大阪大学大学院情報科学研究科
博士前期課程

情報数理学専攻

参考問題

[情報基礎]

1. 次の手続きは n 元連立方程式 $Ax = b$ を解くための手続きであり、行列 A をLU 分解して、前進代入および後退代入によって解を求める方法である。

— LU 分解 —
for $k \leftarrow 1$ **until** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow k+1$ **until** n **do**
    $a(i,k) \leftarrow a(i,k)/a(k,k)$
  for $j \leftarrow k+1$ **until** n **do**
    for $i \leftarrow k+1$ **until** n **do**
      $a(i,j) \leftarrow a(i,j) - a(k,j) * a(i,k)$
— 前進代入 —
for $j \leftarrow 1$ **until** $n-1$ **do**
  for $i \leftarrow j+1$ **until** n **do**
    $b(i) \leftarrow b(i) - a(i,j) * b(j)$
— 後退代入 —
for $j \leftarrow n$ **until** 1 **by** -1 **do**
  $b(j) \leftarrow b(j)/a(j,j)$
  for $i \leftarrow 1$ **until** $j-1$ **do**
    $b(i) \leftarrow b(i) - a(i,j) * b(j)$

以下の問いに答えなさい。

(1) この手続きに要する時間計算量を求めなさい。

(2) この手続きに従って連立方程式 $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ を解くとき、LU 分解、前進代入、後退代入のそれぞれの処理が終わったときの行列 A およびベクトル b の要素の値を示しなさい。

（次ページにつづく）

2. 以下の操作を再帰的に適用して、n 個の数値を昇順にソートすることを考える。まず、r 組のグループに均等に分けて、それぞれのグループで数値を昇順にソートする。次に各グループの先頭の数値を比較して最小のものから順に取り出すことを繰り返す。以下の問いに答えなさい。ただし、r は定数とする。

(1) c 個の数値の中から最小のものを選ぶのに必要な比較回数を $g(c)$ とする。$g(c)$ を c を用いて表しなさい。

(2) n 個の数値を並べ替えるときに必要な比較回数を $f(n)$ と表す。自然数 k を用いて $n = r^k$ とおけるとき、次の関係式を説明し、$f(n)$ のオーダーを求めなさい。

$$f(n) = rf\left(\frac{n}{r}\right) + ng(r)$$

3. 平面グラフの辺によって分割される各領域を面という。一番外側の領域も一つの面とみなす。連結である平面グラフにおいて、頂点数を p、辺数を q、面数を r とするとき、$p - q + r = 2$ が成り立つことを次の手順で示しなさい。

(1) グラフに閉路がないとき、$p - q + r = 2$ となることを示しなさい。

(2) グラフに含まれる閉路が n 個未満のときに $p - q + r = 2$ が成り立つと仮定して、閉路が n 個のときに $p - q + r = 2$ が成り立つことを示しなさい。

[数理基礎]

1. 条件

$$LC: \qquad Ax = b, \qquad x \geqq 0, \qquad A^T w \leqq c, \qquad x^T(c - A^T w) = 0$$

について考える。ただし、$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$ は定数、$x \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 条件 LC では、$x^T(c - A^T w) = 0$ の代わりに

$$x_i = 0 \quad \text{または} \quad a_i^T w = c_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

を用いてもよいことを示しなさい。ただし、a_i は A の第 i 列ベクトル、c_i は c の第 i 要素、x_i は x の第 i 要素である。

(2) 条件 LC において、$m = 2, n = 3$ であるとし、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \end{bmatrix}, \qquad c = \begin{bmatrix} 23 \\ 20 \\ 31 \end{bmatrix}$$

とするとき、条件 LC を満足する x, w をすべて求めなさい。

(3) 条件 LC の A, b, c を用いて、二つの数理計画問題

$$\begin{array}{lllll} P: & \text{最小化} & c^T x & \text{条件} & Ax = b, \quad x \geqq 0 \\ D: & \text{最大化} & b^T w & \text{条件} & A^T w \leqq c \end{array}$$

を定義する。ベクトル x^*, w^* が条件 LC を満足するとき、x^* は問題 P の最適解となり、w^* は問題 D の最適解となることを示しなさい。

2. 一様分布 $U(0, \theta)$ に従う n 個のデータ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が独立に得られるとする。このとき、θ の推定量として

$$\hat{\theta} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

を選ぶことにする。以下の問いに答えなさい。

(1) 分布関数 $F(x)$ に従う n 個の独立な確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ について、それらの最大値 $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ の分布関数 $G(y)$ が

$$G(y) = \{F(y)\}^n$$

となることを示しなさい。

(2) $\hat{\theta}$ は θ の不偏推定量か、つまり、

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

が成り立つかどうかを示しなさい。

(3) $\hat{\theta}$ は θ の一致推定量か、つまり、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \Pr(|\hat{\theta} - \theta| < \epsilon) = 1$$

が成り立つかどうかを示しなさい。

（次ページにつづく）

3. 数列

0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1,
0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1,
1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0,
0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1

は、0 と 1 をランダムに選ぶことを 80 回繰り返して、記録したものであるという。以下の問いに答えなさい。

(1) この数列では、0 と 1 は等確率で現れているとみなしてよいか。有意水準 0.05 で検定しなさい。

(2) この数列のデータを前から順に二つずつ組にすれば、2 次元のデータが 40 個並んだものと考えることができる。このとき、$(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ は等確率で現れているとみなしてよいか。有意水準 0.05 で検定しなさい。

(3) この数列は、「0 と 1 をランダムに選ぶことを 80 回繰り返して、記録したもの」とみなしてよいかを論じなさい。

カイ 2 乗分布表

		上側確率									
		0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
	1	0.00004	0.0002	0.001	0.004	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
自	2	0.010	0.020	0.051	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
由	3	0.072	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
度	4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
	5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75

[数学解析]

1. $\mu > 1$ に対して、定積分

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\mu + \cos\theta}$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) I を複素平面内の単位円周 $|z| = 1$ 上の複素積分として表しなさい。

(2) (1) の複素積分を計算することにより、I を求めなさい。

2. 以下の問いに答えなさい。

(1) 以下の関数のフーリエ変換 $\widehat{f}(\omega)$ を求めなさい。

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

(2) $\widehat{f}(\omega)$ のフーリエ逆変換を利用して、$\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega} d\omega$ を求めなさい。

3. 時間 $t \geq 0$ の実数値関数 $x(t)$, $y(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (1 - \sqrt{x^2 + y^2})x - (\mu + x)y, \\ \frac{dy}{dt} &= (1 - \sqrt{x^2 + y^2})y + (\mu + x)x \end{aligned} \qquad (*)$$

