αριθμό τιμών απαιτείται  $M = \frac{N}{2} \log_2 N$  αριθμός πράξεων. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα, ότι για  $N=512$  τιμές, αρχικά χρειάζονται  $N^2 = 262144$  πολλαπλασιασμοί, ενώ με εφαρμογή του αλγόριθμου FFT χρειάζονται  $M = 2304$  πολλαπλασιασμοί.

Ο μετασχηματισμός Fourier και ο αλγόριθμος FFT αποτελούν ένα μαθηματικό εργαλείο, που θα χρησιμοποιήσουμε για την εξαγωγή των αρμονικών συνιστωσών κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων. Αφού ολοκληρώσαμε με την μελέτη του μετασχηματισμού Fourier, προχωράμε στην εισαγωγή του μοντέλου στα λογισμικά και την διακριτοποίηση του ροϊκού πεδίου.

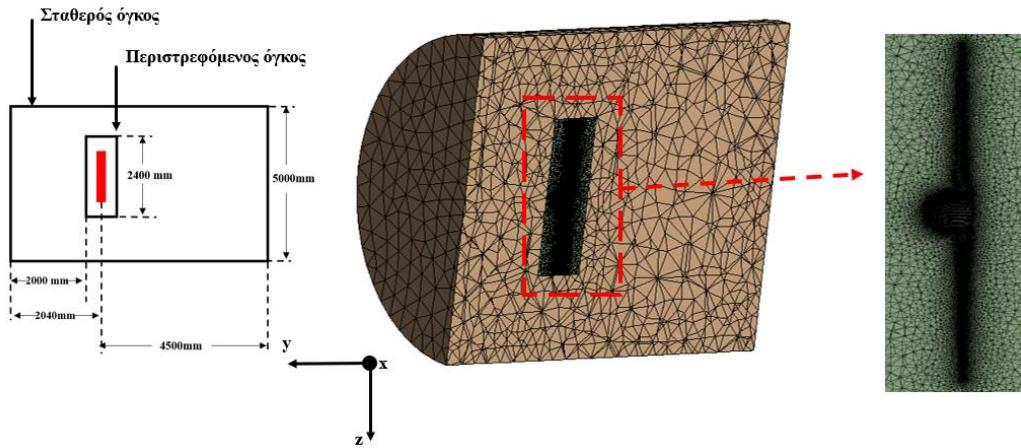
### 3.3 Εισαγωγή στα Λογισμικά και Διακριτοποίηση

Όπως είδαμε στην κατάστρωση εξισώσεων, οι εξισώσεις του ροϊκού πεδίου επιλύονται αριθμητικά. Επομένως, το πρώτο βήμα που πρέπει να κάνουμε είναι ο ορισμός του υπολογιστικού μας πεδίου και του τρόπου διακριτοποίησης αυτού. Στην συνέχεια, μπορούμε να εκτελέσουμε την μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος και να διεξάγουμε έναν «έλεγχο ποιότητας» για το πλέγμα.

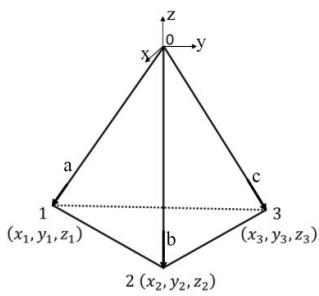
Η σωστή και καλή διακριτοποίηση παίζει βασικό ρόλο στην ακρίβεια και ορθότητα των αποτελεσμάτων μας. Ένα αραιό πλέγμα με μικρό αριθμό στοιχείων είτε θα αποκλίνει κατά πολύ από την ακριβή λύση, είτε δεν θα συγκλίνει ποτέ, είτε θα μας δώσει λύση με μεγάλη απόκλιση. Ένα πολύ πυκνό πλέγμα με μεγάλο αριθμό στοιχείων δεν μας δίνει απαραίτητα καλή ακρίβεια. Σκοπός είναι η κατασκευή πλέγματος, διακριτοποιημένου με προσοχή στα σημεία ενδιαφέροντος και η χρήση κριτηρίων ελέγχου του πλέγματος που μας δίνουν την πληροφορία, για το πόσο καλό πλέγμα έχουμε. Η διαδικασία αυτή αναλύεται στη συνέχεια. Η κατασκευή πλέγματος πραγματοποιείται στο λογισμικό κατασκευής πλέγματος της εταιρίας ANSYS και περισσότερες πληροφορίες για στοιχεία και μεθόδους διακριτοποίησης μπορούν να βρεθούν στις αναφορές διακριτοποίησης [15], [16].

Χωρίζουμε το υπολογιστικό μας πεδίο σε δύο κυλινδρικούς όγκους ελέγχου που περιβάλλουν την προπέλα. Οι διαστάσεις των κυλινδρικών όγκων επιλέγονται αρκετά μεγάλες έτσι ώστε να μην επηρεάζουν την λύση μας οι τιμές της ελεύθερης ροής και οι συνθήκες στην είσοδο και την έξοδο. Στην αριστερή εικόνα του σχήματος 3.4, παρουσιάζεται ο χωρισμός του ροϊκού πεδίου στον σταθερό και στον περιστρεφόμενο όγκο ελέγχου. Επίσης, διακρίνονται το σύστημα συντεταγμένων και τις διαστάσεις του πλέγματος. Στη μεσαία εικόνα του σχήματος 3.4, παρουσιάζεται μια εικόνα από το περιβάλλον δημιουργίας πλέγματος της εταιρίας ANSYS. Το σύστημα συντεταγμένων ορίζεται έτσι ώστε η προπέλα να περιστρέφεται ως προς τον γάλανο με θετική γωνιακή ταχύτητα. Στην εικόνα αυτή βρίσκονται σε τομή οι 2 όγκοι ελέγχου και μπορούμε να διακρίνουμε τόσο τα στοιχεία όγκων που διακριτοποιούν το πεδίο μας όσο και τις επιφάνειες επαφής μεταξύ περιστρεφόμενου και σταθερού όγκου. Στην δεξιά εικόνα, βλέπουμε σε λεπτομέρεια την

διακριτοποίηση γύρω από τις επιφάνειες της προπέλας, όπου έχουμε την μεγαλύτερη συγκέντρωση στοιχείων λόγω μεγάλων καμπυλοτήτων και μικρών διαστάσεων των ακμών.



Σχήμα 3. 4 Χωρικό Πλέγμα Διακριτοποίησης ροϊκού πεδίου



Σχήμα 3. 5 Γραμμικό τετράεδρο στοιχείο με 4 κόμβους

Ως στοιχεία διακριτοποίησης χρησιμοποιούμε γραμμικά τετράεδρα. Η μορφή των τετραέδρων παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5. Ο όρος γραμμικά αναφέρεται στον αριθμό των κόμβων που έχει το στοιχείο στην κάθε ακμή του. Για γραμμικά τετράεδρα έχουμε κόμβους μόνο στις γωνίες του στοιχείου, έτσι συνολικά έχουμε 4 κόμβους. Η επιλογή των στοιχείων αυτών έναντι άλλων (π.χ. εξάεδρα) έγινε κυρίως για την ικανότητα τους να διακριτοποιούν περίπλοκες γεωμετρίες, δίνοντας έτσι καλή ακρίβεια. Τα στοιχεία αυτά μπορεί να μην μας δίνουν ομοιόμορφα κατανεμημένο πλέγμα και να αυξάνουν τους υπολογιστικούς χρόνους, διότι απαιτούν μεγαλύτερο αριθμό στοιχείων, αλλά λόγω της μικρής επιφάνειας στο «Trailing Edge» των πτερυγίων και τις

απότομες καμπυλότητες κοντά στην πλήμνη της προπέλας, τα τετράεδρα ήταν η μόνη ικανή λύση να μοντελοποιήσει την γεωμετρία μας.

### 3.3.1 Ανεξαρτησία και Έλεγχος ποιότητας Πλέγματος

Στον Πίνακα 3.1 παρουσιάζονται οι τιμές της ώσης και της ροπής που υπολογίζουμε για την προπέλα, για 2 διαφορετικές συνθήκες προσομοίωσης (ταχύτητα πτήσης και περιστροφική ταχύτητα προπέλας) και για 5 διαφορετικές διστάσεις πλέγματος. Παρατηρούμε ότι αυξανόμενον του αριθμού στοιχείων, και για τα 2 σετ τιμών προσομοίωσης, έχουμε σύγκλιση της λύσης στην ίδια τιμή, τόσο για την ώση όσο και για την ροπή. Επειδή θέλουμε οι λύσεις μας να είναι ικανοποιητικές, αλλά και να μειώσουμε το υπολογιστικό κόστος όσο το δυνατόν περισσότερο, επιλέγουμε το 3<sup>o</sup> πλέγμα με αριθμό στοιχείων 1.5 εκατομμύρια. Του υπολογιστικό κόστος θα δούμε ότι παίζει μεγάλο ρόλο κατά την ανάλυση της αλληλεπίδρασης ρευστού κατασκευής στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο, όπου στην ανάλυση αυτή οι υπολογιστικοί χρόνοι είναι ιδιαίτερα μεγάλοι και έτσι αποσκοπούμε στην μείωσή τους με όλους τους δυνατούς τρόπους. Τα χαρακτηριστικά του πλέγματος το οποίο θα διατηρήσουμε για τον ρευστομηχανικό υπολογισμό, παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2

Πίνακας 3. 1 Τιμές ώσης και ροπής προπέλας για 5 πλέγματα διαφορετικών διαστάσεων

ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΠΛΕΓΜΑΤΟΣ							
V/n	15 [m/s] / 1538 [rpm]			V/n	8 [m/s] / 1034 [rpm]		
Πλέγμα	Αρ. Στοιχείων	Ωση [N]	Ροπή [Nm]	Πλέγμα	Αρ. Στοιχείων	Ωση [N]	Ροπή [Nm]
1	6.00E+05	178.55	36.3	1	6.00E+05	73.6	13.4
2	1.10E+06	205.33	41.98	2	1.10E+06	105.32	19.87
3	1.50E+06	222.13	44	3	1.50E+06	107	20.142
4	2.80E+06	222.07	44.31	4	2.80E+06	108.6	20.92
5	3.70E+06	221.95	44.65	5	3.70E+06	108.01	20.22

Πίνακας 3. 2. Αριθμός κόμβων και τετραεδρικών στοιχείων πλέγματος

Αριθμός Κόμβων	$25 \cdot 10^4$
Αριθμός Στοιχείων	$1.5 \cdot 10^6$

Στον Πίνακα 3.3 βρίσκονται οι συντελεστές ελέγχου της ποιότητας του πλέγματος για το στοιχείο με την χειρότερη συμπεριφορά για το αντίστοιχο κριτήριο. Συγκεκριμένα, ως ορθογωνικότητα πλέγματος ορίζεται ως ο λόγος της γωνίας που σχηματίζουν 2 γειτονικές επιφάνειες, προς μια βέλτιστη τιμή γωνίας. Για τον λόγο αυτό η καλύτερη ποιότητα για το κριτήριο αυτό είναι η τιμή 1. Ως αναλογία διαστάσεων ορίζεται το πόσο αποκλίνουν τα στοιχεία από το να έχουν σε όλες τις πλευρές τους ίδιο μήκος. Ως λοξότητα ορίζεται το πόσο κοντά βρίσκονται τα στοιχεία του πλέγματος στο ιδανικό σχήμα.

Στο Σχήμα 3.6 παρουσιάζονται τα επίπεδα της ποιότητα του πλέγματος για τα κριτήρια της ορθογωνικότητας και της λοξότητας. Βλέπουμε ότι πετυχαίνουμε καλή τιμή τόσο για το κριτήριο της ορθογωνικότητας όσο και της λοξότητας. Για την αναλογία διαστάσεων το εύρος τιμών είναι από το 1 έως το 100, με την τιμή 1 να είναι η βέλτιστη. Έτσι, για την τιμή 8, που έχουμε εμείς, μπορούμε να δούμε ότι πετύχαμε και για το κριτήριο αυτό καλή συμπεριφορά. Να πούμε βέβαια ότι η συγκέντρωση των στοιχείων στις κατώτερες τιμές που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.3, είναι περίπου 2000-3000, το οποίο σε σχέση με τον συνολικό αριθμό στοιχείων είναι περίπου 0.3% των στοιχείων. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι το πλέγμα είναι ικανό να μας παρέχει καλές λύσεις.

Πίνακας 3. 3 Τιμές κριτηρίων ελέγχου ποιότητας για το πλέγμα

Κριτήριο	Τιμή
Ορθογωνικότητα (Orthogonality)	Min = -0.315
Αναλογία διαστάσεων(Aspect Ratio)	Max = 8
Λοξότητα (Skewness)	Max = 0.65



Σχήμα 3. 6 Τιμές για τα κριτήρια ποιότητας του πλέγματος

Έχοντας πλέον καταστρώσει τις ρευστομηχανικές εξισώσεις και διακριτοποιήσει το υπολογιστικό μας πεδίο, μπορούμε να προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

### 3.4 Αποτελέσματα ρευστομηχανικής επίλυσης

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, βασικός στόχος της ανάλυσης του μοντέλου για στερεή προπέλα είναι η παρακολούθηση της διαφοροποίησης της λύσης, σε σχέση με το μοντέλο του επόμενου κεφαλαίου. Επομένως, στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και σχολιάζονται συνοπτικά, τα οποία θα συγκριθούν με την ανάλυση του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου. Θα παρουσιάσουμε για 4 διαφορετικά σετ τιμών προσομοίωσης τα αναπτυσσόμενα φορτία και τα χαρακτηριστικά αυτών στο πεδίο της συχνότητας. Επίσης, παρουσιάζουμε τις κατανομές του συντελεστή πίεσης σε μια θέση των πτερυγίων της προπέλας για το κάθε σετ τιμών. Η επίλυση του ροϊκού πεδίου πραγματοποιείται στο λογισμικό Fluent της εταιρίας ANSYS.

#### 3.4.1 Σύγκριση Πειραματικών – Υπολογιστικών λύσεων

Τα αποτελέσματα υπολογιστικής ρευστοδυναμικής (CFD) χρειάζονται πειραματική επιβεβαίωση, με σκοπό την επιβεβαίωση των παραμέτρων προσομοίωσης, του σχεδιασμού και του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για την επίλυση του πεδίου ροής. Κατά την σύγκριση αριθμητικών και πειραματικών λύσεων, δεν περιμένουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων αλλά μικρή απόκλιση μεταξύ τους. Τότε και μόνο τότε μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο μας είναι ικανό να παράξει καλές λύσεις. Η σύγκριση γίνεται ανάμεσα σε συνθήκες προσομοίωσης «πιο απλές» από τις συνθήκες που εισάγονται για την ανάλυση του μοντέλου.

Τα πειραματικά δεδομένα που παρουσιάζουμε στην συνέχεια αποκτήθηκαν από την αναφορά [14]. Η αναφορά αυτή είναι η ίδια, από την οποία αποκτήθηκαν οι γεωμετρικές διαστάσεις σχεδιασμού της προπέλας και αναφέρεται σε προσομοίωσης για υψόμετρο πτήσης 18 χιλιομέτρων. Οι ιδιότητες του αέρα στο υψόμετρο αυτό αποκτήθηκαν από πίνακες ιδιοτήτων και παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.4. Στα σχήματα 3.7 και 3.8 παρουσιάζονται οι τιμές για τον συντελεστή ώσης και τον συντελεστή ισχύς συναρτήσει του λόγου ταχυτήτων (advance ratio), για διαφορετικές συνθήκες προσομοίωσης ταχυτήτων  $V_\infty \left[ \frac{m}{s} \right]$  και  $n[rpm]$ . Στις ετικέτες των σχημάτων αυτών, ως *Exp. (Experimental)* ορίζονται οι πειραματικές τιμές για την αντίστοιχη ταχύτητα. Οι εξισώσεις υπολογισμού των αδιάστατων συντελεστών και του λόγου J παρουσιάστηκαν στην ενότητα 2.4. Επιπλέον, στο Σχήμα 3.9 δίνονται τα διαγράμματα σύγκρισης της παραγόμενης ώσης (3.9α) και της παραγόμενης ροπής (3.9β) για διαφορετικές ταχύτητες περιστροφής της προπέλας,

για ταχύτητα ελεύθερης ροής  $V_\infty = 15 \left[ \frac{m}{s} \right]$ . Από τα 4 αυτά διαγράμματα επιβεβαιώνουμε την λειτουργικότητα του μοντέλου μας, μιας και τα σφάλματα είναι εμφανώς μηδαμινά. Στον Πίνακα 3.5 παρουσιάζονται οι τιμές του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMS) για τις τιμές των αδιάστατων συντελεστών για τις 3 ταχύτητες ελεύθερης ροής. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ορίζεται ως :

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n}}, \quad \text{όπου } n : \text{o αριθμός των τιμών}$$

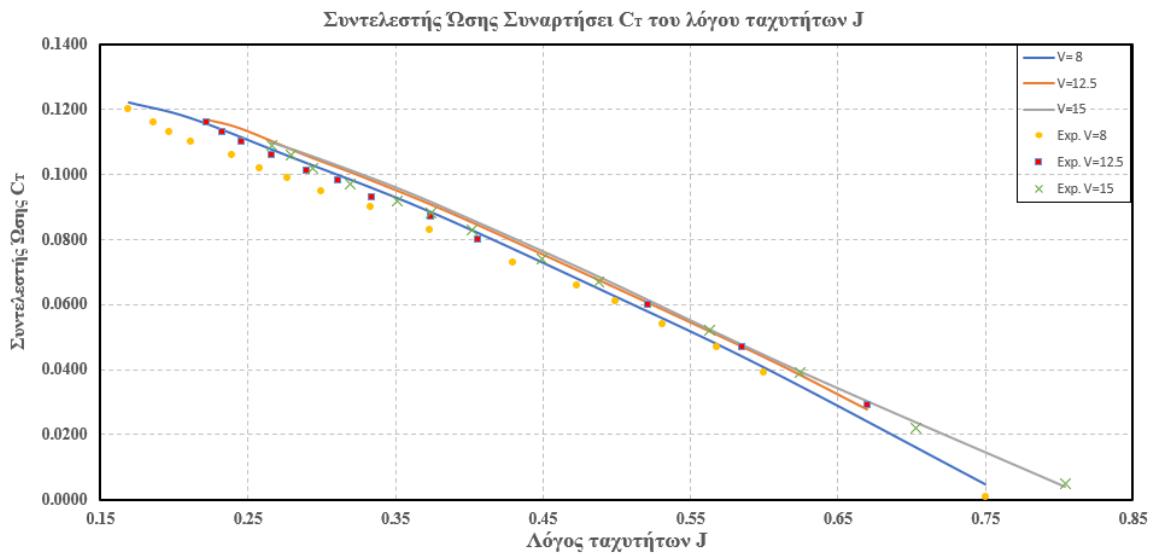
Με  $x_i, y_i$  οι πειραματικές και υπολογισμένες τιμές για τις ίδιες συνθήκες αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι το μεγαλύτερο σφάλμα είναι της τάξης του 0.5%. Μεγαλύτερες αποκλίσεις των τιμών έχουμε στις χαμηλές τιμές του λόγου J. Γενικά όμως, μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο μας δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα και τα σφάλμα σύγκρισης είναι επαρκών μικρά.

Πίνακας 3. 4 Ιδιότητες αέρα σε υψόμετρο 18 χιλιομέτρων

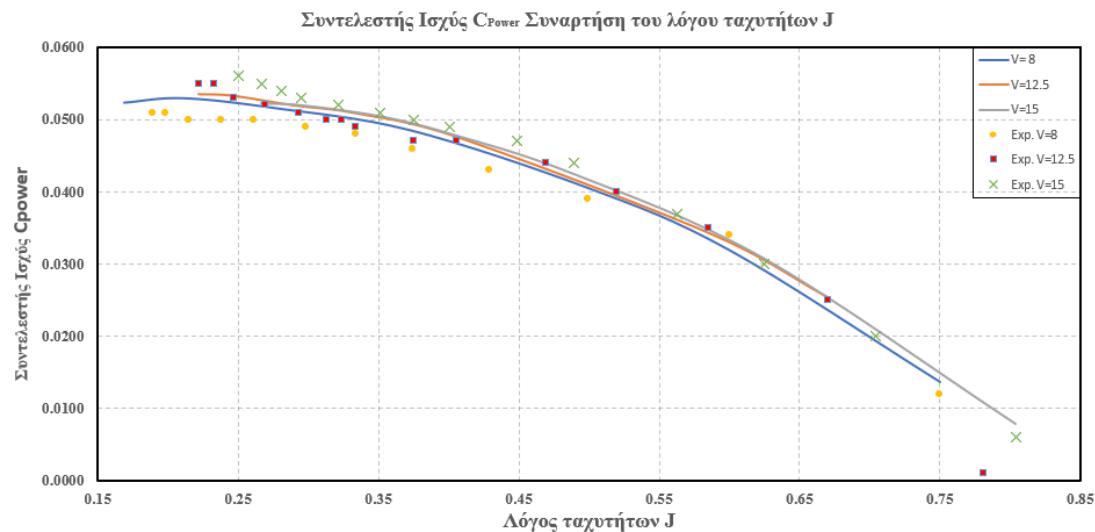
Πυκνότητα	$\rho = 0.131266 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	Θερμοκρασία	$T = 216.65 [K]$
Δυναμικό ιξώδες	$\mu = 1.422 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{kg}{ms} \right]$	Λόγος ειδικής θερμοχωρητικότητας	$k = 1.4$
Απόλυτη πίεση	$P = 0.948 \cdot 10^4 [Pa]$	Ταχύτητα του ήχου	$a = 295.1 \left[ \frac{m}{s} \right]$

Πίνακας 3. 5 Μέσο τετραγωνικό σφάλμα τιμών Πειράματος - Μοντέλου

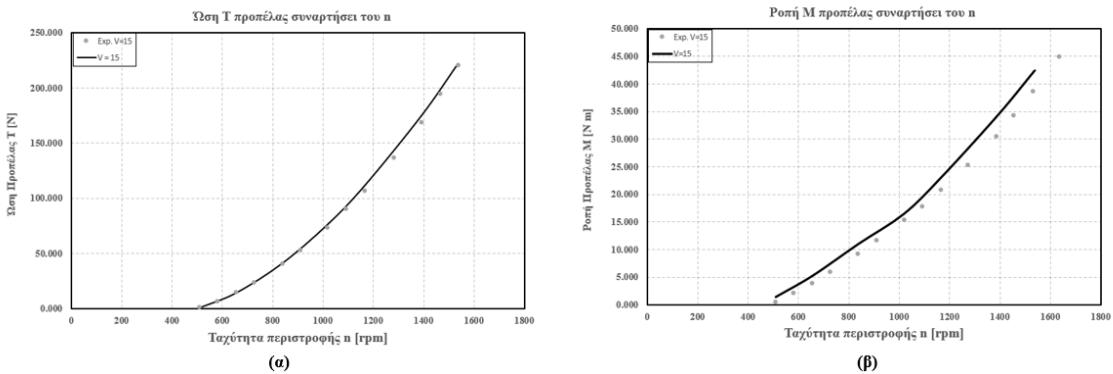
Απόκλιση Τιμών (RMS)		
V	$C_T$	$C_{Power}$
8	0.45435%	0.2191%
12.5	0.3542%	0.10439%
15	0.2483%	0.1502%



Σχήμα 3.7 Σύγκριση Πειραματικών τιμών με τις τιμές του μοντέλου για τον συντελεστή ώσης συναρτήσει του λόγου ταχυτήτων  $J$ .



Σχήμα 3.8 Σύγκριση Πειραματικών τιμών με τις τιμές του μοντέλου για τον συντελεστή ισχύς συναρτήσει του λόγου ταχυτήτων  $J$ .



Σχήμα 3. 9 Σύγκριση πειραματικών και υπολογισμένων τιμών Ωσης(α) και Ροπής(β) συναρτήσει της περιστροφικής ταχύτητας της προπέλας.

### 3.4.2 Συνθήκες προσομοίωσης

Έχοντας επιβεβαιώσει το υπολογιστικό μας μοντέλο, προχωράμε στον ορισμό των συνθηκών για τις οποίες θα επιλύσουμε το ροϊκό πεδίο. Κατά την πτήση αεροσκαφών, η κατάσταση απογείωσης θεωρείται η πιο απαιτητική. Αυτό οφείλεται στην μεγαλύτερη ισχύ που προσφέρει ο κινητήρας (περίπου 90% της μέγιστης) και στις μεγαλύτερες περιστροφικές ταχύτητες της προπέλας. Επομένως, σε κατάσταση απογείωσης έχουμε και τα μεγαλύτερα πλάτη δυναμικών φορτίσεων για την κατασκευή μας. Για τους λόγους αυτούς επιλέγουμε να επιλύσουμε το μοντέλο μας σε συνθήκες απογείωσης.

Για αεροσκάφη turboprop που φέρουν προπέλες των δικών μας διαστάσεων, η απογείωση εκτελείται σε ταχύτητες περίπου  $45 \left[ \frac{m}{s} \right] - 60 \left[ \frac{m}{s} \right]$ . Επιπλέον, οι περιστροφικές ταχύτητες των κινητήρων αυτών σε κατάσταση απογείωσης κινούνται σε μεγάλο εύρος ανάλογα με το βάρος του αεροσκάφους και τον αριθμό κινητήρων που φέρει αυτό. Ένα κριτήριο που αναφέρθηκε στο 2<sup>o</sup> κεφάλαιο αλλά και στο εισαγωγικό κομμάτι αυτού το κεφαλαίου ήταν η ταχύτητα της κορυφής των πτερυγίων, η οποία προκύπτει από την εξίσωση  $V_{R,Tip} = \sqrt{V_0^2 + (\Omega R)^2}$ . Θα πρέπει η επιλογή των σετ τιμών για τις προσομοιώσεις να μας δίνει τέτοια ταχύτητα, ώστε να μην δημιουργούνται περιοχές με τιμές  $Ma > 1$ . Τέλος, σχετικά με την γωνία  $\beta$ (pitch) της προπέλας, γνωρίζουμε ότι για υψηλές περιστροφικές ταχύτητες (κατάσταση απογείωσης) η γωνία αυτή είναι μικρή, ενώ για χαμηλές (κατάσταση πτήσης) η γωνία είναι μεγαλύτερη. Με βάση όλα τα παραπάνω επιλέγουμε τα 4 σετ τιμών, που παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.6. Επειδή το αεροσκάφος βρίσκεται σε κατάσταση απογείωσης, οι υπολογισμοί θα γίνουν για συνθήκες πτήσης στο ύψος της θάλασσας. Στον Πίνακα 3.7 παρουσιάζονται οι φυσικές ιδιότητες του αέρα στο ύψος της θάλασσας.

Πίνακας 3. 6 Σετ τιμών για τις συνθήκες προσομοίωσης

	Σετ 1	Σετ 2	Σετ 3	Σετ 4
Ταχύτητα αεροσκάφους	$V = 20 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$V = 30 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$V = 20 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$V = 30 \left[ \frac{m}{s} \right]$
Περιστροφική Ταχύτητα Προπέλας	$n = 1500[rpm]$	$n = 1500[rpm]$	$n = 2000[rpm]$	$n = 2000[rpm]$
Γωνία pitch προπέλας	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 10^\circ$
Γωνία προσβολής (ανόδου) αεροσκάφους	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 10^\circ$

Πίνακας 3. 7 Ιδιότητες αέρα στο επίπεδο της θάλασσας

Πυκνότητα	$\rho = 1.225 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	Θερμοκρασία	$T = 288.15 [K]$
Δυναμικό ιξώδες	$\mu = 1.789 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{kg}{ms} \right]$	Λόγος ειδικής θερμοχωρητικότητας	$k = 1.401$
Απόλυτη πίεση	$P = 1.013 \cdot 10^5 [Pa]$	Ταχύτητα του ήχου	$a = 304.3 \left[ \frac{m}{s} \right]$

Για τα παραπάνω σετ υπολογίζουμε τον λόγο  $J$  και τον αριθμό Mach της κορυφής των πτερυγίων με βάση τις εξισώσεις :

$$J = \frac{V_\infty}{nD} , \quad Ma_{Tip} = \frac{V_{R,Tip}}{\alpha} = \frac{\sqrt{V_0^2 + (\Omega R)^2}}{\alpha}$$

- Σετ 1 :  $J = 0.363$ ,  $Ma_{Tip} = 0.5111$
- Σετ 2 :  $J = 0.545$ ,  $Ma_{Tip} = 0.5153$
- Σετ 3 :  $J = 0.2727$ ,  $Ma_{Tip} = 0.6795$
- Σετ 4 :  $J = 0.409$ ,  $Ma_{Tip} = 0.6827$

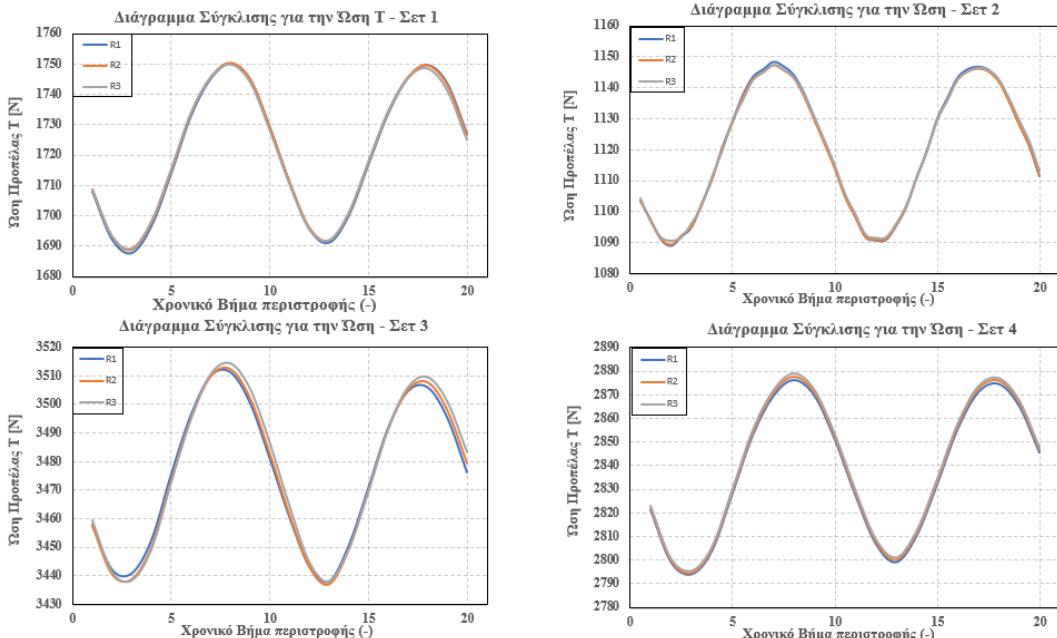
Από τις τιμές αυτές βλέπουμε ότι ο περιορισμός  $Ma < 1$ , ικανοποιείται για όλα τα σετ τιμών. Επίσης, παρατηρώντας τον άξονα των τετμημένων των σχημάτων 3.7 έως 3.9, που παρουσιάστηκαν προηγουμένως, οι τιμές που υπολογίζουμε για το  $J$  βρίσκονται στα εύρη που μας δίνουν καλά αποτελέσματα από το υπολογιστικό μοντέλο. Στη συνέχεια, για τα παραπάνω σετ τιμών παρουσιάζουμε τις αποκρίσεις των δυνάμεων και ροπών που ασκούνται στην προπέλα και τις αναλύουμε στο πεδίο των συχνοτήτων. Επίσης, παρουσιάζουμε την κατανομή του συντελεστή πίεσης σε 1 διατομή των πτερυγίων, για κάθε σετ, σε απόσταση  $r=0.75R$  από την πλήμνη της προπέλας.

### 3.4.3 Απόκριση Φορτίων και Ανάλυση στο πεδίο της συχνότητας

Ο άξονας περιστροφής της προπέλας είναι ο για με θετική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής (αντιορολογιακά), ο οποίος έχει διεύθυνση από την βάση των πτερυγίων προς την κορυφή και η θετική του φορά είναι προς τα κάτω (φορά βαρύτητας), ο οποίος τοποθετείται με τέτοιο τρόπο, ώστε να ικανοποιείται ο κανόνας του δεξιού χεριού. Το σύστημα συντεταγμένων βρίσκεται στο κέντρο της πλήμνης της προπέλας, επομένως οι δυνάμεις που ασκούνται στο επίπεδο της προπέλας είναι στην διεύθυνση  $x$  και  $z$ . Για να καταλήξουμε να εκτελέσουμε την προσομοίωση για το μεταβατικό φαινόμενο (transient), αρχικά επιλύουμε για την μόνιμη κατάσταση, έως ότου επέλθει σύγκλιση (περίπου 550 επαναλήψεις). Στην συνέχεια, εκτελούμε την μεταβατική ανάλυση ξεκινώντας από μεγάλο χρονικό βήμα, έως ότου καταλήξουμε στο βήμα με το οποίο θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματά μας. Συγκεκριμένα, για όλα τα σετ τιμών τα αποτελέσματα παρουσιάζονται για χρονικό βήμα τέτοιο, ώστε σε κάθε βήμα να περιστρέφεται η προπέλα κατά 18°. Έτσι, για μια πλήρη περιστροφή της προπέλας χρειαζόμαστε 20 χρονικά βήματα.

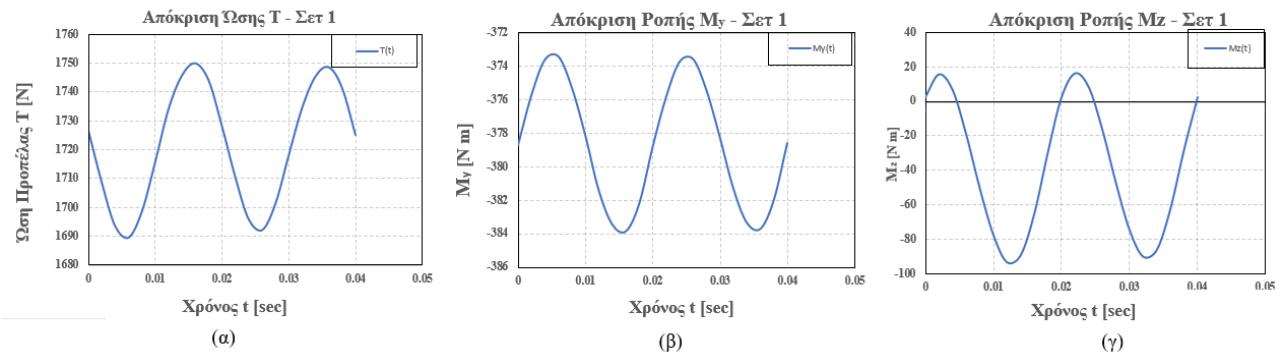
Αρχικά, στο Σχήμα 3.10 βλέπουμε τα διαγράμματα της ώσης, για τις 3 τελευταίες περιστροφές της προπέλας, για κάθε σετ τιμών. Από το σχήμα αυτό επιβεβαιώνουμε την σύγκλιση της λύσης μας. Στα Σχήματα 3.11 έως 3.14 παρουσιάζονται οι αποκρίσεις για κάθε σετ τιμών.

Συγκεκριμένα, σε κάθε σχήμα βλέπουμε την απόκριση της ώσης  $T$ , της ροπής στον  $y$ ,  $M_y$  (άξονας περιστροφής) και της ροπής στον  $z$ ,  $M_z$  (επίπεδο περιστροφής) για τα τέσσερα σετ τιμών. Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε τα φορτία αυτά, όντας τα πιο σημαντικά από τις ροπές και τις δυνάμεις που αναπτύσσονται στις 3 διεύθυνσεις. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να παρακολουθήσουμε την συμπειφορά της ροπής στο επίπεδο περιστροφής και την ανάλυση αυτής στο πεδίο της συχνότητας. Επιλέγεται μόνο η ροπή στην  $z$  διεύθυνση, επειδή λόγω συμμετρίας η ροπή στην  $x$  διεύθυνση εμφανίζει παρόμοια χαρακτηριστικά. Τέλος, επισημαίνουμε ότι τα φορτία αποτελούν τις συνισταμένες φορτίσεις σε ολόκληρη την προπέλα και όχι στα επιμέρους πτερύγια.

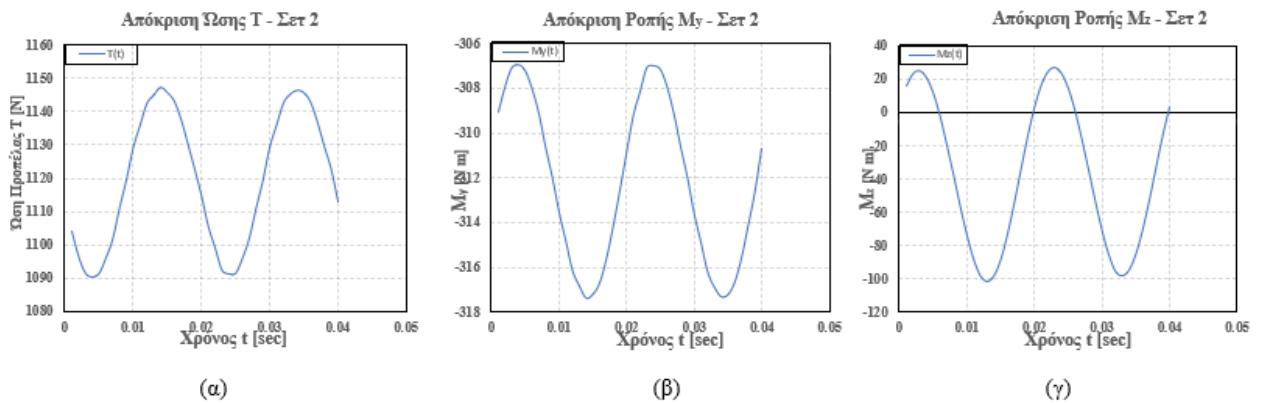


Σχήμα 3. 10 Διαγράμματα σύγκλισης για την ώση, για όλα τα σετ τιμών, για τις 3 τελευταίες περιστροφές.

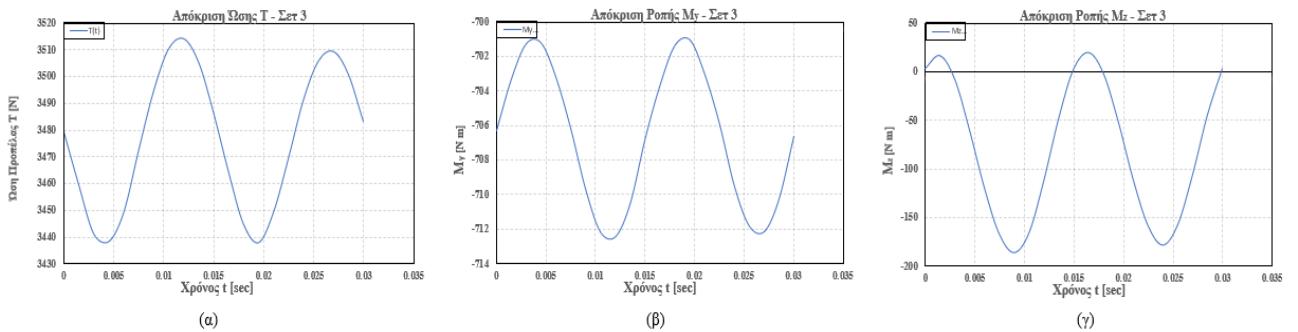
Από τις αποκρίσεις των δυνάμεων βλέπουμε ότι όλες εμφανίζουν περιοδική συμπειφορά με διπλάσια συχνότητα από αυτήν της προπέλας. Η διπλάσια συχνότητα οφείλεται στο ότι προσομοιώνουμε ολόκληρη την προπέλα και έτσι λόγω συμμετρίας των πτερυγίων έχουμε την ίδια συμπειφορά για τις δυνάμεις, δύο φορές σε κάθε περιστροφή. Ανάμεσα στα σετ 1 και 2, βλέπουμε ότι διατηρώντας σταθερή την περιστροφική ταχύτητα της προπέλας, αυξανόμενης της ταχύτητας της ελεύθερης ροής, η παραγόμενη ώση και οι αναπτυσσόμενες ροπές μειώνονται. Την ίδια συμπειφορά βλέπουμε και ανάμεσα στις τιμές προσομοίωσης των σετ 3 και 4. Συγκρίνοντας τώρα τα διαγράμματα για ίδιες ταχύτητες πτήσης και διαφορετικές ταχύτητες περιστροφής της προπέλας, βλέπουμε ότι οι φορτίσεις αυξάνονται. Συγκεκριμένα, η αύξηση της περιστροφικής ταχύτητας επηρεάζει τα φορτία κατά πολύ περισσότερο από την αύξηση της ταχύτητας πτήσης.



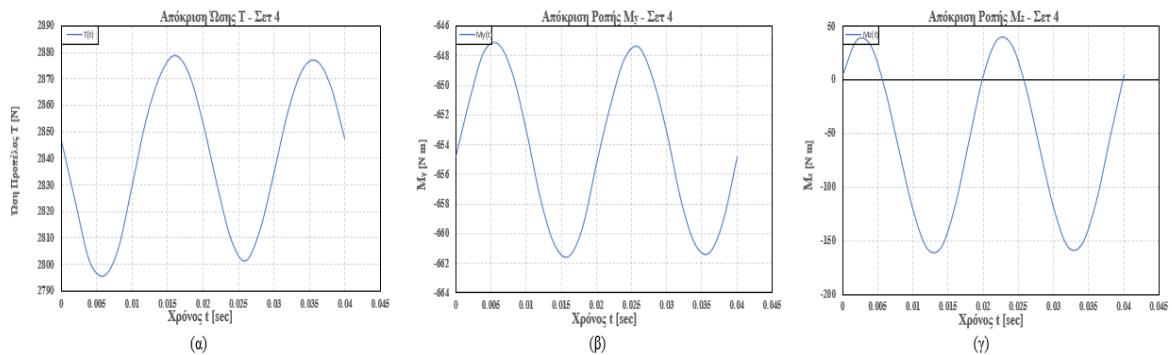
Σχήμα 3. 11. Απόκριση (α) Ήσης (β) Ροπής  $M_y$  (γ) Ροπής στο επίπεδο περιστροφής  $M_z$  για το  $1^o$  σετ τιμών.



Σχήμα 3. 12 Απόκριση (α) Ήσης (β) Ροπής  $M_y$  (γ) Ροπής στο επίπεδο περιστροφής  $M_z$  για το  $2^o$  σετ τιμών.



Σχήμα 3. 13 Απόκριση (α) Ήσης (β) Ροπής  $M_y$  (γ) Ροπής στο επίπεδο περιστροφής  $M_z$  για το  $3^o$  σετ τιμών.



Σχήμα 3. 14 Απόκριση (α) Ωσης (β) Ροπής  $M_y$  (γ) Ροπής στο επίπεδο περιστροφής  $M_z$  για το  $4^\circ$  σετ τιμών.

### Ανάλυση Fourier Δυνάμεων

Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του ταχύ μετασχηματισμού Fourier (FFT), που παρουσιάστηκε στην ενότητα 3.2.2, εξάγουμε τις αρμονικές συνιστώσες 0P,1P,2P,3P ( $P=$ ανά μια περιστροφή προπέλας) των συνολικών δυνάμεων. Για το  $1^\circ$  σετ τιμών εφαρμόζεται ο αλγόριθμος FFT για όλες τις ροπές και δυνάμεις της προπέλας, έτσι ώστε να πάρουμε μια γενική εικόνα για την συμπεριφορά των φορτίων. Τα αποτέλεσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.8. Για τα υπόλοιπα σετ τιμών η ανάλυση γίνεται μόνο για την ώση και τις ροπές στις διευθύνσεις y και z. Τα αποτέλεσματα βρίσκονται στον Πίνακα 3.9.

Η δυναμική καταπόνηση της προπέλας από τις ροπές με διάνυσμα πάνω στο επίπεδο περιστροφής, έχει μεγάλη σημασία, διότι εκτός τα μεγάλα εύρη ταλάντωσης (για την 2P συνιστώσα), η κάμψη της προπέλας στις διευθύνσεις αυτές οδηγεί σε κάμψη της ατράκτου που εδράζεται στον μειωτήρα. Επίσης, η κάμψη αυτή επηρεάζει την γωνία pitch της προπέλας και επομένως και την γωνία προβολής α, το οποίο με την σειρά του επηρεάζει την παραγόμενη ώση. Όπως θα δούμε και κατά την ανάλυση του φαινομένου «whirl flutter» στο  $5^\circ$  κεφάλαιο, οι ροπές αυτές είναι ο λόγος της εμφάνισης φαινομένων αστάθειας στην προπέλα.