を考える。ただし、$\mu > 1$ である。以下の問いに答えなさい。

(1) 極座標 (r, θ) への変数変換 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を行うことにより、$r(t)$, $\theta(t)$ に関する連立微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= (1 - r)r, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \mu + r\cos\theta \end{aligned}$$

が得られることを示しなさい。ただし、$r(t) > 0$ と仮定してよい。

(2) $r(t)$ に関する微分方程式の解を初期値 $r(0) > 0$ を用いて表しなさい。また、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} r(t)$ を求めなさい。

(3) 連立微分方程式 $(*)$ の解 $(x(t), y(t))$ が周期関数（周期解）となるための初期値 $(x(0), y(0))$ の条件を求めなさい。また、このとき大問 **1.** の定積分 I が何を表しているかを説明しなさい。

[情報物理]

1. 誘電率 ε の空間における電荷に関する以下の文について、空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句、式、または数値を答えなさい。

(1) 空間内の点Pに電荷量 $+q$ の点電荷をおく。この電荷から距離 d にある点の静電位（静電ポテンシャル）は $\boxed{\text{(a)}}$ 、電場の大きさは $\boxed{\text{(b)}}$ と書ける。

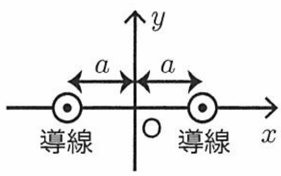
(2) さらに、点 P から距離 d の位置に電荷量 $-q$ の別の点電荷をおくとき、この電荷が (b) の電場から受ける力の大きさは $\boxed{\text{(c)}}$ である。なお、d が小さいとき、このような電荷の対を $\boxed{\text{(d)}}$ という。静電位は $\boxed{\text{(e)}}$ の原理が成り立つことから、電荷量 $+q, -q$ の各電荷からの距離が r_1, r_2 である点における静電位は $\boxed{\text{(f)}}$ となる。

(3) (2) の電荷対の中心 O を始点とするある半直線上を点 Q が動く。OQ 間の距離を r とおく。$r \gg d$ のとき、点 Q における電場の大きさは、d の $\boxed{\text{(g)}}$ 乗に比例し、r の $\boxed{\text{(h)}}$ 乗に反比例する。

2. 透磁率 μ の空間における電流と磁場に関する以下の文について、空欄 $\boxed{}$ に入れるべき適切な語句、式、または数値を答えなさい。なお、$\boxed{}$ のうち、候補が示されているものは適切なものを選択し、[理由] と書かれているものはその理由を簡潔に記述しなさい。

(1) 無限に長い直線状の導線に電流 I_1 を流した。導線の周りには、電流の進行方向に対して $\boxed{\text{(a) 時計回り・反時計回り}}$ の向きに磁場が生じる。また、導線から距離 R の位置における磁束密度の大きさを $B(R)$ とおくと、アンペールの法則より $B(R) = \boxed{\text{(b)}}$ である。

(2) 2本の無限に長い直線状の導線を、距離 $2a$ だけ離して平行に置き、各導線に同じ大きさの電流 I_1 を同じ方向に流した。図は導線に垂直な断面図である。電流の方向（紙面奥から手前の方向）を $+z$ とし、図のように原点Oおよび x, y 軸をとる。$x = y = 0$ の点における磁束密度の大きさは $\boxed{\text{(c)}}$ である。これは $\boxed{\text{(d) [理由]}}$ ことによる。また、$x = 0, y = b$ の位置における磁束密度ベクトルは $\boxed{\text{(e)}}$ と求まる。



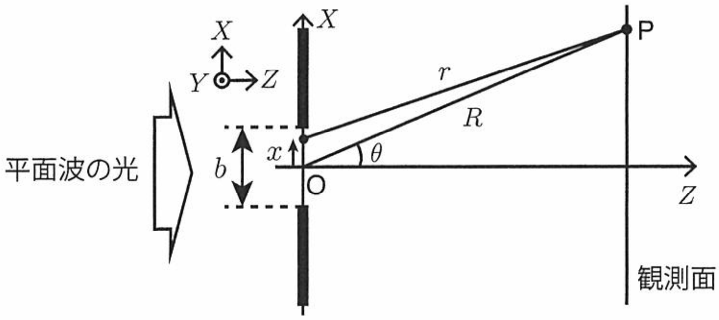
(3) (2) の状態では、それぞれの導線に $\boxed{\text{(f) 引力・斥力}}$ が生じる。単位長さあたりに受ける力の大きさは $\boxed{\text{(g)}}$ である。さらに、片方の導線のみ流す電流を増やしたとき、その導線が受ける力を F_1、もう一方の導線が受ける力を F_2 とすると $\boxed{\text{(h) } F_1 < F_2 \ \cdot\ F_1 = F_2 \ \cdot\ F_1 > F_2}$ となる。この結果は力学における $\boxed{\text{(i)}}$ の法則からも理解できる。

（次ページにつづく）

3. 図のように、空気中にある幅 b の単スリットに左から波長 λ の平面波の光を垂直に入射させる。単スリットは Y 方向には十分長いと仮定し、X 方向の回折のみを考える。図は、開口の中心に座標原点 O をとったときの $Y=0$ 面の様子を示している。O から観測面（Z 軸に垂直）上のある点 P までの距離を R、開口上の位置 $X=x$ の点から P までの距離を r、Z 軸と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ のなす角を θ とする。点 P の光学的変位 u_{P} は

$$u_{\mathrm{P}} = \alpha \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r}\, dx$$

と書ける。ただし、α は単位長さあたりの光源強度、t は時間、k は波数、ω は角振動数である。また、$b \ll R$ が成り立っているものとする。



(1) $\psi(r,t) \equiv \sin(\omega t - kr)/r$ はどのような波動を表すか答えなさい。

(2) 図より $r^2 = x^2 + R^2 - 2xR\sin\theta$ である。$\psi(r,t)$ の振幅を表す部分の r を $r \approx R$、位相を表す部分の r を $r \approx R - x\sin\theta$ と近似すると、

$$u_{\mathrm{P}} = \frac{\alpha}{R} \int_{-b/2}^{b/2} \sin\{\omega t - k(R - x\sin\theta)\}\, dx$$

と書き直せる。この式は、u_{P} が、開口の各点から点 P に到達する波動 $\sin\{\omega t - k(R - x\sin\theta)\}/R$ の重ね合わせとして得られると解釈できる。この観点から、観測面上で最も明るい位置はどこか説明しなさい。

(3) 点 P が暗点となるのは、$x = b/2$ および $x = -b/2$ からの波動の位相差がいくらのときか示しなさい。また、そのときの $\sin\theta$ を b, λ で表しなさい。

(4) この系全体をそのまま水中に移動させたとすると、観測面での強度分布はどのように変化するか説明しなさい。

(5) b を小さくしていくとき、観測面の中央付近での強度分布はどのような分布に近づくか説明しなさい。

[情報基礎]

1. 配列 A に n 個の数値が格納されているとし、この各要素を $A[1], A[2], \ldots, A[n]$ と書く。配列 A に対して、アルゴリズム S

```
1    FOR i = 2 TO n DO
2        X ← A[i]
3        j ← i
4        WHILE j − 1 > 0 AND A[j − 1] > X DO
5            A[j] ← A[j − 1]
6            j ← j − 1
7        END WHILE
8        A[j] ← X
9    END FOR
```

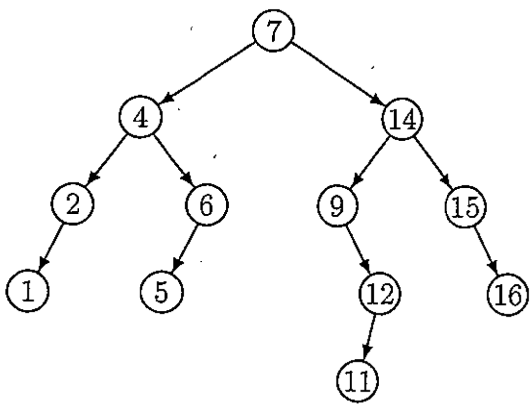
を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $n = 8$, $A[1] = 5$, $A[2] = 8$, $A[3] = 2$, $A[4] = 3$, $A[5] = 9$, $A[6] = 7$, $A[7] = 4$, $A[8] = 6$ であるとし、アルゴリズム S を実行する。8 行目の処理が終わったとき、配列 A の各要素の数値はどうなるか。$i = 2, 3, \ldots, 8$ のすべての場合について示しなさい。

(2) アルゴリズム S において、2 行目、5 行目、8 行目の処理は、配列 A に格納された数値に関する代入操作である。これらの代入操作を実行する回数の総和 m の最小値と最大値を n を用いて表しなさい。

(3) m がアルゴリズム S の時間計算量を代表するとする。アルゴリズム S の時間計算量と配列 A の各要素の数値の並びとの関係を述べなさい。

2. 2 分木 $T = (V, E)$ の各頂点に、相異なる数値を割り当てる。任意の頂点 $v \in V$ について、v の左部分木に含まれる頂点の数値がすべて v の数値より小さく、v の右部分木に含まれる頂点の数値がすべて v の数値より大きいとき、2 分探索木という。下図の 2 分探索木 T について、以下の問いに答えなさい。



(次ページにつづく)

(1) 2分探索木 T について、各頂点の数値をすべて列挙することを目的として探索アルゴリズムを実行するとき、横型探索を用いる場合、縦型探索を用いる場合のそれぞれについて、列挙される順に各頂点の数値を示しなさい。

(2) 指定された数値を2分探索木から削除する手続きを説明しなさい。また、その手続きを用いて、2分探索木 T から 4 を削除した結果を示しなさい。

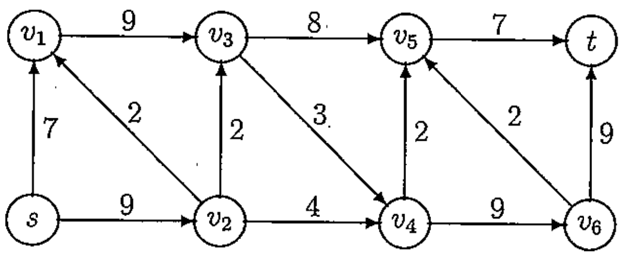
(3) 新たな数値が与えられたとき、それを2分探索木に挿入する手続きを説明しなさい。また、その手続きを用いて、2分探索木 T に 8 を挿入した結果を示しなさい。

(4) (2) および (3) の手続きを用いて、ある数値を削除した後に挿入したら、2分探索木 T の高さが減少した。そのような数値を一つ示しなさい。

3. 辺 (u,v) に容量 $c(u,v)$ をもつ重み付き有向グラフ $G=(V,E,c)$ と、始点 $s \in V$、終点 $t \in V$ を与える。辺 (u,v) の流量を $f(u,v)$ で表すとき、以下の問いに答えなさい。

(1) s から t への最大流を求める手続きを説明しなさい。ただし、容量はすべて整数とする。

(2) 下図のグラフについて、s から t への最大流を求めなさい。ただし、数字は各辺の容量を表す。



(3) (2) のネットワークを用いて、最大流とカットの関係を説明しなさい。

[数理基礎]

1. 確率変数 X と Y が互いに独立に一様分布 $U(0,1)$ と $U(0,a)$ にそれぞれ従っているものとする。ただし、a は正の実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) $a \geqq 1$ のとき、X^2 が Y より大きくなる確率 $\Pr(X^2 > Y)$ を求めなさい。

(2) $0 < a < 1$ のとき、X^2 が Y より大きくなる確率 $\Pr(X^2 > Y)$ を求めなさい。

(3) X と Y の組を n 回取り出すとき、X^2 が Y より大きくなる回数を r 回とする。r の分散が最も大きくなるときの a の値を求めなさい。

2. 次の線形計画問題を解きなさい。ただし、$a_i, c_i, i = 1, 2, ..., n$ および b は正の実数とし、最適解はただ一つ存在しているものとする。

$$\begin{array}{rl} \text{最大化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{条件} & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \leqq b \\ & x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0 \end{array}$$

3. 2つの正規分布 $N(0,1)$ と $N(\mu,1)$ に従うデータが、ある比率で混ざって観測されている。それぞれの確率密度関数を $f_0(x), f_1(x)$ とすると、観測されるデータ X の確率密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = (1-w)f_0(x) + wf_1(x)$$

と表すことができる。ただし、$0 < w < 1$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1) X の1次モーメント $E(X)$ を求めなさい。

(2) X の2次モーメント $E(X^2)$ を求めなさい。

(3) w および μ の推定量を $E(X)$ と $E(X^2)$ を用いて表しなさい。

[数学解析]

1. 以下の問いに答えなさい。ただし、i は虚数単位、a は実パラメータである。

(1) 実数 x に対して、極限値 $\lim_{a\to\infty}\tan(x+ia)$ を求めなさい。

(2) $a>1$ に対して、複素平面上の 4 点 $i,\ \pi+i,\ \pi+ia,\ ia$ を頂点とする矩形の周を C_a で表す。複素積分 $\displaystyle\int_{C_a} e^{\pi\tan z}dz$ の値を求めなさい。

(3) 積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\pi\tan(x+i)}dx$ の値を求めなさい。