Παρατηρώντας αρχικά τις τιμές του Πίνακα 3.8, βλέπουμε για τις αρμονικές συνιστώσες ότι τα μεγαλύτερα εύρη ταλάντωσης εμφανίζονται στην 2P συνιστώσα, όπως και περιμέναμε, λόγω της συμμετρίας των πτερυγίων. Σε σχέση με τις άλλες 2 συνιστώσες η 2P εμφανίζει 5-10 φορές μεγαλύτερες τιμές για το πλάτος ταλάντωσης. Επιπλέον, μπορούμε να δούμε ότι οι καμπτικές φορτίσεις στις διευθύνσεις πάνω στο επίπεδο περιστροφής εμφανίζουν αρκετά μεγαλύτερα πλάτη έναντι των υπολοίπων φορτίσεων. Τα πλάτη αυτά είναι περίπου 2 φορές το μέγεθος της στατικής φόρτισης κάμψης (στην x,z διεύθυνση). Για τους λόγους αυτούς στα υπόλοιπα σετ τιμών αναλύουμε μόνο τις 2 αυτές ροπές και την ώση της προπέλας. Στον πίνακα επίσης διακρίνουμε και το στατικό φορτίο 0P, που φέρει κατά κάποιο τρόπο την μέση τιμή των διαγραμμάτων απόκρισης που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Από τις τιμές του Πίνακα 3.9, παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά με το  $1^\circ$  σετ τιμών, όπου και βλέπουμε την κυρίαρχη συμπεριφορά (ως προς το πλάτος) της 2P συνιστώσας για την κάμψη  $M_z$  έναντι των υπολοίπων.

Πίνακας 3. 8 Πλάτη ταλάντωσης αρμονικών συνιστωσών για 1<sup>o</sup> σετ τιμών

Πλάτη ταλάντωσης αρμονικών συνιστωσών για το 1 <sup>o</sup> σετ τιμών						
Φόρτιση	T	$F_x$	$F_z$	$M_x$	$M_y$	$M_z$
Συνιστώσα						
0P	1720	7.16	21	37.4	379	37.1
1P	2.38	1.26	2.7	3.8	0.23	5.25
2P	28	21.6	21.3	56.8	5	53.6
3P	4.2	2.7	1.8	6.5	0.7	5.7

Πίνακας 3. 9 Πλάτη ταλάντωσης αρμονικών συνιστωσών για 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup> και 4<sup>o</sup> σετ τιμών

Σετ τιμών	2o			3o			4o			
	Φόρτιση	T	$M_y$	$M_z$	T	$M_y$	$M_z$	T	$M_y$	$M_z$
Συνιστώσα										
0P	1120	312	34.9	3476	706.6	77.8	2839	654.3	77.8	
1P	2.7	1.5	6	1.9	0.25	10.3	3.7	0.225	10.3	
2P	33	6	62	35.8	5.5	99.7	39.8	7.16	99.7	
3P	1.5	0.11	1	4.4	0.7	10	0.18	0.036	10	

### 3.4.4 Κατανομή πιέσεων

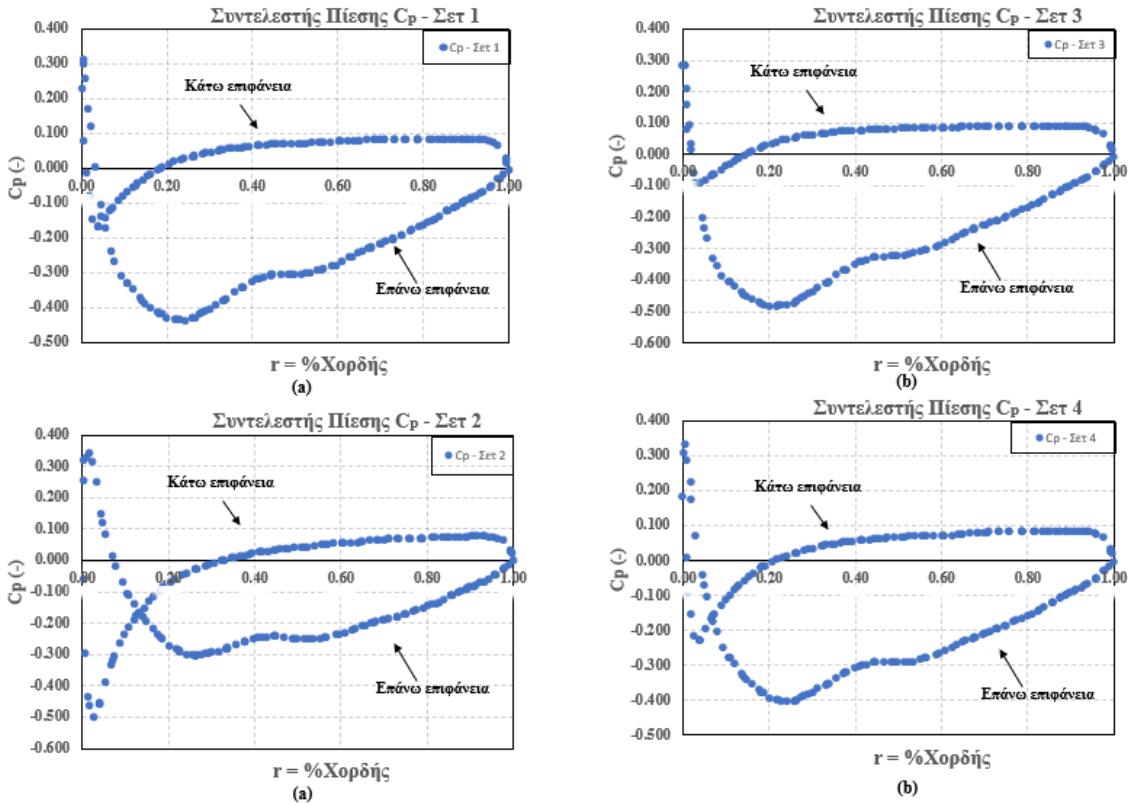
Στο Σχήμα 3.15 απεικονίζονται οι κατανομές του συντελεστή πίεσης  $C_p$ , για τα 4 σετ τιμών σε απόσταση από την πλήμνη  $r = 0.75R$ . Στο σχήμα επίσης έχει σημειωθεί σε ποια μεριά της αεροτομής αναφέρονται τα σημεία των διαγραμμάτων. Ως επάνω επιφάνεια θεωρούμε την επιφάνεια της οποίας το κάθετο διάνυσμα είναι σε αντίθετη διεύθυνση από το διάνυσμα της ταχύτητας της ελεύθερης ροής, ενώ η άλλη μεριά των πτερυγίων θεωρείται η κάτω επιφάνεια. Οι τιμές του συντελεστή πίεσης προέκυψαν από την εξίσωση που παρουσιάστηκε στους αδιάστατους συντελεστές :

- Ταχύτητα που βλέπει η αεροτομή :  $V_R = \sqrt{V_0^2 + (\Omega r)^2}$
- Δυναμική πίεσης :  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_R^2$  [Pa]
- Συντελεστής Πίεσης :  $C_p = \frac{p_1 - p_\infty}{q_\infty}$

Η μορφή των διαγραμμάτων ακολουθεί τα τυπικά διαγράμματα κατανομών πιέσεων σε αεροτομές και μπορούμε να δούμε ότι, καθώς αυξάνονται οι στροφές (από σετ 1,2 σε 3,4), οι κατανομές των πιέσεων γίνονται πιο ομοιόμορφες για την κάθε επιφάνεια.

Τα αποτελέσματα στο κεφάλαιο αυτό, για την ρευστομηχανική επίλυση, παρουσιάστηκαν συνοπτικά. Στόχος μας ήταν να δείξουμε την διαδικασία παραγωγής τους και την βασική θεωρία. Μεγαλύτερη χρήση των αποτελεσμάτων αυτών θα γίνει κατά την σύγκρισή τους με τις λύσεις του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

**Συντελεστή Πίεσης στην θέση 0.75%R**



Σχήμα 3.15 Κατανομή συντελεστή Πίεσης στην διατομή στο 75% της ακτίνας της προπέλας, για κατακόρυφη θέση της προπέλας

## 4. ΑΕΡΟΕΛΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΠΕΛΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό λαμβάνουμε πλέον υπόψη την παραμορφωσιμότητα της προπέλας. Με βάση την θεώρηση αυτή, αναλύουμε τα φαινόμενα που αναπτύσσονται ανάμεσα στην αλληλεπίδραση ρευστού - κατασκευής (FSI) και συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας, με αυτά του προηγούμενου κεφαλαίου. Αρχικά, αναλύουμε τις βασικές έννοιες της παραμορφώσιμης κατασκευής και των αεροελαστικών φαινομένων. Στη συνέχεια, επιλύουμε το απλοποιημένο πρόβλημα της περιστρεφόμενης δοκού, το οποίο μας δίνει μια πρώτη εικόνα για τα αναπτυσσόμενα φαινόμενα σε γεωμετρίες, όπως της προπέλας μας. Ακολουθεί η κατάστρωση των εξισώσεων του συστήματος για το ρευστό και την κατασκευή και επιπλέον παρουσιάζονται οι μέθοδοι διακριτοποίησης (FEM) και αριθμητικής επίλυσης των εξισώσεων αυτών. Συνεχίζουμε με την περιγραφή των αρχών συνπροσομοίωσης και της μεθόδου που θα χρησιμοποιήσουμε εμείς για την επίλυση του μοντέλου μας. Τέλος, κλείνουμε με την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και την σύγκριση με τις λύσεις του 3<sup>ου</sup> κεφαλαίου.

### 4.1 Περιγραφή Προβλήματος και Παραμορφώσιμα Σώματα

Έως το σημείο αυτό, μελετήσαμε μόνο το ρευστομηχανικό κομμάτι του μοντέλου μας. Θεωρώντας το μοντέλο ως στερεό, δεν υπήρξε η ανάγκη περιγραφής των φαινομένων αλληλεπίδρασης μεταξύ της κατασκευής και του ρευστού, μιας και τα δύο αυτά προβλήματα μπορούν να μελετηθούν αποσυζευγμένα. Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε την προπέλα ως παραμορφώσιμη. Η θεώρηση αυτή είναι βασική κατά τον σχεδιασμό και την μελέτη αεροσκαφών, μιας και η αλληλεπίδραση ρευστού κατασκευής οδηγεί στην ανάπτυξη φαινομένων με μεγάλη σημασία, όπως θα δούμε στην πορεία. Τα φαινόμενα αυτά είναι η κύρια πηγή καταστροφής για τα σύγχρονα αεροσκάφη.

Από μελέτες σε συστήματα FSI, έχουμε παρατηρήσει ότι η κατασκευή και το ροϊκό πεδίο που την περιβάλει, είναι ισχυρά συζευγμένα. Λόγω της αλληλεπίδρασης αυτής, δημιουργείται μια κυκλική ανταλλαγή πληροφοριών ανάμεσα στα 2 αυτά πεδία. Οι ποσότητες του ροϊκού πεδίου, επηρεάζουν την συμπεριφορά της κατασκευής και η συμπεριφορά αυτή με την σειρά της επηρεάζει το ροϊκό πεδίο. Από πειράματα και μελέτες, που έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν, έχουμε διαπιστώσει ότι η αλληλεπίδραση αυτή μπορεί είτε να σταθεροποιείται σε μια μόνιμη κατάσταση, είτε να αποσβένεται (ευστάθεια), είτε να αυξάνεται με τον χρόνο (αστάθεια). Ένα φαινόμενο δυναμικής αστάθειας, το οποίο προκύπτει λόγω της παραμορφωσιμότητας της έδρασης της κατασκευής, μελετάται στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο. Με την προσθήκη παραμορφωσιμότητας επομένως στην κατασκευή, αυξάνουμε κατά πολύ την ακρίβεια, με κόστος βέβαια την αύξηση της πολυπλοκότητας.

Ας αναρωτηθούμε λοιπόν, τί είναι ένα παραμορφώσιμο σώμα και ποιες οι διαφορές του με ένα στερεό;

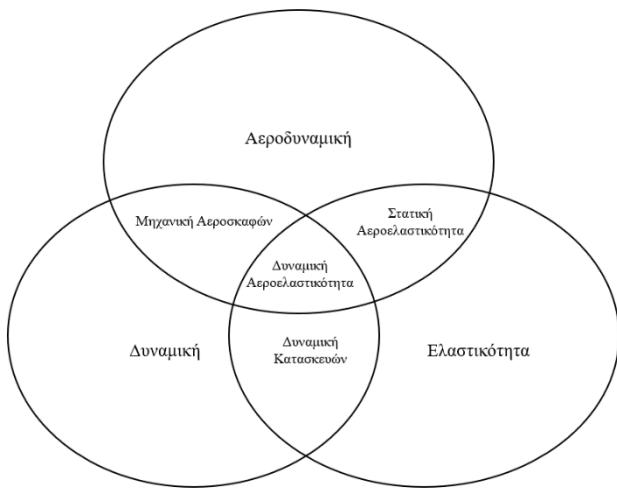
Ως στερεό ορίζεται το σώμα του οποίου η σχετική απόσταση μεταξύ των σημείων του παραμένει αμετάβλητη στον χρόνο και η κίνησή του μπορεί να θεωρηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας περιστροφικής συνιστώσας. Για στερεά σώματα η παραμόρφωση είναι μηδενική ή αρκετά μικρή, ώστε να θεωρείται αμελητέα (σχετικά στερεό), ανεξάρτητα των εξωτερικών δυνάμεων και

ροπών που ασκούνται σε αυτό. Τα στερεά σώματα, στην γενική περίπτωση, έχουν 6 βαθμούς ελευθερίας, εκ των οποίων είναι 3 μεταφορικοί (x,y,z) και 3 περιστροφικοί (αντίστοιχα x,y,z). Για στερεά σώματα οι εξισώσεις κίνησης αποτελούνται από κανονικές διαφορικές εξισώσεις και επιλύονται είτε αναλυτικά (γραμμικά συστήματα) είτε αριθμητικά (μη – γραμμικά και συστήματα πολλών σωμάτων).

Ως παραμορφώσιμο(ελαστικό) ορίζεται το σώμα του οποίου η σχετική απόσταση μεταξύ δύο σημείων του, υπό την επίδραση εξωτερικών φορτίων, αλλάζει με τον χρόνο(παραμόρφωση). Για μικρές παραμορφώσεις και γραμμικά υλικά του σώματος, θεωρούμε ότι έχουμε γραμμικά ελαστικό σώμα, ενώ για μεγάλες παραμορφώσεις ή μη-γραμμικά υλικά έχουμε μη – γραμμικά ελαστικό σώμα. Οι μεταβλητές που περιγράφουν τα παραμορφώσιμα σώματα, έχουν χωρική και χρονική εξάρτηση. Η περιγραφή της συμπεριφοράς του σώματος βασίζεται στον κλάδο της «Μηχανικής Παραμορφώσιμων Σωμάτων», η οποία με βάση τις αρχές της θεωρίας ελαστικότητας καταστρώνει τις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα και υπολογίζει την συμπεριφορά του σώματος για διαφορετικές συνθήκες. Η «Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων» και η «Μηχανική των Ρευστών» είναι κλάδοι ενός γενικότερου πεδίου της «Μηχανικής Συνεχούς Μέσου». Με βάση την θεωρία ελαστικότητας, για την περιγραφή ενός παραμορφώσιμου σώματος χρειάζεται να επιλύσουμε 15 εξισώσεις με 15 αγνώστους, οι οποίες θα ορισθούν στην πορεία, για κάθε σημείο του σώματος. Το σύστημα των εξισώσεων, που προκύπτει, αποτελείται από μερικές διαφορικές εξισώσεις με χρονική και χωρική εξάρτηση. Ελάχιστα προβλήματα με απλές γεωμετρίες έχουν αναλυτική λύση, με αποτέλεσμα να επιδιώκουμε την επίλυση τους με την χρήση αριθμητικών μεθόδων. Στην ανάλυση που ακολουθεί, μελετάμε το ρευστομηχανικό και κατασκευαστικό πρόβλημα ως αλληλεξαρτώμενα, με στόχο την παρακολούθηση της επιρροής του ενός πεδίου προς το άλλο. Στη συνέχεια περιγράφεται η θεωρία της αεροελαστικότητας.

## 4.2 Αεροελαστικότητα

Αεροελαστικότητα είναι ο όρος που χρησιμοποιούμε για να ορίσουμε το επιστημονικό πεδίο, το οποίο ασχολείται με την αλληλεπίδραση μεταξύ της παραμόρφωσης μιας κατασκευής μέσα σε ένα ροϊκό πεδίο αέρα και των αεροδυναμικών δυνάμεων, που αναπτύσσονται στην κατασκευή αυτή. Κατά κύριο λόγο η εφαρμογή της αεροελαστικής ανάλυσης αναφέρεται σε αεροσκάφη, αλλά βρίσκει επίσης εφαρμογές σε κτήρια, θαλάσσια οχήματα, αιμάξια κλπ. Στο Σχήμα 4.1 παρουσιάζεται μια σχηματική απεικόνιση του πεδίου της αεροελαστικότητας. Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τριών διαφορετικών πεδίων: της δυναμικής, αεροδυναμικής και ελαστικότητας. Η αεροδυναμική ασχολείται με τον υπολογισμό των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σώμα συγκεκριμένης γεωμετρίας. Η ελαστικότητα, όπως αναφέραμε και παραπάνω, ασχολείται με τον υπολογισμό του σχήματος ενός ελαστικού σώματος το οποίο δέχεται συγκεκριμένες φορτίσεις. Ενώ η δυναμική εισάγει τα φαινόμενα που προκύπτουν, όταν λαμβάνουμε υπόψη μας τις αδρανειακές δυνάμεις. Από τις τομές των κύκλων στο σχήμα βλέπουμε τα επιστημονικά πεδία που μελετάνε τις αλληλεπιδράσεις των τριών βασικών αρχών. Το πρόβλημα που μελετάμε εμείς υπάγεται στην τομή και των τριών κύκλων την «Δυναμική Αεροελαστικότητα», διότι μελετάμε την επιρροή των μη μόνιμων αεροδυναμικών δυνάμεων στην ελαστική συμπεριφορά της κατασκευής το οποίο χαρακτηρίζεται από ταλαντωτική συμπεριφορά των τροπών της κατασκευής. Κατά την μελέτη της δυναμική αεροελαστικότητας του μοντέλου μας, βλέπουμε ότι τα αεροδυναμικά φορτία εξαρτώνται από την παραμόρφωση (αεροδυναμική) και ότι η παραμόρφωση εξαρτάται από τα φορτία (δυναμική κατασκευών). Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα βασικά στατικά και δυναμικά αεροελαστικά φαινόμενα.



Σχήμα 4. 1 Σχηματική απεικόνιση της επιστήμης της αεροελαστικότητας και τα διαφορετικά πεδία που την απαρτίζουν [11]

### Στατικά Αεροελαστικά Φαινόμενα

Τα στατικά αεροελαστικά φαινόμενα περιλαμβάνουν την αλληλεπίδραση μόνιμων (χωρίς χρονική εξάρτηση) αεροδυναμικών δυνάμεων με τις ελαστικές δυνάμεις της κατασκευής. Η στατική παραμόρφωση της κατασκευής οδηγεί σε ανακατανομή των φορτίων και των σχετικών φαινομένων. Η στατική αεροελαστικότητα έχει κυρίως επιρροή σε μικρά αεροοχήματα. Τα φαινόμενα που σχετίζονται με το πεδίο αυτό είναι τα εξής :

- 1) Στρεπτική απόκλιση (Torsional divergence)
- 2) Αναστροφή επιφάνειας ελέγχου (Control surface reversion)

Συνοπτικά αναλύονται τα 2 παραπάνω. Κατά την στρεπτική απόκλιση, τα στατικά φορτία προκαλούν παραμόρφωση της κατασκευής, η οποία με την σειρά της επηρεάζει τα φορτία αυτά. Η συνισταμένη που προκύπτει από τα αεροδυναμικά φορτία και τις ελαστικές δυνάμεις, ορίζει το μέγεθος της ανακατανομής των φορτίων. Στρεπτική απόκλιση ονομάζουμε την κρίσιμη κατάσταση στην ανακατανομή φορτίων, κατά την οποία, λόγω της παραπάνω συμπεριφοράς οι αδρανειακές ελαστικές δυνάμεις της κατασκευής δεν έρχονται σε ισορροπία με τα αεροδυναμικά φορτία, πράγμα που μπορεί να οδηγήσει σε καταστροφή. Κατά την αναστροφή της επιφάνειας ελέγχου, το αεροόχημα χάνει την ικανότητα ελιγμών ή και στροφής. Πάλι στο φαινόμενο αυτό, λόγω της ανακατανομής των φορτίων, παραμορφώνεται η κατασκευή με αποτέλεσμα να δημιουργούνται δυνάμεις από την αεροτομή και από την επιφάνεια ελέγχου, ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς. Έτσι χάνεται η δυνατότητα ελέγχου του αεροσκάφους.

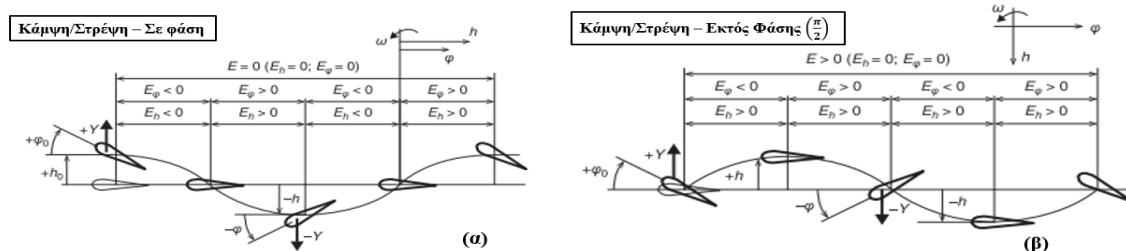
### Δυναμικά Αεροελαστικά Φαινόμενα

Η δυναμική αεροελαστικότητα οφείλεται στην αλληλεπίδραση των μη μόνιμων αεροδυναμικών φορτίων, των ελαστικών δυνάμεων και των αδρανειακών δυνάμεων. Τα φαινόμενα αυτά είναι τα καθοριστικά για την πιστοποίηση αεροσκαφών. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα βασικά δυναμικά φαινόμενα, για κάποια από τα οποία χρησιμοποιούμε τις αγγλικές ορολογίες που χρησιμοποιούνται στην παγκόσμια βιβλιογραφία :

- 1) Flutter
- 2) Buffeting
- 3) Αεροελαστική απόκριση σε δυναμικό φορτίο

## Flutter

Το φαινόμενο flutter (πτερυγισμός) είναι το πιο σημαντικό από τα παραπάνω και για τον λόγο αυτό παρουσιάζεται αναλυτικά. Αναφέρεται στις αυτο-διεγειρόμενες ταλαντώσεις που εμφανίζονται, όταν μια διαταραχή στο αεροελαστικό σύστημα δημιουργεί ταλαντωτικά αεροδυναμικά φορτία. Η ενέργεια παρέχεται από την ροή του αέρα. Όταν η κατασκευή βρίσκεται στους κρίσιμους λόγους ταχυτήτων ( $J$ ) για το φαινόμενο flutter, ένας συντονισμός φάσεων ανάμεσα στην κίνησή της κατασκευής και στις φορτίσεις που δέχεται, επιτρέπει την εξαγωγή ενέργειας ίδιας ποσότητας με την ενέργεια που διαχέει η εσωτερική απόσβεση της κατασκευής. Έτσι το σύστημα διατηρεί μια σταθερή περιοδική κίνηση. Για ταχύτητες μικρότερες των κρίσιμων, η διαταραχή αυτή αποσβένεται και το σύστημα παραμένει ευσταθές. Αντίθετα, για ταχύτητες μεγαλύτερες της κρίσιμης, η διαταραχή μεγεθύνεται και η κίνηση είναι ασταθής. Τα εύρη διαταραχών των αυτο-διεγειρόμενων ταλαντώσεων, θεωρητικά είναι απεριόριστα. Η αρχή της λειτουργίας του φαινομένου flutter παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.2. Στο σχήμα αυτό βλέπουμε τις μετατοπίσεις μιας απλοποιημένης αεροτομής με δύο βαθμούς ελευθερίας (είτε πτέρυγας είτε πτερυγίου), κατά την διάρκεια μιας περιόδου ταλάντωσης. Επίσης διακρίνουμε την ενέργεια του συστήματος για κάθε θέση της αεροτομής. Στο Σχήμα 4.2α απεικονίζεται η περίπτωση στην οποία η στρεπτική και καμπτική μετατόπιση για την αεροτομή, βρίσκονται σε φάση. Στην κατάσταση αυτή η συνολική ενέργεια σε μια περίοδο της κίνησης είναι μηδενική, με αποτέλεσμα το φαινόμενο flutter να μην εμφανίζεται. Αντίθετα, στο Σχήμα 4.2β οι δύο βαθμοί ελευθερίας βρίσκονται εκτός φάσης κατά  $\frac{\pi}{2}$ . Η συνολική ενέργεια της κατασκευής σε έναν κύκλο της κίνησης είναι θετική και το φαινόμενο flutter μπορεί να εμφανιστεί. Συγκεκριμένα, βλέπουμε ότι η καμπτική παραμόρφωση διεγείρεται μέσω της στρεπτικής παραμόρφωσης.



Σχήμα 4.2 Αρμονική κίνηση αεροτομής με 2 βαθμούς ελευθερίας (α) Κάμψη/Στρέψη σε φάση (β) Κάμψη/Στρέψη εκτός φάσης κατά  $\frac{\pi}{2}$ .

Τα υπόλοιπα δυναμικά αεροελαστικά φαινόμενα παρουσιάζονται συνοπτικά. Buffeting είναι το φαινόμενο που οφείλεται στις δίνες που δημιουργούνται στον απόρους της αεροτομής κατά την διάρκεια λειτουργίας. Συνήθως υπολογίζεται με στοχαστικές ή πειραματικές μεθόδους. Ως αεροελαστική απόκριση σε δυναμικό φορτίο, αναφερόμαστε στην απόκριση παραμορφώσιμων κατασκευών στις μη μόνιμες αεροδυναμικές δυνάμεις, το οποίο μπορεί να οδηγήσει στο φαινόμενο flutter. Μια ακόμη κρίσιμη κατάσταση για την αεροελαστική απόκριση, η οποία μπορεί να παρατηρηθεί, είναι ο συντονισμός της κατασκευής με τα φορτία που ασκούνται σε αυτήν. Στο κεφάλαιο αυτό, ασχολούμαστε με αυτήν την πτυχή του προβλήματος. Όλα τα φαινόμενα που

παρουσιάστηκαν μέχρι το σημείο αυτό, μόλις περάσουμε τα κρίσιμα όριά τους, μας οδηγούν στην αστάθεια. Είναι πολύ σημαντικό να έχουμε πάντα στο μυαλό τον ακόλουθο διαχωρισμό ανάμεσα στα φαινόμενα που προκύπτουν :

«Συνήθως, η απόκριση συντονισμού, ιδανικά θεωρείται ως η διέγερση της κατασκευής σε μια ή περισσότερες φυσικές ιδιοσυχνότητές της, από μια εξωτερική πηγή ενέργειας, ενώ αντίθετα, μια ασταθής απόκριση θεωρείται ότι προκύπτει σε μια κατασκευή, από εσωτερική πηγή ενέργειας».

Γενικά, κάθε καινούργιος σχεδιασμός αεροσκάφους μπορεί να δημιουργήσει καινούργια αεροελαστικά φαινόμενα. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το φαινόμενο «whirl flutter», που εμφανίστηκε σε κατασκευές turboprop κινητήρων περίπου το 1950. Περισσότερα για το φαινόμενο αυτό θα παρουσιαστούν στο επόμενο κεφάλαιο, όπου πραγματοποιείται η παραμετρική μελέτη των ορίων ευστάθειας του «whirl flutter» για την δική μας προπέλα. Αναλυτική περιγραφή όλων των αεροελαστικών φαινομένων μπορεί να βρεθεί στις αναφορές [9], [11].

### 4.3 Περιστρεφόμενη Δοκός

Η διάσταση του μήκους για τα πτερύγια της προπέλας, είναι πολύ μεγαλύτερη έναντι των υπολοίπων διαστάσεων. Λόγω της διαμόρφωσης αυτής, μπορούμε αρχικά να απλοποιήσουμε το μοντέλο μας, θεωρώντας τα πτερύγια της προπέλας ως περιστρεφόμενες μονοδιάστατες δοκούς. Η απλοποίηση αυτή μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά που διέπουν μοντέλα σαν το δικό μας. Αυτή η απλοποίηση θα διευκολύνει την κατανόηση του πολυπλοκότερου προβλήματος της προπέλας στη συνέχεια. Έτσι, για την περιστρεφόμενη δοκό, μελετάμε τις καμπτικές παραμορφώσεις σε διευθύνσεις κάθετα και επάνω στο επίπεδο περιστροφής.

Η κύρια διαφορά των περιστρεφόμενων δοκών, έναντι των μη περιστρεφόμενων, είναι ότι λειτουργούν υπό την επίδραση ενός εφελκυστικού πεδίου δυνάμεων (φυγόκεντρος/κεντρομόλος), το οποίο εξαρτάται από το μήκος της δοκού, την ταχύτητα περιστροφής και την μάζα. Η φυγόκεντρος δύναμη, σε διανυσματική μορφή, μπορεί να γραφεί ως το γινόμενο της μάζας του σώματος επί την φυγόκεντρο (αντίθετη κεντρομόλου) επιτάχυνση :

$$\underline{f}_c = m \underline{a}_c , \quad \text{Κεντρομόλος Επιτάχυνση : } \underline{a}_c = -\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

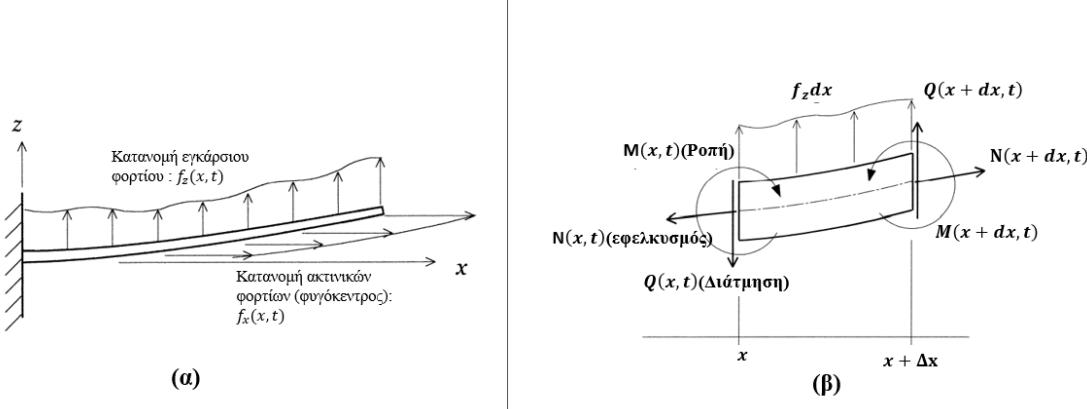
όπου  $\underline{r}$ ,  $\underline{\omega}$  η ακτινική απόσταση του σώματος από τον άξονα περιστροφής και η περιστροφική ταχύτητά του αντίστοιχα.

Για την δοκό μας, που περιστρέφεται ως προς τον z ( $\omega = \Omega \underline{e}_z$ ), η οποία κάμπτεται πάνω στο επίπεδο περιστροφής και κάθετα σε αυτό, το διάνυσμα θέσης τυχαίου σημείου στον χώρο θα έχει εξίσωση :  $\underline{r} = (x + u_x) \underline{e}_x + u_y \underline{e}_y + u_z \underline{e}_z$ , ως προς σύστημα συντεταγμένων δεμένο στην δοκό, με τον άξονα x να είναι ο διαμήκης άξονάς της. Οι ποσότητες  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  αναφέρονται στις παραμορφώσεις στις διευθύνσεις x,y,z αντίστοιχα. Για το παραπάνω διάνυσμα θεωρούμε ότι οι διαστάσεις στους y,z είναι πολύ μικρότερες σε σχέση με την x. Έτσι, με βάση την παραπάνω διανυσματική σχέση, η φυγόκεντρος δύναμη για το σημείο αυτό υπολογίζεται :

$$\underline{f}_c = m \Omega^2 \left( (x + u) \underline{e}_x + u_y \underline{e}_y \right)$$

Από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι παίρνουμε συνιστώσες μόνο στους άξονες που ορίζουν το επίπεδο περιστροφής.

Στο Σχήμα 4.3α απεικονίζεται μια περιστρεφόμενη δοκός σε κάμψη κάθετα στο επίπεδο περιστροφής, με κατανεμημένο αξονικό φορτίο  $f_x(x, t) = m\Omega^2(x + u_x)\underline{e}_x$ , το οποίο προκύπτει από την φυγόκεντρο δύναμη και έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη εφελκυστικών φορτίων N. Επίσης, διακρίνουμε και το κατανεμημένο εγκάρσιο εξωτερικό φορτίο  $f_z(x, t)$ . Η δοκός περιστρέφεται ως προς τον z άξονα. Στο σχήμα 4.3β βλέπουμε το απειροστό τμήμα δοκού, σε τυχαία θέση x και τα φορτία που ασκούνται σε αυτό.



Σχήμα 4.3 (α) Περιστρεφόμενη δοκός και κατανεμημένα φορτία (β) απειροστό τμήμα δοκού [6]

Λόγω μικρής διάστασης της δοκού στις διευθύνσεις y,z (συγκριτικά με την x), οι μετατοπίσεις αυτές είναι συναρτήσεις μόνο της απόστασης x ( $u_x(x, t), u_y(x, t), u_z(x, t)$ ). Μια απλοποιητική υπόθεση με μεγάλη σημασία, που εισάγουμε στο πρόβλημα, είναι οι μικρές παραμορφώσεις της δοκού. Σε περίπτωση που καταστρώναμε το πρόβλημα για μεγάλες παραμορφώσεις, θα είχαμε μη γραμμικούς όρους στις τελικές εξισώσεις κίνησης και σύζευξη των διαφορετικών προβλημάτων (Καμπτικό, Αξονικό κλπ.). Επίλυση του προβλήματος της δοκού για μεγάλες παραμορφώσεις μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [3]. Μπορεί βέβαια με την απλοποίηση αυτή να μειώνεται η ακρίβεια του μοντέλου μας, αλλά στο κεφάλαιο αυτό εμείς θέλουμε απλά να παρουσιάσουμε τις διαφοροποιήσεις που έχουν οι τελικές εξισώσεις περιστρεφόμενων δοκών σε σχέση με την κλασική δοκό.

Για την κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης, που περιγράφουν την περιστρεφόμενη δοκό, γίνονται οι εξής υποθέσεις :

- Ο διαμήκης άξονας O<sub>x</sub> της δοκού συνδέει τα γεωμετρικά κέντρα των διατομών της. Δηλαδή :

$$\int_A y dA = \int_A z dA = 0$$

Επίσης, οι εγκάρσιοι άξονες O<sub>y</sub> και O<sub>z</sub> είναι κύριοι άξονες της επιφανειακής αδράνειας, επομένως  $\int_A yz dA = 0$ .

- Υπόθεση Kirchhoff : Οι διατομές της δοκού που είναι κάθετες στον διαμήκη άξονα O<sub>x</sub> στην απαραμόρφωτη κατάσταση, παραμένουν επίπεδες και κάθετες στον παραμορφωμένο άξονα O<sub>x</sub>. Επιπλέον, παρουσιάζουν εγκάρσια μετατόπιση  $w(x, t)$ , που είναι μικρή σε σύγκριση με τις διαστάσεις της διατομής
- Το υλικό της δοκού είναι γραμμικά ελαστικό, δηλαδή υπακούει στον νόμο του Hooke.

Επιπλέον, θεωρούμε ότι το μέτρο ελαστικότητας και η διατομή της δοκού παραμένουν σταθερά σε όλο το μήκος της δοκού. Από την δεύτερη υπόθεση έχουμε ότι η διατμητική τροπή είναι μηδενική. Έτσι προκύπτει :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \Rightarrow u = u_o(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, t)$$

Επομένως για τις αξονικές τροπές έχουμε :  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_o - zw''$  (4.1). Γράφοντας τον νόμο του Hooke για την αξονική τάση στον x έχουμε :  $\sigma_x = E\varepsilon_x \stackrel{(4.1)}{=} \sigma_x = E(u'_o - zw'')$ . Οι τάσεις αυτές υπολογίζονται για την ακίνητη δοκό. Στην κατάσταση αυτή, δεν έχουμε ανάπτυξη του αδρανειακού φορτίου  $f_x(x, t)$ , με αποτέλεσμα τα αξονικά φορτία να είναι μηδενικά. Έτσι με χρήση του νόμου του Hooke έχουμε :

$$N = \int_A \sigma_x dA = E \int_A u'_o dA - E \int_A zw'' dA$$

Με βάση την 1<sup>η</sup> υπόθεση, το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται. Επιπλέον, λόγω μηδενικού αξονικού φορτίου, τελικά παίρνουμε  $u'_o = 0$ . Έτσι οι τάσεις στον x, υπολογίζονται από την σχέση:

$$\sigma_x = -Ezw'' \quad (4.2)$$

Η ροπή ως προς το κέντρο της διατομής της δοκού που προκύπτει από το άθροισμα των τάσεων  $\sigma_x$ , υπολογίζεται από την σχέση :

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA \stackrel{1^η υπόθεση και (4.2)}{=} M_y = -EIw''$$

όπου I η επιφανειακή ροπή αδράνειας της διατομής ως προς τον άξονα Oy :  $I_y = \int_A z^2 dA$ .

Για την περιστρεφόμενη τώρα δοκό, το αξονικό φορτίο που βλέπουμε στο σχήμα 4.1β, προκύπτει από την κατανομή του  $f_x(x, t)$ , που απεικονίζεται στο σχήμα 4.1α. Όπως αποδείξαμε παραπάνω, η συνιστώσα αυτή της φυγόκεντρου έχει εξίσωση  $f_x(x, t) = m\Omega^2(x + u_x)$ . Λόγω μικρών μετατοπίσεων, το αξονικό φορτίο προέρχεται από την συνιστώσα της φυγόκεντρου δύναμης στην x διεύθυνση. Επιπλέον, επειδή ( $x \gg u_x$ ), η μετατόπιση  $u_x$  θεωρείται αμελητέα στην παραπάνω έκφραση. Έτσι, το αξονικό φορτίο που ασκείται στο σώμα υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα :

$$N(x) = \Omega^2 \int_x^L m(x_1) dx_1 \stackrel{m(x_1)=\rho A x_1}{=} N(x) = \Omega^2 \rho A \int_x^L x_1 dx_1 \quad (4.3)$$

Τα όρια του ολοκληρώματος οφείλονται στο γεγονός ότι στο ελεύθερο άκρο της δοκού (x=L), το αξονικό φορτίο μηδενίζεται.

Με βάση το ΔΕΣ του σχήματος 4.3β, εφαρμόζουμε την συνθήκη ισορροπίας ως προς τον z άξονα και έτσι παίρνουμε :

$$Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t) + N(x + \Delta x, t) \frac{\partial w}{\partial x} - N(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} + f_z(x, t) \Delta x = (\rho A \Delta x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

Στην εξίσωση αυτή, οι όροι της δύναμης  $N \frac{\partial w}{\partial x}$  αποτελούν την κατακόρυφη συνιστώσα της φυγόκεντρης δύναμης, που αναπτύσσεται λόγω περιστροφής. Αναπτύσσοντας σε σειρά Taylor τους όρους  $Q(x + \Delta x, t)$  και  $N(x + \Delta x, t)$  έχουμε :

$$Q(x + \Delta x, t) = Q(x, t) + \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \Delta x + OAT(\Delta x^2)$$

$$\text{και } N(x + \Delta x, t) = N(x, t) + \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} \Delta x + OAT(\Delta x^2)$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων αυτών στην (4.4) και διαιρώντας με το  $\Delta x$ , έχουμε :

$$Q' + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f_z(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Εξισώνοντας τώρα τις ροπές στην γ διεύθυνση, έχουμε :  $\Sigma M_y = \Delta I_y \ddot{\varphi}$ , όπου φ η γωνία που σχηματίζει ο άξονας της δοκού με τον άξονα των x,

$$\tan(\varphi) = -w'(x, t) \Rightarrow \varphi \approx -w' \quad (4.6)$$

λόγω μικρών κλίσεων της δοκού. Επιπλέον, η μαζική ροπή αδράνειας του τμήματος της δοκού, μετά από ολοκλήρωση προκύπτει :

$$\Delta I_y = \rho I_y \Delta x$$

Έτσι, η εξίσωση ισορροπίας έρχεται στην μορφή :

$$M(x + \Delta x, t) - M(x, t) - Q(x + \Delta x, t) \frac{\Delta x}{2} - Q(x, t) \frac{\Delta x}{2} = \rho I_y \Delta x (-\ddot{w}')$$

Αναπτύσσοντας, όπως και πριν, τους όρους των φορτίσεων σε σειρά Taylor, διατηρώντας μέχρι 1<sup>ης</sup> τάξης όρους και με αντικατάσταση των εξισώσεων που προκύπτουν στην τελευταία εξίσωση, παίρνουμε :

$$Q = \frac{\partial M}{\partial x} = -(EIw'')' \quad (4.7)$$

Αντικατάσταση της (4.7) στην (4.5) μας δίνει :

$$-(EIw'')' + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + f_z(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (EIw'')'' - \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial w}{\partial x} \right) = f_z(x, t)$$

$$\Rightarrow \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (EIw'')'' - \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho A \frac{\partial w}{\partial x} \left( \int_x^L x_1 dx_1 \right) \right) = f_z(x, t) \quad (4.8)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια μερική διαφορική εξίσωση 4<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τον χώρο και 2<sup>ου</sup> βαθμού ως προς τον χρόνο και για την επίλυσή της, απαιτεί 2 αρχικές και 4 συνοριακές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες εξαρτώνται από τον τρόπο έδρασης της δοκού.

Για την εξίσωση (4.8) καταστρώνουμε το ιδιοπρόβλημα, αρχικά χωρίζοντας τις μεταβλητές ως  $w(x, t) = X(x)T(t)$  και στη συνέχεια αποδεικνύοντας την ιδιότητα ορθογωνικότητας των ιδιομορφών  $X(x)$ . Η ιδιότητα αυτή διατυπώνεται ως :

$$\int_0^L mX_r(x)X_s(x)dx = \delta_{rs} \quad (\textbf{4.9})$$

Αφού καταστρώσουμε το ιδιοπρόβλημα, γνωρίζουμε ότι ,σύμφωνα με το θεώρημα ανάπτυξης των ιδιομορφών, κάθε συνάρτηση  $f(x)$  που ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες του συστήματος, μπορεί να εκφρασθεί ως μια απόλυτα και ομοιόμορφα συγκλίνουσα απειροσειρά της μορφής :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \text{ óπου } X_n(x) \text{ οι ιδιομορφές}$$

Για τον λόγο αυτό η απόκριση της δοκού μπορεί να γραφεί ως :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t)X_n(x) \quad (\textbf{4.10})$$

όπου, με χρήση των συνθηκών ορθογωνικότητας, οι συντελεστές της απειροσειράς προκύπτουν από την εξίσωση :

$$\tau_n(t) = \int_0^L \rho A X_n(x) w(x, t) dx \quad (\textbf{4.11})$$

Τώρα με αντικατάσταση της (4.10) στην εξίσωση κίνησης (4.8), πολλαπλασιασμό της εξίσωσης με την ιδιομορφή  $X_n$ , ολοκλήρωση της εξίσωσης που προκύπτει σε όλο το μήκος της δοκού και εφαρμογή της σχέσης (4.11), μετά από πράξεις έχουμε :

$$\begin{aligned} \rho A \ddot{x}_n(t) \int_0^L X_n^2(x) dx + & \left\{ EI \int_0^L (X_n''(x))^2 dx + \Omega^2 \rho A \int_0^L \left[ (X_n'(x))^2 \int_x^L x_1 dx_1 \right] dx \right\} \tau_n(t) \\ & = \int_0^L X_n(x) f_z(x, t) dx \quad (\textbf{4.12}) \end{aligned}$$

Με χρήση των ορισμών :

$$\text{Μάζα δοκού : } M_n = \rho A \int_0^L X_n^2(x) dx ,$$

$$K_{Sn} = EI \int_0^L (X_n''(x))^2 dx$$

$$K_{CF_n} = \rho A \int_0^L \left[ (X_n'(x))^2 \int_x^L x_1 dx_1 \right] dx , \quad \varepsilon_n(t) = \int_0^L X_n(x) f_z(x, t) dx$$

H (4.12) έρχεται στην συμπαγή μορφή της εξίσωσης κίνησης για την δοκό:

$$M_n \ddot{\tau}_n(t) + [K_{S_n} + \Omega^2 K_{CF_n}] \tau_n(t) = \varepsilon_n(t) \quad (4.13)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, οι όροι  $K_{S_n}, K_{CF_n}$  αποτελούν την γενικευμένη στιβαρότητα της κατασκευής και την γενικευμένη φυγόκεντρη στιβαρότητα. Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι κανένας εκ των 2 όρων στιβαρότητας, αν εφαρμοσθούν μεμονωμένα, δεν ικανοποιεί τις συνθήκες ορθογωνικότητας. Αλλά, αν εφαρμοσθούν μαζί σε συνδυασμό με κατάλληλη τιμή της γωνιακής ταχύτητας  $\Omega$ , τότε οι συνθήκες ορθογωνικότητας ικανοποιούνται. Το σύστημα των εξισώσεων (4.13) αποτελεί ένα σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων 2<sup>nd</sup> τάξης. Στο σημείο αυτό, δεν μας ενδιαφέρει η επίλυση του συστήματος, αλλά η παρατήρηση των χαρακτηριστικών αυτού, σε κατάσταση ελεύθερης ταλάντωσης.