2. 実数の定数 $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ に対して、

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

とおく。以下の問いに答えなさい。

(1) 実数 t に対して、積分 $I(t)=\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)f(x)dx$ を計算しなさい。

(2) 実変数 t の関数 $I(t)$ の最大値を求めなさい。

3. $x>0$ で定められた 2 回微分可能な関数 $y(x)$ が、微分方程式

$$x^2y''+xy'-y+\frac{1}{y^3}=0$$

および、条件 $y(1)=2,\ y'(1)=\dfrac{3}{2}$ を満たしている。以下の問いに答えなさい。

(1) $(xy'(x))^2-y(x)^2-\dfrac{1}{y(x)^2}$ は、x によらない定数であることを示しなさい。

(2) $y(x)$ を求めなさい。

[情報物理]

1. 真空中での電荷に関する以下の説明文について、空欄 $\boxed{\quad}$ に入れるべき適切な語句、あるいは、式を答えなさい。なお、$\boxed{\quad}$ のうち、語句の候補が示されているものは適切な語句を選択し、[理由] と書かれているものはその理由を簡潔に記述しなさい。なお、真空の誘電率を ε_0 とする。

(1) 距離 R だけ離れた二つの点電荷（各電荷量 q、Q）の間に働く力 F は、$\boxed{\text{(a)}}$ と求められる。これは、$\boxed{\text{(b)}}$ の法則と呼ばれる。

(2) 電荷量 Q の点電荷が原点に置かれている。原点からの距離を R とするとき、点電荷の周囲に形成される電場 $E(R)$ は、$\boxed{\text{(c)}}$ である。このとき、別の点電荷（電荷量 q）が受ける力 F は、$E(R)$ を用いて、$\boxed{\text{(d)}}$ と書かれる。

(3) (1) と (2) は同じ現象を説明したものである。電磁気学では、力の働き方に関して、(2) の $\boxed{\text{(e) 近接作用・遠隔作用}}$ の考え方を基本とする。

(4) 半径 a の球内に電荷 Q が一様に分布している。球の中心を原点にとると、半径 R の円周における電場 $E(R)$ は、$R > a$ のとき、$\boxed{\text{(f)}}$、$R < a$ のとき、$\boxed{\text{(g)}}$ と求められる。

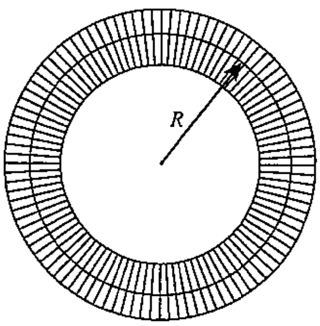
(5) (4) の球体を金属球に置き換え、電荷 Q を与えた。このときの電場 $E(R)$ は、(4) と比べて $\boxed{\text{(h) 変化する ・ 変化しない}}$。これは、$\boxed{\text{(i) [理由]}}$ ことによる。

2. 電流と磁場の関係について、以下の設問に答えなさい。

(1) 垂直方向におかれた導線の上向き方向に定常電流 I_0 を流す。このとき、導線の周囲には、どのような向きに磁場が発生するか。

(2) (1) の電流の方向と磁場の向きの関係を示す法則は何と呼ばれるか。

(3) 下図に示すようなドーナツ型ソレノイドコイル（導線の全巻き数 N）に、定常電流 I_0 を流す。ソレノイドコイルの内部に、コイルと同じ中心をもつ半径 R の円をとる。円の内部を横切る定常電流の大きさはいくらか。



(次ページにつづく)

(4) (3) のソレノイドコイル内部の中心部分に作られる磁場 $H(R)$ と磁束密度 $B(R)$ を求めなさい。ただし、ソレノイドコイルの内部には透磁率 μ の物質がつめられているものとする。

(5) このソレノイドコイルで作られる磁束密度を大きくするための方法を簡潔に述べなさい。

3. 時間 τ だけ継続する波の連なり（波連）による変位 $f(t)$ が次式で表されている。

$$f(t) = \begin{cases} f_0\, e^{i\omega_0 t} & |t| \leqq \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \dfrac{\tau}{2} \end{cases}$$

(1) 変位 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めなさい。ただし、フーリエ変換は次式で定義されるものとする。

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

(2) パワースペクトル $|F(\omega)|^2$ の概形を描きなさい。

(3) (2) の結果より、波連の継続時間 τ とスペクトル形状の関係を簡単に説明しなさい。

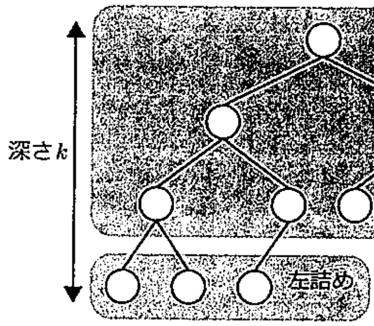
(4) 光波の場合、波連の継続時間 τ は可干渉時間と呼ばれる。その名称の由来を、時間的にずれた波連を重ね合わせたときに観測される干渉現象に基づいて説明しなさい。

[情報基礎]

1. ヒープは各頂点 v に値 $f(v)$ が格納された深さ k の2分木で、以下の条件を満たす。

(i) 深さ $k-1$ 以下の部分は完全2分木で、深さ k の頂点は左から順に詰められる。

(ii) 頂点 u が頂点 v の親ならば $f(u) \leqq f(v)$ を満たす。



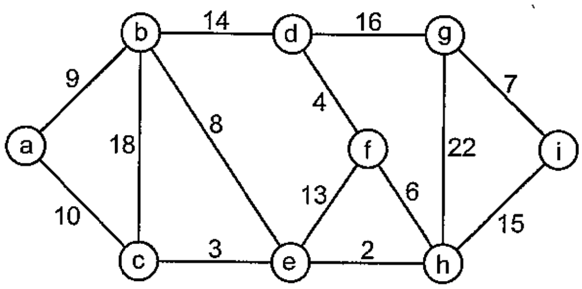
整数が格納された配列 $A = \{0, 18, 14, 19, 8, 6, 23, 12, 4\}$ が与えられる。以下の問いに答えなさい。

(1) 配列 A に対してヒープを構築した結果を示しなさい。

(2) 配列 A をヒープソートを用いて昇順に整列する過程を示しなさい。

(3) 整数が格納された長さ n の配列をヒープソートを用いて昇順に整列するのに要する最悪時間計算量をその理由とともに示しなさい。

2. 各辺が重みを持つ連結な無向グラフが与えられる。全ての頂点を繋ぎかつ辺の重み合計が最小となる辺集合は最小全域木と呼ばれる。以下の問いに答えなさい。



(1) 上図のグラフに対する最小全域木を示しなさい。

(2) 一般の連結な無向グラフに対して最小全域木を求めるアルゴリズムを示しなさい。

(3) 頂点が n 個、辺が m 本の連結な無向グラフに対して (2) で示したアルゴリズムを用いて最小全域木を求めるのに要する最悪時間計算量をその理由とともに示しなさい。