Από την εξίσωση (4.13) μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η  $\omega_n$  ιδιοσυχνότητα της n ιδιομορφής του συστήματος προκύπτει, αφού πρώτα διαιρέσουμε με την μάζα  $M_n$ . Έτσι έχουμε :

$$\omega_n^2 = \left[ \frac{K_{S_n}}{M_n} + \Omega^2 \frac{K_{CF_n}}{M_n} \right] = \omega_{NR}^2 + \Omega^2 K_{w_n} \quad (4.14)$$

Ο όρος  $\omega_{NR_n}$  αποτελεί την n-ιοστή φυσική ιδιοσυχνότητα του μη περιστρεφόμενου συστήματος, ενώ ο όρος  $K_{w_n}$  είναι ένας πρόσθετος όρος, που λαμβάνει υπόψη του την αύξηση της στιβαρότητας λόγω της φυγόκεντρου δύναμης (γυροσκοπική σκλήρυνση ή centrifugal stiffening) και ονομάζεται συχνά στην βιβλιογραφία ως «συντελεστής του Southwell». Ο συντελεστής αυτός αποτελεί ένα μέτρο, για το πόσο γρήγορα η ιδιοσυχνότητα της κατασκευής αυξάνεται με την συχνότητα περιστροφής της προπέλας. Μια πιο αναλυτική διαδικασία κατάστρωσης των εξισώσεων του καμπτικού προβλήματος της απλής δοκού, μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [2], ενώ για το πρόβλημα της περιστρεφόμενης δοκού στην αναφορά [6].

Έτσι, καταλήξαμε στο σημαντικότερο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Ενώ γενικά γνωρίζουμε ότι οι ιδιοσυχνότητες εξαρτώνται μόνο από τα χαρακτηριστικά του ταλαντωτή, η παραπάνω εξίσωση μας δείχνει ότι επηρεάζονται επίσης και από την περιστροφική ταχύτητα της κατασκευής. Ακόμα, βλέπουμε ότι λόγω της φυγόκεντρου δύναμης, έχουμε αύξηση της στιβαρότητας της κατασκευής μας σε διεύθυνση κάθετα στο επίπεδο περιστροφής.

Η εξίσωση (4.8) θεωρείται ως η εξίσωση κάμψης κάθετα στο επίπεδο περιστροφής (flapwise bending). Με την ίδια διαδικασία, που ακολουθήσαμε για την παραγωγή της εξίσωσης αυτής, παράγουμε και την εξίσωση για κάμψη στο επίπεδο περιστροφής (edgewise bending). Η διαφορά ανάμεσα στις δύο εξισώσεις προκύπτει από την συνιστώσα του αδρανειακού φυγόκεντρου φορτίου στην διεύθυνση y,  $f_{cy}(x, t) = m\Omega^2 u_y$ . Η συνιστώσα αυτή προέρχεται από την παραμόρφωση  $v(x, t)$  στον y. Έτσι μπορεί να γραφεί στην μορφή  $f_{cy}(x, t) = m\Omega^2 \frac{\partial v}{\partial x}(x, t)$ . Με προσθήκη του όρου αυτού και αλλαγή της μετατόπισης w με την μετατόπιση v, έχουμε :

$$\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (EIv'')'' - \Omega^2 \rho A \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \left( \int_x^L x dx \right) \right) - \Omega^2 m \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) = f_y(x, t) \quad (4.15)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία, που εφαρμόσαμε στην εξίσωση (4.8), καταλήγουμε σε μια έκφραση για τις ιδιοσυχνότητες της κατασκευής :

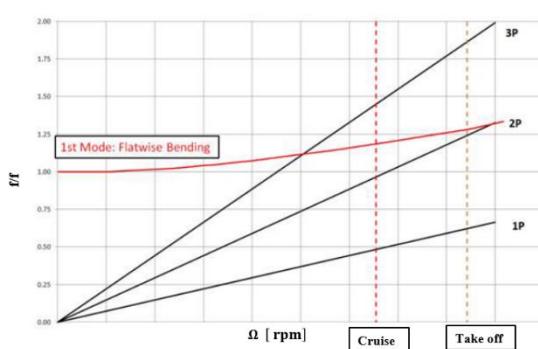
$$\omega_n^2 = \omega_{NR_n}^2 + \Omega^2 K_{v_n} \quad \text{όπου } K_{v_n} = K_{w_n} - 1$$

όπου  $\omega_{NR_n}$  η φυσική ιδιοσυχνότητα του μη περιστρεφόμενου συστήματος και  $K_{v_n}$  ο παράγοντας αύξησης της στιβαρότητας λόγω φυγόκεντρων δυνάμεων. Βλέπουμε ότι η στιβαρότητα αυξάνεται λόγω περιστροφής και στην διεύθυνση γ στο επίπεδο περιστροφής (edgewise). Βέβαια, στην περίπτωση αυτή, ο συντελεστής είναι μικρότερος από τον προηγούμενο κατά μια μονάδα.

Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, η συμπεριφορά αυτή κατά την δυναμική ανάλυση κατασκευών θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη, με στόχο την αποφυγή λειτουργίας της κατασκευής, σε συνθήκες τέτοιες, ώστε να υπάρχει ο κίνδυνος συντονισμού της κατασκευής με το φορτίο. Ένας τρόπος για να παρατηρήσουμε την συσχέτιση των συχνοτήτων των αρμονικών φορτίων σε περιστρεφόμενα σώματα και των ιδιοσυχνοτήτων της κατασκευής, είναι το διάγραμμα Campbell, που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

#### 4.3.1 Διάγραμμα Campbell

Ένα διάγραμμα τέτοιου είδους αναπαριστά την απόκριση συχνότητας ενός συστήματος ως συνάρτηση της ταλαντωτικής του συμπεριφοράς. Συγκεκριμένα, παρουσιάζει την μεταβολή των ιδιοσυχνοτήτων της κάθε ιδιομορφής για την κατασκευή, συναρτήσει της περιστροφικής ταχύτητας της κατασκευής. Το διάγραμμα του Campbell βρίσκει εφαρμογές σε κατασκευές που περιστρέφονται με μεγάλες ταχύτητες όπως ρότορες ελικοπτέρων, στροβιλομηχανές, κινητήρες turboprop κλπ.



Σχήμα 4.4 Διάγραμμα του Campbell

πληροφορίες του διαγράμματος θα πρέπει είτε να αποφύγουμε την λειτουργία στα εύρη των τιμών αυτών, είτε κατά τον σχεδιασμό, να διαφοροποιήσουμε τα χαρακτηριστικά της κατασκευής μας, ώστε να αποφύγουμε αυτόν τον συντονισμό. Συνήθως, σε περιστρεφόμενες κατασκευές, στις οποίες υπάρχει ο κίνδυνος συντονισμού, δίνονται επιτρεπτά όρια, τα οποία δεν πρέπει να πλησιάζουν οι περιστροφικές ταχύτητες λειτουργίας της προπέλας.

Έχοντας περιγράψει το απλοποιημένο μοντέλο και κατανοήσει τα φαινόμενα που αναπτύσσονται σε περιστρεφόμενες κατασκευές, προχωράμε με την κατάστρωση των εξισώσεων για την προπέλα μας.

Ένα τυπικό διάγραμμα τέτοιου είδους παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.4. Στον άξονα των τεταγμένων βρίσκονται οι κανονικοποιημένες τιμές της συχνότητας και στον άξονα των τετμημένων οι περιστροφικές ταχύτητες της προπέλας. Στο διάγραμμα αυτό απεικονίζεται η συσχέτιση μόνο της 1<sup>ης</sup> ιδιοσυχνότητας, μιας και οι υπόλοιπες έχουν τιμές τέτοιες που ξεφεύγουν από τα όρια του σχήματος. Μπορούμε να δούμε ότι η 2P αρμονική συνιστώσα, για ταχύτητες περιστροφής λίγο μεγαλύτερες από την ταχύτητα απογείωσης, ισούται με την συχνότητα της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής. Επομένως, με τις

πληροφορίες του διαγράμματος θα πρέπει είτε να αποφύγουμε την λειτουργία στα εύρη των τιμών αυτών, είτε κατά τον σχεδιασμό, να διαφοροποιήσουμε τα χαρακτηριστικά της κατασκευής μας, ώστε να αποφύγουμε αυτόν τον συντονισμό. Συνήθως, σε περιστρεφόμενες κατασκευές, στις οποίες υπάρχει ο κίνδυνος συντονισμού, δίνονται επιτρεπτά όρια, τα οποία δεν πρέπει να πλησιάζουν οι περιστροφικές ταχύτητες λειτουργίας της προπέλας.

## 4.4 Κατάστρωση Εξισώσεων

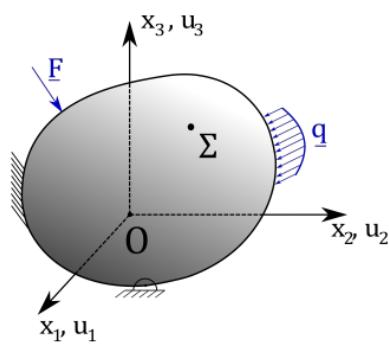
Για την κατάστρωση των εξισώσεων, έχουμε το σύστημα του ρευστού, άρα χρειαζόμαστε τις εξισώσεις που διέπουν το ροϊκό μας πεδίο. Επίσης, έχουμε το σύστημα της κατασκευής, άρα θέλουμε και τις εξισώσεις που εκφράζουν τις μεταβλητές για την παραμορφώσιμη κατασκευή μας. Στην ενότητα αυτή γίνεται η κατάστρωση των 2 αυτών συστημάτων.

Γνωρίζουμε ότι η απόκριση ενός συνεχούς μέσου δίνεται στην γενική περίπτωση από την λόγη της μερικής διαφορικής εξίσωσης :

$$Lu(\underline{r}, t) + m(\underline{r})\ddot{u}(\underline{r}, t) = f(\underline{r}, t) \quad , \underline{r} \in S \quad (4.16)$$

όπου u η γενικευμένη παραμόρφωση στο σημείο του σώματος με διάνυσμα θέσης  $\underline{r}$ , m η βαθμωτή συνάρτηση της κατανομής μάζας, L ο τελεστής στιβαρότητας και f η εξωτερική φόρτιση. Η αναλυτική επίλυση της (4.16) είναι εφικτή μόνο για απλές γεωμετρίες και απλές συνοριακές συνθήκες, επομένως επιλύεται αριθμητικά. Για την μετατροπή της εξίσωσης αυτής σε μορφή, η οποία να είναι επιλύσιμη, χρειάζεται να εφαρμόσουμε κάποια διαδικασία γεωμετρικής διακριτοποίησης. Αυτό επιτυγχάνεται με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Με χρήση της μεθόδου αυτής και στη συνέχεια με εφαρμογή της μεθόδου του Galerkin παράγουμε τις εξισώσεις κίνησης, που επιλύουμε για τον υπολογισμό της συμπεριφοράς της κατασκευής μας. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται αρχικά η τρισδιάστατη θεωρία της ελαστικότητας και καταστρώνεται το σύστημα των εξισώσεων στην μορφή (4.16) για περιστρεφόμενα σώματα. Αφού γίνει αυτό, παράγουμε με χρήση των παραπάνω μεθόδων τις εξισώσεις κίνησης του μοντέλου. Οι αρχές της τρισδιάστατης ελαστικότητας και των αδρανειακών χαρακτηριστικών, που θα χρησιμοποιηθούν για την κατάστρωση των εξισώσεων, βασίζονται στις αναφορές [1], [2], [4], [5].

### 4.4.1 Τρισδιάστατη θεωρία ελαστικότητας για Περιστρεφόμενες κατασκευές



Σχήμα 4.5 Παραμορφώσιμο στερεό τυχαίας γεωμετρίας

Κατά την κατάστρωση των εξισώσεων, οι εξισώσεις που παράγουμε, αναφέρονται στο περιστρεφόμενο σύστημα που βρίσκεται δεμένο στο σώμα μας. Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζεται ένα παραμορφώσιμο στερεό τυχαίας γεωμετρίας και τυχαίου προσανατολισμού, με εφαρμοζόμενη εξωτερική δύναμη και κατανεμημένο φορτίο. Οι μετατοπίσεις σε κάθε σημείο του σώματος, έχουν χρονική και χωρική εξάρτηση  $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ . Για το σώμα αυτό ορίζονται οι ποσότητες των τροπών  $\varepsilon_{ij}$  και των τάσεων  $\sigma_{ij}$ . Στόχος μας είναι ο υπολογισμός των τανυστών για τις ποσότητες αυτές. Οι τανυστές ορίζονται ως :

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Οι όροι που βρίσκονται μέσα στα παραπάνω μητρώα, για μικρές παραμορφώσεις και γραμμικά ελαστικό υλικό, υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$$\text{Ορθές τροπές : } \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

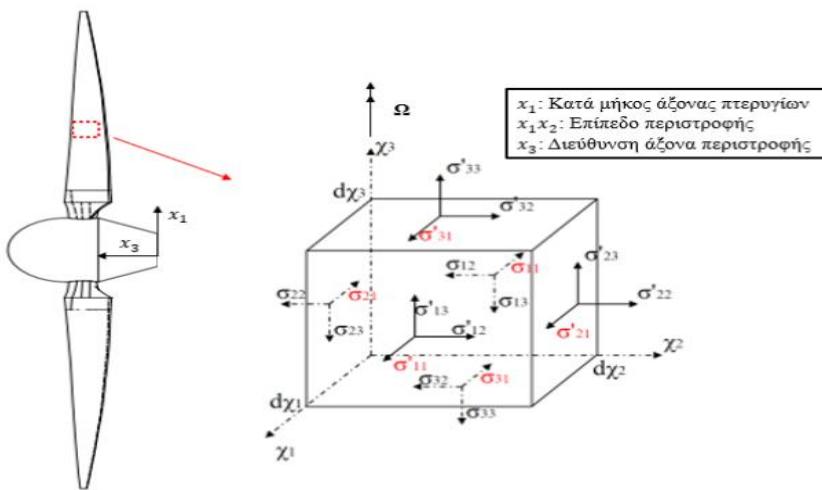
$$\text{Διατμητικές τροπές : } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ ή } \gamma_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 2\varepsilon_{ij}$$

Ορθές τάσεις :  $\sigma_{ii} = \frac{F_i}{A_i}$ , όπου  $F_i$  η δύναμη στην διεύθυνση της τάσης και  $A_i$  η επιφάνεια με κάθετο διάνυσμα στην διεύθυνση της τάσης.

Διατμητικές τάσεις :  $\tau_{ij} = \frac{F_j}{A_i}$ , όπου  $\tau_{ij}$  η διατμητική τάση με τον 1<sup>o</sup> δείκτη να συμβολίζει την διεύθυνση του κάθετου διανύσματος του επιπέδου, στο οποίο εφαρμόζεται, και τον 2<sup>o</sup> δείκτη την διεύθυνση του άξονα, στον οποίο είναι παράλληλη η τάση. Μια σημαντική ιδιότητα του τανυστή των τροπών είναι ότι, για μικρές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις, είναι συμμετρικός :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ji} \quad (4.17).$$

Για την παραγωγή των εξισώσεων του παραμορφώσιμου σώματος, εφαρμόζουμε τις εξισώσεις δυναμικής ισορροπίας στον πεπερασμένο κύβο, που περιστρέφεται ως προς τον άξονα  $x_3$  και απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6. Στο σχήμα αυτό, διακρίνουμε όλες τις αναπτυσσόμενες τάσεις στον πεπερασμένο κύβο. Επιπλέον, επειδή το εφελκυστικό φορτίο που αναπτύσσεται λόγω της φυγόκεντρου δύναμης είναι αδρανειακό φορτίο, περιμένουμε να προκύψει από την επιτάχυνση του απειροστού κύβου και όχι ως κάποιας μορφής εφαρμοζόμενης δύναμης. Για τον λόγο αυτό δεν βλέπουμε τις δυνάμεις αυτές στο σχήμα 4.6.



Σχήμα 4. 6 Απειροστός κύβος και ασκούμενες τάσεις.

Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή των εξισώσεων κίνησης για τις 3 διευθύνσεις του παραπάνω σχήματος, πρέπει να ορίσουμε την επιτάχυνση του κύβου. Συμβολίζουμε τις παραμορφώσεις στις διευθύνσεις  $x_1, x_2, x_3$  ως  $u_1, u_2, u_3$  αντίστοιχα. Η επιτάχυνση τυχαίου σημείου της κατασκευής για μηδενική γωνιακή επιτάχυνση ( $\Omega = \text{σταθερό}$ ), εκφρασμένη ως προς το αδρανειακό σύστημα με βάση την αναφορά [1], υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$\underline{a} = \underline{a}_t + \underline{a}_c$$

όπου  $\underline{a}_t$  η μεταφορική συνιστώσα της επιτάχυνσης ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα και  $\underline{a}_c$  η κεντρομόλος επιτάχυνση. Επειδή η κατασκευή περιστρέφεται μόνο και δεν μεταφέρεται, στην μεταφορική συνιστώσα εισάγονται μόνο οι όροι των μετατοπίσεων λόγω παραμόρφωσης στις αντίστοιχες διευθύνσεις. Ενώ, αντίθετα, για την κεντρομόλο επιτάχυνση λαμβάνουμε υπόψη τόσο τις μετατοπίσεις όσο και την απόσταση του σημείου από το σημείο περιστροφής.

Έτσι έχουμε :

$$\underline{a}_t = (\ddot{u}_1 \underline{e}_{x_1} + \ddot{u}_2 \underline{e}_{x_2} + \ddot{u}_3 \underline{e}_{x_3})$$

$$\underline{a}_c = -\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r})$$

Το αρνητικό πρόσημο στην επιτάχυνση  $\underline{a}_c$  οφείλεται στην φορά κατά την οποία ασκείται η φυγόκεντρος δύναμη. Αν καταστρώναμε τις εξισώσεις με βάση την κεντρομόλο και όχι την φυγόκεντρο, το πρόσημο αυτό θα ήταν θετικό. Με το  $\underline{r} = (x_1 + u_1) \underline{e}_{x_1} + (x_2 + u_2) \underline{e}_{x_2} + (x_3 + u_3) \underline{e}_{x_3}$  και το  $\underline{\omega} = \Omega \underline{e}_z$  υπολογίζουμε :

$$\begin{aligned} \underline{a}_c &= -(\Omega \underline{e}_{x_3}) \times ((\Omega \underline{e}_{x_3}) \times ((x_1 + u_1) \underline{e}_{x_1} + (x_2 + u_2) \underline{e}_{x_2} + (x_3 + u_3) \underline{e}_{x_3})) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{a}_c = -(\Omega \underline{e}_{x_3}) \times (\Omega(x_1 + u_1) \underline{e}_{x_1} - \Omega(x_2 + u_2) \underline{e}_{x_1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{a}_c = \Omega^2 ((x_1 + u_1) \underline{e}_{x_1} + (x_2 + u_2) \underline{e}_{x_2}) \end{aligned}$$

Έτσι η συνολική επιτάχυνση για τον απειροστό όγκο μπορεί να γραφεί στην μορφή :

$$\underline{a} = (\ddot{u}_1 + \Omega^2(x_1 + u_1)) \underline{e}_x + (\ddot{u}_2 + \Omega^2(x_2 + u_2)) \underline{e}_y + (\ddot{u}_3) \underline{e}_z$$

Τελικά οι συνιστώσες της επιτάχυνσης στις 3 διευθύνσεις προκύπτουν :

$$a_{x_1} = \ddot{u}_1 + \Omega^2(x_1 + u_1)$$

$$a_{x_2} = \ddot{u}_2 + \Omega^2(x_2 + u_2)$$

$$a_{x_3} = \ddot{u}_3$$

Εφαρμόζουμε τις εξισώσεις κίνησης ως προς τον  $x_1$  άξονα :

$$\begin{aligned} \Sigma F_1 &= ma_{x_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\sigma'_{11} - \sigma_{11})dx_2 dx_3 + (\sigma'_{21} - \sigma_{21})dx_1 dx_3 + (\sigma'_{31} - \sigma_{31})dx_1 dx_2 + (f_1)dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \rho \underbrace{\frac{dV}{dx_1 dx_2 dx_3}}_{O.A.T} (\ddot{u}_1 + \Omega^2(x_1 + u_1)) \quad (4.18) \end{aligned}$$

Όμως :  $\sigma'_{11} = \sigma_{11}(x + dx_1) \xrightarrow{Taylor} \sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma_{11}}{\partial x_1^2} dx_1^2}_{O.A.T} + \dots \Rightarrow (\sigma'_{11} - \sigma_{11}) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1$

Έτσι, η (4.18) γράφεται :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 = \rho \ddot{u}_1 + \rho \Omega^2(x_1 + u_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 - \rho \Omega^2 u_1 = \rho \ddot{u}_1 + \rho \Omega^2 x_1 \quad (4.19\alpha)$$

όπου ο όρος  $f_1$  περιλαμβάνει τις εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στην διεύθυνση  $x_1$ , και τις βαρυτικές δυνάμεις. Με την ίδια διαδικασία προκύπτουν και οι εξισώσεις στις υπόλοιπες διευθύνσεις :

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 - \rho \Omega^2 u_2 = \rho \ddot{u}_2 + \rho \Omega^2 x_2 \quad (4.19\beta)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (4.19\gamma)$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας των ροπών, ως προς το κέντρο βάρους του κύβου ( $I_G \approx 0$ ) προκύπτει η σχέση  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  (4.20), η οποία μας δείχνει την συμμετρία του τανυστή των τάσεων.

Από τον καταστατικό νόμο του Hooke, παίρνουμε την σχέση ανάμεσα στις τροπές και τις τάσεις ως :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

όπου το μητρώο  $C$  είναι τανυστής 4<sup>ης</sup> τάξης και αποτελείται από 81 σταθερές. Εφαρμογή της συμμετρίας τάσεων και τροπών, και, επειδή το υλικό μας είναι ισότροπο, ο αριθμός των ανεξάρτητων σταθερών μειώνεται σε 2. Οι σταθερές αυτές είναι ο λόγος Poisson  $\nu$ , και το μέτρο ελαστικότητας  $E$ . Τα ισότροπα υλικά έχουν τις ίδιες μηχανικές ιδιότητες προς όλες τις διευθύνσεις για κάθε σημείο τους. Κάθε επίπεδό τους είναι και επίπεδο συμμετρίας και κάθε άξονάς τους είναι και άξονας συμμετρίας .

Συγκεντρωτικά, γράφουμε το σύστημα των εξισώσεων, το οποίο περιγράφει τις μεταβλητές για ένα περιστρεφόμενο παραμορφώσιμο σώμα :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + f_1 - \rho \Omega^2 u_1 = \rho \ddot{u}_1 + \rho \Omega^2 x_1 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 - \rho \Omega^2 u_2 = \rho \ddot{u}_2 + \rho \Omega^2 x_2 \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho \ddot{u}_3 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \varepsilon_{ji} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \end{array} \right. \quad (II)$$

#### 4.4.2 Εξισώσεις Προπέλας

Ορίζοντας το μητρώο των διαφορικών τελεστών  $L$ , τα διανύσματα  $\underline{u}, \underline{\varepsilon}, \underline{\sigma}, \underline{f}, \underline{f_c}$  (ψυγόκεντρος) και αλλάζοντας τους συμβολισμούς για τους άξονες από  $(x_1, x_2, x_3)$  σε  $(x, y, z)$  αντίστοιχα, έχουμε:

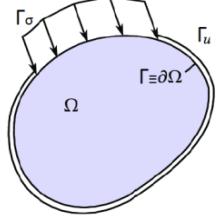
$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \end{bmatrix}, \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix}, f_{c_{in}} = -\rho \Omega^2 \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{bmatrix}, f_{c_{ex}} = \rho \Omega^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το σύστημα (II) μπορεί να γραφεί στην συμπαγή μορφή :

$$\begin{cases} L^T \underline{\sigma} + f + f_{c_{in}} = \rho \ddot{u}_i + f_{c_{ex}} & (4.21) \\ \underline{\varepsilon} = Lu & (4.22) \\ \underline{\sigma} = C\underline{\varepsilon} & (4.23) \end{cases} \quad (III)$$

Η πρώτη εξίσωση του συστήματος (II) εκφράζει τις εξισώσεις κίνησης του πεπερασμένου στοιχείου και συνοδεύεται από ένα σύνολο συνοριακών και αρχικών συνθηκών, στην γενική τους μορφή :

$$\begin{cases} \underline{u}|_{\Gamma_u} = \hat{u} \\ \underline{\sigma}|_{\Gamma_\sigma} \hat{n} = \hat{t} \end{cases} \quad (4.24)$$



Και

$$\begin{cases} \underline{u}(\underline{r}, 0) = \underline{u}_0(\underline{r}) \\ \dot{\underline{u}}(\underline{r}, 0) = \underline{v}_0(\underline{r}) \end{cases} \quad (4.25)$$

όπου  $\Gamma_u$  και  $\Gamma_\sigma$ , οι διαμερίσεις της εξωτερικής επιφάνειας σε περιοχές με γνωστές μετατοπίσεις και γνωστά εξωτερικά φορτία.

Το σύστημα (III) αποτελεί ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, ως προς τον χώρο και τον χρόνο, που εκφράζει όλες τις μεταβλητές για το σώμα μας. Η σχέση (4.21) αποτελεί τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος.

### Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Η λογική πίσω από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι αρχικά η γεωμετρική διακριτοποίηση του σώματός μας, σε στοιχεία προκαθορισμένης γεωμετρίας και η έκφραση των μετατοπίσεων εσωτερικά του κάθε στοιχείου (έστω  $\underline{u}(\underline{r}, t)$ ), με βάση τις επικόμβιες τιμές των μεταβλητών αυτών, όπου  $\underline{r} = (x, y, z)$ . Ο κάθε κόμβος του πλέγματος (σε 3D προβλήματα) έχει 6 βαθμούς ελευθερίας, εκ των οποίων οι 3 είναι περιστροφικοί και οι 3 μεταφορικοί. Η συσχέτιση των επικόμβιων τιμών με τις κατανομές των μεταβλητών εσωτερικά των στοιχείων, γίνεται με την χρήση προεπιλεγμένων συναρτήσεων, που ονομάζονται συναρτήσεις μορφής  $N_i(\underline{r})$ . Η εξίσωση υπολογισμού των μετατοπίσεων είναι :

$$\underline{u}(\underline{r}, t) \approx \sum_{i=1}^n N_i(\underline{r}) \underline{u}_i(t) = N(\underline{r}) \hat{\underline{u}}(t) \quad (4.26)$$

όπου  $\hat{\underline{u}}(t)$  οι τιμές των μετατοπίσεων στους κόμβους. Οι τιμές για τις μετατοπίσεις  $\underline{u}(\underline{r}, t)$ , που υπολογίζουμε, οφείλουν να ικανοποιούν τις εξισώσεις του συστήματος (III). Μια βασική ερώτηση που προκύπτει είναι, με τι είδους στοιχεία θα διακριτοποιήσουμε και ποιες είναι οι εκφράσεις των συναρτήσεων  $N_i(\underline{r})$ .

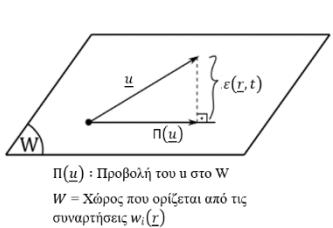
Για τρισδιάστατες γεωμετρίες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολλά διαφορετικά στοιχεία (τετράεδρα, εξάεδρα κλπ.). Το κάθε στοιχείο έχει συγκεκριμένα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα έναντι των υπολοίπων. Τα στοιχεία που χρησιμοποιούμε εμείς θα παρουσιαστούν στη ενότητα της διακριτοποίησης. Επιπλέον, οι συναρτήσεις μορφής εξαρτώνται από τον αριθμό των κόμβων και το είδος του προβλήματος (2D, 3D). Για παράδειγμα, μπορούμε για το τετράεδρο να έχουμε κόμβους μόνο στα σημεία ένωσης των ακμών του ή και στο μέσο αυτών. Αύξηση του αριθμού των κόμβων αυξάνει την πολυπλοκότητα αλλά και την ακρίβεια της λύσης (για σωστή διατύπωση των  $N$ ).

## Galerkin

Επειδή η εξίσωση (4.26) αποτελεί μια προσεγγιστική εξίσωση για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων, μετά την αντικατάστασή της στην γενική εξίσωση του συνεχούς μέσου (4.16) προκύπτει ένα σφάλμα στην μορφή :

$$Lu(\underline{r}, t) + m(\underline{r})\ddot{u}(\underline{r}, t) - f(\underline{r}, t) = \varepsilon(\underline{r}, t)$$

Η απαίτηση της μεθόδου του Galerkin είναι το σφάλμα  $\varepsilon(\underline{r}, t)$  να ικανοποιεί τις συνθήκες :



Σχήμα 4.7 Γεωμετρική αναπαράσταση Galerkin

$$\int_S \varepsilon(\underline{r}, t) w_i(\underline{r}) dS = 0$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα οι συναρτήσεις που πολλαπλασιάζονται με το σφάλμα συμβολίζονται με  $w$  και ονομάζονται συναρτήσεις στάθμισης. Στη συνέχεια, όταν οι συναρτήσεις αυτές θεωρήσουμε ότι είναι οι συναρτήσεις μορφής των πεπερασμένων στοιχείων, τότε τις συμβολίζουμε με  $N$ . Το παραπάνω ολοκλήρωμα σημαίνει ότι το σφάλμα πρέπει να είναι ορθογώνιο προς όλες τις συναρτήσεις  $w_i(\underline{r})$ . Η υπόθεση για το

ορθογώνιο σφάλμα προς τις συναρτήσεις μορφής, επιλέγεται, διότι, αν σκεφτούμε ένα οριζόντιο επίπεδο και ένα σημείο εκτός του επιπέδου αυτού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7, τότε η μικρότερη δυνατή απόσταση του σημείου αυτού ως προς το επίπεδο που ορίζεται από τα διανύσματα  $w_i(\underline{r})$ , είναι η κάθετη. Οι συναρτήσεις μορφής οφείλουν να είναι παραδεκτές, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι πρέπει να ικανοποιούν όλες τις γεωμετρικές συνθήκες του συστήματος.

Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου του Galerkin, με βάση το θεώρημα απόκλισης έχουμε:

$$\int_{\Omega} \underline{u} \nabla \underline{v} d\Omega = \int_{\Omega} \underline{u} \underline{v} \hat{\underline{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \underline{u} \underline{v} d\Omega \quad (4.27)$$

όπου  $\Omega$  ο όγκος ολοκλήρωσης,  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$  είναι το σύνορο του  $\Omega$  και  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα του συνόρου με κατεύθυνση προς τα έξω.

Πολλαπλασιάζοντας τώρα την εξίσωση κίνησης (4.21) με την συνάρτηση στάθμισης και με ολοκλήρωση για όλο τον όγκο του σώματος, μας δίνει :

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\Omega} \underline{w}^T (-L^T \underline{\sigma} - \underline{f} - \underline{f}_{cin} + \rho \underline{\ddot{u}}_i + \underline{f}_{cex}) d\Omega = 0}_{\text{στάθμισμένο υπόλοιπο}} \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} \underline{w}^T (\rho \underline{\ddot{u}}_i) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{w}^T (L^T \underline{\sigma}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{w}^T (\underline{f}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{w}^T (\underline{f}_{cin}) d\Omega + \int_{\Omega} \underline{w}^T (\underline{f}_{cex}) d\Omega = 0 \xrightarrow{(4.27)} \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} \underline{w}^T (\rho \underline{\ddot{u}}_i) d\Omega + \int_{\Omega} (L\underline{w})^T \underline{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{w}^T \underline{\sigma} \hat{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \underline{w}^T \underline{f} d\Omega - \int_{\Omega} \underline{w}^T \underline{f}_{cin} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{w}^T (\underline{f}_{cex}) d\Omega = 0 \xrightarrow{(4.23)} \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} \underline{w}^T (\rho \underline{\ddot{u}}_i) d\Omega + \int_{\Omega} (L\underline{w})^T C\underline{\varepsilon} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{w}^T \underline{\sigma} \hat{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \underline{w}^T \underline{f} d\Omega + \rho \Omega^2 \int_{\Omega} \underline{w}^T N \hat{u} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{w}^T (\underline{f}_{cex}) d\Omega \\
& = 0 \xrightarrow{(4.22), (4.26)} \\
& \Rightarrow \int_{\Omega} \underline{w}^T (\rho N \hat{u}) d\Omega + \int_{\Omega} (L\underline{w})^T CLN \hat{u} d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \underline{w}^T \underline{\sigma} \hat{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \underline{w}^T \underline{f} d\Omega + \rho \Omega^2 \int_{\Omega} \underline{w}^T N \hat{u} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{w}^T (\underline{f}_{cex}) d\Omega \\
& = 0 \xrightarrow{\underline{w} \equiv N}
\end{aligned}$$

Στο βήμα αυτό χρησιμοποιούμε, ως συναρτήσεις στάθμισης, τις συναρτήσεις μορφής των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα τελικά μητρώα μάζας και στιβαρότητας, που θα παραχθούν, να είναι συμμετρικά, Αν χρησιμοποιούσαμε διαφορετική μεθοδολογία (π.χ συντοπισμού), οι συναρτήσεις θα ήταν διαφορετικές και τα μητρώα μη συμμετρικά.

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \int_{\Omega} N^T \rho N \ddot{\underline{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (LN)^T CLN \hat{u} d\Omega + \rho \Omega^2 \int_{\Omega} \underline{w}^T N \hat{u} d\Omega = \int_{\Gamma_\sigma} \underline{N}^T \underline{\sigma} \hat{n} d\Gamma + \int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{f} d\Omega + \int_{\Omega} \underline{N}^T (\underline{f}_{cex}) d\Omega \xrightarrow{B=LN} \\
& \Rightarrow \underbrace{\ddot{\underline{u}} \int_{\Omega} N^T \rho N d\Omega}_{M} + \underbrace{\hat{u} \left[ \int_{\Omega} B^T CB d\Omega + \Omega^2 \rho \int_{\Omega} \underline{w}^T N'' d\Omega \right]}_{K_{NR}} = \underbrace{\int_{\Gamma_\sigma} \underline{N}^T \underline{\sigma} \hat{n} d\Gamma}_{F} + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{N}^T \underline{f} d\Omega}_{F_c} + \underbrace{\int_{\Omega} \underline{N}^T (\underline{f}_{cex}) d\Omega}_{F_c} \\
& \Rightarrow M \ddot{\underline{u}} + (K_{NR} + \Omega^2 K_c) \hat{u} = F + F_c \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Το σύστημα των εξισώσεων (4.27) αποτελεί τις εξισώσεις κίνησης της κατασκευής και είναι ένα σύστημα κανονικών διαφορικών εξισώσεων 2<sup>ου</sup> βαθμού. Το διάνυσμα  $\hat{u}$  αποτελείται από όλους τους βαθμούς ελευθερίας όλων των κόμβων διακριτοποίησης της κατασκευής. Στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων πρέπει να προσθέσουμε και τα μη μόνιμα αεροδυναμικά φορτία που ασκούνται στην προπέλα από το ροϊκό πεδίο. Επομένως, προσθέτουμε τον όρο  $F_A(t)$ , ο οποίος ανανεώνεται για κάθε χρονικό βήμα. Επιπλέον, συμβολίζουμε το διάνυσμα των βαθμών ελευθερίας ως  $\underline{q}$ , το οποίο αποτελεί έναν πιο διαδεδομένο συμβολισμό και απευθύνεται στις γενικευμένες συντεταγμένες της παραμορφώσιμης κατασκευής. Έτσι, το σύστημα (4.27) έρχεται στην τελική του μορφή :

$$M \ddot{\underline{q}}(t) + (K_{NR} + \Omega^2 K_c) \underline{q}(t) = F + F_c + F_A(t) \quad (4.28)$$

όπου  $K_{NR}$  η στιβαρότητα που εισάγεται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος και  $K_c$  η στιβαρότητα που εισάγεται από την φυγόκεντρο δύναμη.

Μαζί με συνοριακές και αρχικές συνθήκες μπορεί να επιλυθεί είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά. Από την επίλυση του συστήματος αυτού υπολογίζουμε τις μετατοπίσεις στους κόμβους και κατόπιν, με χρήση των εξισώσεων (4.22) και (4.23), υπολογίζουμε τις τροπές και τις τάσεις της κατασκευής. Για την αναλυτική επίλυση του συστήματος, αφού πρώτα υπολογίζουμε αριθμητικά τα ολοκληρώματα που βρίσκονται στα μητρώα της εξίσωσης (4.28), μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο ανάλυσης ιδιομορφών, με βάση την οποία η απόκριση υπολογίζεται από την εξίσωση :

$$\underline{q} = \sum_{n=1}^k \underline{\varphi}_n \tau_n(t)$$

όπου  $\tau_n(t)$  οι κύριες συντεταγμένες και  $\underline{\varphi}_n$  οι ορθοκανονικές ιδιομορφές του συστήματος.

Το πρόβλημα με την μέθοδο ανάλυσης ιδιομορφών είναι ο πολύ μεγάλος αριθμός βαθμών ελευθερίας για το σύστημα ( $6 \times$  αριθμός κόμβων), πράγμα που καθιστά την επίλυση ιδιαίτερα απαιτητική σε χρόνο. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να επιλυθεί με την εφαρμογή μεθόδων μείωσης των βαθμών ελευθερίας, όπως αυτή που παρουσιάζεται στην συνέχεια.

Θεωρούμε περιοδική διέγερση για το σύστημα στην μορφή  $\underline{F}(t) = \hat{A} \cos(\Omega t)$ . Λόγω της περιοδικής διέγερσης υποθέτουμε ότι και η λύση μας, για τις κύριες συντεταγμένες  $\underline{\tau}(t)$ , θα είναι περιοδική στην μορφή :

$$\tau_n(t) = \frac{\Phi^T \hat{A}}{\omega_n^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t) \quad (4.29), \text{ όπου } \Phi \text{ το μητρώο των ιδιομορφών}$$

Η τελευταία εξίσωση μας δείχνει ότι οι ιδιομορφές με την μεγαλύτερη επιρροή στην λύση μας είναι αυτές με ιδιοσυχνότητα ( $\omega_n$ ) κοντά στην διεγείρουσα συχνότητα  $\Omega$ . Επειδή η διεγείρουσα συχνότητα είναι γενικά χαμηλόσυχνη, μπορούμε να διατηρήσουμε μόνο τους  $l$  πρώτους όρους της εξίσωσης (4.29), με το  $l$  να είναι πολύ μικρότερο από τον αριθμό των συνολικών βαθμών ελευθερίας  $k$ .

Αναφέρουμε συνοπτικά μια ακόμα ακριβέστερη μέθοδο για την μείωση των βαθμών ελευθερίας, την μέθοδο Craig – Bampton, κατά την οποία οι υψηλόσυχνες ιδιομορφές αντί να παραλειφθούν πλήρως, αντικαθίστανται από διανύσματα μοναδιαίας μετατόπισης, δηλαδή για στατική απόκριση της κατασκευής, που προκύπτει από επιβολή μοναδιαίας μετατόπισης σε κάθε βαθμό ελευθερίας των συνόρων. Ο όρος συνοριακοί βαθμοί ελευθερίας εδώ αναφέρεται σε αυτούς που συνδέουν την συγκεκριμένη συνιστώσα με γειτονικές ή φορτίζονται άμεσα με εξωτερική διέγερση.

Για το δικό μας πρόβλημα, εφαρμόζουμε την μέθοδο ανάλυσης ιδιομορφών για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών στις διαφορετικές ταχύτητες λειτουργίας της προπέλας. Για τον υπολογισμό ιδιοσυχνοτήτων και ιδιομορφών επιλύουμε το ιδιοπρόβλημα της εξίσωσης (4.28). Αφού πρώτα αφαιρέσουμε την διέγερση από το σύστημα εξισώσεων, λύνουμε το σύστημα :

$$(K - \omega_n^2 M) \underline{\varphi}_n = \underline{0}, \text{ με } K = (K_{NR} + \Omega^2 K_c)$$

όπου οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  υπολογίζονται από τον μηδενισμό της ορίζουσας  $|K - \omega_n^2 M| = 0$  και στην συνέχεια, αφού υπολογιστούν οι ιδιοσυχνότητες, υπολογίζουμε τις ιδιομορφές  $\underline{\varphi}_n$ .

Ο υπολογισμός της απόκρισης του συστήματος πραγματοποιείται με τις αριθμητικές μεθόδους που θα παρουσιαστούν στην ενότητα 4.5.

#### 4.4.3 Εξισώσεις Ρευστού

Οι εξισώσεις που επιλύουμε για τον υπολογισμό του ροϊκού πεδίου είναι οι ίδιες με την ρευστομηχανική ανάλυση, που πραγματοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για υπενθύμιση ξαναγράφουμε τις εξισώσεις αυτές. Επιλύουμε τις εξισώσεις URANS (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} u_i) = 0 \\ \frac{\partial (\bar{\rho} u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} u_i u_j) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\rho \bar{u}_i' \bar{u}_j') + F_i \end{cases} \quad (I)$$

Με χρήση του μοντέλου τύρβης SST k-ω 2 εξισώσεων :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho k u_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \omega) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho \omega u_i) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \Gamma_\omega \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right) + G_\omega - Y_\omega - D_\omega + S_k \end{aligned}$$

Για την επίλυση του συστήματος αυτού, χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πεπερασμένων όγκων, με εφαρμογή του αλγόριθμου «Sliding Mesh» και χρήση μεθόδων χαλάρωσης, όπως πραγματοποιήθηκε και στο 3<sup>o</sup> κεφάλαιο.

#### Δυναμικό Πλέγμα

Η διαφορά σε σχέση με το απλό CFD πρόβλημα, έγκειται στο γεγονός ότι το πλέγμα μας, που βρίσκεται πάνω στην προπέλα, παραμορφώνεται με τον χρόνο. Επομένως, χρειάζεται να εφαρμόσουμε κάποια διαδικασία, για να γίνεται σωστά η μετακίνηση των κόμβων του πλέγματος στις καινούργιες θέσεις για κάθε χρονικό βήμα. Αυτό επιτυγχάνεται με την μέθοδο «Spring – based Smoothing».

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, θεωρούμε πως όλες οι ακμές, ανάμεσα στους γειτονικούς κόμβους, αντιπροσωπεύουν ελατήρια. Με βάση τον νόμο του Hooke, για οποιαδήποτε παραμόρφωση του πλέγματος και άρα μετακίνηση των κόμβων του, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στον κάθε κόμβο από όλα τα ελατήρια που συνδέονται με αυτόν, προκύπτει από την εξίσωση:

$$F_i = \sum_j^{n_i} k_{ij} (\Delta x_j - \Delta x_i)$$

όπου  $\Delta x_i$  και  $\Delta x_j$  είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων  $i, j$  αντίστοιχα,  $n_i$  είναι ο αριθμός των γειτονικών κόμβων, που συνδέονται στον κόμβο  $i$  και  $k_{ij}$  είναι η στιβαρότητα του ελατηρίου, που μπορεί να εκφρασθεί ως  $k_{ij} = \frac{k_{fac}}{\sqrt{|x_i - x_j|}}$ , με  $k_{fac}$  μια σταθερά για να ορίσουμε την στιβαρότητα του ελατηρίου. Για το δικό μας πρόβλημα επιλέγεται  $k_{fac} = 1$ .

Επειδή το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, όλες οι δυνάμεις που ασκούνται στον κόμβο  $i$  πρέπει να είναι ίσες με το μηδέν. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί μέσω επαναληπτικού σχήματος, με βάση την εξίσωση :

$$\Delta x_i^{m+1} = \frac{\sum_j^{n_i} k_{ij} \Delta x_j^m}{\sum_j^{n_i} k_{ij}}, \text{όπου } m \text{ ο αριθμός επαναλήψεων}$$

Μόλις η τελευταία εξίσωση συγκλίνει, με βάση το σφάλμα που ορίζουμε, η θέση του κόμβου στο επόμενο χρονικό βήμα ( $n+1$ ) προκύπτει από την εξίσωση :

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta x_i^{\text{τελικό}}$$

#### 4.5 Αριθμητικές Μέθοδοι και Συν – προσομοίωση

##### Αριθμητική Ολοκλήρωση κατά Gauss – Legendre

Όπως είδαμε, τα μητρώα της εξίσωσης κίνησης (4.28) περιέχουν χωρικά ολοκληρώματα. Ανάλογα με την μορφή των στοιχείων που χρησιμοποιούμε για την γεωμετρική διακριτοποίηση της κατασκευής μας, τα ολοκληρώματα αυτά διαφέρουν και σε κάποιες περιπτώσεις ο υπολογισμός τους είναι ιδιαίτερα δύσκολος. Επιπλέον, λόγω των μεγάλων διαστάσεων των μητρώων, ο αναλυτικός υπολογισμός απαιτεί απαγορευτικούς χρόνους. Για τους λόγους αυτούς τα ολοκληρώματα λύνονται με χρήση της μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Gauss-Legendre.

Η μέθοδος αυτή αποτελεί μια προσεγγιστική μέθοδο και στην ουσία προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα με ένα σταθμισμένο άθροισμα στην μορφή :

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^n w_k f(\xi_k)$$

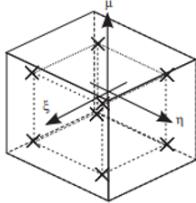
όπου  $n$  ο αριθμός των σημείων Gauss, που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση του ολοκληρώματος,  $w_k$  οι συντελεστές στάθμισης. Η μέθοδος αυτή μας δίνει καλή ακρίβεια για πολυώνυμα βαθμού, έως και  $(2n-1)$ . Τα σημεία  $\xi_k$ , στα οποία υπολογίζονται οι συναρτήσεις, είναι ισαπέχοντα. Επομένως, ανάλογα με τον αριθμό σημείων  $n$  που επιλέγουμε (για την αντίστοιχη ακρίβεια), οι τιμές των συντελεστών στάθμισης και των σημείων υπολογισμού της  $f$ , μπορούν να βρεθούν από πίνακες σαν αυτόν που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.8α. Για την τρισδιάστατη περίπτωση τα ολοκληρώματα έχουν την μορφή :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \mu) d\xi d\eta d\mu = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N f(\xi_i, \eta_j, \mu_k) w_i w_j w_k$$

Με τα σημεία να κατανέμονται χωρικά με την μορφή που παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.8β.

$n$	$\xi_i$	$w_i$
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm \sqrt{3}/\sqrt{5}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{9}{9}$
4	$\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}$ $\pm \frac{1}{35} \sqrt{525 + 70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{36} (18 + \sqrt{30})$ $\frac{1}{36} (18 - \sqrt{30})$
5	0 $\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 - 14\sqrt{70}}$ $\pm \frac{1}{21} \sqrt{245 + 14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{1}{900} (322 + 13\sqrt{70})$ $\frac{1}{900} (322 - 13\sqrt{70})$

(a)



(b)

Σχήμα 4. 5 Τιμές Gauss(α) και κατανομή (β) σημείων

### Newmark

Αφού περιγράψαμε και τον τρόπο υπολογισμού των ολοκληρωμάτων της εξίσωσης κίνησης, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση των μετατοπίσεων των κόμβων της κατασκευής. Για την επίτευξη της χρονικής διακριτοποίησης εφαρμόζεται η μέθοδος του Newmark. Η μέθοδος Newmark εφαρμόζεται σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων και βασίζεται στην υπόθεση ότι η επιτάχυνση μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο. Οι εξισώσεις της μεθόδου αυτής για την χρονική στιγμή ( $m+1$ ) δίνονται, με βάση την αναφορά [3] :

$$\dot{x}_{m+1} = \dot{x}_m + h[(1 - \beta)\ddot{x}_m + \beta\ddot{x}_{m+1}] \quad (4.30)$$

$$x_{m+1} = x_m + h\dot{x}_m + h^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{x}_m + \alpha \ddot{x}_{m+1} \right] \quad (4.31)$$

Ο συμβολισμός  $x_m$ , αναφέρεται στις τιμές του διανύσματος  $x$  την χρονική στιγμή  $m$ ,  $x_m = \underline{x}(t_m)$ . Οι συντελεστές  $\alpha, \beta$  επιλέγονται έτσι ώστε το υπολογιστικό σχήμα να είναι ευσταθές (συνήθως γύρω από τις τιμές  $\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{1}{2}$ ). Γράφουμε το σύστημα (4.28) για την χρονική στιγμή ( $m+1$ ) και επιλύουμε την (4.31) ως προς την  $2^n$  χρονική παράγωγο :

$$\ddot{x}_{m+1} = \frac{1}{ah^2} (x_{m+1} - x_m) - \frac{1}{ah} \dot{x}_m + \left( 1 - \frac{1}{2a} \right) \ddot{x}_m \quad (4.32)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε πρώτα την εξίσωση (4.30) και μετά την (4.32) στο σύστημα (4.28). Έτσι παίρνουμε ένα σύστημα της μορφής  $\underline{x}_{m+1} = f(\underline{x}_m, \dot{\underline{x}}_m, \ddot{\underline{x}}_m)$  (4.33).

Αν το σύστημα αυτό δεν περιέχει μη γραμμικούς όρους, επιλύεται άμεσα με υπολογισμό αρχικά της επιτάχυνσης  $\ddot{x}_0$ , από την εξίσωση κίνησης, με χρήση των αρχικών συνθηκών και στη συνέχεια με αντικατάσταση των τιμών  $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0)$  στην (4.33) υπολογίζεται το  $\underline{x}_1$ . Προχωράμε με εισαγωγή της τιμής αυτής στις (4.30) και (4.32) για τον υπολογισμό των  $(\dot{x}_1, \ddot{x}_1)$  και επαναλαμβάνουμε, έως ότου υπολογίσουμε όλες τις τιμές στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Σε περίπτωση που έχουμε μη γραμμικούς όρους στο σύστημα (4.33), εφαρμόζουμε μια επαναληπτική διαδικασία σε κάθε βήμα ολοκλήρωσης. Συγκεκριμένα η εξίσωση (4.33) επιλύεται με εφαρμογή της μεθόδου Newton – Raphson, για κάθε χρονικό βήμα  $\underline{x}_{m+1}$ . Το σχήμα επίλυσης έχει την μορφή :

$$\underline{x}_{m+1}^{k+1} = \underline{x}_{m+1}^k + \Delta \underline{x}_{m+1}^k$$

έως ότου συγκλίνει, με  $k$  να είναι ο δείκτης των εσωτερικών επαναλήψεων σε κάθε χρονικό βήμα. Μια πιο αναλυτική περιγραφή των μεθόδων Newmark και Newton – Raphson παρουσιάζεται στην αναφορά [3].

Πριν προχωρήσουμε στην διαδικασία διακριτοποίησης της κατασκευής μας, παρουσιάζουμε τις αρχές συν-προσομοίωσης και τον αλγόριθμο, που θα χρησιμοποιήσουμε για την ανταλλαγή πληροφοριών μεταξύ των λογισμικών.

## **FSI και Συν-προσομοίωση**

Κατά την συν-προσομοίωση (co-simulation) τα διαφορετικά υποσυστήματα (ρευστό – κατασκευή) που ορίζουν το πρόβλημά μας, μοντελοποιούνται και προσομοιώνονται με κατανεμημένο τρόπο. Έτσι, η μοντελοποίηση του κάθε προβλήματος γίνεται ξεχωριστά μέσα στα υποσυστήματα, χωρίς να έχουμε στο μιαλό μας την σύζευξη τους.

Με βάση αυτό, αντιλαμβανόμαστε ότι η επίλυση συστημάτων FSI απαιτεί την συν-προσομοίωση ανάμεσα στο υποσύστημα της κατασκευής και του ρευστού. Για την σύζευξη των δύο υποσυστημάτων, χρησιμοποιούμε σύζευξη χαλαρής μορφής (loosely coupled). Στην μορφή αυτή, τα υποσυστήματα εξαρτώνται το ένα από το άλλο στον μικρότερο δυνατό βαθμό. Η αρχιτεκτονική αυτή για την συν-προσομοίωση, προστατεύει τα επιμέρους υποσυστήματα, μειώνοντας το ρίσκο μια μεταβολή των παραμέτρων στο ένα σύστημα να διαφοροποιήσει το άλλο. Έτσι, ένα χαλαρά συζευγμένο σύστημα, μπορεί εύκολα να διαχωριστεί στα επιμέρους υποσυστήματα, από τα οποία απαρτίζεται.

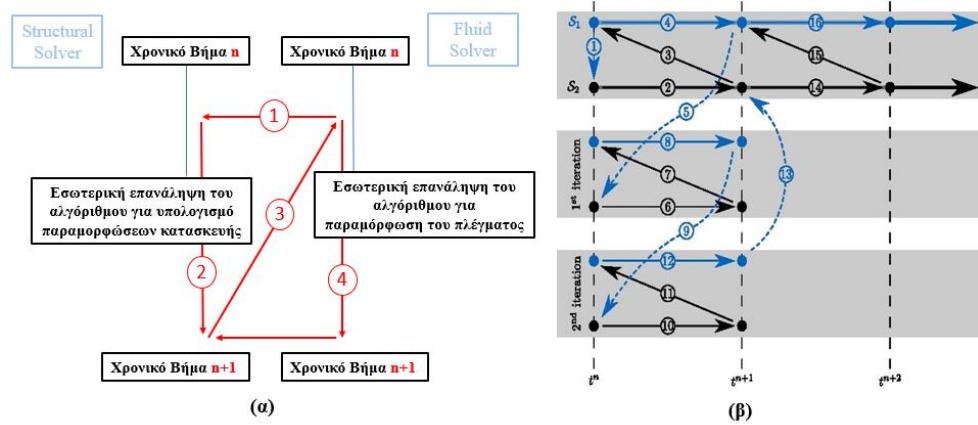
Γενικά υπάρχουν 2 διακριτές μορφές ανάλυσης, που μπορούμε να διεξάγουμε για FSI συστήματα:

- 1- way FSI
- 2- way FSI

Για την προσομοίωση «1- way FSI» τα αεροδυναμικά φορτία υπολογίζονται μια φορά (για μια περιστροφή της προπέλας) και με βάση τα φορτία αυτά η κατασκευή παραμορφώνεται. Επομένως, η προσομοίωση υπολογίζει τις παραμορφώσεις, σε κάθε χρονικό βήμα, για τις αεροδυναμικές δυνάμεις της στερεής προπέλας. Όπως αναλύσαμε όμως έως το σημείο αυτό, καθώς τα αεροδυναμικά φορτία παραμορφώνουν την προπέλα, η παραμόρφωση της προπέλας επηρεάζει τα φορτία και με την σειρά τους τα φορτία διαφοροποιούν το πεδίο των τροπών. Επομένως, αντιλαμβανόμαστε ότι θα πρέπει σε κάθε χρονικό βήμα οι μετατοπίσεις των κατασκευαστικών κόμβων να μεταφέρονται στο ροϊκό πλέγμα και να το παραμορφώνουν αντίστοιχα, έτσι ώστε να ακολουθεί την παραμόρφωση της προπέλας. Η διαδικασία που περιγράψαμε πραγματοποιείται με την ανάλυση «2-way FSI» και θεωρείται προσομοίωση πλήρους σύζευξης για αεροελαστικά συστήματα.

Τα 2 υποσυστήματα μαζί με το υποσύστημα της σύζευξης, που εφαρμόζει τον αλγόριθμο «Gauss-Seidel», συνδέονται σε μια δομή που ονομάζεται Master-Slave, με τον κατασκευαστικό επιλυτή (ANSYS Mechanical) και τον επιλυτή του ροϊκού πεδίου (ANSYS FLUENT) να είναι τα Slave υποσυστήματα και το σύστημα της σύζευξης να είναι ο Master. Για την επικοινωνία των υποσυστημάτων και την ανταλλαγή δεδομένων μεταξύ τους χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο

«Gauss–Seidel», ο οποίος εφαρμόζεται από το υποσύστημα σύζευξης. Η ονομασία του αλγόριθμου προέρχεται από τις ομοιότητες του με την αριθμητική μέθοδο, που φέρει το ίδιο όνομα. Στο Σχήμα 4.9, απεικονίζονται δύο σχηματικές αναπαραστάσεις του αλγόριθμου σύζευξης.



Σχήμα 4.6 Σχηματικές αναπαραστάσεις του αλγόριθμου *Gauss-Seidel*

Από το παραπάνω σχήμα βλέπουμε ότι ο αλγόριθμος ξεκινάει από τον υπολογισμό των αεροδυναμικών δυνάμεων, οι οποίες μεταφέρονται στο κατασκευαστικό κομμάτι και παραμορφώνουν την κατασκευή. Όταν η λύση της παραμόρφωσης για την κατασκευή συγκλίνει, τότε το κατασκευαστικό κομμάτι προχωράει στην  $n+1$  χρονική στιγμή, ενώ ταυτόχρονα επιστρέφονται οι παραμορφώσεις του πλέγματος στον επιλυτή του ρευστού, έτσι ώστε να αναβαθμιστεί το ροϊκό πλέγμα. Στο 4<sup>o</sup> βήμα, που βλέπουμε στο Σχήμα 4.9a, εφαρμόζεται η μέθοδος «Spring – based Smoothing», που περιγράφαμε προηγουμένως. Στο σχήμα 4.9a βλέπουμε έναν κύκλο επικοινωνίας των υποσυστημάτων, όπου στην πραγματικότητα το υποσύστημα σύζευξης, προτού προχωρήσει στο επόμενο χρονικό βήμα, εφαρμόζει έναν αριθμό εσωτερικών επαναλήψεων (ο οποίος ορίζεται από εμάς) για την βελτίωση της σύζευξης. Η επαναληπτική διαδικασία της σύζευξης φαίνεται στο Σχήμα 4.9b, όπου φαίνονται οι 3 επαναλήψεις της σύζευξης, πριν προχωρήσουμε στο χρονικό βήμα  $n+1$ . Τέλος, να αναφέρουμε ότι και τα δύο υποσυστήματα δηλαδή το ρευστό και η κατασκευή, εφαρμόζουν εσωτερικούς επαναληπτικούς βρόχους για καλύτερη ακρίβεια στην λύση.

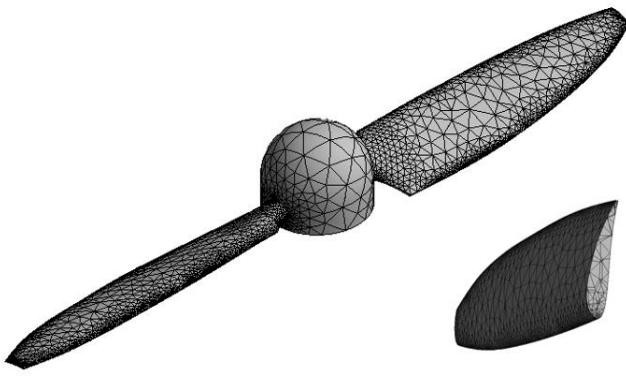
Για το δικό μας πρόβλημα συν-προσομοίωσης επιβάλλουμε στο υποσύστημα του Master, να πραγματοποιεί τουλάχιστον 5 επαναλήψεις σύζευξης σε κάθε χρονικό βήμα επίλυσης. Επιπλέον, για το ρευστομηχανικό πρόβλημα, ορίζουμε στον επιλυτή να εφαρμόζει 5 εσωτερικές επαναλήψεις.

## 4.6 Διακριτοποίηση

Το πλέγμα που κατασκευάσαμε στο 3<sup>o</sup> κεφάλαιο για το ροϊκό πεδίο χρησιμοποιείται ξανά εδώ, χωρίς καμία διαφοροποίηση. Για τον λόγο αυτό δεν θα παρουσιαστεί ξανά.

Διακριτοποιούμε την κατασκευή μας με χρήση γραμμικών τετράεδρων. Αυτό σημαίνει ότι το κάθε χωρικό στοιχείο αποτελείται από 4 κόμβους (1 σε κάθε κορυφή). Οι συναρτήσεις μορφής, που χρησιμοποιούνται σε τέτοια στοιχεία, αναλύθηκαν στην παρουσίαση της μεθόδου FEM. Επιλέγουμε μεγαλύτερη πύκνωση για την προπέλα στις λεπτές περιοχές των πτερυγίων στα

Leading Edge (LE) και Trailing Edge (TE), μιας και είναι οι περιοχές που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε, λόγω των μεγάλων παραμορφώσεων. Το πλέγμα που προκύπτει, παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.10.



Σχήμα 4. 7 Διακριτοποιημένη κατασκευή προπέλας με γραμμικά τετράεδρα

Τα τετραεδρικά στοιχεία, όπως και για το ροϊκό πεδίο, επιλέχθηκαν λόγω της ικανότητάς τους να μοντελοποιούν δύσκολες γεωμετρίες. Στον Πίνακα 4.1 παρουσιάζονται οι τιμές για τις διαστάσεις του πλέγματος και για τα κριτήρια ποιότητας του. Στο Σχήμα 4.11 παρουσιάζονται ξανά οι περιοχές ποιότητας για τις τιμές του κριτηρίου ορθογωνικότητας και αναλογίας διαστάσεων. Βλέπουμε ότι το πλέγμα μας βρίσκεται σε καλές περιοχές για τα κριτήρια και μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ικανό να παρέχει καλή λύση. Επίσης, για τον συντελεστή «Aspect Ratio» το εύρος τιμών είναι 1-100, με το 1 να αντιπροσωπεύει την βέλτιστη τιμή. Έτσι η τιμή 6.4 θεωρείται ικανοποιητική.

Το πλέγμα δημιουργήθηκε στο λογισμικό Mechanical της εταιρίας ANSYS, στο οποίο λογισμικό θα πραγματοποιηθεί και η επίλυση. Για την προσομοίωση της κατασκευής, εισάγουμε περιστροφική ταχύτητα στον άξονα περιστροφής για της προπέλας, ίδια με την ταχύτητα περιστροφής του πλέγματος. Επιπλέον, εξασφαλίζουμε στην έναρξη της προσομοίωσης, οι θέσεις της προπέλας μέσα στο ροϊκό πλέγμα και στο κατασκευαστικό λογισμικό να ταυτίζονται (π.χ. οριζόντια θέση). Για τον σωστό ορισμό του προβλήματος εισάγουμε σταθερή έδραση στην επίπεδη βάση της πλήμνης της προπέλας. Με τον τρόπο αυτό προσομοιώνουμε την ύπαρξη στιβαρής ατράκτου, που συνδέει την προπέλα με τον μειωτήρα. Ένας ακόμα λόγος που τοποθετείται σταθερή έδραση, είναι για να αποφύγουμε την περιστροφική κίνηση της προπέλας και σε κάποιον άλλον άξονα πέραν του γ, διότι σε αυτήν την περίπτωση θα είχαμε την εμφάνιση γυροσκοπικών φαινομένων, τα οποία κατά κύριο λόγο οδηγούν στα φαινόμενα αστάθειας, που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 4.2. Τα φορτία που αναπτύσσονται λόγω γυροσκοπικής κίνησης θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο. Περισσότερες πληροφορίες για την διακριτοποίηση κατασκευών μπορούν να βρεθούν στην αναφορά [15].

Πίνακας 4. 1 Διαστάσεις και τιμές κριτηρίων ποιότητας πλέγματος

Αριθμός Κόμβων	$7.6 \cdot 10^4$	Ορθογωνικότητα (Orthogonality)	Min = 0.24
Αριθμός Στοιχείων	$4.6 \cdot 10^4$	Αναλογία διαστάσεων (Aspect Ratio)	Max = 6.4
		Λοξότητα (Skewness)	Max = 0.75



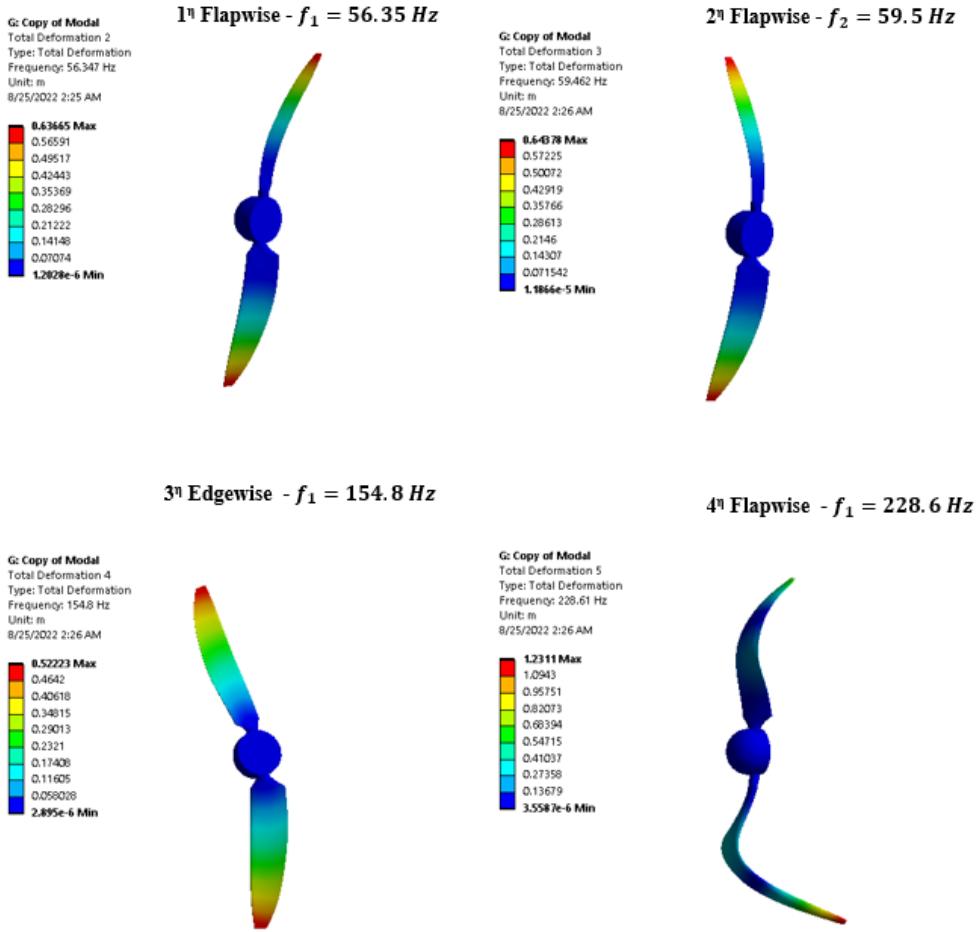
Σχήμα 4. 8 Τιμές για τα κριτήρια ποιότητας του πλέγματος

## 4.7 Αποτελέσματα

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Αρχικά, γίνεται η δημιουργία του διαγράμματος Campbell για την προπέλα μας και παρουσιάζονται οι φυσικές (χωρίς περιστροφή) ιδιομορφές της κατασκευής. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των φορτίων και των παραμορφώσεων, γίνεται εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier, παρουσιάζονται οι κατανομές του συντελεστή πίεσης σε συγκεκριμένες διατομές και τέλος παρουσιάζεται η κατανομή των τάσεων von - Mises για το αεροελαστικό πρόβλημα.

### 4.7.1 Ανάλυση Ιδιομορφών - Διάγραμμα Campbell

Από την επίλυση του ιδιοπροβλήματος προκύπτουν οι ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες της κατασκευής. Παρουσιάζουμε τις ιδιομορφές χωρίς την εφαρμογή φυγόκεντρου δύναμης (χωρίς περιστροφική ταχύτητα). Μπορεί με την αύξηση της ταχύτητας της προπέλας να αυξάνονται οι ιδιοσυχνότητες και τα εύρη των ιδιομορφών, αλλά η χαρακτηριστική ταυτότητα, για τις χαμηλόσυγχρες τουλάχιστον ιδιομορφές, παραμένει ίδια. Ως χαρακτηριστική ταυτότητα αναφερόμαστε στην φύση της παραμόρφωσης (καμπτικές ιδιομορφές, στρεπτικές ιδιομορφές κλπ.). Ανάλογα με την φορά της κάμψης, διακρίνουμε δύο διαφορετικές ορολογίες, που χρησιμοποιούνται για την ερμηνεία των αποτελεσμάτων σε προπέλες αεροπλοΐας, οι οποίες είναι κάμψη κάθετη στο επίπεδο περιστροφής «flapwise» και κάμψη στο επίπεδο περιστροφής «edgewise». Στο Σχήμα 4.12 παρουσιάζονται, υπό κλίμακα (x4), οι 4 πρώτες ελαστικές ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες της κατασκευής μας, μαζί με χρωματική κλίμακα, που δείχνει το μέγεθος των μετατοπίσεων στις αντίστοιχες θέσεις. Από το σχήμα αυτό βλέπουμε ότι αυξανόμενης της τάξης για την ιδιομορφή, αυξάνεται και η πολυπλοκότητα της μορφής της. Επιπλέον, να σημειώσουμε ότι στρεπτικές ιδιομορφές ή ιδιομορφές σύζευξης (π.χ. καμπτική και στρεπτική μαζί) προκύπτουν για πολύ μεγαλύτερες ιδιοσυχνότητες.



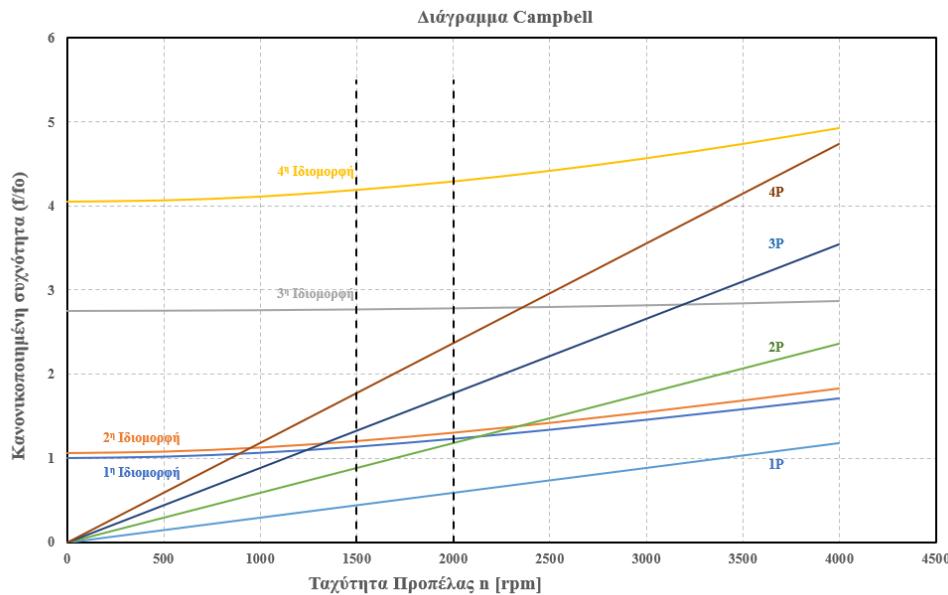
Σχήμα 4. 9 Ελαστικές ιδιομορφές και ιδιοσυχνότητες της προπέλας και χρωματική οπτικοποίηση μετατοπίσεων.

Για την παραγωγή του διαγράμματος του Campbell για την προπέλα, χρειάζεται να διεξάγουμε μια «pre-stressed» ανάλυση. Μέσω της ανάλυσης αυτής, στην ουσία εισάγουμε την επιρροή των φορτίων που προκύπτουν από την περιστροφή και αυξάνουν την στιβαρότητα της κατασκευής. Η μέθοδος αυτή, αντί να υπολογίζει τους όρους που προέρχονται από την κατανομή της φυγόκεντρου δύναμης, εισάγει ένα πεδίο τάσεων την προπέλα, για την κάθε διαφορετική περιστροφική ταχύτητα. Έτσι, το ιδιοπρόβλημα που επιλύεται στο τέλος έχει την μορφή :

$$(K + [S] - \omega_n^2 M) \underline{\varphi}_n = \underline{0}$$

όπου  $[S]$  το μητρό των τάσεων. Για να διεξάγουμε την ανάλυση αυτή στο λογισμικό Mechanical, υπολογίζουμε για κάθε περιστροφική ταχύτητα το πεδίο των τάσεων και στη συνέχεια διεξάγουμε ανάλυση ιδιομορφών, διατηρώντας την κατασκευή μας υπό τις τάσεις αυτές. Στο Σχήμα 4.13, παρουσιάζεται το διάγραμμα του Campbell για τις 4 πρώτες ελαστικές ιδιομορφές και τις 4 πρώτες αρμονικές συνιστώσες της περιστροφικής ταχύτητας της προπέλας. Στον άξονα των τεταγμένων, βρίσκεται η κανονικοποιημένη συχνότητα ως προς την ιδιοσυχνότητα της 1<sup>ης</sup> ιδιομορφής για μηδενική γωνιακή ταχύτητα. Επίσης, διακρίνουμε στο σχήμα με διακεκομμένες γραμμές τις ταχύτητες των σετ τιμών, για τα οποία θα επιλύσουμε εμείς το αεροελαστικό σύστημα.

Μπορούμε να δούμε ότι, για ταχύτητες κοντά στα 2000[rpm], η 2P συνιστώσα του φορτίου πλησιάζει αρκετά στον συντονισμό με την 1<sup>η</sup> ιδιομορφή, περιμένοντας επομένως να δούμε μεγάλα εύρη απόκρισης για τις μετατοπίσεις στην διεύθυνση γ, αφού η 1<sup>η</sup> ιδιομορφή κάμπτεται στην flapwise διεύθυνση. Για τις ιδιομορφές 3 και 4, δεν υπάρχει κίνδυνος συντονισμού στο εύρος τιμών για τα οποία προσομοιώνουμε εμείς. Οι υπόλοιπες ιδιομορφές εμφανίζονται αρκετά μεγαλύτερες ιδιοσυχνότητες, με αποτέλεσμα να βρίσκονται εκτός διαγράμματος. Είναι πλέον εμφανής η σημαντική διαφοροποίηση των ιδιοσυχνοτήτων της κατασκευής συναρτήσει της περιστροφικής ταχύτητας. Γενικά, είναι προτιμητέο να αποφεύγουμε την λειτουργία σε τιμές κοντά στην τομή των ιδιομορφών με τα αρμονικά φορτία. Στο δικό μας βέβαια πρόβλημα, θέλουμε να επισημάνουμε την επίδραση του φαινομένου αυτού.



Σχήμα 4. 10 Διάγραμμα του Campbell για την προπέλα

#### 4.7.2 Απόκριση δυνάμεων και ανάλυση Fourier

Οι συνθήκες προσομοίωσης παραμένουν ίδιες με τις συνθήκες, για τις οποίες επιλύσαμε το ρευστομηχανικό πρόβλημα στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο και παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στον Πίνακα 4.2. Στον Πίνακα 4.3 παρουσιάζονται οι φυσικές ιδιότητες του αέρα στο επίπεδο της θάλασσας, από την στιγμή που προσομοιώνουμε για την λειτουργία απογείωσης της προπέλας. Για την επίλυση του αεροελαστικού προβλήματος ξεκινάμε από λύση που έχει συγκλίνει πλήρως το ροϊκό μας πεδίο. Συγκεκριμένα, επιλύουμε στην αρχή για μόνιμη κατάσταση το μοντέλο της στερεής προπέλας και, αφού επιτευχθεί η μόνιμη κατάσταση, επιλύουμε για το μεταβατικό φαινόμενο, έως ότου καταλήξουμε σε σταθερή περιοδική λύση. Έτσι, με ένα πλήρως συγκλίνον ροϊκό πεδίο, εισάγουμε παραμορφωσιμότητα στην προπέλα και προσομοιώνουμε, μέχρι να επιτευχθεί σταθερή περιοδική ταλάντωση. Όπως θα δούμε και στα διαγράμματα των αποκρίσεων στην συνέχεια, για το δικό μας πρόβλημα χρειάστηκαν 8 περιστροφές της προπέλας έως την μόνιμη κατάσταση του αεροελαστικού προβλήματος.

Το χρονικό βήμα που χρησιμοποιούμε είναι τέτοιο, ώστε σε κάθε σετ τιμών, για ένα χρονικό βήμα, η προπέλα να περιστρέφεται κατά 18 μοίρες. Η επιλογή αυτή έγινε με σκοπό την απόκτηση ικανοποιητικών αποτελεσμάτων, αλλά και την διατήρηση του χρόνου προσομοίωσης σε αποδεκτά επίπεδα. Όπως και για το ρευστομηχανικό πρόβλημα, ο άξονας περιστροφής της προπέλας είναι ο γ, ο άξονας ζ βρίσκεται στην θετική φορά της βαρύτητας και ο άξονας των x τοποθετείται έτσι ώστε να ικανοποιείται ο κανόνας του δεξιού χεριού. Για το ρευστομηχανικό πρόβλημα εισάγουμε 5 εσωτερικές επαναλήψεις για την σύγκλιση της λύσης και για το υποσύστημα σύζευξης επίσης 5 επαναλήψεις για την βελτίωση της λύσης. Για την προπέλα εισάγεται σταθερή έδραση στην πλήμνη της. Με τον τρόπο αυτό προσομοιώνουμε την σύνδεση της προπέλας με την άτρακτο εξόδου του μειωτήρα.

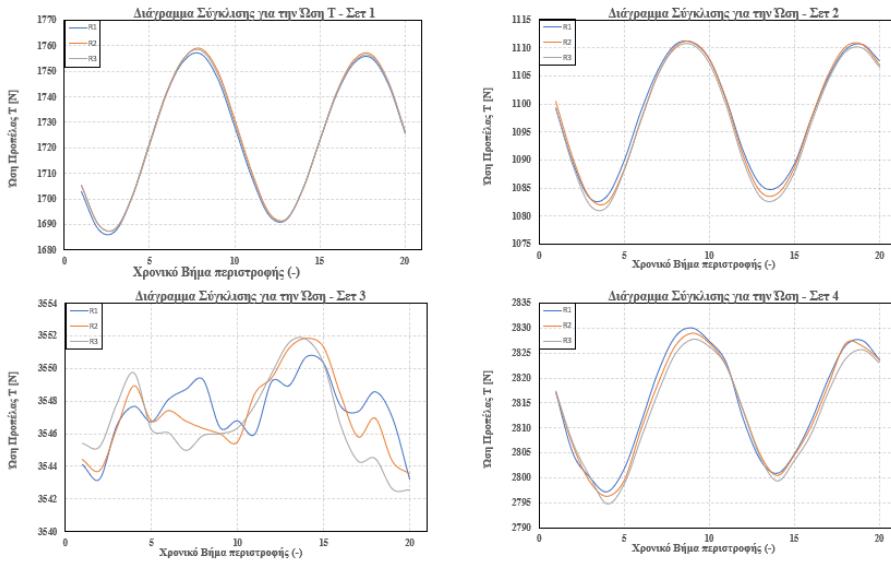
Πίνακας 4. 2 Συνθήκες προσομοίωσης FSI

	Σετ 1	Σετ 2	Σετ 3	Σετ 4
Ταχύτητα αεροσκάφους	$V = 20 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$V = 30 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$V = 20 \left[ \frac{m}{s} \right]$	$V = 30 \left[ \frac{m}{s} \right]$
Περιστροφική Ταχύτητα Προπέλας	$n = 1500 [rpm]$	$n = 1500 [rpm]$	$n = 2000 [rpm]$	$n = 2000 [rpm]$
Γωνία pitch προπέλας	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 10^\circ$	$\beta = 10^\circ$
Γωνία προσβολής (ανόδου) αεροσκάφους	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 10^\circ$

Πίνακας 4. 3 Φυσικές Ιδιότητες Αέρα στο επίπεδο της θάλασσας

Πυκνότητα	$\rho = 1.225 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$	Θερμοκρασία	$T = 288.15 [K]$
Δυναμικό ιερός	$\mu = 1.789 \cdot 10^{-5} \left[ \frac{kg}{ms} \right]$	Λόγος ειδικής θερμοχωρητικότητας	$k = 1.401$
Απόλυτη πίεση	$P = 1.013 \cdot 10^5 [Pa]$	Ταχύτητα του ήχου	$a = 304.3 \left[ \frac{m}{s} \right]$

Στο Σχήμα 4.14 παρουσιάζονται οι αποκρίσεις της ώσης για τις 3 τελευταίες περιστροφές της προπέλας, με σκοπό την επαλήθευση της σύγκλισης της λύσης μας. Έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι αυξανόμενων των στροφών της προπέλας (σετ 3,4) άρα και αυξανόμενων των φορτίων, δυσκολευόμαστε περισσότερο για την επίτευξη της μόνιμης κατάστασης και επίσης αυξάνεται η πολυπλοκότητα των διαγραμμάτων. Συγκεκριμένα, για το  $3^\circ$  σετ τιμών, βλέπουμε ότι η συμπεριφορά της απόκρισης της ώσης διαφέρει ιδιαίτερα σε σχέση με τα υπόλοιπα σετ τιμών, το οποίο οφείλεται στα μεγάλα φορτία και την επιρροή αυτών στα ελαστικά χαρακτηριστικά της κατασκευής.



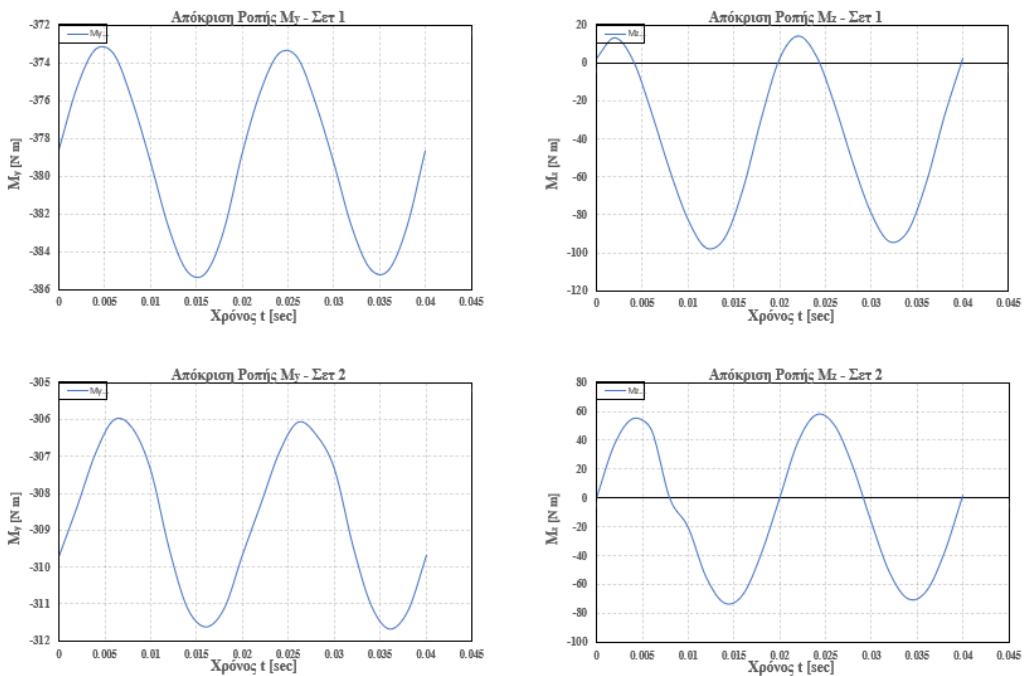
Σχήμα 4. 11. Διαγράμματα σύγκλισης για την ώση για τα 4 σετ τιμών προσομοίωσης.

Στα Σχήματα 15 και 16, παρουσιάζονται οι αποκρίσεις των ροπών στις διευθύνσεις  $y$  (άξονας περιστροφής) και  $z$  (επίπεδο περιστροφής). Όπως και για την ώση, βλέπουμε ότι η πολυπλοκότητα αυξάνεται και εδώ αυξανόμενων των φορτίων. Η διαφοροποίηση των διαγραμμάτων προκύπτει λόγω της παραμόρφωσης της κατασκευής. Η παραμορφωμένη κατασκευή αλλάζει τις γωνίες προσβολής, που βλέπουν οι επιμέρους αεροτομές των πτερυγίων, με αποτέλεσμα να υπάρχουν πλέον μεγάλες ανισότητες στα φορτία κατά μήκος των πτερυγίων. Η μορφή των αποκρίσεων για τα φορτία μπορεί να ερμηνευθεί καλύτερα από τις τιμές του Πίνακα 4.4, ο οποίος περιλαμβάνει τα αποτελέσματα της ανάλυσης Fourier για την τελευταία περιστροφή της προπέλας.

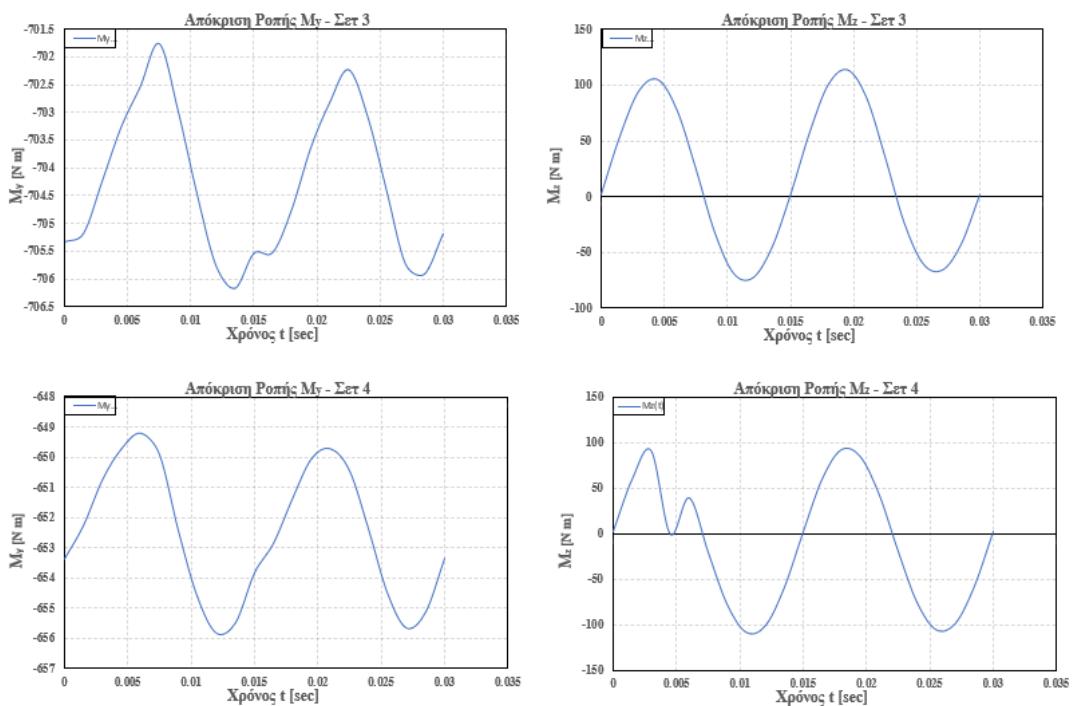
Στον πίνακα αυτό βλέπουμε ότι η 2P αρμονική συνιστώσα παραμένει η κυρίαρχη έναντι των υπόλοιπων δυναμικών φορτίων. Συγκεκριμένα, για την ροπή στον  $z$ , που προκύπτει από την διαφοροποίηση της γωνίας προσβολής στην οριζόντια θέση, βλέπουμε ότι το εύρος ταλάντωσης της 2P συνιστώσας είναι μεγαλύτερο του στατικού. Το φορτίο  $M_z$  είναι υπεύθυνο για την κάμψη εκτός του επιπέδου περιστροφής (flapwise) και μπορούμε να δούμε, ιδιαίτερα για τα σετ 3 και 4, την μεγάλη αύξηση των ευρών της 2P συνιστώσας έναντι των υπόλοιπων για το  $M_z$ . Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι για τα φορτία που βρίσκονται στην διευθύνσεις που ορίζουν το επίπεδο περιστροφής, θα πρέπει να δίνουμε έμφαση στις αρμονικές συνιστώσες. Ενώ αντίθετα, για τα φορτία του άξονα περιστροφής, κύρια σημασία έχουν οι στατικές φορτίσεις, μιας και τα εύρη των δυναμικών συνιστώσων είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερα.

Πίνακας 4. 4 Αποτελέσματα ανάλυσης Fourier για τα φορτία  $T$ ,  $M_y$ ,  $M_z$

Σετ τιμών	1o			2o			3o			4o		
Φόρτιση	$T$	$M_y$	$M_z$	$T$	$M_y$	$M_z$	$T$	$M_y$	$M_z$	$T$	$M_y$	$M_z$
Συνιστώσα												
0P	1720	379.12	41.9	1099	309	14	3546	704	16.7	2813	652	7.97
1P	2	0.11	2	1.2	0.93	0.75	1.99	0.21	5.3	2.59	0.28	1.3
2P	34	6	54.8	28	4.7	19.3	2.87	1.81	90	14.55	3	101
3P	0.1	0.007	0.21	0.06	0.0064	0.0057	0.247	0.0093	0.25	0.127	0.017	0.33



Σχήμα 4. 12 Αποκρίσεις ροπών στον γ, z για τα σετ τιμών 1,2.