[確率統計]

1. ある製品が故障するまでの時間 T が確率密度関数 $f(t) = mt^{m-1}\exp(-t^m)$, $t > 0$ をもつ確率分布にしたがうものとする。ただし、m は正の実数とする。以下の問いに答えなさい。

(1) 故障時間 T の期待値 $E(T)$ と分散 $V(T)$ を、ガンマ関数 $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ を用いて表しなさい。

(2) 故障時間 T の分布関数を $F(t)$ とするとき、$\log\log\dfrac{1}{1-F(t)}$ は $\log t$ に比例することを示しなさい。

(3) 時刻 t まで故障しないで、時刻 $(t, t+\Delta t)$ の間に故障する確率

$$\Pr(t < T < t + \Delta t \mid T > t)$$

を考える。このとき、

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{1}{\Delta t}\Pr(t < T < t + \Delta t \mid T > t)$$

を故障率 $\lambda(t)$ という。故障率 $\lambda(t)$ を求め、故障率が時間に関わらず一定となるときの m の値を求めなさい。

2. 2つの母集団 A, B があり、その母集団分布はそれぞれ正規分布 $N(\mu_A, \sigma_A^2)$, $N(\mu_B, \sigma_B^2)$ とする。母集団 A からは n 個のサンプル $x_{A1}, x_{A2}, \ldots, x_{An}$ が、母集団 B からは m 個のサンプル $x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm}$ が互いに独立に得られた。以下の問いに答えなさい。

(1) 母集団 A から得られたサンプルの標本平均 $\bar{x}_A = \dfrac{1}{n}(x_{A1} + x_{A2} + \cdots + x_{An})$ のしたがう分布を答えなさい。

(2) 2つの標本平均の差 $\bar{x}_A - \bar{x}_B$ のしたがう分布を答えなさい。

(3) 2つの母分散 σ_A^2, σ_B^2 は未知であるが等分散であるとみなせるとする。このとき、2つの母平均が異なっているかどうかを有意水準 α で検定する方法を答えなさい。

[数理計画]

1. p 個の関数 $g_i^T z + h_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$ の最大値を最小化する数理計画問題

$$\begin{array}{lll} M: & 最小化 & \max\left\{g_1^T z + h_1, g_2^T z + h_2, \ldots, g_p^T z + h_p\right\} \\ & 条件 & z \geqq 0 \end{array}$$

について考える。ただし、$g_i \in \mathbb{R}^\ell,\ h_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p$ は定数、$z \in \mathbb{R}^\ell$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 変数 $y \in \mathbb{R}$ を導入し、不等式 $\max\left\{g_1^T z + h_1, g_2^T z + h_2, \ldots, g_p^T z + h_p\right\} \leqq y$ を定義する。変数を $\hat{x} = [\ y \quad z^T\ ]^T$ と置き、定数 $\hat{A} \in \mathbb{R}^{p\times(1+\ell)},\ \hat{b} \in \mathbb{R}^p$ を適切に定め、この不等式を $\hat{A}\hat{x} \leqq \hat{b}$ の形に書き換えなさい。

(2) 定数 $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n$ と変数 $x \in \mathbb{R}^n$ を適切に定め、問題 M を

$$\begin{array}{lll} P: & 最小化 & c^T x \\ & 条件 & Ax = b, \quad x \geqq 0 \end{array}$$

の形に書き換えなさい。

(3) 問題 M において、$p = 4,\ \ell = 2$ であるとし、

$$g_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad g_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \qquad g_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad g_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$h_1 = 6, \qquad h_2 = 0, \qquad h_3 = 5, \qquad h_4 = 7$$

とするとき、最適解と最適値を求めなさい。

2. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対する以下の条件 (a), (b) が等価であることを示しなさい。

(a) 任意の $p < q$ と任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して、f は

$$f((1-\alpha)p + \alpha q) \leqq (1-\alpha)f(p) + \alpha f(q)$$

を満たす。

(b) 任意の $x < y < z$ に対して、f は

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

を満たす。

[応用解析]

1. 複素平面から原点を除いた領域 $\mathcal{D}$ で定義された関数 $f(z) = (\alpha z + 1)e^{1/z}$ を考える。ただし、α は定数とする。同じ領域 $\mathcal{D}$ で複素微分可能な関数 $F(z)$ が $z \neq 0$ について $F'(z) = f(z)$ を満たすとき、$F(z)$ は $\mathcal{D}$ における $f(z)$ の原始関数といわれる。また、$z = 0$ における $f(z)$ の留数を $\mathrm{Res}\,[f(z);\,0]$ と書く。以下の問いに答えなさい。

(1) 特異点 $z = 0$ を中心とする $f(z)$ のローラン展開を求めなさい。また、$\mathrm{Res}\,[f(z);\,0]$ を α を用いて表しなさい。

(2) $f(z)$ が $\mathcal{D}$ における原始関数をもてば $\mathrm{Res}\,[f(z);\,0] = 0$ でなければならないことを示しなさい。

(3) 定数 α を $\mathrm{Res}\,[f(z);\,0] = 0$ となるように定める。このとき、$\mathcal{D}$ における $f(z)$ の原始関数で $F(1) = -e$ を満たすものを求めなさい。

2. 微分方程式

$$\left(x^2 - 1\right) y'' + 4xy' + \left(x^2 + 1\right) y = x^2 - \cos x + 1, \qquad -1 < x < 1$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) 未知関数の変換 $u = (x^2 - 1)y$ を行って、u に関する微分方程式を求めなさい。

(2) 初期条件

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = a$$

を満たす解 $y(x)$ を求めなさい。

(3) (2) で求めた解 $y(x)$ について、$x \to 1$ としたときの極限値

$$\lim_{x \to 1} y(x)$$

が存在するための a の条件を求めなさい。

[情報物理]

光の回折を説明したフレネルの理論について考える。図1のように、点光源Oを中心とする半径 ρ の球面S上に点Qをとる。球面Sの外側の点Pにおける光学的変位 u_p は

$$u_p = \int_S \frac{Ae^{ik\rho}}{\rho} \frac{Be^{ikr}}{r} e^{-i\omega t} d\sigma$$