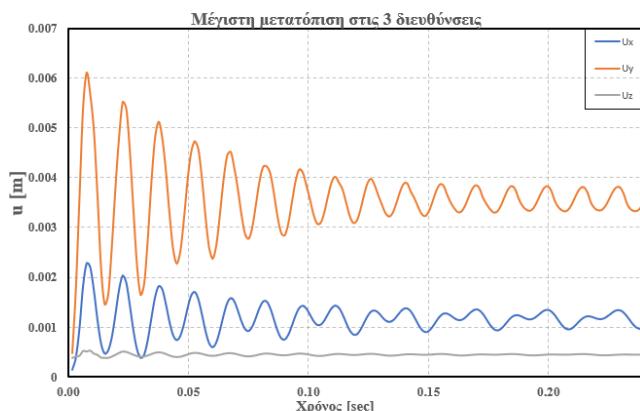


Σχήμα 4. 13 Αποκρίσεις ροπών στον γ, z για τα σετ τιμών 3,4.

### 4.7.3 Διαγράμματα Απόκρισης Κατασκευής

Οι μεταβλητές των αποκρίσεων, τάσεων και τροπών, μετρούνται ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων  $f(x', y', z')$ , που βρίσκεται δεμένο στην προπέλα και περιστρέφεται μαζί της. Με την σύμβαση αυτή έχουμε τον άξονα περιστροφής  $y'$ , τον άξονα κατά μήκος του οποίου κατανέμεται το υλικό  $z'$  και τον άξονα  $x'$  κάθετο στους άλλους 2.

Σύμφωνα με το διάγραμμα Campbell, που παρουσιάσαμε στο σχήμα 4.13, για περιστροφικές ταχύτητες 2000 [rpm], οι 2P συνιστώσες των φορτίσεων βρίσκονται κοντά στην περιοχή συντονισμού με την 1η ιδιομορφή (flapwise) της κατασκευής. Επομένως, στα διαγράμματα απόκρισης των μετατοπίσεων και τάσεων περιμένουμε να δούμε μεγάλα εύρη ταλάντωσης για τα σετ τιμών 3,4 (2000 [rpm]) στην διεύθυνση  $y$  (flapwise). Αρχικά, παρουσιάζουμε στο Σχήμα 4.17 την απόκριση της μέγιστης μετατόπισης για τις 3 διευθύνσεις για το  $4^{\circ}$  σετ τιμών. Από την στιγμή που μιλάμε για μέγιστη μετατόπιση, προφανώς το διάγραμμα αναφέρεται σε κόμβο που βρίσκεται στην κορυφή του πτερυγίου. Από το διάγραμμα αυτό αντιλαμβανόμαστε τις τάξεις μεγέθους των μετατοπίσεων και την σύγκριση μεταξύ τους. Για παράδειγμα βλέπουμε ότι η μετατόπιση στον  $y$  είναι κατά μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτήν στον  $x$ , ενώ με την σειρά της αυτή στον  $x$  είναι κατά μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερη από αυτήν στον  $z$  (άξονας κατανομής υλικού).

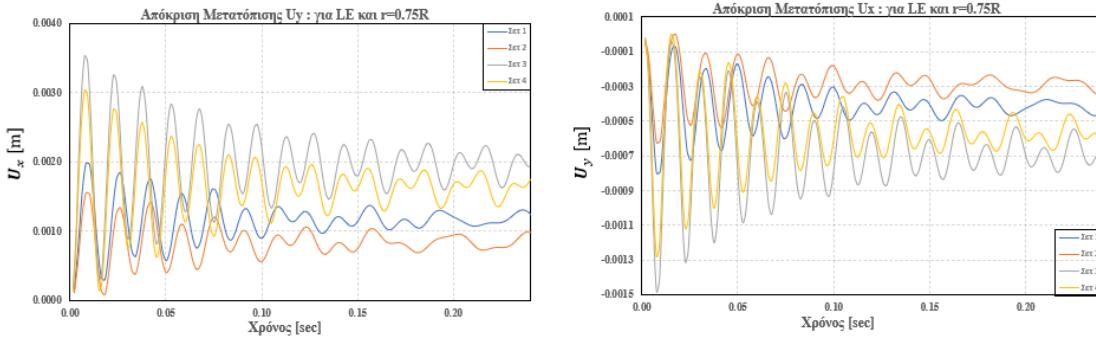


Σχήμα 4. 14 Απόκριση μετατόπισης για τις 3 διευθύνσεις.

Μιας και τα μεγαλύτερα φορτία άρα και την μεγαλύτερη παραμόρφωση την έχουμε στην ακμή προσβολής των πτερυγίων (Leading Edge), στο Σχήμα 4.18 παρουσιάζουμε την απόκριση των μετατοπίσεων στις διευθύνσεις  $x$ ,  $y$  για τα 4 σετ τιμών, για σημείο πάνω στην ακμή προσβολής σε θέση  $r = 0.75 R$  από την πλήμνη της προπέλας. Βλέπουμε ότι εκτός από την αύξηση στο εύρος ταλάντωσης για αυξανόμενα φορτία, η μορφή των διαγραμμάτων στην συγκεκριμένη θέση εμφανίζει πολύπλοκες περιοδικές αυξομειώσεις, σε σύγκριση με το σχήμα 4.17, όπου είχαμε ομοιόμορφες περιοδικές αποκρίσεις.

Τα μεγάλα εύρη ταλάντωσης με υψηλές συχνότητες, που παρατηρούνται στην αρχή των διαγραμμάτων, οφείλονται στην εφαρμογή των αεροδυναμικών φορτίων και της φυγόκεντρου δύναμης στην κατασκευή. Με την πάροδο του χρόνου, καταλήγουμε ταχέως σε περιοδική απόκριση με μικρά εύρη ταλάντωσης. Επίσης, βλέπουμε ότι για τα σετ τιμών με ίδια περιστροφική ταχύτητα στην μόνιμη κατάσταση, τα εύρη ταλάντωσης βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους. Αυτό υποδεικνύει ότι η ταχύτητα της ελεύθερης ροής δεν έχει σημαντική επιρροή στην αεροελαστική απόκριση στον χρόνο. Επίσης, είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι για τις ίδιες περιστροφικές

ταχύτητες, οι μεγαλύτερες ταχύτητες ελεύθερης ροής (αεροσκάφους) προσφέρουν μικρότερα εύρη ταλάντωσης λόγω χαμηλότερων αεροδυναμικών φορτίων. Σε σύγκριση τώρα για τις 2 διαφορετικές διευθύνσεις ( $x$ ,  $y$ ), η συμπεριφορά είναι ίδια, με την διαφορά ότι στην  $x$  διεύθυνση (edgewise) τα εύρη ταλάντωσης είναι περίπου μια τάξη μεγέθους μικρότερα. Να πούμε ότι σε όλα τα διαγράμματα, για μόνιμη κατάσταση, η συχνότητα ταλάντωσης των μετατοπίσεων είναι ίδια με την συχνότητα περιστροφής της προπέλας.

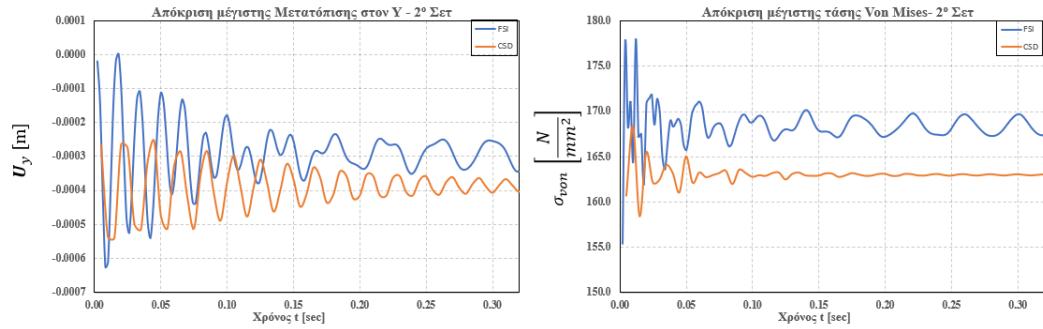


Σχήμα 4. 15 Απόκριση μετατόπισης, για σημείο στην Leading Edge ακμή των πτερυγίων, στην θέση  $0.75R$  (a) στον  $y$  (b) στον  $x$

Στο Σχήμα 4.19 παρουσιάζεται η απόκριση της μέγιστης μετατόπισης στον  $y$  και της μέγιστης τάσης Von Mises, για την επίλυση του FSI συστήματος και την επίλυση του CSD (Computational Structural Dynamics), στο οποίο δεν ασκούνται τα αεροδυναμικά φορτία. Οι ισοδύναμες τάσεις Von Mises  $\sigma_{von}$ , είναι μια θεωρητική ποσότητα και χρησιμοποιείται για να ορίσουμε, αν έχουμε διαρροή σε όλκιμο υλικό ή και για τον ορισμό της διάρκειας ζωής. Οι τάσεις von Mises, με βάση την αναφορά [4], υπολογίζονται από την εξίσωση:

$$\sigma_{von} = \sqrt{\frac{((\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}{2}}$$

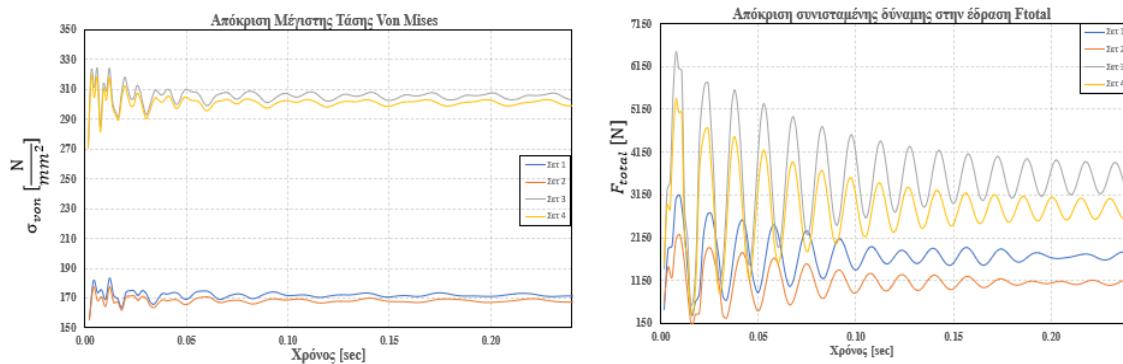
Μπορούμε να δούμε, στο σχήμα 4.19, ότι διατηρώντας στην λύση μας μόνο την φυγόκεντρο δύναμη το σύστημα καταλήγει, για την μόνιμη κατάσταση σε σταθερή τιμή, ενώ αντίθετα, όπως είδαμε και προηγουμένως, με εφαρμογή των αεροδυναμικών φορτίων έχουμε σταθερή περιοδική ταλάντωση της απόκρισης στην μόνιμη κατάσταση. Τα αεροδυναμικά φορτία λειτουργούν ως διέγερση για την κατασκευή, μιας και δεν υπάρχει άλλη εξωτερική δύναμη να διεγείρει την κατασκευή. Αν αφαιρεθούν αυτά πάιρνουμε μια σταθερή τιμή. Επίσης, βλέπουμε ότι η απόκριση για την φυγόκεντρο δύναμη μόνο, εμφανίζει υψηλότερες συχνότητες ταλάντωσης, έναντι του αεροελαστικού προβλήματος και μικρότερη ταχύτητα σύγκλισης στην μόνιμη κατάσταση. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι τα αεροδυναμικά φορτία λειτουργούν ως μια μορφή απόσβεσης για την κατασκευή, που οδηγούν σε περιοδική απόκριση. Η εισαγόμενη αυτή απόσβεση θα γίνει πιο εύκολα αντιληπτή κατά την κατάστρωση των εξισώσεων του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου, όπου θα δούμε ότι το μητρώο απόσβεσης περιλαμβάνει συνεισφορά από τα αεροδυναμικά φορτία.



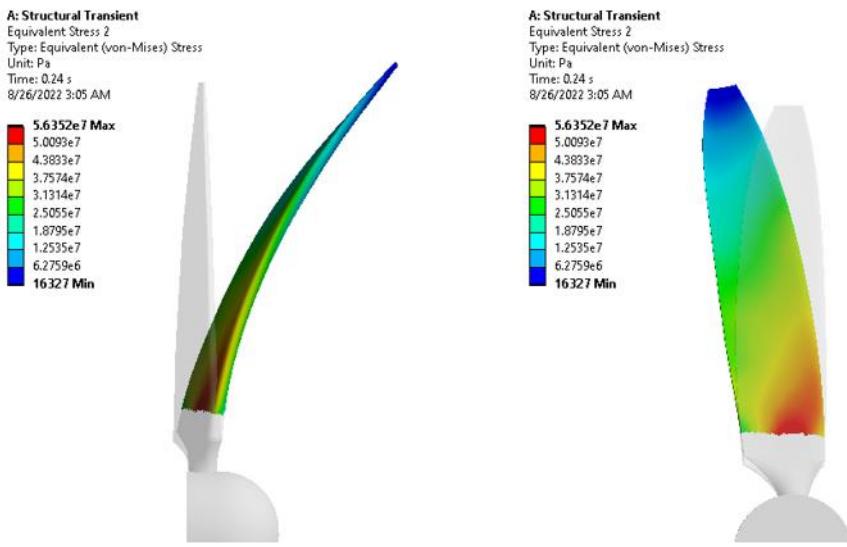
Σχήμα 4. 16 Απόκριση μετατόπισης και Von Mises τάσης για τα συστήματα FSI και CSD

Στο Σχήμα 4.20, παρουσιάζονται οι αποκρίσεις της μέγιστης τάσης Von Mises και της συνολικής δύναμης στην έδραση της προπέλας για τα 4 σετ τιμών. Τα ταλαντωτικά χαρακτηριστικά των τάσεων von Mises παραμένουν ίδια με αυτά των μετατοπίσεων. Διακρίνουμε για τα σετ τιμών (3,4) τις διπλάσιες τιμές των τάσεων, έναντι των μικρότερων ταχυτήτων. Η συχνότητα της απόκρισης στην μόνιμη κατάσταση είναι ίδια με την συχνότητα της περιστροφής της προπέλας. Για την συνολική δύναμη στην έδραση, παρατηρούμε ότι έχει ίδια δυναμικά χαρακτηριστικά με τα αεροδυναμικά φορτία. Δηλαδή, εμφανίζει διπλάσια συχνότητα από την συχνότητα περιστροφής της προπέλας (2 πτερύγια – 2 φορές επανάληψη στο μοτίβο). Οι μεγαλύτερες τιμές της συνολικής δύναμης έναντι της ώσης της προπέλας, οφείλονται στο γεγονός ότι πλέον συνυπολογίζεται και η φυγόκεντρος δύναμη.

Στο Σχήμα 4.21, παρουσιάζεται μια χρωματική απεικόνιση των τάσεων Von Mises για το πτερύγιο της προπέλας. Στο σχήμα αυτό φαίνεται επίσης και η απαραμόρφωτη κατάσταση για την προπέλα με τις μονάδες μέτρησης, που διακρίνονται στην χρωματική μπάρα του σχήματος, να είναι  $\left[\frac{N}{mm^2}\right]$ . Για να είναι ευανάγνωστα τα αποτελέσματα της παραμόρφωσης, το σχήμα παρουσιάζεται υπό κλίμακα (x4). Στο σχήμα αυτό, βλέπουμε τις μεγαλύτερες τιμές τάσεων, που εμφανίζονται κοντά στην έδραση της προπέλας.



Σχήμα 4. 17 Απόκριση τάσεων Von Mises και συνολικής δύναμης στην έδραση για τα 4 σετ τιμών



Σχήμα 4. 18 Χρωματική απεικόνιση κατανομής τάσεων Von Mises στο πτερύγιο της προπέλας στην οριζόντια θέση.

#### 4.8 Σύγκριση FSI – CFD

Στην ενότητα αυτή συγκρίνουμε τα αποτελέσματα της ρευστομηχανικής επίλυσης με αυτά της αεροελαστικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, συγκρίνουμε το περιεχόμενο των αρμονικών συνιστώσων για τα 2 προβλήματα και τις κατανομές του συντελεστή πίεσης για τις ίδιες διατομές.

#### Αρμονικές συνιστώσες φορτίων

Στον Πίνακα 4.5, παρουσιάζονται οι αρμονικές συνιστώσες για τα φορτία που προκύπτουν με εφαρμογή ανάλυσης Fourier. Στον πίνακα αυτό, συγκρίνονται τα αποτελέσματα από την ρευστομηχανική ανάλυση ( $3^{\circ}$  κεφ.) και την αεροελαστική ανάλυση της προπέλας, για τα φορτία της ώσης  $T$  και της κάμψης στον άξονα περιστροφής και στον άξονα του επιπέδου περιστροφής  $M_z$ . Με κίτρινο έχουν σημειωθεί επάνω στον πίνακα, οι τιμές που έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε.

Βλέπουμε ότι τα στατικά φορτία (0P), που υπολογίζονται από την CFD ανάλυση, είναι μεγαλύτερα από τα φορτία της αεροελαστικής ανάλυσης. Συγκεκριμένα, για μεγάλες περιστροφικές ταχύτητες, κοντά σε περιοχή συντονισμού με την κατασκευή ( $2000[\text{rpm}]$  – με  $1^{\text{η}}$  ιδιομορφή), το καμπτικό φορτίο  $M_z$ , παρόλο που η ώση παραμένει σχετικά σταθερή, προκύπτει πενταπλάσιο στο CFD από ότι στο FSI σύστημα. Η παραμόρφωση της κατασκευής οδηγεί σε μια πιο ομοιόμορφη κατανομή των δυνάμεων και έτσι σε μικρότερες ροπές.

Παρόλο που οι στατικές τιμές μειώνονται, οι 2P συνιστώσες για το καμπτικό φορτίο, που είναι και οι σημαντικότερες για την ακεραιότητα της κατασκευής, παραμένουν στην τάξη μεγέθους του CFD. Αντίθετα όμως, οι 2P συνιστώσες της ώσης, για την μεγάλη περιστροφική ταχύτητα,

υποδιπλασιάζονται. Τέλος, από τις τιμές του πίνακα αυτού, βλέπουμε μια σημαντική μείωση (10 έως 100 φορές) στα εύρη ταλάντωσης των υπόλοιπων αρμονικών συνιστωσών (1P,3P).

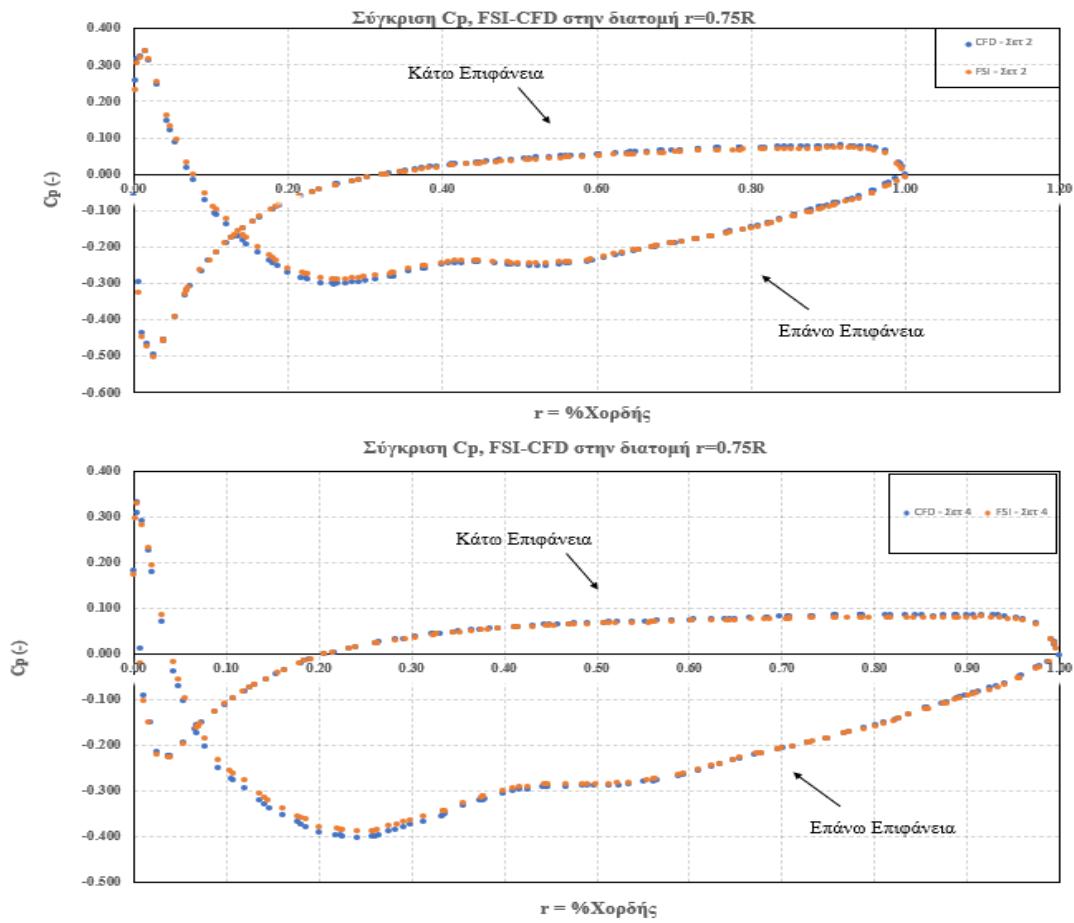
Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η παραμορφωσιμότητα της κατασκευής, έχει ως αποτέλεσμα να απορροφά μια ποσότητα ενέργειας των αεροδυναμικών φορτίων. Επιπλέον, έχοντας την ελευθερία οι διατομές να συστραφούν μεταξύ τους, αλλάζουν σε τέτοια θέση έτσι ώστε να μειώνονται οι διαφοροποιήσεις στις κατανομές των δυνάμεων (κυρίως της άντωσης), πράγμα το οποίο μειώνει την συνισταμένη ροπή.

Πίνακας 4. 5. Σύγκριση αποτελεσμάτων ανάλυσης Fourier για το ρευστομηχανικό και το αεροελαστικό σύστημα

Σετ τιμών	1o				2o				3o				4o			
	CFD	FSI	CFD	FSI	CFD	FSI	CFD	FSI	CFD	FSI	CFD	FSI	CFD	FSI	CFD	FSI
Μοντέλο																
Φόρτιση	T	T	Mz	Mz	T	T	Mz	Mz	T	T	Mz	Mz	T	T	Mz	Mz
Συνιστώσα																
0P	1720	1720	37.1	41.9	1120	1099	34.9	14	3476	3546	77.8	16.7	2839	2813	77.8	7.97
1P	2.38	2	5.25	2	2.7	1.2	6	0.75	1.9	1.99	10.3	5.3	3.7	2.59	10.3	1.3
2P	28	34	53.6	54.8	33	28	62	59.3	35.8	2.87	99.7	90	39.8	14.55	99.7	101
3P	4.2	0.1	5.7	0.21	1.5	0.06	1	0.0057	4.4	0.247	10	0.25	0.18	0.127	10	0.33

### Κατανομές Συντελεστή Πίεσης

Στο Σχήμα 4.22, παρουσιάζονται οι κατανομές του συντελεστή Πίεσης για διατομή των πτερυγίων σε απόσταση  $r = 0.75R$ , για το 2<sup>o</sup> και 4<sup>o</sup> σετ τιμών προσομοίωσης ( $1500 - 2000 [rpm]$ ,  $30 \left[ \frac{m}{s} \right]$ ). Οι τιμές των συντελεστών πίεσης διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους, με μια αναμενόμενη μικρή μείωση του συντελεστή για την παραμορφώσιμη κατασκευή. Οι διαφοροποιήσεις στις τιμές οφείλονται στην μεταβολή της γωνίας Pitch της προπέλας κατά την παραμόρφωση. Με βάση τους υπολογισμούς του μοντέλου, η μείωση της γωνίας προσβολής για την διατομή που βρίσκεται σε απόσταση  $r = 0.75R$  από την πλήμνη, είναι περίπου 0.21 μοίρες. Αυτή η στρέψη προς τα κάτω της διατομής (nose down), μπορεί επίσης να οφείλεται στο γεγονός ότι το αεροδυναμικό κέντρο για την προπέλα αυτή, στην συγκεκριμένη διατομή, βρίσκεται πίσω από τον ελαστικό άξονα. Ως αεροδυναμικό κέντρο ονομάζεται το σημείο στο οποίο ασκούνται οι δυνάμεις της άντωσης και της οπισθελκούσας σε κάθε διατομή.



Σχήμα 4. 19. Σύγκριση κατανομής συντελεστή πίεσης για τις διατομές στην θέση  $r = 0.75R$ , για το  $2^\circ$  και  $4^\circ$  σετ τιμών προσομοίωσης.

## 5. ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ - WHIRL FLUTTER

Στα προηγούμενα κεφάλαια ασχοληθήκαμε με αεροελαστικούς υπολογισμούς, κυρίως απόκρισης, με χρήση εμπορικών λογισμικών. Στο κεφάλαιο αυτό, μελετάμε ένα δυναμικό αεροελαστικό φαινόμενο ευστάθειας και υπολογίζουμε την λύση μας με αναλυτικές μεθόδους. Τα φαινόμενα ευστάθειας σε αντίθεση με την αεροελαστική απόκριση, εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά του συστήματος και όχι από το εφαρμοζόμενο φορτίο. Το φαινόμενο που μελετάμε, ονομάζεται whirl flutter (ελλειπτικός στροβιλισμός), το οποίο πολλές φορές, για αεροσκάφη με μεγάλες περιστρεφόμενες μάζες, μπορεί να αποδειχθεί καταστροφικό, οδηγώντας σε αστοχία του κινητήρα ή και ολόκληρης της πτέρυγας. Για το δικό μας μοντέλο μελετάμε το φαινόμενο αυτό για κινητήρες turboprop. Η διαφοροποίηση έναντι των άλλων εφαρμογών (π.χ. ελικόπτερα, tilt-rotor αεροσκάφη) έγκειται στις απλοποιήσεις που εισάγονται στις εξισώσεις του φαινομένου, λόγω μικρότερης διάστασης περιστρεφόμενων σωμάτων αλλά και μικρότερων σχετικών ταχυτήτων.

Αρχικά, γίνεται η περιγραφή των γυροσκοπικών φαινομένων που επηρεάζουν το σύστημά μας και στη συνέχεια παρουσιάζεται μια πλήρης ανάλυση του whirl flutter. Αφού δοθούν οι θεωρητικές βάσεις, προχωράμε με την κατάστρωση των εξισώσεων του Lagrange. Στη συνέχεια, με χρήση των εξισώσεων αυτών, γίνεται η κατάστρωση των εξισώσεων του συστήματος, όπου οι αεροδυναμικές δυνάμεις υπολογίζονται αναλυτικά με βάση την θεωρία ‘Strip Theory’. Στο τελευταίο κομμάτι της θεωρίας, παρουσιάζεται η μέθοδος επίλυσης του συστήματος τόσο για τα όρια ευστάθειας όσο και για τον υπολογισμό της απόκρισης και έτσι ολοκληρώνουμε με την παρουσίαση και τον σχολιασμό των διαγραμμάτων του προβλήματος. Μια πιο αναλυτική παρουσίαση των γυροσκοπικών φαινομένων, των εξισώσεων του Lagrange και της διαδικασίας επίλυσης των εξισώσεων του συστήματος μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [1]. Ενώ η ανάλυση του φαινομένου «Whirl Flutter» και της θεωρίας «Strip Theory» παρουσιάζονται στην αναφορά [9].

### 5.1 Γυροσκοπικά Φαινόμενα και Αναλυτική Δυναμική

Στην ενότητα αυτή αναλύεται η σημασία και η λειτουργία της γυροσκοπικής μετάπτωσης και επιπλέον, γίνεται η κατάστρωση των εξισώσεων του Lagrange, που θα χρειαστούμε για την παραγωγή των εξισώσεων του φαινομένου.

#### Μόνιμη Γυροσκοπική Μετάπτωση

Η παρουσίαση των γυροσκοπικών φαινομένων θα γίνει συνοπτικά, βασιζόμενοι στο απλοποιημένο πρόβλημα αξονοσυμμετρικών στερεών σωμάτων και δίνοντας έμφαση μόνο στις πτυχές που μας ενδιαφέρουν για την περιγραφή του φαινομένου που μελετάμε. Θεωρούμε ένα στερεό σώμα συμμετρικό ως προς έναν από τους αξόνες του, έστω τον Oz. Ως αρχή των αξόνων για τα συστήματα συντεταγμένων ορίζεται το κέντρο μάζας του στερεού. Με την επιλογή αυτή, έχουμε αποσύζευξη της περιστροφικής από την μεταφορική συνιστώσα της κίνησης. Ο αξόνας συμμετρίας του σώματος είναι και κύριος αξόνας αδράνειας του στερεού. Επίσης, θεωρούμε ότι και οι 2 άλλοι αξόνες (Ox και Oy) είναι κύριοι αξόνες αδράνειας. Έτσι, το μητρώο των ροπών αδράνειας προκύπτει διαγώνιο με τις ροπές ( $I_{xx}^0 = I_{yy}^0$  και  $I_{zz}^0$ ). Μετά από εφαρμογή των νόμων του Euler, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος στην μορφή :

$$\begin{aligned} M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z \\ M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y + (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x \\ M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y = I_{zz}\dot{\omega}_z \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι σύστημα μη γραμμικών κανονικών διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης ως προς τις γωνιακές ταχύτητες, οι οποίες εκφράζονται στο δεμένο πάνω στο στερεό σύστημα συντεταγμένων. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων εκφράζονται και οι ροπές αδράνειας. Έτσι, επιτυγχάνουμε να έχουν σταθερές τιμές σε όλη την διάρκεια της κίνησης.

Οι γωνιακές ταχύτητες στις παραπάνω εξισώσεις, ορίζονται με βάση τις γωνίες Euler, οι οποίες αποτελούν ένα τεχνητό σύστημα συντεταγμένων, με βάση το οποίο γίνεται ο καθορισμός του προσανατολισμού ενός στερεού και παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.1. Τα συστήματα συντεταγμένων είναι όλα στερεωμένα στο κέντρο Ο και η σειρά των περιστροφών έχει την εξής ακολουθία:

1. Περιστροφή του F(OXYZ) γύρω από τον OZ κατά φ (μετάπτωση) → νέα θέση  $f'(Oz'y'z')$
2. Περιστροφή  $f'$  γύρω από τον  $Ox'$  κατά θ (κλόνηση) → νέα θέση  $f''(Ox''y''z'')$
3. Περιστροφή του  $f''$  γύρω από τον  $Oz''$  κατά ψ (συστροφή) → νέα θέση  $f(Oxyz)$

Με βάση την αλληλουχία αυτή και την αρχή της επαληλίας, η γωνιακή ταχύτητα του στερεού υπολογίζεται :

$$\underline{\omega} = \dot{\phi} \underline{e}_z + \dot{\theta} \underline{e}_{x'} + \dot{\psi} \underline{e}_{z''}$$

Στη συνέχεια προβάλουμε το διάνυσμα αυτό στους άξονες του συστήματος f (Oxyz), με σκοπό τον υπολογισμό των συνιστωσών της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα συντεταγμένων f:

$$\omega_x = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_x, \omega_y = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_y, \omega_z = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_z$$

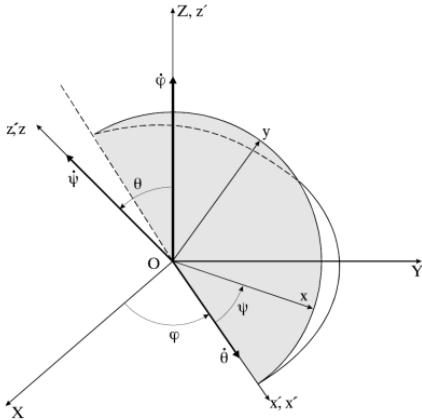
Μετά από εκτέλεση των πράξεων, οι εκφράσεις των συνιστωσών για τη γωνιακή ταχύτητα στο σύστημα f είναι :

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \sin\theta \sin\psi \\ \omega_y = -\dot{\theta} \sin\psi + \dot{\phi} \cos\psi \sin\theta \\ \omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta \end{cases}$$

Αντικατάσταση των εξισώσεων αυτών στις εξισώσεις του Euler, μας δίνει το σύστημα των εξισώσεων της περιστροφικής κίνησης, για αξονοσυμμετρικό στερεό σώμα, το οποίο περιστρέφεται ως προς τον άξονα συμμετρίας του :

$$\begin{cases} M_x = I(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin(\theta) \cos(\theta)) + I_{zz}^0 \dot{\phi} (\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) \sin(\theta) \\ M_y = I(\ddot{\phi} \sin(\theta) - 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos(\theta)) - I_{zz}^0 \dot{\theta} (\dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}) \\ M_z = I_{zz} (\ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta} \sin(\theta) + \ddot{\psi}) \end{cases} \quad (III)$$

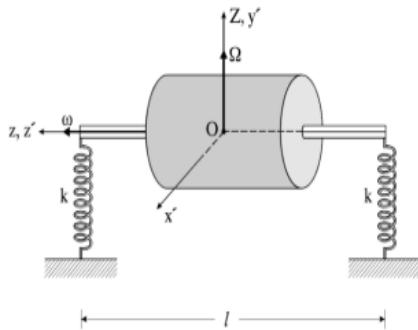
όπου  $I = I_{xx}^0 = I_{yy}^0$ .



Σχήμα 5. 1 Γωνίες Euler

( $\omega = \dot{\psi}_0$ ). Τα ελατήρια στα οποία εδράζεται ο κύλινδρος είναι όμοια με στιβαρότητα  $k$  και η γωνιακή ταχύτητα στον  $Z$  είναι ( $\Omega = \dot{\phi}_0$ ).

Εφαρμογή των εξισώσεων του συστήματος (III), μας δίνει :



Σχήμα 5. 2 Σύστημα μόνιμης γυροσκοπικής μετάπτωσης

προς άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν οι 2 προηγούμενοι. Η συμπεριφορά αυτή ονομάζεται νόμος της γυροσκοπικής μετάπτωσης. Λόγω του αποτέλεσματος αυτού, θα δούμε στη συνέχεια ότι προκαλείται σύζευξη των διαφορετικών βαθμών ελευθερίας της προπέλας, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται η σύνθετη κίνηση του ελλειπτικού στροβίλισμού.

### Αναλυτική Δυναμική

Κατά την περιγραφή του μοντέλου μας θα χρειαστεί, όπως έγινε και στα προηγούμενα κεφάλαια, να γίνει η κατάστρωση των εξισώσεων που διέπουν το σύστημα. Γενικά, υπάρχουν δύο κατευθύνσεις, στις οποίες μπορεί να κινηθεί κανείς για την κατάστρωση δυναμικών εξισώσεων ενός μηχανικού συστήματος. Η 1<sup>η</sup> προσέγγιση ονομάζεται διανυσματική (ή Νευτώνεια) δυναμική και κάνει χρήση των εξισώσεων του Newton και του Euler στην διανυσματική τους μορφή, με

Επίλυση των εξισώσεων αυτών οδηγεί στον υπολογισμό των γωνιών Euler και έτσι στον προσδιορισμό του προσανατολισμού του στερεού. Εφαρμόζουμε τώρα τις παραπάνω εξισώσεις για το σύστημα που παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.2. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιείται σε αεροσκάφη για την μέτρηση της στροφής τους και αποτελεί ένα σύστημα μόνιμης γυροσκοπικής μετάπτωσης. Για την κατάσταση μόνιμης μετάπτωσης (με βάση τις γωνίες Euler) ισχύει ότι :

$$\theta = \theta_0 = 90^\circ, \varphi = \dot{\phi}_0, \psi = \dot{\psi}_0$$

Δηλαδή, η γωνιακή ταχύτητα, ως προς τον άξονα  $Ox'$ , είναι μηδενική και ως προς τους άλλους 2 άξονες του Euler έχει σταθερό μέτρο. Για το σύστημα του σχήματος 5.2 έχουμε σταθερή γωνιακή ταχύτητα, ως προς τον  $z$

$$M_{x''} = I_{zz}^0 \dot{\phi}_0 \dot{\psi}_0 e_{x''} = I_{zz}^0 \omega \Omega e_{x''}$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{M_{x''}}{\omega I_{zz}^0} \quad (5.1)$$

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε, για την ανάλυση του whirl flutter, έχει πολύ μεγάλη σημασία. Η εξίσωση (5.1) μας λέει ότι, όταν ένα αξονοσυμμετρικό σώμα (προπέλα και άτρακτος) περιστρέφεται ως προς τον άξονα συμμετρίας του (άξονας περιστροφής προπέλας), η εφαρμογή ροπής ως προς άξονα κάθετο στον άξονα συμμετρίας του (ροπή στους άξονες του επίπεδου περιστροφής της προπέλας), έχει ως αποτέλεσμα την μετάπτωση του σώματος (στροφή  $\varphi$ ) ως

στόχο την περιγραφή της μεταφορικής και περιστροφικής συνιστώσας της κίνησης ενός σώματος. Η 2<sup>η</sup> προσέγγιση καλείται αναλυτική δυναμική και καταστρώνεται με χρήση των εξισώσεων Lagrange. Οι εξισώσεις αυτές εκφράζονται συναρτήσει της δυναμικής και της κινητικής ενέργειας (βαθμωτές ποσότητες) του συστήματος. Και οι 2 μεθοδολογίες είναι ισοδύναμες στην τελική λύση που προσφέρουν. Τα πλεονεκτήματα της μιας προς την άλλη βρίσκονται στην εφαρμογή. Έτσι, η επιλογή μας για το ποια θα χρησιμοποιήσουμε, έχει να κάνει με το σύστημα που αντιμετωπίζουμε και τα αποτελέσματα που θέλουμε να παρατηρήσουμε.

Κατά την νευτώνεια δυναμική, οι εξισώσεις κίνησης για πολύπλοκα συστήματα ή συστήματα πολλών σωμάτων, παράγονται αναλύοντας κάθε συνιστώσα ξεχωριστά, με αποτέλεσμα να χρειάζεται να υπολογίσουμε δυνάμεις οι οποίες προκύπτουν από τους κινηματικούς περιορισμούς του συστήματος. Αντίθετα, η αναλυτική δυναμική με την χρήση βαθμωτών ποσοτήτων για την κατάστρωση των εξισώσεων, εξετάζει το σύστημα ως σύνολο και έτσι, δεν χρειάζεται να γίνει ο υπολογισμός των δυνάμεων των κινηματικών περιορισμών. Η εφαρμογή της αναλυτικής δυναμικής βασίζεται στον ορισμό των γενικευμένων συντεταγμένων και στην κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων του Lagrange. Στη συνέχεια, γίνεται μια περιγραφή των βασικών χαρακτηριστικών της μεθόδου, χωρίς την απόδειξη των εξισώσεων. Αναλυτική κατάστρωση των εξισώσεων και περιγραφή των αρχών που διέπουν την αναλυτική δυναμική μπορούν να βρεθούν στην αναφορά [1].

Ως γενικευμένες συντεταγμένες ( $q_n$ ) ορίζεται κάθε σύνολο μεταβλητών, το οποίο είναι ικανό να ορίσει πλήρως την θέση ενός σώματος. Οι συντεταγμένες αυτές αποτελούν μαθηματικές έννοιες. Στην γενική περίπτωση, η κίνηση ενός δυναμικού συστήματος μπορεί να υπακούει σε k περιορισμούς (δεσμούς) στην μορφή :

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) = 0 , \quad i = 1, 2 \dots k$$

Δεσμοί αυτής της μορφής ονομάζονται ολόνομοι, ενώ μπορεί να γίνει ο πρόσθετος διαχωρισμός αυτών σε ρεόνομους (εξαρτώμενοι από τον χρόνο t) και σκληρόνομους (ανεξάρτητοι του t). Με χρήση των ολόνομων δεσμών, μπορούμε να μειώσουμε τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας κατά k. Διαφορετικοί δεσμοί μπορούν να παρουσιαστούν στην μορφή :

$$f_i(q_1, \dots, q_n, t) \geq 0 , \quad f_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = 0$$

Δεσμοί που ανήκουν στις 2 αυτές μορφές ονομάζονται ανολόνομοι και η διαφορά τους με τους ολόνομους είναι ότι δεν μπορούν να ολοκληρωθούν, ώστε να γίνει μείωση των αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας. Οι ολόνομοι περιορισμοί για κάποια προβλήματα, μας βοηθάει να εκφρασθούν ως προς τις γενικευμένες ταχύτητες. Έτσι, παραγωγίζοντας την έκφραση των ολόνομων περιορισμών έχουμε :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{q}} \underline{\dot{q}} = A(\underline{q}) \underline{\dot{q}} = \underline{0}$$

Η γραφή στην μορφή αυτή ονομάζεται Pfaffian και το μητρώο A καλείται ως ο Ιακωβιανός των περιορισμών και έχει την μορφή :

$$A(\underline{q}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

Η παραγωγή των εξισώσεων του Lagrange γίνεται με χρήση της αρχής των δυνατών έργων (ΑΔΕ). Η ΑΔΕ βασίζεται στην θεώρηση δυνατών απειροστών μετατοπίσεων  $\delta \underline{r}$ , οι οποίες είναι αυθαίρετες, αλλά ικανοποιούν τους κινηματικούς περιορισμούς του συστήματος, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η διαφοροποίηση ανάμεσα στις πραγματικές μετατοπίσεις  $d\underline{r}$  και τις  $\delta \underline{r}$ , είναι ότι οι πρώτες πραγματοποιούνται στην διάρκεια απειροστού χρόνου, στον οποίο μπορεί να αλλάζουν οι δεσμοί του συστήματος και οι δυνάμεις.

Η αρχή των δυνατών έργων ξεκινάει με την θεώρηση ότι για ένα σύστημα με  $N$  υλικά σημεία, το οποίο βρίσκεται σε στατική ισορροπία, το έργο των εφαρμοζόμενων δυνάμεων και των δυνάμεων που προέρχονται από τους δεσμούς είναι μηδέν :

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left( R'_i + f_i \right) \delta \underline{r}_i , \text{ όπου } R'_i = 0 \text{ αφού δεν επιτελούν έργο}$$

και με βάση την αρχή του D'Alembert επεκτείνεται σε δυναμικά συστήματα, με την θεώρηση ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα, αποτελούνται από τις εφαρμοζόμενες δυνάμεις  $f_i$  και τις αδρανειακές  $m_i \ddot{r}_i$ . Έτσι έχουμε :

$$\sum_{i=1}^N \left( f_i - m_i \ddot{r}_i \right) \delta \underline{r}_i = 0 \Rightarrow \delta W + \delta W_{in} = 0 , \quad \delta W_{in} = \sum_{i=1}^N (-m_i \ddot{r}_i) \delta \underline{r}_i$$

Με χρήση της ΑΔΕ και ενός μετασχηματισμού ανάμεσα στις συντεταγμένες της νευτώνειας δυναμικής και τις γενικευμένες συντεταγμένες στην μορφή  $\underline{r} = \underline{r}(q_1, \dots, q_n, t)$ , καταλήγουμε στην έκφραση :

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (5.2)$$

όπου  $Q_j$  οι γενικευμένες δυνάμεις, που υπολογίζονται από την εξίσωση :  $Q_j = \sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ . Θεωρώντας το σύστημά μας ολόνομο και τις γενικευμένες συντεταγμένες  $q_j$  ανεξάρτητες μεταξύ τους, μπορούμε να μηδενίσουμε τους συντελεστές του παραπάνω αθροίσματος. Έτσι έχουμε :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (5.3)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι οι γνωστές Εξισώσεις του Lagrange, με  $T$  την κινητική ενέργεια του συστήματος και  $Q_j$  τις γενικευμένες δυνάμεις. Μια διαφορετική διατύπωση της (5.3) γίνεται εκφράζοντας τις γενικευμένες δυνάμεις ως άθροισμα από τις ιξώδεις (viscous) και μη ιξώδεις (non viscous) δυνάμεις. Έτσι έχουμε την μορφή :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nv} \quad (5.4)$$

όπου στην γενική περίπτωση η συνάρτηση του Lagrange  $L$  είναι :

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - V(q_j, t)$$

με  $V$  η δυναμική ενέργεια του συστήματος. Ως  $Q_j^{nv}$  ορίζονται οι μη ιξώδεις γενικευμένες δυνάμεις. Οι ιξώδεις δυνάμεις εισάγονται στην (5.4) με τον όρο  $\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}$ , όπου  $D$  η συνάρτηση σκέδασης του Rayleigh στην μορφή:

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

Σε περίπτωση που έχουμε ανολόνομους δεσμούς στο σύστημα, οι γενικευμένες συντεταγμένες δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Έτσι, δεν μπορούμε να πάμε από την σχέση (5.2) στην (5.3). Αν όμως οι δεσμοί αυτοί μπορούν να γραφούν στην Pfaffian μορφή, που παρουσιάσαμε προηγουμένως, τότε μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα και να μηδενίσουμε τους συντελεστές της (5.2), παίρνοντας τελικά την μορφή :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} = Q_j^{nv} + A^T(\underline{q}) \underline{\lambda}_{[kx1]} \quad (5.5)$$

όπου  $\lambda$  το διάνυσμα των πολλαπλασιαστών Lagrange οι οποίοι εκφράζουν το μέγεθος των δυνάμεων που προκύπτουν από τους αντίστοιχους δεσμούς. Το σύστημα (5.5) αποτελεί ένα σύστημα  $6xn$  διαφορικών εξισώσεων ( $6$  βαθμοί ελευθερίας για  $n$  αριθμό σωμάτων) με  $(6xn + k)$  αγνώστους και μαζί με τις εξισώσεις των περιορισμάτων στην pfaffian μορφή τους μπορεί να επιλυθεί για τον υπολογισμό των γενικευμένων συντεταγμένων και των πολλαπλασιαστών του Lagrange. Έχουμε πλέον ολοκληρώσει με την κατάστρωση των εξισώσεων του Lagrange. Στο κεφάλαιο αυτό εμείς θα δουλέψουμε με τις εξισώσεις στην μορφή (5.4), μιας και δεν έχουμε ανολόνομους δεσμούς και δεν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός των δυνάμεων στις εδράσεις. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται η παρουσίαση του φαινομένου Whirl Flutter.