と表すことができる。ただし、r は距離PQ、k は波数、ω は角振動数、t は時間、A は点光源から単位距離だけ離れた場所での振幅である。B は点Qから放出される2次波の振幅変化と位相遅れを表す傾斜因子で、点Qの位置により $\angle$OQP が 180° から 0° まで変化するのにしたがって $|B|$ は単調減少する。また、距離OPを R、$\angle$POQ を θ、光の波長を $\lambda\ (= 2\pi/k)$ とする。以下の問いに答えなさい。ただし、空欄 $\boxed{}$ には適切な語句、あるいは、式を入れなさい。

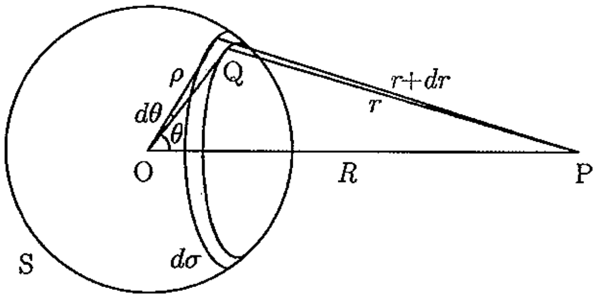


図1

(1) 光学的変位 u_p が表している物理量は $\boxed{\text{(a)}}$ または $\boxed{\text{(b)}}$ の振幅である。

(2) 余弦定理を利用すると、R, ρ, θ を用いて、$r^2 = \boxed{\text{(c)}}$ と表せる。これより、微小量 dr と $d\theta$ の関係は $\boxed{\text{(d)}}$ と求められる。したがって、図1において網掛けで示される輪帯部分の面積 $d\sigma$ は、r, R, ρ, dr を用いて、$d\sigma = \boxed{\text{(e)}}$ と表される。

以上より、光学的変位 u_p は次式で与えられる。

$$u_p = \frac{2\pi A e^{i(k\rho - \omega t)}}{R} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} Be^{ikr} dr$$

(3) R と ρ を用いると、$r_{\max} = \boxed{\text{(f)}}$, $r_{\min} = \boxed{\text{(g)}}$ と表される。

（次ページにつづく）

$r_m = r_{\min} + \dfrac{1}{2}m\lambda,\ m = 0, 1, 2, \ldots$ とおき、図2のように、球面Sを r_m によって定まる輪帯に分割する。N 個（N: 奇数）の輪帯に分割されたとして、r_{n-1} と r_n を両端にもつ輪帯から点Pへ伝わる光学的変位を $F_n,\ n = 1, 2, \ldots, N$ とする。

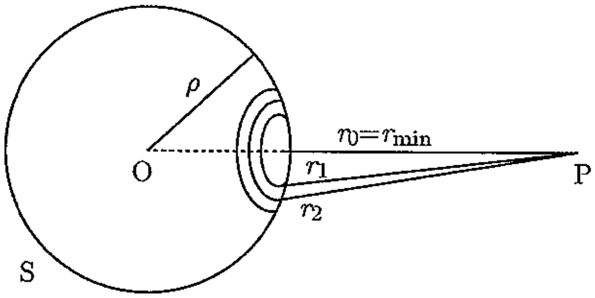


図2

(4) この輪帯は何と呼ばれるか。

(5) 光学的変位 u_p は、各輪帯からの光学的変位 $F_1, F_2, \ldots, F_N$ の総和として得られる。このとき、n が大きくなるとともに $|B|$ はゆっくり減少し、隣りあう輪帯からの光学的変位 F_n と F_{n+1} は位相が π ずれている。この関係を用いて、次式が成り立つことを説明しなさい。

$$u_p = \sum_{n=1}^{N} F_n \approx \frac{F_1}{2} + \frac{F_N}{2}$$

(6) 光学的変位 F_N について、$\angle \mathrm{OQP} \approx 0$ より B はほぼ0とみなせ、$F_N = 0$ とおける。一方、光学的変位 F_1 について、B は定数 B_1 とおける。これらより、光学的変位 u_p を $A, B_1, k, R, t, \lambda, \omega$ を用いて表しなさい。

(7) (6) の結果より、点Oから点Pに向かう光がほぼ直進することを説明しなさい。

(8) 偶数番目の輪帯 $F_2, F_4, \ldots, F_{N-1}$ に相当する部分に輪帯形状の板を置いて光をさえぎった。これにより、点Pにおける光学的変位 u_p がどのように変化するか述べなさい。

[情報基礎]

1. 配列 A に n 個の異なる整数が格納されている．以下の問いに答えなさい．

(1) 配列 A の要素を $A[1] < A[2] < \cdots < A[n]$ を満たすように整列するクイックソートの手続きを与えなさい．

(2) (1) で示したクイックソートの最悪時間計算量を示し，それが最悪である理由を述べなさい．ただし，配列の 2 つの要素の値は $O(1)$ の時間で比較できるものとして，アルゴリズムの時間計算量をその比較回数で評価する．

2. 多重辺と自己ループを持たない連結な無向グラフ $G = (V, E)$ と各枝 $(u, v) \in E$ の長さ $l(u, v) \geqq 0$ および始点 $s \in V$ が与えられている．以下の問いに答えなさい．

(1) 各頂点 $v \in V$ に対して，$d(v)$ を始点 s から v へのある経路の長さとする．ただし，$d(s) = 0$ とする．このとき，$d(v)$ が s から v への最短経路の長さであるための必要十分条件が

$$d(v) \leqq d(u) + l(u, v), \qquad \forall (u, v) \in E$$

であることを証明しなさい．

(2) 始点 s から各頂点 $v \in V$ への最短経路とその長さを求めるダイクストラ法の手続きを与えなさい．また，得られた経路が最短であることを示しなさい．

[数理計画]

1. 線形計画問題の標準形を

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c^T x \\
\text{条件} & Ax = b, \quad x \geqq 0
\end{array}
$$

で定義する．ただし，$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ は定数，$x \in \mathbb{R}^n$ は変数，$\bullet^T$ は転置である．以下の問いに答えなさい．

(1) 数理計画問題

$$
\begin{array}{lll}
P: & \text{最小化} & -x_1 + |x_2| \\
& \text{条件} & x_1 + 3x_2 \leqq 1, \quad 2x_1 + x_2 \leqq 3, \quad x_1 \geqq 0
\end{array}
$$

を線形計画問題の標準形に書き換えなさい．

(2) 問題 P の最適解と最適値を求めなさい．

2. 関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を対象に次の条件 A を考える．

条件 A：任意の $x \in \mathbb{R}$ に対してある $\xi_x \in \mathbb{R}$ が存在し，すべての $y \in \mathbb{R}$ で

$$f(y) - f(x) \geqq \xi_x (y - x)$$

が成り立つ．

以下の問いに答えなさい．

(1) 条件 A を満たす関数 $f(x)$ は，任意の $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$ について

$$(1-\alpha) f(p) + \alpha f(q) \geqq f((1-\alpha)p + \alpha q)$$

を満たすことを示しなさい．

(2) 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \max\{2x^2,\ x^2 + 4\}$$

と定義する．この $f(x)$ が条件 A を満たすことを示しなさい．

[確率統計]

1. 確率変数 X が母数 λ のポアソン分布にしたがうとき，その確率分布は

$$\Pr(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

で与えられる．n 個のデータ $x_1,x_2,\ldots,x_n$ が得られたとき，λ の最尤推定量 $\hat{\lambda}$ は λ の有効推定量であることを示しなさい．

2. n 個の確率変数 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ が互いに独立に平均 $1/\lambda$ の指数分布にしたがうとする．確率変数 $T=Y_1+Y_2+\cdots+Y_n$ について，以下の問いに答えなさい．

(1) 確率変数 T の期待値と分散を求めなさい．

(2) 確率変数 T の確率密度関数が

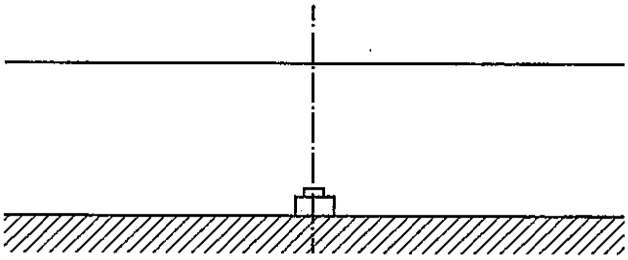
$$f(t)=\frac{\lambda}{(n-1)!}(\lambda t)^{n-1}e^{-\lambda t} \qquad (*)$$

となることを数学的帰納法によって示しなさい．

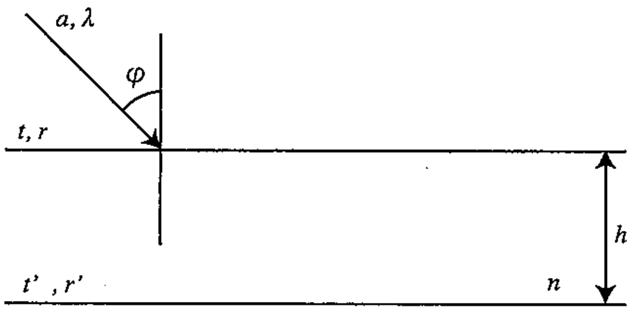
(3) n 回目の事象が生起する時刻が t 以前であるということは，時刻 t までに n 回以上の事象が生起していることと等しい．時刻 t までの生起回数が平均 λt のポアソン分布にしたがうとき，n 回目の事象が生起する時刻 T の確率密度関数は $(*)$ で与えられることを示しなさい．

[情報物理]

1. 水の入った静かなプールの底に，視野角が十分大きい水中カメラを設置し，上方を観測した．このときに観察される現象を定式化し，予想される撮影画像を図示しなさい．ただし，水面と水中カメラの距離を D，空気の屈折率を 1，水の屈折率を 4/3 とする．



2. 空気中に置かれた上下面が平行なガラス板の一点に入射角 φ，波長 λ，振幅 a の光線を入射させる．このときに観察される入射後の光線を図示し，ガラス板を透過する光線の光強度を定式化しなさい．ただし，ガラス板の厚さを h，その屈折率を n，空気の屈折率を 1 とする．また，空気からガラス板への振幅透過率，振幅反射率を t, r，ガラス板から空気への振幅透過率，振幅反射率を t', r' とする．



[応用解析]

1. 以下の問いに答えなさい．

(1) 関数 $f(z)$ は複素数 α を含む領域で正則とし，α は $f(z)$ の零点でその位数は k とする．$z=\alpha$ における関数 $f'(z)/f(z)$ の留数を k を用いて表しなさい．

(2) r を 1 でない正の実数とし，C_r を原点を中心とする半径 r の円周とする．$0<r<1, r>1$ のそれぞれの場合について複素積分

$$\int_{C_r} \frac{z^7}{z^8-1}\,dz$$

を計算しなさい．

(3) $r>1$ のとき定積分

$$\int_0^{2\pi} \frac{r^{16}-r^8\cos 8\theta}{r^{16}-2r^8\cos 8\theta+1}\,d\theta$$

を計算しなさい．

2. $0<x<\infty$ として，$y(x)$ についての 2 階線形方程式

$$xy''-(4x+1)y'+2(2x+1)y=0 \qquad (*)$$

および $z(x)$ についての非線形方程式

$$xz'-(4x+1)z=xz^2+2(2x+1) \qquad (**)$$

を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) $z(x)$ を $(**)$ の任意の解とする．線形方程式 $y'+z(x)y=0$ の一般解 $y(x)$ は $(*)$ を満たすことを示しなさい．

(2) $y(x)$ を $(*)$ の任意の解とする．$y(x)\neq 0$ のとき $z(x)=-y'(x)/y(x)$ は $(**)$ を満たすことを示しなさい．

(3) $y(x)=u(x)e^{2x}$ とおいて，$(*)$ の一般解を求めなさい．

(4) $(**)$ の一般解を求めなさい．

[情報基礎]

1. 逆ポーランド表記法は数式やプログラムを記述する方法の一種であり、スタックと呼ばれるデータ構造との相性がよい。演算子をオペランド間ではなく、オペランドの後に記述することから後置表記法ともいわれる。「aとbの差にcを乗じる」という演算は中置表記法で記述すると $(a-b)*c$ となり、逆ポーランド表記法では `ab-c*` となる。以下の問いに答えなさい。

(1) 逆ポーランド表記法で表現された式 `ab-c*` の計算アルゴリズムをスタックを用いて説明しなさい。

(2) $(a/(b-c))+d*e$ を逆ポーランド表記法で表現しなさい。

(3) 逆ポーランド表記法で表現された式 `ab-c*def+/-` において、$a=2,\ b=c=d=e=1,\ f=0$のときの演算結果を求めなさい。

2. 要素数nの集合$S=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$（要素は整数ですべて異なる）がある。$a_1,a_2,\ldots,a_n$の順に挿入して2分探索木を構築し、この2分探索木を用いて昇順にソートすることを考える。要素の大小比較、予め指定されたノードへの要素の挿入、あるノードからの要素の取り出し（木からの削除）の3つの操作の時間計算量をそれぞれO(1)とする。アルゴリズムの計算量は、これらのみを考慮して評価する。

(1) 2分探索木を構築するアルゴリズムの計算量が最悪となるのは、$a_1,a_2,\ldots,a_n$にどのような関係があるときか示しなさい。また、そのときの計算量について説明しなさい。