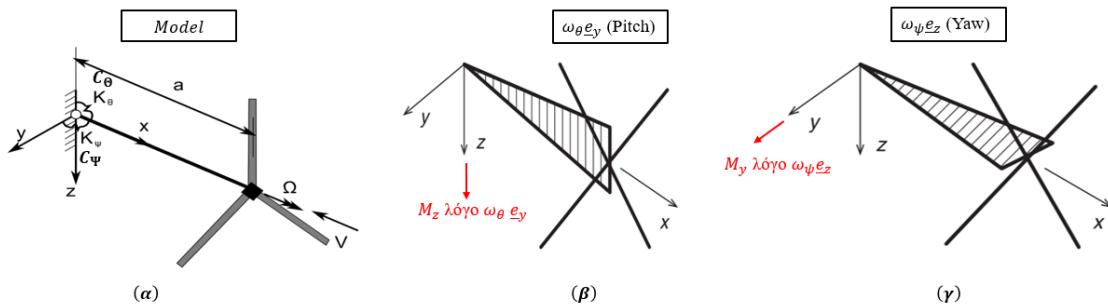
## 5.2 Whirl Flutter και αναπτυσσόμενες δυνάμεις

### 5.2.1 Φαινόμενο Whirl Flutter

Το φαινόμενο Whirl Flutter (WF), το οποίο ονομάζεται και γυροσκοπικό flutter, όπως αναφέρθηκε συνοπτικά στο  $4^{\circ}$  κεφάλαιο, υπάγεται στην κατηγορία των δυναμικών αεροελαστικών φαινομένων ευστάθειας και εμφανίζεται κυρίως σε turboprop κινητήρες ή γενικά σε περιστρεφόμενα συστήματα με μεγάλη μάζα (ρότορες ελικοπτέρων). Η εμφάνισή του οφείλεται στην παραμορφώσιμη έδραση του κινητήρα στην πτέρυγα του αεροσκάφους. Οι περιστρεφόμενες μάζες αυξάνουν τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος και δημιουργούν πρόσθετες δυνάμεις (Φυγόκεντρες, Coriolis, Γυροσκοπικές ροπές). Το κύριο πρόβλημα, που εμφανίζεται σε συστήματα τέτοιας μορφής, είναι η άνιση κατανομή της άντωσης κατά μήκος των πτερυγίων της προπέλας, που ταλαντώνονται εγκάρσια (flapwise). Η κλασική λύση, η οποία θεωρείται και πιο απλή, βασίζεται στην υπόθεση στερεής προπέλας και μπορεί να δώσει καλά αποτελέσματα για εφαρμογές σε turboprop αεροσκάφη, για τα οποία οι φυσικές ιδιοσυχνότητες της προπέλας είναι πολύ υψηλότερες από τις συχνότητες της έδρασης. Για μεγάλους κινητήρες turboprop, όπως μεγάλα στρατιωτικά αεροσκάφη, με κλίση ρότορα (tilt - rotor aircraft), η εύρεση των ορίων ευστάθειας απαιτεί να λάβουμε υπόψη την παραμορφωσιμότητα των περιστρεφόμενων σωμάτων.

Στην παρούσα ανάλυση θα επιλύσουμε το απλοποιημένο πρόβλημα της στερεής προπέλας και θα δουλέψουμε με το μοντέλο του κλασικού WF.

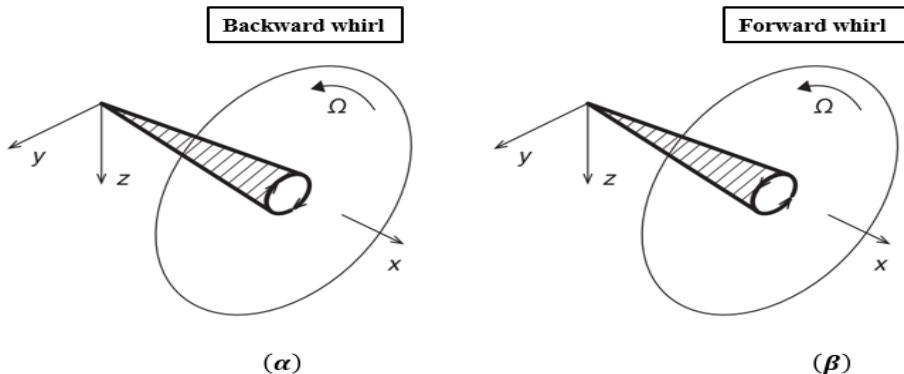
Για το κλασικό μοντέλο (ή και 2 βαθμών ελευθερίας), αντικαθιστούμε την έδραση του κινητήρα στην πτέρυγα με 2 στρεπτικά ελατήρια με σταθερές  $K_\theta, K_\psi$  για τους 2 πρόσθετους βαθμούς ελευθερίας, που ονομάζονται Yaw ( $\psi$ ) και Pitch ( $\theta$ ), όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3α. Η προπέλα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  ως προς τον  $x$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν δεν λάβουμε υπόψη μας την περιστροφή της προπέλας και τις αεροδυναμικές δυνάμεις, εμφανίζονται 2 ανεξάρτητες ιδιομορφές με ιδιοσυχνότητες  $\omega_\theta$  και  $\omega_\psi$ , οι οποίες παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.3β και 5.3γ, με την 1<sup>η</sup> να οφείλεται στην στρέψη στην διεύθυνση  $y$  (Pitch) και η 2<sup>η</sup> στην στρέψη στην διεύθυνση  $z$  (Yaw).



Σχήμα 5. 3 (α) Κλασικό μοντέλο (2 DOF's) whirl flutter, (β) Ιδιομορφή ελευθερίας Pitch (γ) Ιδιομορφή ελευθερίας Yaw

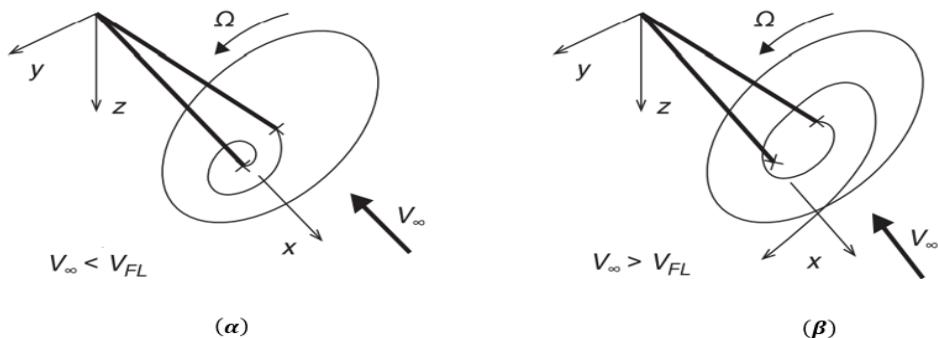
Όταν λαμβάνουμε υπόψη μας την περιστρεφόμενη προπέλα, η κίνηση του συστήματος γίνεται η χαρακτηριστική γυροσκοπική κίνηση και οι ιδιομορφές προκύπτουν από την σύζευξη των ανεξάρτητων ιδιομορφών του παραπάνω σχήματος. Η σύζευξη αυτή προκαλεί την χαρακτηριστική κίνηση του φαινομένου WF. Η σύζευξη των ιδιομορφών οφείλεται στο γεγονός ότι για την ταχέως περιστρεφόμενη προπέλα, ως προς τον άξονα συμμετρίας της ( $x$ ), η περιστροφική ταχύτητα  $\omega_\psi$  ως προς άξονα κάθετο στον άξονα περιστροφής της προπέλας ( $z$ ), έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ροπής ως προς τον τρίτο άξονα, που είναι κάθετος στο επίπεδο των 2 προηγούμενων ( $y$ ). Η ίδια συμπεριφορά παρατηρείται και λόγω της περιστροφικής ταχύτητας  $\omega_\theta$  (ως προς τον  $y$ ). Από την παραπάνω περιγραφή, μπορούμε εύκολα να αντιληφθούμε ότι έχουμε συμπεριφορά γυροσκοπικής μετάπτωσης για τους 2 άξονες.

Η σύζευξη των 2 παραπάνω κινήσεων έχει ως αποτέλεσμα ο άξονας της προπέλας ( $x$ ) να διαγράφει μια ελλειπτική τροχιά με μεταβαλλόμενα πλάτη, στο επίπεδο περιστροφής του. Η φορά της κίνησης για τον άξονα της προπέλας είναι αντίστροφη της φοράς περιστροφής (backward whirl mode) για την ιδιομορφή με την χαμηλότερη ιδιοσυχνότητα, και σύστροφη (forward) για την ιδιομορφή με την υψηλότερη συχνότητα. Οι κινήσεις αυτές του άξονα της προπέλας αντιστοιχούν στην χαμηλής ταχύτητας και υψηλής ταχύτητας γυροσκοπική μετάπτωση του συστήματος και παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.4. Αυξανόμενης της περιστροφικής ταχύτητας της προπέλας ( $\Omega$ ), αυξάνεται η διαφορά ανάμεσα στις ιδιοσυχνότητες του συστήματος για τις 2 καταστάσεις (backward και forward). Οι ιδιομορφές της γυροσκοπικής κίνησης, που περιγράψαμε έως το σημείο αυτό, είναι πολύπλοκες, καθώς οι ανεξάρτητες ιδιομορφές της προπέλας (σχήμα 5.3) έχουν μεταξύ τους 90 μοίρες διαφορά φάσης.



Σχήμα 5. 4 Ιδιομορφές λόγω της γυροσκοπικής κίνησης (α) Αντίρροπα (β) Ομόρροπα

Η γυροσκοπική κίνηση της προπέλας έχει ως αποτέλεσμα να αλλάζει η γωνία προσβολής των πτερυγίων της. Αντό με την σειρά του επιδρά στην ανάπτυξη μη σταθερών αεροδυναμικών φορτίων με άνισες κατανομές, το οποίο για συγκεκριμένες συνθήκες μπορεί να οδηγήσει στο φαινόμενο αστάθειας που ονομάζουμε WF. Γενικά, η αστάθεια μπορεί να εμφανιστεί μόνο για την αντίστροφη ελλειπτική κίνηση (backward). Στο Σχήμα 5.5, παρουσιάζεται το σύστημα που μελετάμε, σε κατάσταση ευστάθειας ( $V_\infty < V_{FL}$ ) και αστάθειας ( $V_\infty > V_{FL}$ ). Ως  $V_{FL}$  ορίζεται η κρίσιμη ταχύτητα της ελεύθερης ροής του αέρα, για την οποία εμφανίζεται το φαινόμενο WF. Όταν βρισκόμαστε στην ευσταθή περιοχή ταχυτήτων, η κίνηση αποσβένεται από το σύστημα (Σχήμα 5.5α), ενώ αντίθετα για ταχύτητες μεγαλύτερες της  $V_{FL}$  (Σχήμα 5.5β) τα πλάτη ταλάντωσης αυξάνονται με τον χρόνο. Για την κρίσιμη κατάσταση με  $V_\infty = V_{FL}$ , η συνολική απόσβεση του συστήματος είναι μηδενική.



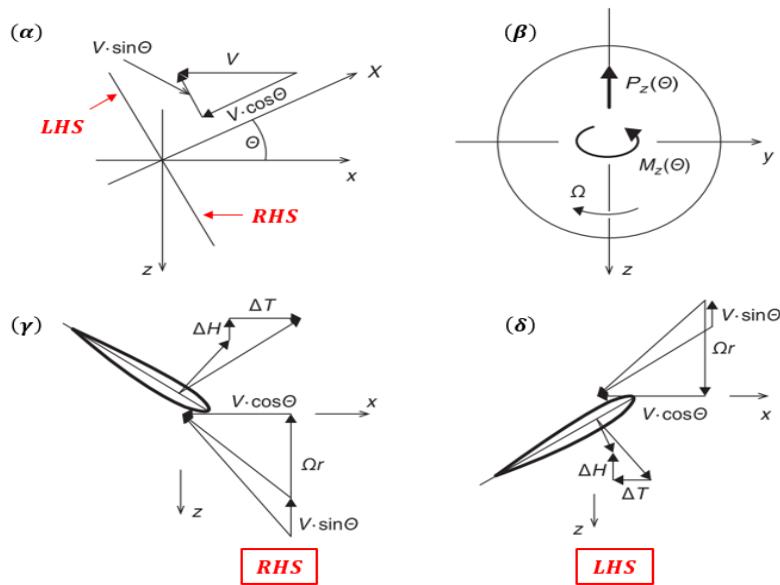
Σχήμα 5. 5 (α) Ευσταθής και (β) Ασταθής κατάσταση γυροσκοπικών ταλαντώσεων για την ιδιομορφή του backward flutter

Το μοντέλο μας, για την εύρεση των ορίων ευστάθειας, μπορεί να λυθεί είτε αναλυτικά είτε με υπολογιστικές μεθόδους. Για την εφαρμογή υπολογιστικών μεθόδων απαιτείται να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα, που εφαρμόσαμε στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο, με την διαφορά τώρα ότι οι περιορισμοί του προβλήματος, τα πλέγματα και οι μέθοδοι επίλυσης διαφοροποιούνται. Λόγω των μεγάλων χρόνων επίλυσης για τα πολλά διαφορετικά σετ παραμέτρων, που αναζητάμε να υπολογίσουμε την συμπεριφορά του συστήματος, καταφεύγουμε σε αναλυτικές διαδικασίες με την

εισαγωγή κάποιων βασικών απλοποιήσεων. Το προτέρημα της αναλυτικής κατάστρωσης και επίλυσης των εξισώσεων είναι ότι μπορούμε εύκολα να μεταβάλουμε τις παραμέτρους και να παρατηρήσουμε την συμπεριφορά του συστήματος.

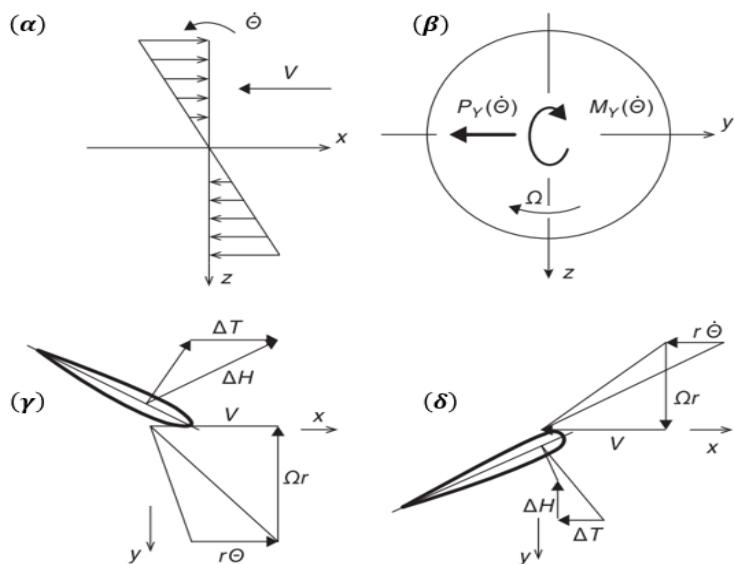
### 5.2.2 Ανάλυση δυνάμεων προπέλας

Για την περιγραφή των χαρακτηριστικών των αεροδυναμικών φορτίων, βασιζόμαστε στις αρχές της θεωρίας «quasi-steady» (οιονεί στατική). Με βάση την θεωρία αυτή, οι μετατοπίσεις των βαθμών ελευθερίας θεωρούνται μικρές, πράγμα που μας επιτρέπει όπως θα δούμε στην πορεία, κάποιες απλοποιήσεις στο μοντέλο. Επειδή και για τους 2 βαθμούς ελευθερίας ( $\psi$ ,  $\theta$ ) οι γυροσκοπικές κινήσεις που αναπτύσσονται έχουν τον ίδιο χαρακτήρα, στη συνέχεια διεξάγουμε την ανάλυση των δυνάμεων μόνο για την περιστροφή  $\theta$  (άξονας pitch). Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων (Oxyz), το οποίο βρίσκεται σταθερά δεμένο στην πλήμνη της προπέλας. Στο Σχήμα 5.6 παρουσιάζονται οι αναπτυσσόμενες δυνάμεις στην προπέλα, λόγω της εκτροπής  $\theta$ . Οι όροι RHS (Right Hand Side) και LHS (Left Hand Side), που φαίνονται στο σχήμα, αναφέρονται στο δεξιά του άξονα  $z$  και αριστερά του άξονα  $z$  περύγιο της προπέλας αντίστοιχα. Θεωρώντας την προπέλα σε κλίση ως προς την ελεύθερη ροή, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.6α, αναλύουμε την ταχύτητα σε συνιστώσες παράλληλα στην ταχύτητα της ελεύθερης ροής και στο επίπεδο περιστροφής της προπέλας (κάθετα στην  $V$ ). Μπορούμε να πούμε, παρατηρώντας τα σχήματα 5.6γ και δ, ότι το RHS κομμάτι της προπέλας παράγει μεγαλύτερη ώστη από ό, τι το LHS. Αποτέλεσμα αυτού είναι η ανάπτυξη της ροπής  $M_z(\theta)$  (σχήμα 5.6β), που ονομάζεται ροπή yaw, λόγω της διεύθυνσης του άξονα στον οποίο ασκείται. Επιπλέον, λόγω της άνισης κατανομής των δυνάμεων  $\Delta H$ , που αναπτύσσονται στις αεροτομές των σχημάτων 5.6γ και δ, έχουμε και μια κάθετη δύναμη στον ίδιο άξονα  $P_z(\theta)$ . Η ροπή  $M_z(\theta)$  έχει την ίδια φορά με την ταχύτητα  $\omega_\psi e_z$ , για την αντίρροπη κίνηση της προπέλας (backward), το οποίο σημαίνει ότι ο χαρακτήρας της ροπής αυτής τείνει προς την αποσταθεροποίηση του συστήματος.



Σχήμα 5.6 Αεροδυναμικές δυνάμεις λόγω εκτροπής  $\theta$  (pitch) της προπέλας

Εκτός από τις δυνάμεις που αναπτύσσονται λόγω της εκτροπής της γωνίας  $\Theta$ , υπάρχουν και δυνάμεις που οφείλονται στην περιστροφική ταχύτητα  $\omega_\theta \underline{e}_y = \dot{\Theta} \underline{e}_y$ , οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.7. Οι διατομές των πτερυγίων που παρουσιάζονται στα σχήματα 5.7γ και δ, αναφέρονται σε οριζόντια θέση των πτερυγίων. Η γωνιακή ταχύτητα  $\dot{\Theta}$  επηρεάζει τον αέρα που προσκρούει στην προπέλα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7<sup>a</sup>. Έτσι αναπτύσσεται η ροπή  $M_Y(\dot{\Theta})$  (σχήμα 5.7β) με φορά αντίθετη από την φορά της ταχύτητας  $\dot{\Theta}$ . Επιπλέον, λόγω των δυνάμεων  $\Delta H$ , που αναπτύσσονται στις αεροτομές των σχημάτων 5.7γ και δ, δημιουργείται η δύναμη  $P_Y(\dot{\Theta})$ , η οποία ασκείται στην φορά του  $-y$ . Στην δύναμη αυτή οφείλεται η σύζευξη των κινήσεων γύρω από τους άξονες  $z, y$ . Όλες οι δυνάμεις που παρουσιάστηκαν έως τώρα και οφείλονται σε μεταβολές της γωνίας  $\Theta$ , εμφανίζονται και για μεταβολές στην γωνία  $\Psi$  αντίστοιχα, με την ίδια ακριβώς συμπεριφορά ( $M_y(\Psi), P_y(\Psi), M_z(\dot{\Psi}), P_z(\dot{\Psi})$ ).



Σχήμα 5.7 Αεροδυναμικές δυνάμεις λόγω της γωνιακής ταχύτητας  $\dot{\Theta} \underline{e}_y$

Γενικά, για τα αεροδυναμικά φορτία που αναπτύσσονται λόγω της γυροσκοπικής κίνησης της προπέλας, μπορούμε να πούμε ότι τα σημαντικότερα αυτών σχετικά με το φαινόμενο WF, είναι η ροπή λόγω εκτροπής της γωνίας  $\Theta$  ( $M_Z(\Theta)$  ροπή yaw) και η ροπή λόγω εκτροπής της γωνίας  $\Psi$  ( $M_y(\Psi)$  ροπή pitch). Στην επόμενη ενότητα γίνεται η κατάστρωση των εξισώσεων του συστήματος.

## 5.3 Κατάστρωση εξισώσεων

### 5.3.1 Εξισώσεις κίνησης - Lagrange

Για την κατάστρωση των εξισώσεων κίνησης, σύμφωνα με την θεωρία της αναλυτικής δυναμικής, που παρουσιάστηκε προηγουμένως, χρειάζεται να υπολογίσουμε την κινητική και δυναμική ενέργεια του συστήματος, αφού πρώτα ορίσουμε το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων, οι οποίες θα είναι ικανές να εκφράσουν πλήρως τον προσανατολισμό του μοντέλου μας. Το σύστημά μας αποτελείται από την προπέλα που σχεδιάστηκε στο 2<sup>o</sup> κεφάλαιο. Επίσης, μοντελοποιούμε τα υπόλοιπα στοιχεία του κινητήρα ως κυλινδρικό στερεό σώμα, στο ένα άκρο του οποίου εδράζεται η προπέλα και στο άλλο άκρο του ο κυλινδρος εδράζεται στην πτέρυγα του αεροσκάφους. Το μοντέλο παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.8α. Η εισαγωγή της κυλινδρικής γεωμετρίας στο μοντέλο μας γίνεται, ώστε να συμπεριλάβουμε την συνεισφορά από τα υπόλοιπα στοιχεία του κινητήρα, στην συνολική ροπή αδράνειας. Η έδραση του κινητήρα με την πτέρυγα μοντελοποιείται με 2 στρεπτικά ελατήρια, όπως αναφέραμε και προηγουμένως.

Στο Σχήμα 5.8β, απεικονίζεται το κινηματικό σχήμα και οι δυνάμεις που προκύπτουν από την γυροσκοπική κίνηση. Ο δείκτης P για τις ροπές του σχήματος σημαίνει ότι η αντίστοιχη ροπή για τον συγκεκριμένο άξονα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο περιστροφής της προπέλας. Ως γενικευμένες συντεταγμένες ορίζονται οι 3 γωνίες ( $\theta, \Psi, \varphi$ ), οι οποίες βρίσκονται στους άξονες pitch, yaw και στον άξονα περιστροφής της προπέλας αντίστοιχα. Επίσης, ορίζουμε 2 συστήματα συντεταγμένων, με το ένα να βρίσκεται σταθερά δεμένο στην προπέλα (OXYZ) και το άλλο να βρίσκεται στην έδραση μοντέλου-πτέρυγας ( $f: O'xyz$ ), το οποίο θεωρείται ως το αδρανειακό ΣΣ. Οι γωνίες Θ, Ψ αποτελούν τις γωνίες Euler του συστήματος και συσχετίζουν το σύστημα συντεταγμένων που είναι δεμένο στο σώμα με το αδρανειακό. Η σειρά των περιστροφών που μετασχηματίζει το αδρανειακό σύστημα f στο περιστρεφόμενο F, έχει ως εξής:

- 1) Περιστροφή pitch ( $\theta$ ) στον άξονα y του αδρανειακού, το οποίο μετασχηματίζει το σύστημά μας στο ( $O\tilde{x}yZ$ )
- 2) Περιστροφή yaw ( $\psi$ ) στον άξονα Z του συστήματος f, το οποίο μετασχηματίζει το σύστημά μας στο F: (OXYZ)

Η συνολική γωνιακή ταχύτητα του συστήματος περιλαμβάνει 3 διανύσματα : ρυθμό μεταβολής του pitch  $\dot{\theta}$ , ρυθμό μεταβολής του yaw  $\dot{\psi}$  και περιστροφική ταχύτητα της προπέλας  $\dot{\varphi} = \Omega$ , όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.8β. Υπολογίζεται η κινητική ενέργεια του συστήματος, ως προς το σύστημα συντεταγμένων που βρίσκεται δεμένο στην προπέλα (F:OXYZ), ως :

$$T = \frac{1}{2}J_X\omega_X^2 + \frac{1}{2}J_Y\omega_Y^2 + \frac{1}{2}J_Z\omega_Z^2 \quad (5.6)$$

όπου  $J_x$  η πολική ροπή αδράνειας της προπέλας,  $J_y, J_z$  η συνολική μαζική ροπή αδράνειας του συστήματος προς τους άξονες Y, Z αντίστοιχα. Επίσης, έχουμε  $\omega_X, \omega_Y, \omega_Z$  όπου είναι οι γωνιακές ταχύτητες του συστήματος στο σύστημα συντεταγμένων της προπέλας. Στην παραπάνω έκφραση της κινητικής ενέργειας θα μπορούσαν να εισαχθούν και οι κινητικές ενέργειες των περιστρεφόμενων σωμάτων του κινητήρα, οι οποίες βέβαια λόγω μικρού μεγέθους σε σχέση με τους παραπάνω όρους, αμελούνται. Ο υπολογισμός των ροπών αδράνειας προκύπτει από εφαρμογή του θεωρήματος παράλληλων αξόνων του Steiner ανάμεσα στα τοπικά συστήματα του

κάθε μέλους, που βρίσκονται στα κέντρα μάζας, και το σύστημα συντεταγμένων που περιστρέφεται με την προπέλα. Εφαρμογή του θεωρήματος Steiner, μας δίνει :

$$J_x = (I_{xx}^{cm})_1 + (I_{xx}^{cm})_2$$

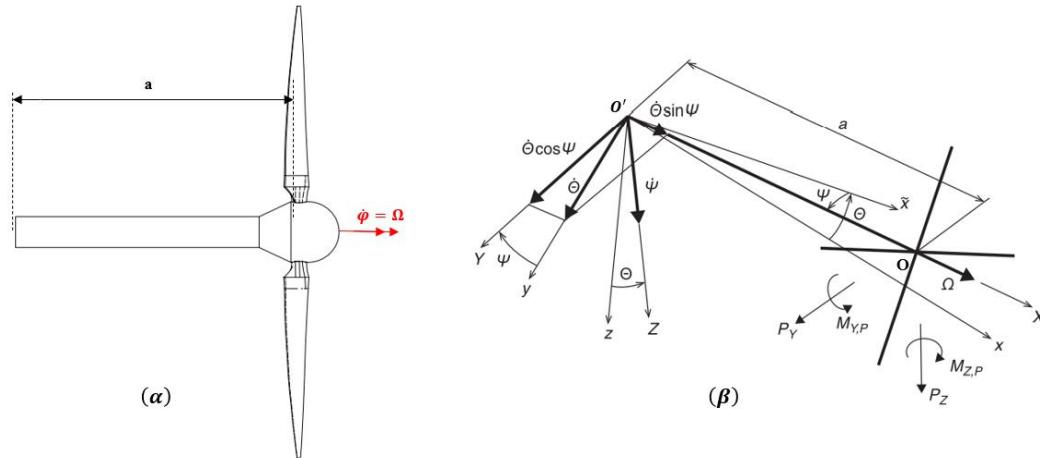
$$J_y = (I_{yy}^{cm})_1 + (I_{yy}^{cm})_2 + (m_2 d_2^2)$$

$$J_z = (I_{zz}^{cm})_1 + (I_{zz}^{cm})_2 + (m_2 d_2^2)$$

όπου με τον δείκτη 1 αναφερόμαστε στην προπέλα, ενώ αντίστοιχα ο δείκτης 2 αναφέρεται στα υπόλοιπα στοιχεία του κινητήρα (κυλινδρικό σώμα), με  $d_2$  η απόσταση ανάμεσα στο κέντρο μάζας του κυλίνδρου και το σύστημα που βρίσκεται στο κέντρο της προπέλας F.

Για την έκφραση των γωνιακών ταχυτήτων στο περιστρεφόμενο σύστημα F ως προς τις γωνιακές ταχύτητες στο αδρανειακό σύστημα f, θα χρειαστεί να ορίσουμε το μητρώο στρέψης, το οποίο αποτελεί τον μετασχηματισμό συντεταγμένων ανάμεσα στα συστήματα f και F. Στόχος μας είναι να καταλήξουμε σε σχέση της μορφής :

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$



Σχήμα 5. 8 (α) δισδιάστατο σχέδιο μοντέλου συστήματος (β) κινηματικό σχήμα μοντέλου και αεροδυναμικά φορτία λόγω γυροσκοπικής κίνησης

Με βάση την σειρά περιστροφών στους αντίστοιχους άξονες, που παρουσιάστηκε παραπάνω, η γωνιακή ταχύτητα δίνεται από την σχέση  $\underline{\omega} = \Omega \underline{e}_X + \dot{\theta} \underline{e}_Y + \dot{\psi} \underline{e}_Z$ . Για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της γωνιακής ταχύτητας στο σύστημα συντεταγμένων F, προβάλλουμε το παραπάνω διάνυσμα στους αντίστοιχους άξονες. Έτσι, με την βοήθεια του σχήματος 5.8β έχουμε :

$$\omega_X = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_X = \Omega + \dot{\theta} \sin(\Psi), \quad \omega_Y = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_Y = \dot{\theta} \cos(\Psi), \quad \omega_Z = \underline{\omega} \cdot \underline{e}_Z = \dot{\psi}$$

Σε μητρωική μορφή :

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\Psi) & 0 \\ 0 & \cos(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Με βάση την θεωρία quasi – steady, τα πλάτη ταλάντωσης των συντεταγμένων είναι μικρά ( $\Psi \ll 1$ ), έτσι ώστε να έχουμε :

$$\sin(\Psi) \approx \Psi \text{ και } \cos(\Psi) \approx 1$$

επιπλέον θεωρούμε ότι  $\dot{\theta}^2 \dot{\psi}^2 \ll \Omega^2$ . Με βάση τις απλοποιήσεις αυτές και εφαρμογή του μετασχηματισμού T στην εξίσωση της κινητικής ενέργειας (5.6), παίρνουμε :

$$T = \frac{1}{2} J_X \Omega^2 + J_X \Psi \Omega \dot{\theta} + \frac{1}{2} (J_Y \dot{\theta}^2 + J_Z \dot{\psi}^2) \quad (5.7)$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος προκύπτει από τις παραμορφώσεις των στρεπτικών ελατηρίων στην έδραση του κινητήρα, για τις διευθύνσεις των γωνιών pitch και yaw. Έτσι έχουμε:

$$V = \frac{1}{2} K_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} K_\psi \dot{\psi}^2 \quad (5.8)$$

Στο σημείο αυτό, εισάγουμε απόσβεση στην κατασκευή. Η απόσβεση της κατασκευής προκύπτει μέσα από πειράματα, γενικά όμως υπάρχουν πολλές διαφορετικές μεθοδολογίες για τον ορισμό προσεγγιστικής απόσβεσης για ένα σύστημα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, εισάγουμε ως απόσβεση την κλασική απόσβεση που χρησιμοποιείται σε αναλύσεις φαινομένων αστάθειας flutter, όπου η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη του μεγέθους της αντίστοιχης τετραγωνικής ταχύτητας των ( $\Theta, \Psi$ ) :

$$D = \frac{1}{2} C_\theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C_\psi \dot{\psi}^2 \quad (5.9)$$

όπου οι συντελεστές απόσβεσης των ανεξάρτητων κινήσεων για pitch και yaw είναι  $C_\theta, C_\psi$ . Εισάγοντας στις εξισώσεις του Lagrange (5.4) τις εξισώσεις (5.7),(5.8) και (5.9) και εφαρμογή της εξίσωσης υπολογισμού των γενικευμένων δυνάμεων, παίρνουμε τις εξισώσεις κίνησης του συστήματος :

$$J_Y \ddot{\theta} + C_\theta \dot{\theta} + J_X \Omega \dot{\psi} + K_\theta \theta = Q_\theta \quad (5.10)$$

$$J_Z \ddot{\psi} + C_\psi \dot{\psi} - J_X \Omega \dot{\theta} + K_\psi \psi = Q_\psi \quad (5.11)$$

όπου οι γενικευμένες δυνάμεις :

$$Q_\theta = M_{Y,P} - aP_z \text{ και } Q_\psi = M_{Z,P} + aP_Y$$

Το πρόβλημα με τις παραπάνω εξισώσεις, είναι ο υπολογισμός των αεροδυναμικών δυνάμεων. Οι δυνάμεις αυτές μπορούν να εκφραστούν με χρήση των αδιάστατων αεροδυναμικών συντελεστών. Οι συντελεστές αυτοί υπολογίζονται είτε αναλυτικά είτε πειραματικά. Στη συνέχεια, καταστρώνουμε αναλυτικά τις εξισώσεις για τις αεροδυναμικές δυνάμεις και τον υπολογισμό των αεροδυναμικών συντελεστών, με χρήση της θεωρίας «Strip Theory».

### 5.3.2 Αεροδυναμικές Δυνάμεις - Strip Theory

Η δισδιάστατη διατύπωση της θεωρίας αυτής αναπτύχθηκε το 1935 και επεκτάθηκε σε τρισδιάστατα προβλήματα το 1942. Η λογική πίσω από την μέθοδο είναι ο χωρισμός της κατασκευής σε σταθμούς εργασίας (λωρίδες), κατά μήκος των πτερυγίων, και υπολογισμός των αεροδυναμικών φορτίων σε κάθε τέτοιο τμήμα. Τα φορτία αυτά υπολογίζονται με βάση τους

δισδιάστατους αεροδυναμικούς συντελεστές ( $C_L, C_D$ ) των διακριτών τμημάτων. Δεχόμαστε επιπλέον και την υπόθεση ότι δεν υπάρχει καμία αλληλεπίδραση μεταξύ των διαφορετικών σταθμών.

Θεωρούμε ως μεταβαλλόμενες ποσότητες (διαταραχές του συστήματος) την τοπική γωνία προσβολής του κάθε σταθμού ( $\alpha_1$ ), την ταχύτητα στο επίπεδο περιστροφής της προπέλας ( $\dot{s}$ ) και την ταχύτητα εκτός επιπέδου ( $\dot{w}$ ). Στο Σχήμα 5.9α παρουσιάζεται μια προπέλα με 4 πτερύγια σε τυχαία θέση. Η διόρθωση για τον αριθμό των πτερυγίων, για την δική μας προπέλα (2 πτερύγια), θα γίνει μετά την κατάστρωση των εξισώσεων. Εκτός από την μετατόπιση της προπέλας στο επίπεδο z-y, έχουμε και τις στροφές της προπέλας στις γωνίες pitch ( $\Theta$ ) και yaw ( $\Psi$ ). Βλέποντας το σχήμα 5.9α, για το πτερύγιο νούμερο 1, η μεταβολή στην γεωμετρική γωνία προσβολής θα είναι:

$$a_1 = \Psi \sin(\Omega t) - \Theta \cos(\Omega t) \quad (5.12)$$

Οι διαταραχές ( $\dot{s}$ ), ( $\dot{w}$ ) για τυχαίο σημείο της προπέλας 1, δίνονται από παραγώγιση των ακόλουθων γεωμετρικών σχέσεων :

$$\begin{cases} y = y_1 + r \cos(\Omega t) \\ z = z_1 + r \sin(\Omega t) \\ w_1 = -\Psi r \cos(\Omega t) - \Theta r \sin(\Omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{s}_1 = -\dot{y}_1 \sin(\Omega t) + \dot{z}_1 \cos(\Omega t) \quad (5.13) \\ \dot{w}_1 = -\dot{\Psi} r \cos(\Omega t) + \Psi r \sin(\Omega t) - \dot{\Theta} r \sin(\Omega t) - \Theta r \cos(\Omega t) \quad (5.14) \end{cases}$$

Στο Σχήμα 5.9β, απεικονίζονται οι ταχύτητες που αναπτύσσονται σε μια τυχαία διατομή του πτερυγίου 1. Η γωνία β, στο σχήμα αυτό, αντιπροσωπεύει την γωνία προσβολής της προπέλας για μόνιμη κατάσταση λειτουργίας (χωρίς διαταραχές). Με βάση το σχήμα αυτό, η ενεργός γωνία προσβολής της διατομής, η οποία είναι η γωνία στην οποία τελικά οφείλονται τα αεροδυναμικά φορτία, υπολογίζεται από την σχέση :

$$\alpha_{eff} = \alpha_0 + a_1 - \dot{w} \left( \frac{\Omega r}{U^2} \right) + \dot{s} \left( \frac{V_\infty}{U^2} \right) \quad (5.15)$$

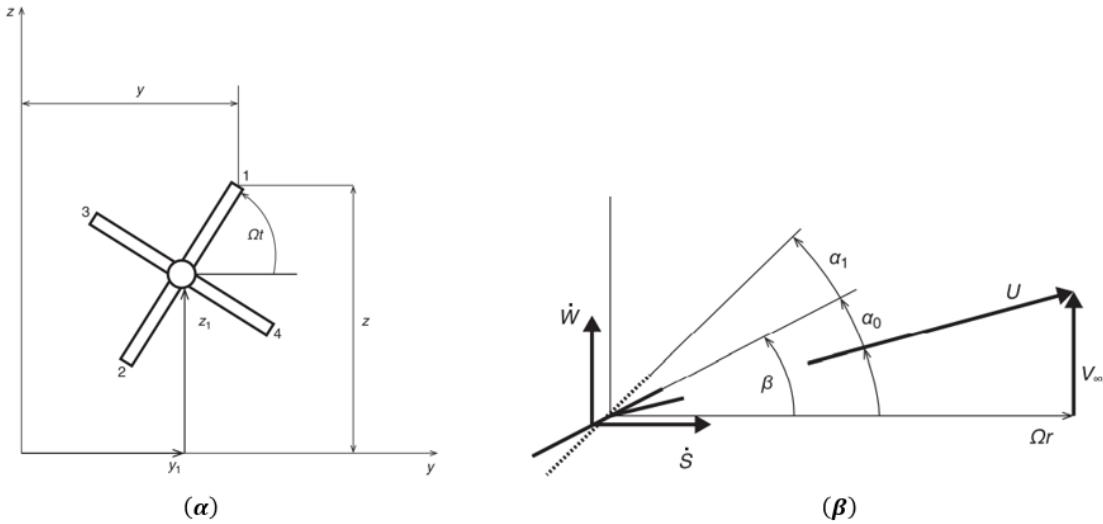
όπου  $\alpha_0$  η κλίση της καμπύλης άντωσης της διατομής και ο όρος  $\dot{w} \left( \frac{\Omega r}{U^2} \right) + \dot{s} \left( \frac{V_\infty}{U^2} \right)$  προκύπτει από την συνιστώσα των διαταραχών στην διεύθυνση κάθετη στην ταχύτητα U, η οποία είναι η συνισταμένη ταχύτητα στην διατομή  $U = (r^2 \Omega^2 + V_\infty^2)^{1/2}$ . Αντίστοιχα, από την συνιστώσα των διαταραχών παράλληλη στην U, έχουμε την ενεργό ταχύτητα  $U_{eff}$ , που είναι η ταχύτητα από την οποία εξαρτώνται τελικά τα αεροδυναμικά φορτία :

$$U_{eff} = U + \dot{w} \left( \frac{V_\infty}{U} \right) + \dot{s} \left( \frac{\Omega r}{U} \right) \quad (5.16)$$

Με βάση την παραπάνω εξίσωση και εφαρμογή των αεροδυναμικών εξισώσεων για δισδιάστατη διατομή, υπολογίζουμε την ασκούμενη άντωση στην διατομή ως :

$$L = \frac{1}{2} \rho c_0 U^2 \left[ \alpha_0 + a_1 - \underbrace{\frac{\Omega r}{U^2} \left( 1 - \frac{2V_\infty}{\Omega r} \alpha_0 \right) \dot{w} + \frac{V}{U^2} \left( 1 + \frac{2\Omega r}{V_\infty} \alpha_0 \right) \dot{s}}_{\text{Μη μόνιμοι όροι άντωσης}} \right] \quad (5.17)$$

με  $c_0$  η χορδή της διατομής. Στην παραπάνω εξίσωση μπορούμε να δούμε ότι οι μη μόνιμοι όροι εξαρτώνται από την γωνία προσβολής της μόνιμης κατάστασης ( $\alpha_0$ ).



Σχήμα 5. 9 (α) Προπέλα σε τυχαία θέση (β) Αναπτυσσόμενες ταχύτητες διατομής πτερυγίου σε τυχαία θέση

Οι όροι  $\frac{2V_\infty}{\Omega r} \mathbf{a}_0, \frac{2\Omega r}{V_\infty} \mathbf{a}_0$  στην εξίσωση (5.17) έχουν πολύ μικρή συνεισφορά στην άντωση και μπορούν να αμεληθούν. Επιπλέον, για λειτουργία της προπέλας σε «windmilling» κατάσταση έχουμε  $\mathbf{a}_0 \approx 0$ . Στην κατάσταση windmilling, δεν εισάγουμε κάποια περιστροφική ταχύτητα στην προπέλα, αλλά περιστρέφεται λόγω την ταχύτητας πρόσκρουσης του αέρα πάνω της. Επιπλέον, γράφουμε την συνισταμένη ταχύτητα της διατομής ως  $U = (r^2\Omega^2 + V_\infty^2)^{1/2}$  και αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (5.12), (5.13) και (5.14). Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση :

$$L = -\frac{1}{2} a_0 \rho c_0 (V_\infty^2 \theta - V_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\psi}) \cos(\Omega t) + \frac{1}{2} a_0 \rho c_0 (V_\infty^2 \psi - V_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\theta}) \sin(\Omega t) \Rightarrow \\ \Rightarrow L = -f_1 \cos(\Omega t) + f_2 \sin(\Omega t) \quad (5.18)$$

$$\therefore f_1 = \frac{1}{2} a_0 \rho c_0 (V_\infty^2 \theta - V_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\psi}), \quad f_2 = \frac{1}{2} a_0 \rho c_0 (V_\infty^2 \psi - V_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\theta})$$

Η εξίσωση (5.18) υπολογίζει την άντωση της διατομής (σταθμού) στο πτερύγιο 1 του σχήματος 5.9α. Για τα υπόλοιπα πτερύγια έχουμε :

$$\Omega t \rightarrow (\Omega t + \pi) \text{ πτερύγιο vo.2 } L_2 = f_1 \cos(\Omega t) - f_2 \sin(\Omega t) = -L_1 \quad (5.19)$$

$$\Omega t \rightarrow \left( \Omega t + \frac{\pi}{2} \right) \text{ πτερύγιο vo.3 } L_3 = f_1 \sin(\Omega t) + f_2 \cos(\Omega t) \quad (5.20)$$

$$\Omega t \rightarrow \left( \Omega t + \frac{3\pi}{2} \right) \text{ πτερύγιο vo.4 } L_2 = f_1 \sin(\Omega t) - f_2 \cos(\Omega t) = -L_3 \quad (5.21)$$

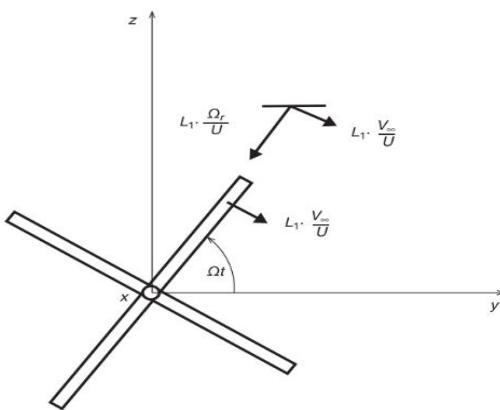
Για τον υπολογισμό των μη μόνιμων αεροδυναμικών δυνάμεων, αναλύουμε την άντωση του κάθε πτερυγίου στην διεύθυνση περιστροφής της προπέλας στον άξονα x (όρος ώσης) και στο επίπεδο περιστροφής της προπέλας y-z (όρος ροπής). Ο όρος ώσης έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη των ροπών ( $\Delta M_y, \Delta M_z$ ) και ο όρος ροπή την ανάπτυξη των δυνάμεων ( $\Delta L_y, \Delta L_z$ ). Με βάση το σχήμα 5.9β, οι όροι αυτοί μπορούν να εκφραστούν για την ώση ως  $\left( L \left( \frac{\Omega r}{U} \right) \right)$  και για την ροπή  $\left( L \left( \frac{V_\infty}{U} \right) \right)$ .

Οι συνιστώσες αυτές, για το πτερύγιο με το νούμερο 1, παρουσιάζονται στο Σχήμα 5.10. Οι εκφράσεις υπολογισμού για όλους τους όρους  $(\Delta M_y, \Delta M_z, \Delta L_y, \Delta L_z)$  προκύπτουν:

$$\begin{cases} \Delta L_y = 2 \frac{V_\infty}{U} (L_1 \sin(\Omega t) + L_3 \cos(\Omega t)) \\ \Delta L_z = \frac{V_\infty}{U} (-L_1 \cos(\Omega t) + L_3 \sin(\Omega t)) \\ \Delta M_y = -2 \frac{\Omega r^2}{U} (L_1 \sin(\Omega t) + L_3 \cos(\Omega t)) = -\frac{\Omega r^2}{V_\infty} \Delta L_y \\ \Delta M_z = 2 \frac{\Omega r^2}{U} (-L_1 \cos(\Omega t) + L_3 \sin(\Omega t)) = \frac{\Omega r^2}{V_\infty} \Delta L_z \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τώρα στο παραπάνω σύστημα τις εξισώσεις (5.18) έως (5.21), μας δίνει :

$$\begin{cases} \Delta L_y = 2 \frac{V_\infty}{U} (-f_1 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t) + f_2 \sin^2(\Omega t) + f_1 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) + f_2 \cos^2(\Omega t)) = 2 \frac{V_\infty}{U} f_2 \\ \Delta L_z = \frac{V_\infty}{U} (f_1 \cos^2(\Omega t) - f_2 \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) + f_1 \sin^2(\Omega t) + f_2 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t)) = 2 \frac{V_\infty}{U} f_1 \\ \Delta M_y = -2 \frac{\Omega r^2}{U} f_2 \\ \Delta M_z = 2 \frac{\Omega r^2}{U} f_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta L_y = 2 \frac{V_\infty}{U} f_2 \\ \Delta L_z = 2 \frac{V_\infty}{U} f_1 \\ \Delta M_y = -2 \frac{\Omega r^2}{U} f_2 \\ \Delta M_z = 2 \frac{\Omega r^2}{U} f_1 \end{cases} \quad (5.22)$$



Σχήμα 5. 10 Συνιστώσες δυνάμεων για την διατομή του πτερυγίου νο.1.

Αντικατάσταση τώρα των εκφράσεων για τους συντελεστές  $f_1, f_2$  από την εξίσωση (5.18), μας δίνει το σύστημα των δυνάμεων σε τυχαία διατομή των πτερυγίων, σε μορφή που θα μας βοηθήσει να συνεχίσουμε την ανάλυση :

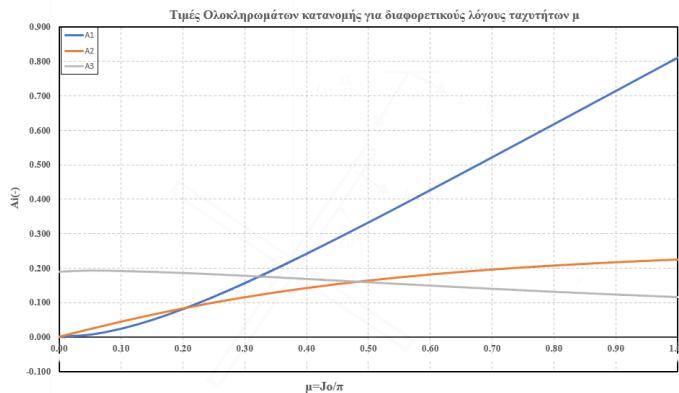
$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta L_y = a_0 \rho c_0 \frac{V_\infty}{U} (V_\infty^2 \Psi - V_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\theta}) \\ \Delta L_z = a_0 \rho c_0 \frac{V_\infty}{U} (V_\infty^2 \Theta - V_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\psi}) \\ \Delta M_y = -a_0 \rho c_0 \frac{\Omega r^2}{U} (V_\infty^2 \Psi - V_\infty \dot{y}_1 + \Omega r^2 \dot{\theta}) \\ \Delta M_z = a_0 \rho c_0 \frac{\Omega r^2}{U} (V_\infty^2 \Theta - V_\infty \dot{z}_1 - \Omega r^2 \dot{\psi}) \end{cases} \quad (5.23)$$

Για να υπολογίσουμε τις συνολικές δυνάμεις της προπέλας, που ασκούνται στην πλήμνη της, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τις εξισώσεις του συστήματος (5.23) από την πλήμνη έως την κορυφή των πτερυγίων. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε τα γεωμετρικά ολοκληρώματα της πτέρυγας, ως :

$$\begin{cases} A_1 = \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\ A_2 = \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\mu \eta^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\ A_3 = \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\eta^4}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \end{cases} \quad (5.24)$$

όπου  $c_r$  είναι η χορδή αναφοράς της πτέρυγας (στην βάση), μ είναι ο λόγος ταχυτήτων της πτέρυγας  $\mu = \frac{V_\infty}{\Omega R} = \frac{J_0}{\pi}$  και  $\eta$  είναι η αδιάστατη ακτίνα των πτερυγίων, η οποία ορίζεται ως  $\eta = \frac{r}{R}$ . Στο σημείο αυτό, να επισημάνουμε ότι τα παραπάνω ολοκληρώματα χρησιμοποιούν την κλίση της καμπύλης άντωσης  $\alpha_0 = 2\pi$ , η τιμή αυτή θα διορθωθεί στην πορεία. Κατά την επίλυση του συστήματος για τον υπολογισμό των ορίων ευστάθειας, τα παραπάνω ολοκληρώματα λόγω της ομαλότητας που εμφανίζουν, υπολογίζονται ως άθροισμα στην μορφή  $A_1 = \sum_{i=1}^N \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta_i^2}} (\eta_i - \eta_{i-1})$ , αφού πρώτα

χωρίσουμε το πτερύγιο της προπέλας σε  $N$  διακριτά τμήματα. Στο Σχήμα 5.11, παρουσιάζονται τα διαγράμματα τιμών των ολοκληρωμάτων του συστήματος (5.24), για ένα εύρος τιμών του λόγου μ, όπου παρατηρούμε την ομαλότητα που εμφανίζουν κατά μήκος της προπέλας



Σχήμα 5. 11 Τιμές ολοκληρωμάτων κατανομής για διαφορετικές τιμές του μ

Η ολοκλήρωση των εξισώσεων (5.23) με τα ολοκληρώματα (5.24) οδηγεί στις συνολικές αεροδυναμικές δυνάμεις και ροπές που ασκούνται στην πλήμνη της προπέλας, με εξισώσεις :

$$P_y = q_\infty F_p \left[ \frac{4\Omega^2 R c_r}{V_\infty^2} \mu A_1 \Psi - \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_1 \frac{\dot{y}_1}{V_\infty} + \frac{4\Omega R}{V_\infty} A_2 \frac{\dot{\theta} c_r}{V_\infty} \right] \quad (5.25)$$

$$P_z = q_\infty F_p \left[ \frac{4\Omega^2 R c_r}{V_\infty^2} \mu A_1 \Theta - \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_1 \frac{\dot{z}_1}{V_\infty} - \frac{4\Omega R}{V_\infty} A_2 \frac{\dot{\psi} c_r}{V_\infty} \right] \quad (5.26)$$

$$M_{Y,P} = q_\infty F_p R \left[ -\frac{4\Omega^2 R c_r}{V_\infty^2} \mu A_2 \Psi + \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_2 \frac{\dot{y}_1}{V_\infty} - \frac{4\Omega R}{V_\infty} A_3 \frac{\dot{\theta} c_r}{V_\infty} \right] \quad (5.27)$$

$$M_{Z,P} = q_\infty F_p R \left[ \frac{4\Omega^2 R c_r}{V_\infty^2} \mu A_2 \Theta - \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_2 \frac{\dot{z}_1}{V_\infty} - \frac{4\Omega R}{V_\infty} A_3 \frac{\dot{\psi} c_r}{V_\infty} \right] \quad (5.28)$$

Με  $q_\infty = \frac{1}{2} \rho V_\infty$  ο συντελεστής δυναμικής πίεσης της ελεύθερης ροής,  $F_p = \frac{D_p^2 \pi}{4}$  το εμβαδόν του δίσκου περιστροφής της προπέλας,  $R$  η ακτίνα της προπέλας. Με βάση την θεωρία quasi-steady, τα εύρη ταλάντωσης για τις γωνίες  $\Theta, \Psi$  είναι μικρά, όπως προαναφέρθηκε. Έτσι, οι ενεργές γωνίες στις διευθύνσεις pitch και yaw δίνονται από τις εξισώσεις :

$$\Theta^* = \Theta - \frac{\dot{z}_1}{V_\infty} = \Theta - \frac{a\dot{\theta}}{V_\infty} \text{ και } \Psi^* = \Psi - \frac{\dot{y}_1}{V_\infty} = \Psi - \frac{a\dot{\psi}}{V_\infty}$$

Οι δείκτες στις ταχύτητες  $z$ ,  $y$  βασίζονται στους συμβολισμούς του σχήματος 5.9a. Ως ενεργή γωνία ορίζεται η γωνία η οποία, στην πραγματικότητα, λόγω περιστροφής και μετατόπισης της προπέλας, θα έχει τελικά συνεισφορά στα αεροδυναμικά φορτία. Εξισώνοντας τώρα μεταξύ τους τις 2 διαφορετικές εκφράσεις για κάθε μια από τις παραπάνω ενεργές γωνίες, έχουμε :

$$\dot{z}_1 = a\dot{\theta} \text{ και } \dot{y}_1 = a\dot{\psi}$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στις εξισώσεις (5.25) έως (5.28) και γράφοντας τους συντελεστές των εξισώσεων με χρήση των αεροδυναμικών συντελεστών, έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_y = q_\infty F_p \left[ c_{y\Psi} \Psi - c_{y\Psi} \frac{a\dot{\psi}}{V_\infty} + c_{yq} \frac{\dot{\theta} R}{V_\infty} \right] \\ P_z = q_\infty F_p \left[ c_{z\Theta} \Theta - c_{z\Theta} \frac{a\dot{\theta}}{V_\infty} + c_{zr} \frac{\dot{\psi} R}{V_\infty} \right] \\ M_{Y,P} = q_\infty F_p R \left[ c_{m\Psi} \Psi - c_{m\Psi} \frac{a\dot{\psi}}{V_\infty} + c_{mq} \frac{\dot{\theta} R}{V_\infty} \right] \\ M_{Z,P} = q_\infty F_p R \left[ c_{n\Theta} \Theta - c_{n\Theta} \frac{a\dot{\theta}}{V_\infty} + c_{nr} \frac{\dot{\psi} R}{V_\infty} \right] \end{array} \right. \quad (5.29)$$

- $c_{y\Psi} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_1$ ,  $c_{yq} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_2$ ,
- $c_{z\Theta} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_1$ ,  $c_{zr} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_2$
- $c_{m\Psi} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_2$ ,  $c_{mq} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_3$
- $c_{n\Theta} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_2$ ,  $c_{nr} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} A_3$

- $\Lambda_1 = q_\infty F_p R$ ,  $\Lambda_2 = q_\infty F_p \alpha$

Με εισαγωγή των παραπάνω δυνάμεων στις εξισώσεις κίνησης (5.10) και (5.11), έχουμε :

$$J_Y \ddot{\theta} + C_\theta \dot{\theta} + J_X \Omega \dot{\psi} + K_\theta \theta = \left( \Lambda_1 \left[ c_{m\psi} \Psi - c_{m\psi} \frac{a\Psi}{V_\infty} + c_{mq} \frac{\dot{\theta}R}{V_\infty} \right] \right) - \left( \Lambda_2 \left[ c_{z\theta} \theta - c_{z\theta} \frac{a\dot{\theta}}{V_\infty} + c_{zr} \frac{\dot{\psi}R}{V_\infty} \right] \right)$$

$$J_Z \ddot{\psi} + C_\psi \dot{\psi} - J_X \Omega \dot{\theta} + K_\psi \Psi = \left( \Lambda_1 \left[ c_{n\theta} \theta - c_{n\theta} \frac{a\dot{\theta}}{V_\infty} + c_{nr} \frac{\dot{\psi}R}{V_\infty} \right] \right) + \left( \Lambda_2 \left[ c_{y\psi} \Psi - c_{y\psi} \frac{a\Psi}{V_\infty} + c_{yq} \frac{\dot{\theta}R}{V_\infty} \right] \right)$$

Γράφοντας τις παραπάνω 2 εξισώσεις σε μητρωική μορφή, παίρνουμε :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} J_Y & 0 \\ 0 & J_Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & C_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & J_X \Omega \\ -J_X \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_\theta & 0 \\ 0 & K_\psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \left( \Lambda_1 c_{mq} \frac{R}{V_\infty} + \Lambda_2 c_{z\theta} \frac{a}{V_\infty} \right) & \left( -\Lambda_1 c_{m\psi} \frac{a}{V_\infty} - \Lambda_2 c_{zr} \frac{R}{V_\infty} \right) \\ \left( -\Lambda_1 c_{n\theta} \frac{a}{V_\infty} + \Lambda_2 c_{yq} \frac{R}{V_\infty} \right) & \left( \Lambda_1 c_{nr} \frac{R}{V_\infty} - \Lambda_2 c_{y\psi} \frac{a}{V_\infty} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \Lambda_2 c_{z\theta} & \Lambda_1 c_{m\psi} \\ \Lambda_1 c_{n\theta} & \Lambda_2 c_{y\psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} \Rightarrow \\ & \Rightarrow [M] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + [G] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + [K] \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = [D^A] \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + [K^A] \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

όπου :

- Μητρώο μάζας προπέλας  $[M] = \begin{bmatrix} J_Y & 0 \\ 0 & J_Z \end{bmatrix}$
- Μητρώο απόσβεσης προπέλας  $[D] = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & C_\psi \end{bmatrix}$
- Γυροσκοπικό μητρώο  $[G] = \begin{bmatrix} 0 & J_X \Omega \\ -J_X \Omega & 0 \end{bmatrix}$
- Μητρώο στιβαρότητας  $[K] = \begin{bmatrix} K_\theta & 0 \\ 0 & K_\psi \end{bmatrix}$
- Μητρώο Αεροδυναμικής απόσβεσης  $[D^A] = \begin{bmatrix} \left( \Lambda_1 c_{mq} \frac{R}{V_\infty} + \Lambda_2 c_{z\theta} \frac{a}{V_\infty} \right) & \left( -\Lambda_1 c_{m\psi} \frac{a}{V_\infty} - \Lambda_2 c_{zr} \frac{R}{V_\infty} \right) \\ \left( -\Lambda_1 c_{n\theta} \frac{a}{V_\infty} + \Lambda_2 c_{yq} \frac{R}{V_\infty} \right) & \left( \Lambda_1 c_{nr} \frac{R}{V_\infty} - \Lambda_2 c_{y\psi} \frac{a}{V_\infty} \right) \end{bmatrix}$
- Μητρώο αεροδυναμικής στιβαρότητας (ή κυκλοφορικό μητρώο)  $[K^A] = \begin{bmatrix} \Lambda_2 c_{z\theta} & \Lambda_1 c_{m\psi} \\ \Lambda_1 c_{n\theta} & \Lambda_2 c_{y\psi} \end{bmatrix}$

Μεταφέροντας όλους τους όρους του συστήματος στα αριστερά, έχουμε :

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + ([D] + [G] - [D^A]) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + ([K] - [K^A]) \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = [0]_{2 \times 1} \quad (5.30)$$

Από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων βλέπουμε ότι τα αεροδυναμικά φορτία έχουν συνεισφορά τόσο στην στιβαρότητα του συστήματος όσο και στην απόσβεση. Τη συμπεριφορά αυτή θα την παρακολουθήσουμε αναλυτικά κατά την παρουσίαση των διαγραμμάτων. Επιπλέον, μια ιδιαιτερότητα για τα παραπάνω μητρώα απόσβεσης και στιβαρότητας είναι ότι το πρώτο είναι ασύμμετρο και το δεύτερο αντισυμμετρικό. Η ασυμμετρία αυτή επηρεάζει και την μεθοδολογία

υπολογισμού των ορίων ευστάθειας, αλλά και την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Θα πρέπει, στο σημείο αυτό, να εισάγουμε κάποιους συντελεστές διόρθωσης για τα ολοκληρώματα (5.24), σχετικά με τον αριθμό πτερυγίων (2 για εμάς) και τον συντελεστή κλίσης της καμπύλης άντωσης  $\alpha_0$ , τον οποίο θεωρήσαμε ότι έχει σταθερή τιμή ίση με  $2\pi$ . Επιπλέον, επειδή σε κάποια σημεία της προπέλας μας έχουμε μεγάλες τιμές για τον αριθμό Mach και στην μέχρι τώρα ανάλυση δεν λάβαμε υπόψη την συμπιεστότητα της ροής, θα πρέπει να προσθέσουμε έναν συντελεστή, που να εισάγει στις παραπάνω εξισώσεις τα φαινόμενα συμπιεστότητας. Για τον αριθμό των πτερυγίων πολλαπλασιάζουμε τα ολοκληρώματα με τον όρο  $\frac{N_b}{4}$ , όπου  $N_b = 2$  ο αριθμός των πτερυγίων. Έτσι, για εμάς, τα ολοκληρώματα έρχονται στην μορφή :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{N_b}{4} \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\ A_2 = \frac{N_b}{4} \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\mu \eta^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \\ A_3 = \frac{N_b}{4} \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\eta^4}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2}} d\eta \end{cases} \quad (5.31)$$

Η συμπιεστότητα μπορεί να εισαχθεί στα ολοκληρώματα με χρήση δύο συντελεστών. Βασιζόμενοι στην διόρθωση των Prantl – Glauert για την συμπιεστότητα, με χρήση του τοπικού αριθμού Mach  $(M_r = \frac{\sqrt{V_\infty^2 + \Omega^2 r^2}}{\alpha})$ , έχουμε:  $\frac{1}{\sqrt{1 - M_r^2}}$ . Ο 2<sup>ος</sup> συντελεστής λαμβάνει υπόψη του την πεπερασμένη διάσταση των πτερυγίων και προκύπτει από την εξίσωση :

$$\frac{A_r \sqrt{1 - M_r^2}}{2 + A_r \sqrt{1 - M_r^2}}, \quad \text{με } A_r = \frac{R}{c_r \int_0^1 \left(\frac{c}{c_r}\right) d\eta} = \text{λόγος διαστάσεων πτερυγίου}$$

Με βάση τα παραπάνω και έκφραση των συντελεστών ως προς τον Mach της ελεύθερης ροής  $M = \frac{V_\infty}{a}$ , έχουμε :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - M_r^2}} \frac{A_r \sqrt{1 - M_r^2}}{2 + A_r \sqrt{1 - M_r^2}} = \frac{A_r}{2 + A_r \sqrt{1 - M_r^2}} = \frac{A_r}{2 + A_r \sqrt{1 - M^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{\mu^2}\right)}} \quad (5.32)$$

Εισαγωγή του συντελεστή (5.32) στα ολοκληρώματα (5.31), μας δίνει :

$$\begin{cases} I_1 = A_r \frac{N_b}{4} \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[ 2 + A_r \sqrt{1 - M^2 \left( 1 + \frac{\eta^2}{\mu^2} \right)} \right]} d\eta \\ I_2 = A_r \frac{N_b}{4} \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\mu \eta^2}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[ 2 + A_r \sqrt{1 - M^2 \left( 1 + \frac{\eta^2}{\mu^2} \right)} \right]} d\eta \\ I_3 = A_r \frac{N_b}{4} \int_0^1 \frac{c_0}{c_r} \frac{\eta^4}{\sqrt{\mu^2 + \eta^2} \left[ 2 + A_r \sqrt{1 - M^2 \left( 1 + \frac{\eta^2}{\mu^2} \right)} \right]} d\eta \end{cases} \quad (5.33)$$

Οι εξισώσεις του συστήματος παραμένουν στην ίδια μορφή (5.30), αλλά οι αεροδυναμικοί συντελεστές γίνονται :

- $c_{y\psi} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_1, c_{yq} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_2,$
- $c_{z\theta} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_1, c_{zr} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_2$
- $c_{m\psi} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_2, c_{mq} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_3$
- $c_{n\theta} = \frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_2, c_{nr} = -\frac{4\Omega c_r}{V_\infty} I_3$

Έχοντας καταστρώσει τις εξισώσεις του συστήματος, μπορούμε να επιλύσουμε για την εύρεση των ορίων ευστάθειας. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται η μεθοδολογία που θα εφαρμόσουμε για την εύρεση των ορίων ευστάθειας και των υπολογισμό της απόκρισης της πλήμνης της προπέλας, αφού πρώτα περιγράψουμε τα ιδιαίτερα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος των εξισώσεων κίνησης που παράγθηκαν.

## 5.4 Επίλυση Εξισώσεων – Μη συμμετρικά μητρώα

### Μελέτη Ευστάθειας

Ξαναγράφουμε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης για καλύτερη παρακολούθηση του προβλήματος.

$$[M] \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + ([D] + [G] - [D^A]) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + ([K] - [K^A]) \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \end{bmatrix} = [0]_{2x1} \quad (5.30)$$

Με τα μητρώα :

$$[M] = \begin{bmatrix} J_Y & 0 \\ 0 & J_Z \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} C_\theta & 0 \\ 0 & C_\psi \end{bmatrix}, [G] = \begin{bmatrix} 0 & J_X \Omega \\ -J_X \Omega & 0 \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} K_\theta & 0 \\ 0 & K_\psi \end{bmatrix},$$

$$[D^A] = \begin{bmatrix} \left(\Lambda_1 c_{mq} \frac{R}{V_\infty} + \Lambda_2 c_{z\theta} \frac{a}{V_\infty}\right) & \left(-\Lambda_1 c_{m\psi} \frac{a}{V_\infty} - \Lambda_2 c_{zr} \frac{R}{V_\infty}\right) \\ \left(-\Lambda_1 c_{n\theta} \frac{a}{V_\infty} + \Lambda_2 c_{yq} \frac{R}{V_\infty}\right) & \left(\Lambda_1 c_{nr} \frac{R}{V_\infty} - \Lambda_2 c_{y\psi} \frac{a}{V_\infty}\right) \end{bmatrix}, [K^A] = \begin{bmatrix} \Lambda_2 c_{z\theta} & \Lambda_1 c_{m\psi} \\ \Lambda_1 c_{n\theta} & \Lambda_2 c_{y\psi} \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι τα συνολικά μητρώα απόσβεσης και στιβαρότητας είναι μη συμμετρικά. Η ασυμμετρία προκύπτει από τους γυροσκοπικούς όρους και την αεροδυναμική απόσβεση (μπορεί να θεωρηθεί και ως μορφή εσωτερικής απόσβεσης) για το μητρώο απόσβεσης. Ενώ για το μητρώο στιβαρότητας προέρχεται από τους όρους των αεροδυναμικών φορτίων. Λόγω της εξάρτησης των αεροδυναμικών συντελεστών από την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της προπέλας, μπορούμε από τώρα να αντιληφθούμε, όπως είδαμε και στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο, ότι οι ιδιοσυχνότητες του συστήματος θα έχουν εξάρτηση από την ταχύτητα αυτή. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται γυροσκοπική σκλήρυνση και ένα μέσο για την παρακολούθηση του φαινομένου είναι τα διαγράμματα Campbell. Μπορούμε να εφαρμόσουμε 2 μεθοδολογίες για την εύρεση των ορίων ευστάθειας.

Το κριτήριο ευστάθειας Routh – Hurwitz εφαρμόζεται σε γραμμικά συστήματα και βρίσκει μεγάλη εφαρμογή σε προβλήματα ελέγχου. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, ακολουθώντας μια διαδικασία, εξάγουμε τις ανισώσεις που θα μας δώσουν την περιοχή ευστάθειας και τελικά, με οπτικοποίηση των κοινών συνόλων, παίρνουμε τον χώρο των λύσεων που οδηγούν σε ευσταθές σύστημα. Η 2<sup>η</sup> μέθοδος, η οποία είναι αυτή που θα χρησιμοποιηθεί στην παρούσα ανάλυση, είναι η μέθοδος ανάλυσης ιδιομορφών. Συγκεκριμένα, για κάθε σετ παραμέτρων θα επιλύουμε κάθε φορά το ιδιοπρόβλημα, έως ότου καταλήξουμε σε μηδενική λύση για το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών. Στο σημείο αυτό, θα γίνεται αποθήκευση της λύσης και θα προχωράμε με την ίδια διαδικασία στο επόμενο σετ παραμέτρων. Η μέθοδος των ιδιομορφών επιλέγεται έναντι της R-H, λόγω της αλγορίθμικής ευκολίας που εμφανίζει.

Εξαιτίας της ασυμμετρίας, οι ρίζες (ιδιοσυχνότητες) του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος μπορεί να είναι είτε πραγματικοί είτε συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Επιπλέον, τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή θα είναι είτε πραγματικά είτε μιγαδικά. Επειδή το μητρώο απόσβεσης είναι γνωστό, για την επίλυση του ιδιοπρόβληματος, ορίζουμε το διάνυσμα 2N διαστάσεων, όπου N ο αριθμός των ελευθεριών του προβλήματος (για εμάς 2), στην μορφή :

$$\underline{y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \underline{x}(t) \end{bmatrix}, \text{ με } \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}$$

Έτσι το σύστημα (5.30) μπορεί να γραφεί ως :

$$\begin{bmatrix} 0 & M \\ M & D_{total} \end{bmatrix} \dot{\underline{y}}(t) + \begin{bmatrix} -M & 0 \\ 0 & K_{total} \end{bmatrix} \underline{y}(t) = [0]_{4x1} \Rightarrow A \dot{\underline{y}}(t) + B \underline{y}(t) = [0]_{4x1} \quad (5.34)$$

όπου :

$$D_{total} = [D] + [G] - [D^A], \quad K_{total} = [K] - [K^A]$$

Στην παραπάνω εξίσωση τα μητρώα A,B δεν είναι συμμετρικά. Για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών, εφαρμόζουμε μια διαδικασία παρόμοια με την μέθοδο ανάλυσης ιδιομορφών, με κάποιες βέβαια μικρές διαφοροποιήσεις. Θεωρούμε λύση του παραπάνω συστήματος στην μορφή

$$\underline{y}(t) = \hat{y} e^{\lambda t}$$

Αντικατάσταση της λύσης στην (5.34), μας δίνει :

$$(B + \lambda A)\hat{y} = \underline{0} \quad (5.35)$$

το οποίο για να έχει μη μηδενική λύση θα πρέπει η ορίζουσά του να ισούται με το μηδέν  $|B + \lambda A| = 0$ . Η ορίζουσα αυτή οδηγεί σε πολυώνυμο βαθμού  $2N$  ως προς  $\lambda$ . Οι ιδιοτιμές του συστήματος θα προκύψουν στην μιγαδική μορφή

$$\lambda_n = \mu_n \pm i\nu_n$$

Η ιδιοτιμή με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος αντιστοιχεί στο backward WF, ενώ με το μικρότερο στο forward WF. Για να εκτελέσει το δυναμικό μας σύστημα κίνηση πεπερασμένου εύρους, θα πρέπει το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών να ικανοποιεί την σχέση :  $\mu_n \leq 0 \forall n$ . Αν το πραγματικό μέρος είναι θετικό, το σύστημα είναι ασταθές. Συγκεκριμένα, με βάση την γραμμική θεωρία, για θετικό πραγματικό μέρος προβλέπεται άπειρο εύρος ταλάντωσης, το οποίο ακυρώνει την γραμμικότητα του προβλήματος. Στην πραγματικότητα βέβαια, για θετικό πραγματικό μέρος, το σύστημα ενεργοποιεί μη γραμμικούς όρους, οι οποίοι οδηγούν σε πεπερασμένες ταλαντώσεις. Αν το φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών είναι μηδέν  $\nu_n = 0$  και  $\mu_n > 0$ , τότε το εύρος κινείται προς το άπειρο χωρίς ταλάντωση, ενώ για διάφορο του μηδενός η προσέγγιση του άπειρου εύρους γίνεται με ταλαντωτική συμπεριφορά.

Για το αεροελαστικό πρόβλημα τώρα, για  $\nu_n \neq 0$  και  $\mu_n > 0$ , έχουμε δυναμική αστάθεια του συστήματος (whirl flutter), για  $\nu_n = 0$  και  $\mu_n > 0$  έχουμε στατική αστάθεια στο σύστημα (static divergence), ενώ για  $\nu_n \neq 0$  ή  $\nu_n = 0$  και  $\mu_n < 0$  το σύστημα παραμένει ευσταθές. Γενικά, όταν βρισκόμαστε πάνω στο σύνορο ευστάθειας, τότε οι ιδιοτιμές μας είναι είτε μηδέν (static divergence) είτε καθαρά φανταστικοί αριθμοί (flutter). Ανάπτυξη της ορίζουσας του συστήματος (5.35) θα μας δώσει πολυώνυμο με μιγαδικό και πραγματικό μέρος, όπου από το πραγματικό υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος ( $\lambda_{1,2} = \omega_{1,2}^2$ ) για τις 2 σύνθετες ιδιομορφές του WF. Από υπολογιστική μεριά, για την εύρεση των ορίων, θα λύσουμε το σύστημα διατηρώντας όλες τις παραμέτρους σταθερές εκτός από αυτές που μελετάμε, που συνήθως θα είναι οι στιβαρότητες ( $K_\theta, K_\Psi$ ) της έδρασης. Μεταβάλλοντας για ένα εύρος τιμών παραμέτρων, υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες για κάθε ζεύγος τιμών αυτών. Όταν η λύση μας δώσει μηδενικό πραγματικό μέρος για την ιδιοσυχνότητα, τότε βρισκόμαστε πάνω στο σύνορο ανάμεσα στην ευστάθεια και στην αστάθεια. Στη συνέχεια, ελέγχουμε την τιμή του φανταστικού μέρους έτσι, ώστε να κατηγοριοποιήσουμε τις λύσεις μας ως δυναμική ή στατική αστάθεια.

Για να αντιληφθούμε καλύτερα, κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων, την συμπεριφορά του φαινομένου WF, θα υπολογίσουμε την τροχιά της πλήμνης της προπέλας. Στη συνέχεια παρουσιάζεται η διαδικασία υπολογισμού της απόκρισης των μετατοπίσεων της πλήμνης στις διευθύνσεις  $y, z$  (επίπεδο περιστροφής).

### Απόκριση συστήματος

Έχοντας υπολογίσει τις ιδιοτιμές του συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκριση των 2 βαθμών ελευθερίας ( $\Theta, \Psi$ ). Η διαφορετική προσέγγιση του ιδιοπροβλήματος ασύμμετρων μητρώων έναντι του κλασικού, έγκειται στο γεγονός ότι θα πρέπει να επιλυθεί το πρόβλημα τόσο για τα μητρώα  $A, B$  όσο και για τα ανάστροφα αυτών  $A^T, B^T$ . Ετσι οι 2 εξισώσεις που επιλύουμε για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων (ιδιομορφών) είναι :

$$(B + \lambda A)\hat{y} = \underline{0} \quad (5.35) \quad και \quad \hat{x}(B^T + \lambda A^T) = \underline{0} \quad (5.36)$$

Οι ιδιοτιμές για τα 2 προβλήματα είναι ίδιες, αφού γνωρίζουμε ότι  $|A|^T = |A^T|$ . Αναστροφή της (5.36), μας δίνει :

$$\hat{x}(B + \lambda A) = \underline{0} \quad (5.37)$$

Λόγω της μορφής των (5.35),(5.36) τα ιδιοδιανύσματα  $\hat{x}$  ονομάζονται αριστερά ιδιοδιανύσματα και τα  $\hat{y}$  δεξιά ιδιοδιανύσματα. Για τα ιδιοδιανύσματα αυτά ισχύουν οι συνθήκες διορθογωνικότητας, με χρήση των οποίων διαγωνοποιούμε τα αρχικά μητρώα του συστήματος έτσι, ώστε να καταλήξουμε σε σύστημα αποσυζευγμένων εξισώσεων και διατυπώνονται στην μορφή :

$$Y^T MX = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{2N} \end{bmatrix} \text{ kai } Y^T BX = \begin{bmatrix} \lambda_1 a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_{2N} a_{2N} \end{bmatrix}$$

με N ο αριθμός των αρχικών γενικευμένων συντεταγμένων και οι στήλες των μητρώων X, Y να αποτελούνται από τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα.

Τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε την απόκριση του συστήματος ως γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων στην μορφή:

$$\underline{y}(t) = \sum_{n=1}^{2N} (\hat{y}_n a_n(t)) = Y \underline{a}(t) \quad (5.38)$$

Αντικατάσταση της σχέσης αυτής στο σύστημα (5.34), πολλαπλασιασμός από αριστερά με το μητρώο  $X^T$  και δεξιά με το Y και εφαρμογή των συνθηκών διορθογωνικότητας, μας δίνει ένα σύστημα 2N αποσυζευγμένων διαφορικών εξισώσεων 1<sup>ης</sup> τάξης, γραμμένες ως προς τις συντεταγμένες  $a_n(t)$  στην μορφή :

$$\dot{a}_n - \lambda_n a_n = \underline{h}(t) \quad (5.39)$$

Επειδή εμείς στις εξισώσεις (5.34) δεν έχουμε διέγερση, το διάνυσμα  $h(t)$  ισούται με το μηδέν  $\underline{h}(t) = 0$ . Για να είναι πλήρως ορισμένη η εξίσωση (5.39), υπολογίζουμε και τις αρχικές συνθήκες των καινούργιων συντεταγμένων  $a(t)$ , με χρήση των ιδιομορφών του συστήματος στην μορφή :

$$\underline{a}(0) = \hat{A}^{-1} Y^T A \begin{bmatrix} \underline{v}_0 \\ \underline{x}_0 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Αφού γίνει η επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων(5.39) με χρήση των αρχικών συνθηκών (5.40), υπολογίζουμε από την (5.38) τις μετατοπίσεις και ταχύτητες των βαθμών ελευθερίας μας.

Μια πιο αναλυτική διαδικασία υπολογισμού της απόκρισης, σε συστήματα με μη συμμετρικά μητρώα, μπορεί να βρεθεί στην αναφορά [2].

Έχοντας τώρα υπολογίσει τις αποκρίσεις των βαθμών ελευθερίας ( $\Theta, Y$ ), μπορούμε να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις z, y για την πλήμνη της προπέλας, με σκοπό την οπτικοποίηση της τροχιάς στο επίπεδο περιστροφής, από τις γεωμετρικές σχέσεις :

$$z = \sin(\Theta) \alpha , \quad y = \sin(\Psi) \alpha$$

Μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων.

## 5.5 Αποτελέσματα

Για την παραγωγή των διαγραμμάτων, που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, γράφτηκε κώδικας σε γλώσσα Matlab. Αρχικά παρουσιάζονται τα διαγράμματα των ορίων ευστάθειας και στη συνέχεια οι αποκρίσεις του συστήματος για διαφορετικά σετ παραμέτρων. Θεωρούμε ότι η γωνία pitch ( $\Theta$ ) έχει μηδενική αρχική τιμή κατά την επίλυση. Επιπλέον, οι υπόλοιπες παράμετροι και ιδιότητες, για τις οποίες γίνεται η ανάλυση ευστάθειας, παρουσιάζονται στον Πίνακα 5.1. Οι ροπές αδράνειας της προπέλας υπολογίζονται από το μοντέλο, που υλοποιήθηκε στο λογισμικό Mechanical της εταιρίας ANSYS στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο, ενώ για τον υπόλοιπο κινητήρα οι τιμές αυτές παραλείπονται αφού, όπως αναφέραμε προηγουμένως, επειδή τον μοντελοποιούμε ως κύλινδρο, οι ροπές αδράνειας του εξαρτώνται από την απόσταση προπέλας έδρασης (a), η οποία είναι μια ποσότητα που κατά την διάρκεια της επίλυσης θα διαφοροποιείται. Συγκεκριμένα οι τιμές για τον κύλινδρο, ως προς το κέντρο μάζας του, προκύπτουν από τις εξισώσεις :

$$I_{xx}^{cm} = \frac{1}{2} m_2 d_2^2 , \quad I_{yy}^{cm} = I_{zz}^{cm} = \frac{1}{4} m_2 d_2^2 + \frac{1}{12} m_2 a^2 , \quad m_2 = \frac{\rho \pi d_2^2}{4} a$$

Πίνακας 5.1 Παράμετροι και ιδιότητες συστήματος

Περιστροφική Ταχύτητα	$n = 2500 [rpm]$	Ροπή αδράνειας y	$I_{yy}^{cm} = 8.1 [kg \cdot m^2]$
Απόσταση προπέλας	$a = 0.55$	Ροπή αδράνειας z	$I_{zz}^{cm} = 8.1 [kg \cdot m^2]$
Συντελεστής Στιβαρότητας Pitch	$K_\theta = 70 [kNm \cdot rad^{-1}]$	Χορδή αναφοράς	$c_r = 0.22 [m]$
Συντελεστής Στιβαρότητας Yaw	$K_\psi = 70 [kNm \cdot rad^{-1}]$	Πυκνότητα Αέρα	$\rho = 1.225 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
Συντελεστής Ιξώδους Pitch	$C_\theta = 0.01 [Nm \cdot s \cdot rad^{-1}]$	Πυκνότητα Υλικού	$\rho = 2770 \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$
Συντελεστής Ιξώδους Yaw	$C_\psi = 0.01 [Nm \cdot s \cdot rad^{-1}]$	Ταχύτητα ήχου	$\alpha \approx 340 \left[ \frac{m}{s} \right]$
Ροπή αδράνειας x	$I_{xx}^{cm} = 0.4 [kg \cdot m^2]$	Μάζα Προπέλας	58.472 [kg]

Στον πίνακα βλέπουμε επίσης ότι οι μονάδες μέτρησης, για τους συντελεστές στιβαρότητας και απόσβεσης, περιέχουν την ποσότητα  $\left( \frac{1}{rad} \right)$ , επειδή αναφερόμαστε σε στρεπτικά ελατήρια.

### Διαγράμματα Ευστάθειας

Στο Σχήμα 5.12, παρουσιάζονται τα όρια ευστάθειας για διαφορετικές τιμές της στιβαρότητας στην έδραση για τα περιστροφικά ελατήρια. Τα διαγράμματα που βλέπουμε, αναφέρονται σε 3 διαφορετικές ταχύτητες της ελεύθερης ροής. Οι άξονες του διαγράμματος είναι εκφρασμένοι ως προς τις ανεξάρτητες ιδιοσυχνότητες (του αποσυζευγμένου προβλήματος) της κατασκευής για την περιστροφή yaw και Pitch, μιας και οι παράμετροι αυτές για το φαινόμενο που μελετάμε είναι οι σημαντικότερες. Οι τιμές αυτές προκύπτουν από την εξίσωση :

$$\omega_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\theta}{I_Y}} \quad \text{και} \quad \omega_\psi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\psi}{I_Z}}$$

Όλα τα σχήματα που θα παρουσιαστούν στην ενότητα αυτή, έχουν την ίδια μορφή με το σχήμα 5.12. Η καμπύλη αποτελεί το σύνορο ευστάθειας και τα σημεία πάνω στην καμπύλη δίνουν οριακά ευσταθή λύση, ενώ το φαινόμενο WF αναπτύσσεται στην εσωτερική περιοχή του ιδιόμορφου τιμήματος, στο κάτω αριστερά μέρος. Επιπλέον, σημειώνονται οι περιοχές, όπου έχουμε στατική

απόκλιση για το σύστημα ( $v_n = 0$ ), η οποία παρατηρείται στα σημεία του διαγράμματος με μικρή στιβαρότητα ως προς έναν από τους 2 βαθμούς ελευθερίας. Από το Σχήμα 5.12, παρατηρούμε ότι αυξανόμενης της ταχύτητας του αέρα ( $\Omega = \text{σταθερό}$ ), αυξάνοντας δηλαδή τον λόγο ταχυτήτων ( $J = \frac{V}{nD}$ ), έχουμε αύξηση της περιοχής αστάθειας για το WF. Για να παραμείνει το σύστημά μας ευσταθές, απαιτείται η αύξηση της στιβαρότητας της κατασκευής. Επιπλέον, σημαντικό είναι να παρατηρήσουμε ότι η πιο κρίσιμη κατάσταση προκύπτει για  $K_\theta = K_\psi$ , το οποίο σημαίνει συμμετρική στιβαρότητα για το σύστημα στην έδραση. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο ότι έχουμε συμμετρική στιβαρότητα  $\omega_\theta = \omega_\psi$ , επομένως η αλληλεπίδραση των 2 ανεξάρτητων κινήσεων είναι μέγιστη. Ο βασικός κανόνας για την αποφυγή του WF, ο οποίος είναι ευδιάκριτος και στο σχήμα αυτό, είναι «μεγάλες στιβαρότητες για ευσταθή συμπεριφορά». Επιπλέον, μια κατασκευαστική αστοχία στην έδραση του κινητήρα, μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση της στιβαρότητας και επομένως να καταστήσει το σύστημά μας πιο ευάλωτο στο WF.

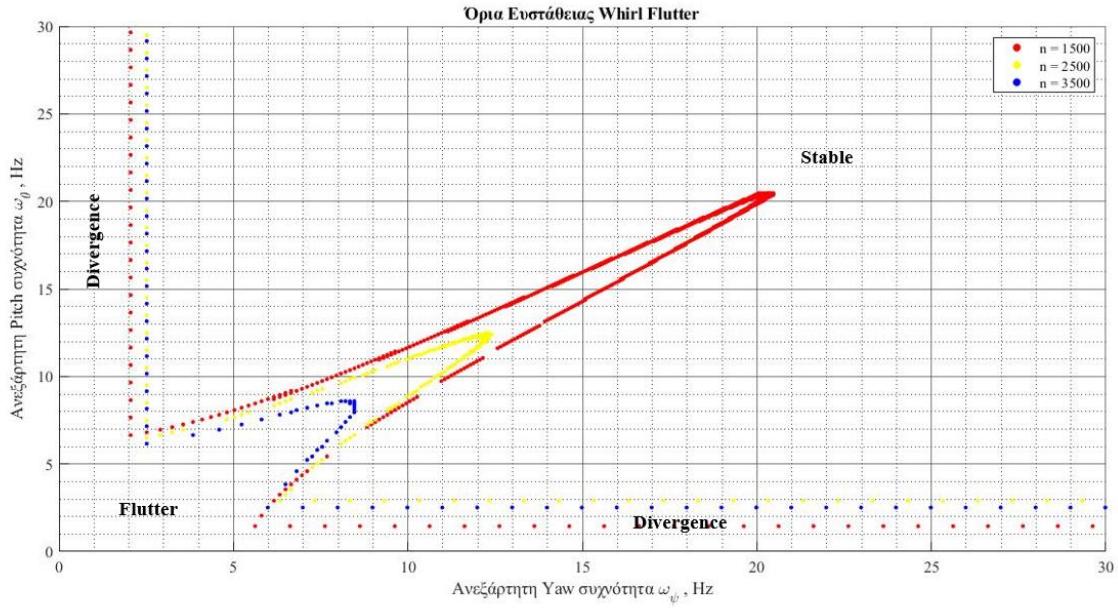


Σχήμα 5.12. Όρια ευστάθειας για διαφορετικές στιβαρότητες έδρασης και για 3 διαφορετικές ταχύτητες της ελεύθερης ροής.

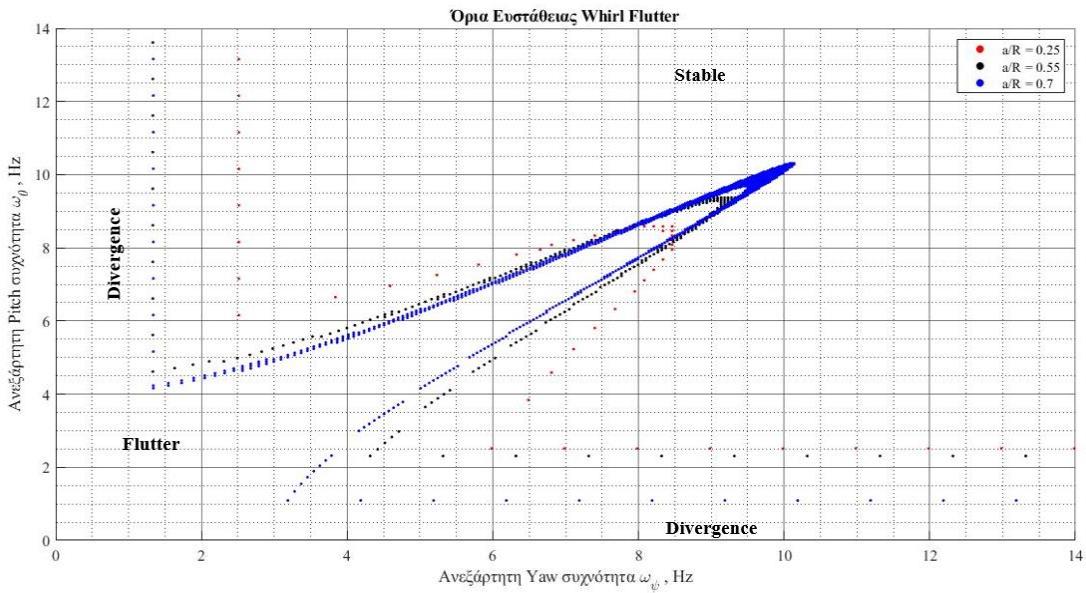
Στο Σχήμα 5.13 παρουσιάζονται τα όρια ευστάθειας για το σύστημά μας, για 3 διαφορετικές περιστροφικές ταχύτητες της προπέλας, για διαφορετικές στιβαρότητες της έδρασης στις 2 περιστροφικές διευθύνσεις. Μπορούμε να δούμε ότι η συμπεριφορά είναι αντίθετη με το προηγούμενο σχήμα. Αυξανόμενης της περιστροφικής ταχύτητας, άρα μείωση του  $J$ , έχουμε αύξηση της περιοχής ευστάθειας για το σύστημα. Επίσης, πάλι η κρισιμότερη κατάσταση ορίζεται για συμμετρική στιβαρότητα. Διαγράμματα όπως τα 2 προηγούμενα, είναι σημαντικό να εξετάζονται κατά τον σχεδιασμό κινητήρων και αεροσκαφών, στο αρχικό στάδιο, έτσι ώστε να μπορεί να οριστεί σωστά και με ασφάλεια το εύρος ταχυτήτων λειτουργίας για το σύστημα, μιας και, κατά την ανάπτυξη του προϊόντος, βασίζουμε όλες τις προδιαγραφές στις τιμές αυτές.

Στο Σχήμα 5.14, βλέπουμε πώς επηρεάζει η απόσταση της προπέλας από την έδραση την ευστάθεια του συστήματος. Παρατηρούμε ότι όσο πιο απομακρυσμένη είναι η προπέλα, τόσο μεγαλύτερες τιμές  $K_\theta$ ,  $K_\psi$  για την κατάσταση συμμετρικής στιβαρότητας απαιτούνται. Βέβαια, για ασύμμετρη στιβαρότητα, μπορούμε να οδηγηθούμε σε ευσταθές σύστημα, με απλή προσαρμογή

των παραμέτρων και όχι μεγάλη αύξηση. Επιπλέον, αυξανόμενης της απόστασης, μειώνονται οι περιοχές στατικής απόκλισης. Γενικά, τα σύγχρονα αεροσκάφη σχεδιάζονται έτσι, ώστε να μην υπάρχει η πιθανότητα εμφάνισης στατικού φαινομένου αστάθειας. Η χαρακτηριστική και απλή μορφή των περιοχών στατικής απόκλισης, που παρατηρήσαμε στα παραπάνω διαγράμματα, μας επιτρέπει να αποφύγουμε εξ ολοκλήρου τέτοια φαινόμενα.



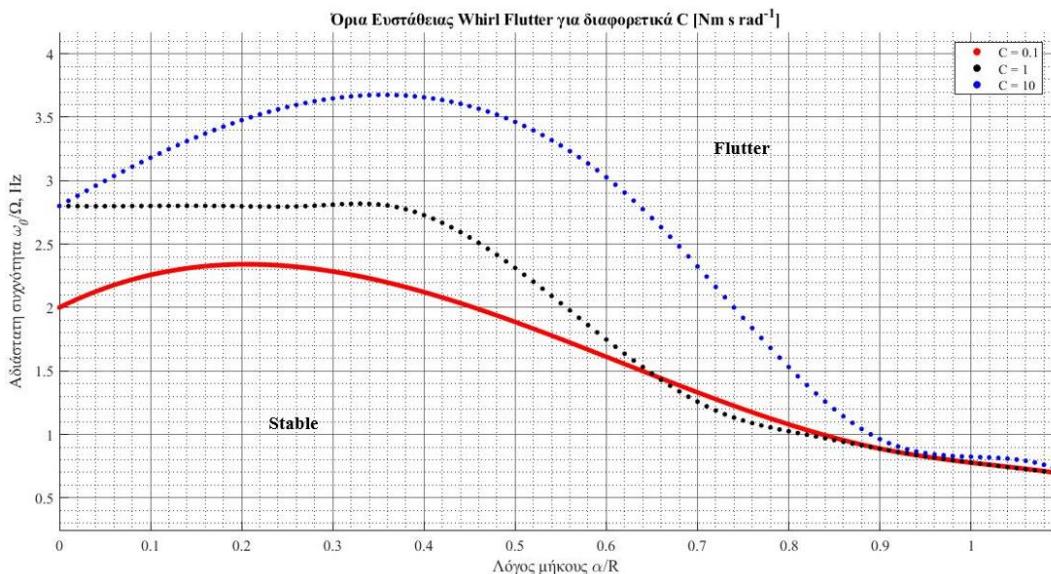
Σχήμα 5. 13. Όρια ευστάθειας για διαφορετικές στιβαρότητες έδρασης και για 3 διαφορετικές περιστροφικές ταχύτητες προπέλας.



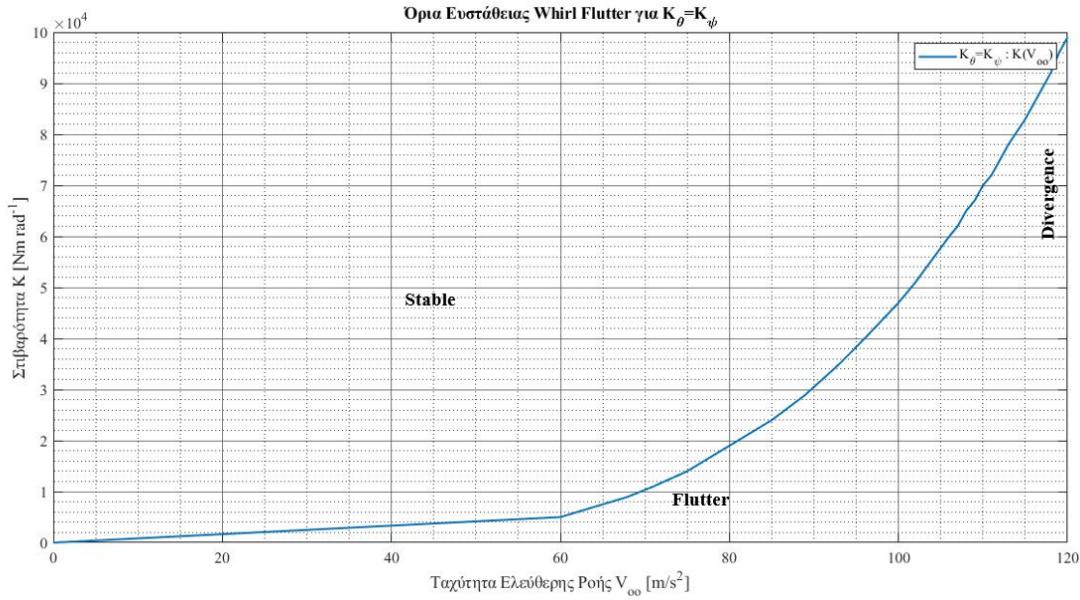
Σχήμα 5. 14. Όρια ευστάθειας για διαφορετικές στιβαρότητες έδρασης και για 3 διαφορετικές αποστάσεις προπέλας - έδρασης.

Στο σχήμα 5.15, βλέπουμε την επιρροή του συντελεστή απόσβεσης στα όρια ευστάθειας. Το διάγραμμα παρουσιάζεται ως προς την αδιάστατη συχνότητα για συμμετρική στιβαρότητα στον άξονα των για συναρτήσει του λόγου απόστασης – διαμέτρου για την προπέλα. Η συμμετρική στιβαρότητα επιλέγεται λόγω της μεγαλύτερης κρισιμότητάς της, έναντι των υπόλοιπων καταστάσεων. Για το σχήμα αυτό, θεωρούμε συμμετρική απόσβεση ( $C_\theta = C_\psi$ ) στις 2 διευθύνσεις. Βλέπουμε ότι η κατασκευαστική απόσβεση προσφέρει μεγαλύτερες περιοχές ευστάθειας στο σύστημα, για τους ίδιους λόγους  $\frac{a}{R}$ .

Στο σχήμα 5.16, παρουσιάζονται οι περιοχές ευστάθειας για σταθερή περιστροφική ταχύτητα της προπέλας, για συμμετρική στιβαρότητα. Βλέπουμε ότι για χαμηλότερες ταχύτητες πτήσης, το όριο ευστάθειας ορίζεται από την συμπεριφορά του συστήματος σε flutter, ενώ για υψηλότερες ταχύτητες, ο καθοριστικός παράγοντας είναι η στατική απόκλιση. Διαγράμματα τέτοιας μορφής, βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή σε κινητήρες που χρησιμοποιούν προπέλες σταθερής ταχύτητας.



Σχήμα 5. 15. Επιρροή απόσβεσης κατασκευής στα όρια ευστάθειας.



Σχήμα 5. 16. Όρια ευστάθειας για  $K_\theta = K_\psi$  και  $\Omega = \sigma$  αθερό.

### Απόκριση

Έως το σημείο αυτό, παρατηρήσαμε την συμπεριφορά του συστήματος για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του. Στην πραγματικότητα, είναι δύσκολο να αντιληφθούμε ποια είναι η σημασία των περιοχών αυτών, αν δεν παρατηρήσουμε την εξέλιξη της κίνησης σε μια πραγματική κατασκευή. Όπως αναφέρθηκε στην θεωρία, τα εύρη ταλάντωσης του συστήματος σε κατάσταση flutter είναι θεωρητικά άπειρα και οι συζευγμένες κινήσεις του αντίστροφου και σύστροφου στροβίλισμού της προπέλας είναι εξαιρετικά περίπλοκες. Για να μπορέσουμε να δώσουμε μια εικόνα σε αυτές τις έννοιες, αλλά και συνολικά στο φαινόμενο που μελετάμε, παρουσιάζουμε τα διαγράμματα απόκρισης της τροχιάς, για λειτουργία του συστήματος σε διαφορετικές περιοχές ευστάθειας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε τιμές των παραμέτρων από τα διαγράμματα ευστάθειας 5.12 έως 5.16 και οπτικοποιούμε, στο επίπεδο περιστροφής y-z της προπέλας, την τροχιά του κέντρου της πλήμνης. Στα σχήματα που ακολουθούν, διατηρούμε όλες τις τιμές του συστήματος ίδιες με τις τιμές του Πίνακα 5.1 και διαφοροποιούμε κάθε φορά την στιβαρότητα του συστήματος (επιλέγουμε  $\omega_\theta$  και  $\omega_\psi$ ), για να κινηθούμε από την μια περιοχή στην άλλη και επάνω στο σύνορο.

Οι χρόνοι για τους οποίους υπολογίζουμε την απόκριση διαφοροποιούνται από διάγραμμα σε διάγραμμα έτσι, ώστε να είναι ευδιάκριτα τα χαρακτηριστικά ευστάθειας που αναζητάμε. Για την εξαγωγή της συμπεριφοράς ευστάθειας, εισάγουμε διαταραχή στο σύστημα και παρατηρούμε πώς διαδίδεται. Συγκεκριμένα, εισάγουμε μια διαταραχή 5 μοιρών στην γωνία pitch. Στο Σχήμα 5.17, βλέπουμε την τροχιά της πλήμνης της προπέλας, με τιμές για τις ανεξάρτητες ιδιοσυχνότητες στην ευσταθή περιοχή:

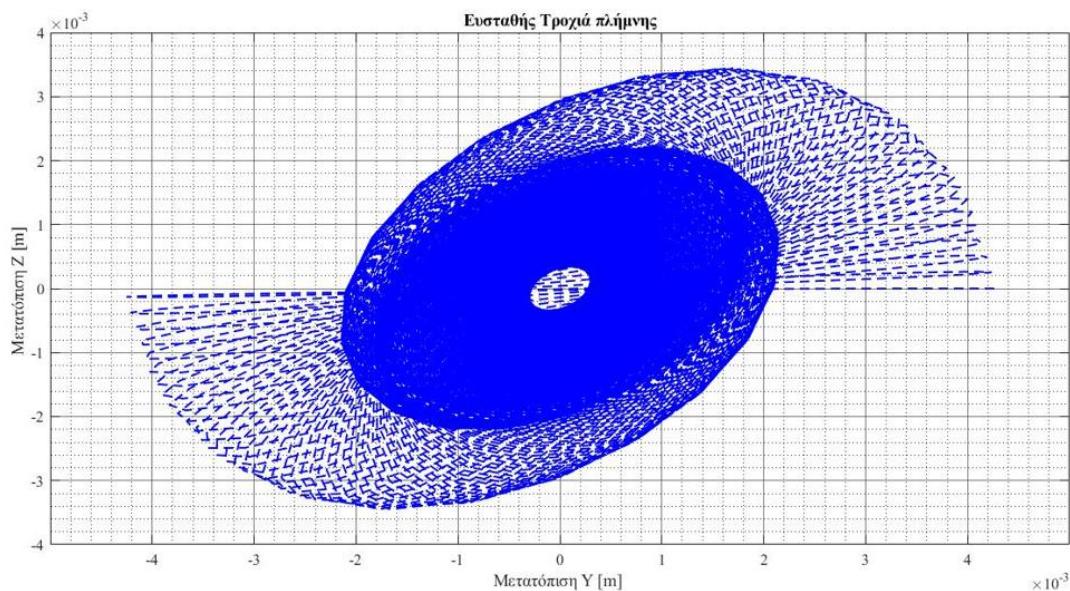
$$\omega_\theta = \omega_\psi = 162.8 \text{ Hz} , (K_\theta = K_\psi = 1050 [\text{kNm rad}^{-1}])$$

Παρατηρούμε ότι αρχικά το σύστημα εκτελεί μια σύνθετη κίνηση ελλειπτικής μορφής, αλλά με την πάροδο του χρόνου, η θέση της πλήμνης τείνει στο κέντρο (0,0). Για τον λόγο αυτό το σύστημα

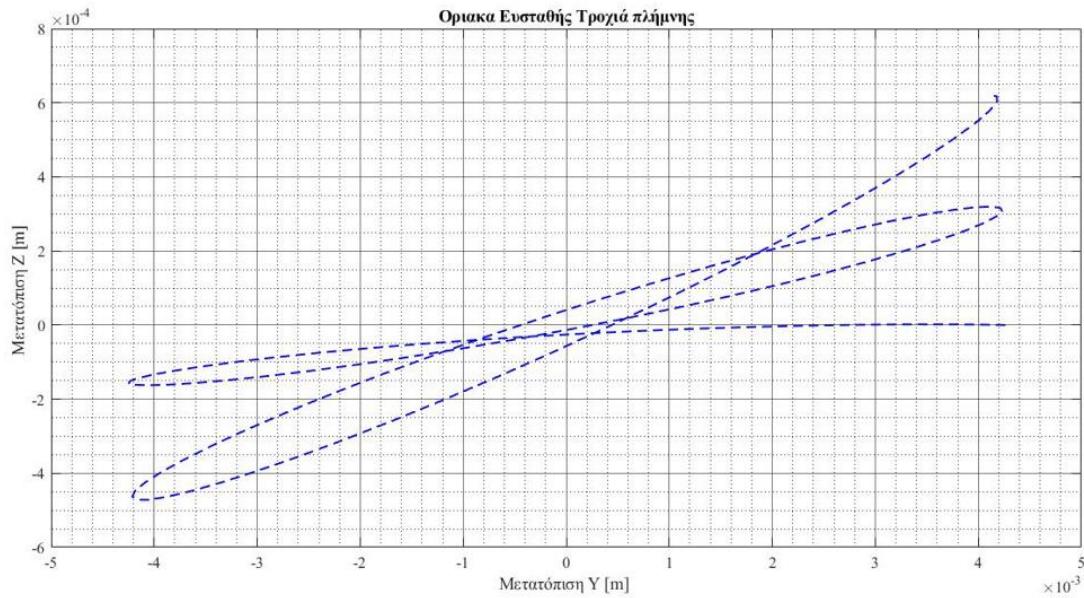
χαρακτηρίζεται ως ευσταθές. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον έχει η τροχιά του Σχήματος 5.18, για την οποία το σύστημά μας είναι οριακά ευσταθές. Οι στιβαρότητες για την έδραση επιλέγονται πάνω στο σύνορο ευστάθειας.

$$\omega_\theta = 10 \text{ Hz}, \quad \omega_\psi = 32.61 \text{ Hz}, \quad (K_\theta = 167 [\text{kNm rad}^{-1}], K_\psi = 1050 [\text{kNm rad}^{-1}])$$

Η κίνηση θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως στρεφόμενη ελλειπτική τροχιά, με αυξομειώσεις στα μήκη των πλευρών της. Τα εύρη ταλάντωσης για τις 2 διευθύνσεις βλέπουμε ότι είναι μικρότερα από τις αρχικές τιμές της ευσταθούς λύσης. Από την θεωρία για οριακά ευσταθή κατάσταση υπολογίζουμε μια συνεχώς περιοδική κίνηση. Βέβαια στην πραγματικότητα, αν δεν αποσβεσθεί η κίνηση αυτή, λόγω κόπωσης της κατασκευής και κυρίως της έδρασης (αστοχίες έδρασης), μπορούμε να έχουμε μείωση της στιβαρότητας και το σύστημα να οδηγηθεί στην αστάθεια.



Σχήμα 5. 17. Ευσταθής τροχιά πλήμνης στο επίπεδο περιστροφής y-z για  $\omega_\theta = \omega_\psi = 162.8 \text{ Hz}$



Σχήμα 5. 18 Οριακά ευσταθής τροχιά πλήμνης στο επίπεδο περιστροφής y-z για  $\omega_\theta = 10 \text{ Hz}$ ,  $\omega_\psi = 32.61 \text{ Hz}$

Στο Σχήμα 5.19, απεικονίζεται η τροχιά της πλήμνης σε κατάσταση whirl flutter. Οι παράμετροι επιλέγονται στην περιοχή αστάθειας flutter, με τιμές :

$$\omega_\theta = \omega_\psi = 32.61 \text{ Hz}, (K_\theta = K_\psi = 42 [\text{kNm rad}^{-1}])$$

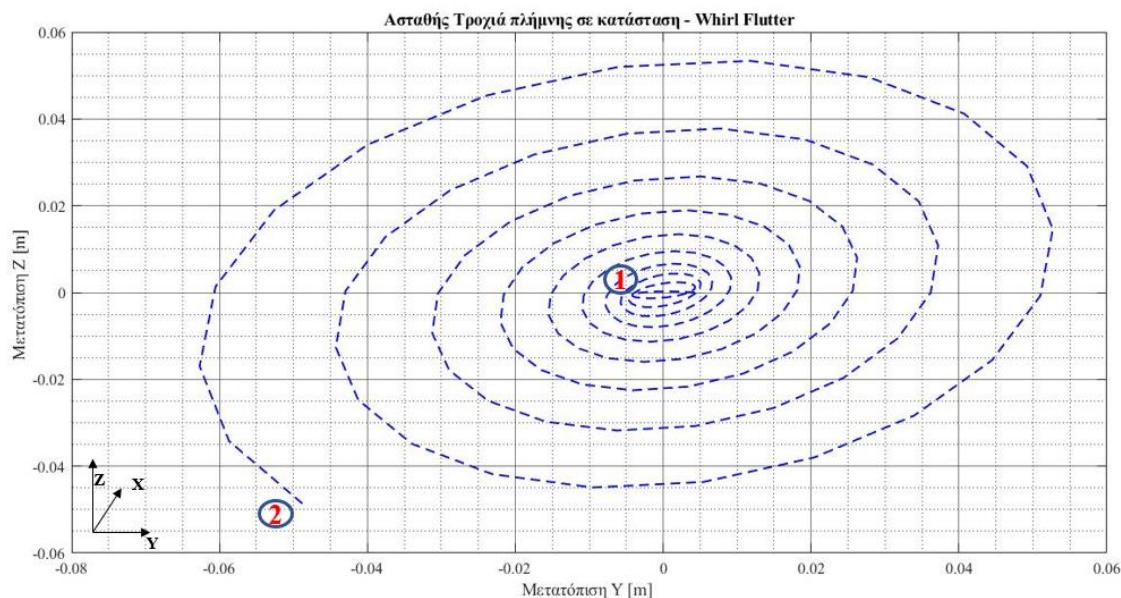
Από το σύστημα συντεταγμένων, που φαίνεται κάτω αριστερά του σχήματος, μπορούμε να διακρίνουμε ότι η τροχιά, που διαγράφει η προπέλα, είναι αντίθετη της φοράς περιστροφής της (backward). Η κίνηση ξεκινάει από τη θέση της διαταραχής (1) και προχωράει προς την θέση (2) με ταχέως αυξανόμενο πλάτος ταλάντωσης. Συγκεκριμένα, το διάγραμμα αυτό αποκτήθηκε για χρόνο προσομοίωσης  $t = 1 \text{ sec}$ . Επιπλέον, βλέπουμε ότι σε τόσο σύντομο χρονικό διάστημα, τα εύρη ταλάντωσης είναι μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερα από τις 2 προηγούμενες καταστάσεις. Η τροχιά που απεικονίζεται στο σχήμα αυτό έχει την χαρακτηριστική μορφή, που περιγράφηκε στην θεωρία.

Στο Σχήμα 5.20, βλέπουμε την τροχιά της πλήμνης σε κατάσταση στατικής απόκλισης. Οι στιβαρότητες της έδρασης επιλέγονται :

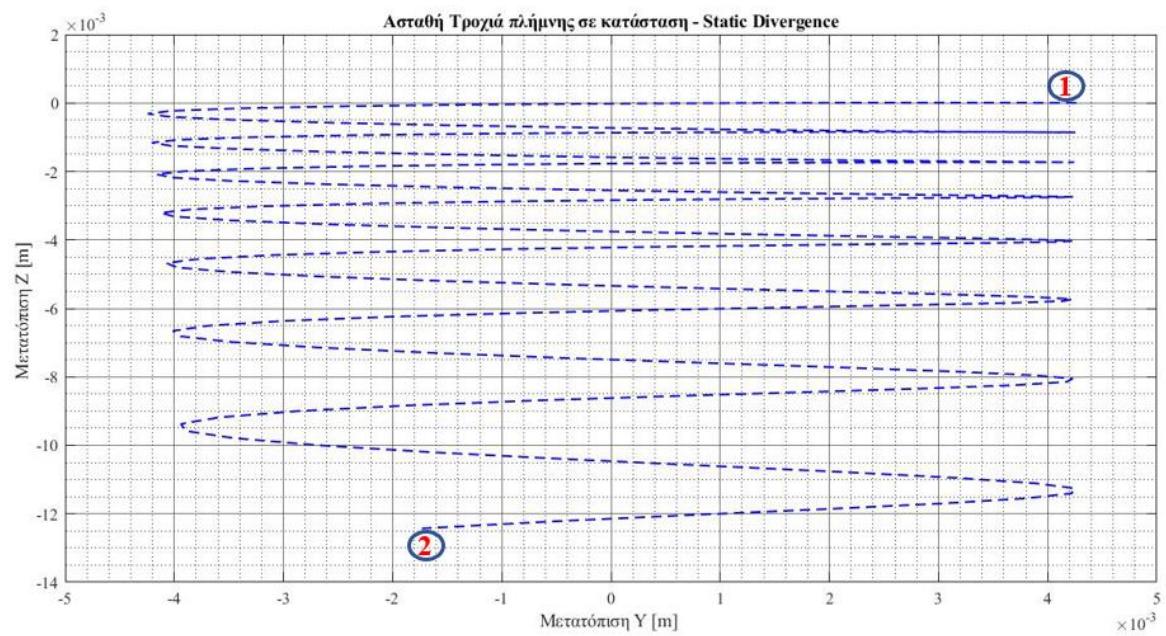
$$\omega_\theta = 96.2 \text{ Hz}, \omega_\psi = 11.25 \text{ Hz}, (K_\theta = 365 [\text{kNm rad}^{-1}], K_\psi = 5 [\text{kNm rad}^{-1}])$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος ταλάντωσης στην y διεύθυνση παραμένει σταθερό στην διάρκεια της κίνησης και το σύστημα κυριαρχείται από την συνιστώσα του στην διεύθυνση z(Θ). Στη διεύθυνση Θ το σύστημα, όπως αναμένουμε με βάση την περιγραφή που έγινε στην θεωρία, κινείται προς μεγάλα εύρη απόκρισης χωρίς να εκτελεί ταλάντωση. Η προσομοίωση για τα 2 αυτά διαγράμματα αστάθειας πραγματοποιήθηκε για τον ίδιο χρόνο  $t = 1 \text{ sec}$ . Μπορούμε να δούμε ότι μέχρι την χρονική στιγμή αυτή, η στατική απόκλιση εμφανίζει μικρότερα εύρη. Βέβαια, λόγω της κίνησης δίχως ταλάντωση, περιμένουμε, για μεγαλύτερους χρόνους, η μετατόπιση στον z να είναι μεγαλύτερη έναντι του whirl flutter.

Συνοψίζοντας, στο κεφάλαιο αυτό είδαμε ότι τα αεροελαστικά φαινόμενα αστάθειας έχουν σημαντική συνεισφορά στην ακεραιότητα της κατασκευής. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε, κατά τον προκαταρκτικό σχεδιασμό, τα χαρακτηριστικά αυτά έτσι, ώστε να μπορούμε να αποφύγουμε ή και να εκμεταλλευτούμε (FSI – harvesting energy) φαινόμενα με τόσο έντονη συμπεριφορά. Επιπλέον, μέσα από τα διαγράμματα παρατηρήσαμε την συμπεριφορά του συστήματος για διάφορες παραμέτρους και την σύνθετη κίνηση, που εκτελεί αυτό, για όλες τις περιοχές στο φάσμα ευστάθειας.



Σχήμα 5. 19. Ασταθής τροχιά αντίστροφου στροβιλισμού (backward whirl flutter) για  $\omega_\theta = \omega_\psi = 32.61 \text{ Hz}$



Σχήμα 5. 20. Ασταθής τροχιά στατικής απόκλισης (static divergence) για  $\omega_\theta = 96.2 \text{ Hz}$ ,  $\omega_\psi = 11.25 \text{ Hz}$

## 6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο τελευταίο κεφάλαιο της παρούσας διπλωματικής εργασίας, συνοψίζουμε τα συμπεράσματα, στα οποία καταλήξαμε από την ανάλυσή μας για τα διαφορετικά μοντέλα. Το σημαντικότερο αποτέλεσμα από την έως τώρα ανάλυση, μπορούμε να πούμε ότι είναι η παρατήρηση και τριβή με τα διαφορετικά βήματα της μελέτης, που απαιτούνται σε πραγματικές εφαρμογές:

**Σχεδιασμός → Ρευστομηχανική Ανάλυση → Δυναμική Ανάλυση + Ανάλυση Ευστάθειας**

Πλέον, αναγνωρίζουμε την σημασία του κάθε βήματος, τις δυσκολίες που μπορούν να προκύψουν, αλλά και τα κρίσιμα σημεία στα οποία θα πρέπει να δίνεται μεγαλύτερη προσοχή. Όλα τα παραπάνω οδηγούν στον ορισμό της «πλήρης μελέτης», που δόθηκε για την παρούσα εργασία στο 1<sup>o</sup> κεφάλαιο.

Συγκεκριμένα στο 2<sup>o</sup> κεφάλαιο, είδαμε ότι για τον σωστό σχεδιασμό του μοντέλου, χρειάζεται αρχικά να οριστούν οι στόχοι που θέλουμε να επιτύχουμε, τα κριτήρια σχεδίασης και η πορεία που θα ακολουθήσουμε. Όπως είδαμε, τόσο από τα αποτελέσματα, όσο και από τις εξισώσεις που χρησιμοποιήσαμε για την ερμηνεία αυτών, τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της προπέλας παίζουν μεγάλο ρόλο στα αναπτυσσόμενα φορτία και στα φαινόμενα που εμφανίζονται σε αυτήν. Επιπλέον, στο κεφάλαιο αυτό είδαμε την σημασία των αρμονικών συνιστωσών των δυνάμεων. Οι αρμονικές συνιστώσες, όπως αποδείχθηκε και από τις αναλύσεις των κεφαλαίων 3 και 4, έχουν μεγάλη σημασία για την ακεραιότητα της κατασκευής και αποτελούν την μεγαλύτερη πηγή εμφάνισης αστοχιών. Να πούμε βέβαια ότι πλέον στις περισσότερες μεγάλες εταιρίες η φάση του σχεδιασμού μιας κατασκευής διεξάγεται παράλληλα με τις προσομοιώσεις (Ρευστομηχανικές – Δυναμικές), με στόχο την παραγωγή της βέλτιστης κατασκευής με τα καλύτερα χαρακτηριστικά, αλλά και την πρόληψη διαφοροποιήσεων που θα μπορούσαν να προκύψουν, αν τα διαφορετικά στάδια γινόντουσαν σε σειρά.

Στο 3<sup>o</sup> κεφάλαιο έγινε η κατασκευή και η επίλυση του τρισδιάστατου ρευστομηχανικού μοντέλου, θεωρώντας την προπέλα μας ως στερεή. Από την ανάλυση αυτή γνωρίσαμε τις δυσκολίες που εμφανίζονται για την μοντελοποίηση πραγματικών εφαρμογών σε εμπορικά λογισμικά. Επιπλέον, δουλέψαμε και με την έννοια του σωστού πλέγματος διακριτοποίησης. Σχετικά με το πλέγμα, καταλήγουμε στο ότι χρειάζεται ένα πλέγμα με καλή κάλυψη των περιοχών ενδιαφέροντος με τα στοιχεία του να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο παραμορφωμένα. Ακόμα είδαμε την περιοδικά μεταβαλλόμενη συμπεριφορά των αεροδυναμικών φορτίων και τις διαφορετικές αναπτυσσόμενες πιέσεις στα πτερύγια, σε διαφορετικές συνθήκες προσομοίωσης. Τα σημαντικότερα εκ των φορτίων αυτών αποτελούν οι συνιστώσες της ροπής που βρίσκονται πάνω στο επίπεδο περιστροφής και η δύναμη της ώσης, μιας και είναι αυτή που τελικά θα προκαλέσει την μεταφορική κίνηση του αεροσκάφους. Στη συνέχεια, με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, ο οποίος αποτελεί ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, θα μπορούσε να πει κανείς ότι αποκαλύπτουμε τις ιδιαιτερότητες των σημάτων που μας παρέχει η επίλυση (επαγγελματικά λογισμικά). Δηλαδή βλέπουμε χαρακτηριστικά σχετικά με την ένταση των δυναμικών συνιστωσών των φορτίων.

Επιπλέον, παρατηρήσαμε ότι μεγαλύτερη σημασία, για την αντοχή σε κόπωση της κατασκευής, έχουν οι αρμονικές συνιστώσες 2P των φορτίων, οι οποίες είναι αυτές που πρέπει να λαμβάνονται υπόψη σε όλες τις φάσεις του σχεδιασμού και της ανάλυσης. Ένα ακόμα σημαντικό συμπέρασμα, το οποίο εξάχθηκε από την ρευστομηχανική επίλυση, αλλά δεν είναι εμφανές στην παρουσίαση της εργασίας, είναι οι μεγάλοι χρόνοι επίλυσης. Τα ρευστομηχανικά προβλήματα λόγω του

μεγάλου αριθμού στοιχείων, των πολύπλοκων εξισώσεων και της απαίτησης μικρών χρονικών βημάτων, απαιτούν πολύ μεγάλους χρόνους επίλυσης. Συγκεκριμένα, για την προπέλα που μελετήθηκε στην παρούσα εργασία, ο μέσος χρόνος που χρειάστηκε για την απόκτηση λύσης ήταν περίπου 3 ώρες. Επομένως, έχει σημασία να επιδιώκουμε την μείωση του αριθμού των στοιχείων ή και την κατασκευή του βέλτιστου δυνατού πλέγματος διακριτοποίησης, διότι για μεγαλύτερα μοντέλα πραγματικών εφαρμογών, οι χρόνοι μπορούν να γίνουν απαγορευτικοί, και όπως συνηθίζεται να λέγεται στην σύγχρονη κοινωνία : «Ο χρόνος είναι χρήμα».

Στο 4<sup>o</sup> κεφάλαιο, έγινε η εισαγωγή της παραμορφωσιμότητας στο μοντέλο και επιλύθηκε το αεροελαστικό πρόβλημα (FSI). Από το θεωρητικό κομμάτι του κεφαλαίου, γνωρίσαμε τις διαφορές των παραμορφώσιμων σωμάτων έναντι των στερέων. Επιπλέον, παρουσιάστηκαν τα σημαντικότερα στατικά και δυναμικά αεροελαστικά φαινόμενα και οι μηχανισμοί που τα εμφανίζουν, με κυρίαρχο αυτών το Flutter. Από την επίλυση του απλοποιημένου προβλήματος της περιστρεφόμενης δοκού, παρατηρήσαμε στις εξισώσεις τους πρόσθετους όρους στο μητρώο στιβαρότητας, οι οποίοι οδηγούν τελικά στην γυροσκοπική σκλήρυνση. Η συμπεριφορά αυτή θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη, με στόχο την αποφυγή της λειτουργίας σε περιοχές συντονισμού. Κατά την μοντελοποίηση τώρα, στα εμπορικά λογισμικά, έγινε όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, εμφανής η σημασία της σωστής διακριτοποίησης, με στόχο την μείωση των χρόνων επίλυσης αλλά και την αύξηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα για το FSI πρόβλημα, ο μέσος χρόνος που χρειάστηκε κυμαινόταν περίπου στις 36 ώρες. Βλέπουμε ότι, σε σύγκριση με το ρευστομηχανικό μοντέλο, ο χρόνος είναι περίπου 12 φορές μεγαλύτερος, έτσι ο στόχος των μειωμένων χρόνων επίλυσης αποκτά μεγαλύτερη σημασία.

Με την κατασκευή του διαγράμματος Campbell παρατηρήσαμε τις μεγάλες μεταβολές που εμφανίζουν οι φυσικές ιδιοσυχνότητες της κατασκευής, συναρτήσει της περιστροφικής ταχύτητας, και τα σημεία στα οποία υπάρχει ο κίνδυνος συντονισμού. Από τα αποτελέσματα παρατηρήσαμε ότι οι λύσεις μας, για όλα τα σετ τιμών, παραμένουν περιοδικές τόσο για τα φορτία όσο και για τις ελαστικές ποσότητες (μετατοπίσεις, παραμορφώσεις, τάσεις κλπ.). Βέβαια, οι αποκρίσεις αυτών εμφανίζουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα. Με εφαρμογή της ανάλυσης Fourier είδαμε ότι η αυξημένη αυτή πολυπλοκότητα οφείλεται στις μεγάλες διαφορές ανάμεσα στα πλάτη ταλάντωσης των δύο προβλημάτων (CFD – FSI). Ακόμα παρατηρήσαμε την αεροδυναμική απόσβεση που εισάγει το ροϊκό πεδίο στην κατασκευή και την μείωση στα εύρη ταλάντωσης λόγω αυτού. Τα αεροδυναμικά φορτία λειτουργούν ως δυνάμεις περιοδικής διέγερσης για την κατασκευή και, όπως παρατηρήσαμε, απομάκρυνση αυτών οδηγεί σε μια μόνιμα στατική παραμόρφωση. Από τα διαφορετικά σετ τιμών, για τα οποία επιλύθηκε το σύστημά μας, έγινε κατανοητό ότι λειτουργία γύρω από τις περιοχές συντονισμού, σύμφωνα με το διάγραμμα Campbell οδηγεί σε μεγαλύτερες αποκρίσεις(μεγαλύτερος κίνδυνος καταστροφής). Ως τελικό συμπέρασμα σχετικά με το αεροελαστικό πρόβλημα της προπέλας μπορούμε να πούμε ότι η συν-προσομοίωση, σε πραγματικές εφαρμογές, είναι απαραίτητη είτε για την αύξηση της ακρίβειας της λύσης είτε για την εμφάνιση σημαντικών φαινομένων, τα οποία για αποσυζευγμένη μελέτη των υπό μέρους συστημάτων δεν θα μπορούσαμε να τα παρατηρήσουμε. Βέβαια, όταν πραγματοποιούνται μελέτες τέτοιου τύπου, θα πρέπει στον αρχικό προγραμματισμό να συνυπολογίζονται και οι απαιτούμενοι χρόνοι.

Στο 5<sup>o</sup> και τελευταίο κεφάλαιο, πραγματοποιήσαμε μια παραμετρική μελέτη για την ευστάθεια του αεροελαστικού δυναμικού φαινομένου Whirl Flutter (γυροσκοπικός στροβιλισμός). Αρχικά, γνωρίσαμε το φαινόμενο της γυροσκοπικής μετάπτωσης το οποίο σε περιστρεφόμενες κατασκευές με μεγάλες μάζες είναι αυτό που εμφανίζει σύνθετες κινήσεις και επιπρόσθετα φαινόμενα. Στην συνέχεια, μέσω της παρουσίασης των αρχών που διέπουν το Whirl Flutter, αντιλαμβανόμαστε τις

σημαντικές επιπτώσεις που μπορεί να δημιουργήσει στην κατασκευή μας η παραμορφώσιμη έδραση. Στο κεφάλαιο αυτό, λόγω της αναλυτικής κατάστρωσης των εξισώσεων, γνωρίσαμε τις διαφορετικές δυσκολίες που εμφανίζονται κατά την αναλυτική επίλυση και την δημιουργία κώδικα. Η μεγαλύτερη δυσκολία, σχετικά με αυτό, είναι η σωστή επιλογή όλων των σταθερών του μοντέλου (συντελεστής απόσβεσης και στιβαρότητας), ποσότητες οι οποίες στον επαγγελματικό κόσμο, υπολογίζονται συνήθως πειραματικά.

Από τα αποτελέσματα του κεφαλαίου, γενικά μπορούμε να πούμε ότι όσο μεγαλύτερη η στιβαρότητα, τόσο μεγαλύτερη η ασφάλεια. Επιπλέον, η επιλογή ασύμμετρων χαρακτηριστικών μπορεί να διατηρήσει την κατασκευή μας, ακόμα και για χαμηλές στιβαρότητες, σε ασφαλείς περιοχές λειτουργίας. Ακόμα, η ανέξηση της περιστροφικής ταχύτητας ή η μείωση της ταχύτητας πτήσης, οδηγούν σε μείωση των περιοχών ευστάθειας, λόγω αύξησης των αεροδυναμικών φορτίων. Διαγράμματα ευστάθειας, όπως αυτά που παράχθηκαν στο 5<sup>o</sup> κεφάλαιο, χρησιμοποιούνται για την επιλογή χαρακτηριστικών (υλικού, σχεδιασμός κλπ.) για προπέλες αεροσκαφών έτσι, ώστε να αποφεύγεται η αστάθεια και η καταστροφή του οχήματος. Τα διαγράμματα απόκρισης, που παρουσιάζονται στο τέλος του κεφαλαίου αυτού, τονίζουν την σημασία των διαφορετικών καταστάσεων ευστάθειας – αστάθειας.

Συνολικά για την παρούσα διπλωματική, μπορούμε να πούμε πως η χρήση εμπορικών λογισμικών ή και κάποιας γλώσσας προγραμματισμού σε πραγματικές εφαρμογές είναι η μόνη λύση. Για την σωστή βέβαια χρήση των παραπάνω και την κατανόηση του προβλήματος, οφείλουμε ως μηχανικοί να γνωρίζουμε τις θεμελιώδεις φυσικές αρχές, στις οποίες πατάνε πάνω και τα λογισμικά, διότι διαφορετικά η ανακρίβεια των λύσεων ή η λάθος προσέγγιση δεν θα μπορούσε να γίνει αντιληπτή. Επιπλέον, η ερμηνεία των αποτελεσμάτων απαιτεί καλή γνώση του προβλήματος και της θεωρίας, που βρίσκεται πίσω από αυτό, παρόλο που στην πραγματικότητα για την εξαγωγή εμείς απλά χρησιμοποιούμε το περιβάλλον του αντίστοιχου λογισμικού ή γλώσσας προγραμματισμού. Ακόμα να πούμε ότι, μελέτες όπως αυτή που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα διπλωματική, είναι απαραίτητες πλέον στον επαγγελματικό κόσμο σήμερα, αν σκεφτούμε ότι παλαιότερα τέτοιου είδους αναλύσεις διεξάγονταν πειραματικά. Κάτι το οποίο έχει μεγάλο κόστος (καταστρεπτικός έλεγχος πολλών μοντέλων) και περιορισμένες δυνατότητες. Με την εξέλιξη των μέσων και των μεθόδων, αναλύσεις μεγαλύτερης ακρίβειας και πολυπλοκότητας όπως οι αεροελαστικές μελέτες, είναι απαραίτητες για την πρόληψη των καταστροφών αλλά και την εξέλιξη των μέσων που διαθέτει η σύγχρονη κοινωνία.

Μελλοντικά, οι αεροελαστικές αναλύσεις ή και τα φαινόμενα αστάθειας θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν εκτός από τον έλεγχο για την ασφάλεια των κατασκευών ή την βελτίωση αυτών και σε άλλους τεχνολογικούς κλάδους. Συγκεκριμένα, τέτοια συστήματα μπορούμε να τα εκμεταλλευτούμε με στόχο την παραγωγή ενέργειας. Η ηλεκτροπαραγωγή μέσω συστημάτων FSI είναι ένας τεχνολογικός κλάδος, που εξελίσσεται σημαντικά την παρούσα χρονική στιγμή και αποτελεί έναν καινούργιο και τελείως διαφορετικό τρόπο για την απόκτηση ενέργειας σε πολλές χώρες, στις οποίες δεν υπάρχει η δυνατότητα εκμετάλλευσης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Το παραπάνω μπορεί να φαίνεται αρκετά διαφορετικό από το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής αλλά οι αρχές και οι διαδικασίες μοντελοποίησης που το διέπουν, στηρίζονται στις ίδιες βάσεις.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Σ. Νατσιάβας, Εφαρμοσμένη Δυναμική, Θεσσαλονίκη: ZHTH, 1999.
- [2] Σ. Νατσιάβας, Ταλαντώσεις Μηχανικών Συστημάτων, Θεσσαλονίκη: ZHTH, 2001.
- [3] Σ. Νατσιάβας, Ταλαντώσεις Δυναμικών Συστημάτων με Μη Γραμμικά Χαρακτηριστικά, Θεσσαλονίκη: ZHTH, 2000.
- [4] N. Αράβας, Μηχανική των Υλικών, Θεσσαλονίκη: TZIOΛΑ, 2014.
- [5] O.A.Bauchau, Flexible Multibody Dynamics, New York: Springer, 2011.
- [6] R. Bielawa, Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity, 2<sup>nd</sup> edition, Reston, Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2006.
- [7] John D. Anderson., Jr., Fundamentals Of Aerodynamics, 5th edition, New York: McGraw-Hill, 2011.
- [8] John D. Anderson., Jr., COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, New York: McGraw-Hill, 1995.
- [9] J. Cercrdle, Whirl Flutter of Turboprop Aircraft Structures, Cambridge: ELSEVIER, 2015.
- [10] S.Gudmundsson, General Aviation Aircraft Design: Applied Methods and Procedures, Oxford: ELSEVIER, 2014.
- [11] G.Alvin Pierce, Dewey H.Hodges, Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity, 2nd edition, New York: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2011
- [12] L. P. Ruiz-Calavera, D. Perdones-Diaz, «CFD Based Aeroelastic Calculation of Propeller Loads,» 28TH INTERNATIONAL CONGRESS OF THE AERONAUTICAL SCIENCES , Airbus Military, Spain , 2012.
- [13] Jay E. Turnberg, John A. Violette, W.E.Sullivan, «Large-Scale Advanced Prop-Fan,» NASA, Lewis Research Center, 1988.
- [14] Yanchu YANG, Zhengyu QU, «Aeroelastic Analysis for the High Altitude Propeller by Using Fluid-Structure Interaction Method,» Chinese Academy of Science, Beijing, 2017.
- [15] ANSYS, «Mechanical APDL Theory Guide».
- [16] ANSYS, «Fluent 12.0 Theory Guide».