(2) 2分探索木から要素を昇順に取り出すには、ノードをどのように巡回すればよいか。説明しなさい。

(3) 2分探索木の構築とノード巡回により昇順にソートするアルゴリズムの平均計算量について説明しなさい。なお、n個の要素をさまざまな順序で挿入したときの2分探索木の高さの期待値は$\mathrm{O}(\log n)$となることが知られている。また、nが十分大きいとき、$n!$は$\sqrt{2\pi n}\cdot n^n e^{-n}$と近似できる。

[確率統計]

1. 2つの確率変数 X, Y がある。確率変数 Y が値 y をとるときの確率変数 X は一様分布 $U(0, y)$ に従うものとする。Y が一様分布 $U(0,1)$ に従うとき、以下の問いに答えなさい。

(1) X, Y の同時確率密度関数 $f(x, y)$ および X の周辺密度関数 $f_X(x)$ を求めなさい。

(2) 確率変数 X の期待値と分散を求めなさい。

(3) 確率変数 X が値 a をとったことがわかったとき、確率変数 Y の期待値を求めなさい。

2. 自由度 n のカイ二乗分布の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geqq 0$$

で与えられる。ただし、$\Gamma(a)$ はガンマ関数で

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

である。以下の問いに答えなさい。

(1) 自由度 n のカイ二乗分布の積率母関数を求めなさい。

(2) 自由度 n のカイ二乗分布の期待値と分散を求めなさい。

(3) 分布の再生性について説明し、カイ二乗分布に再生性があることを示しなさい。

(4) カイ二乗分布以外に再生性をもつ代表的な分布を1つ挙げなさい。

[数理計画]

1. 線形計画問題

$$
\begin{aligned}
P:\ \ &\text{最大化} \quad c^T x_2 \\
&\text{条件} \quad A_1 x_1 + A_2 x_2 = b, \quad x_1 \geqq 0
\end{aligned}
$$

を考える。ただし、$A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m\times n_2}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^{n_2}$ は定数、$x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ は変数、$\bullet^T$ は転置である。以下の問いに答えなさい。

(1) 問題 P の双対問題を書きなさい。

(2) 問題 P において

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} \delta \\ 1 \end{bmatrix}
$$

であるとき、$\delta = 1$ とおいて問題 P の最適解と最適値を求めなさい。

(3) 前問について、$\delta = 1$ のときと同じ最適解が得られる $\delta \in \mathbb{R}$ の範囲を求めなさい。

2. 4 点 v_1, v_2, v_3, v_4 をもつ無向グラフを考え、2 点 v_1–v_2, v_1–v_3, v_1–v_4, v_2–v_3, v_2–v_4, v_3–v_4 間の枝の長さをそれぞれ 3, 4, 9, 8, 4, 2 とする。これら v_i–v_j 間の枝の長さを $D^{(0)}(i,j)$ に格納する。いま、$k = 1,2,3,4$ であるとし、

$$
D^{(k)}(i,j) = \min\{D^{(k-1)}(i,j), D^{(k-1)}(i,k) + D^{(k-1)}(k,j)\}
$$

により $D^{(k-1)}$ を $D^{(k)}$ に更新する。つまり、

$D^{(0)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	4	9
v_2	3	0	8	4
v_3	4	8	0	2
v_4	9	4	2	0

$D^{(1)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	4	9
v_2	3	0	7	4
v_3	4	7	0	2
v_4	9	4	2	0

$D^{(2)}$	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	3	4	7
v_2	3	0	7	4
v_3	4	7	0	2
v_4	7	4	2	0

である。以下の問いに答えなさい。

(1) $D^{(3)}$ と $D^{(4)}$ を求めなさい。

(2) $D^{(4)}(i,j)$ は点 v_i–v_j 間の最短路の長さとなる。理由を簡潔に述べなさい。

[応用解析]

1. $f(z)$ は複素数 z についての多項式とし、C_r は原点を中心とし半径 r の円周として積分

$$I_r = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

を考える。以下の問いに答えなさい。

(1) $f(z) = (z+1)^2(z-3)^3(z+5)$ のとき、$I_2,\ I_4,\ I_6$ の値をそれぞれ計算しなさい。

(2) $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$ で、C_R は $f(z)$ の零点をすべて内部に含むような十分大きな半径 R の円周であるとき I_R を求めなさい。

2. $y = y(x)$ についての微分方程式

$$y'' - 2ay' + y = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{$*$}$$

を考える。ここで $a \geqq 0$ は実数である。すべての x について $y(x) = 0$ である解を自明解、そうでない解を非自明解という。非自明解 $y(x)$ について定数 $p > 0$ が存在し、すべての x について $y(x+p) = y(x)$ となるとき $y(x)$ を周期解、p をその周期という。以下の問いに答えなさい。

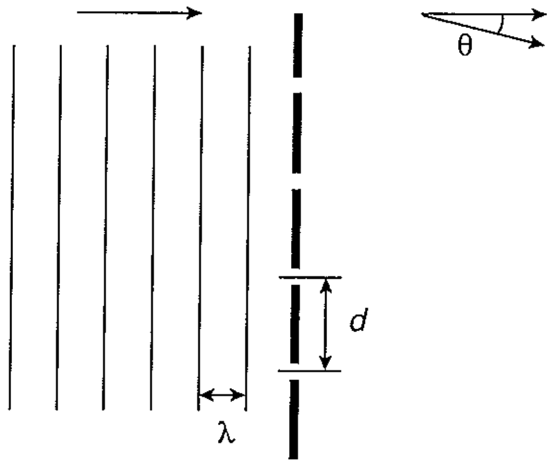
(1) $(*)$ の一般解を求めなさい。

(2) $a = 0$ のとき $(*)$ の非自明解はすべて周期解であることを示し、その周期を求めなさい。

(3) $a > 0$ のとき $(*)$ は周期解をもたないことを、$0 < a < 1,\ a = 1,\ 1 < a < \infty$ の場合に分けて示しなさい。

[情報物理]

図のように、等間隔 d の微小開口をもつ遮光板に対して、波長 λ の単色平面波を垂直入射させると、異なる偏向角 θ で伝播する複数の光波が得られる。この光学素子について、以下の問いに答えなさい。ただし、$d > \lambda$ とする。



(1) 次の説明文の (a) から (e) にあてはまる語句を答えなさい。
この光学素子は__(a)__と呼ばれ、波長に応じて偏向角が変化する特性をもつ。同様の働きをする光学素子として、波長に対する物質の__(b)__の変化を利用する__(c)__も広く用いられている。これらは__(d)__素子と呼ばれ、__(e)__などに応用される。

(2) ホイヘンス=フレネルの原理に基づいて、開口後方の波面の様子を図示した上で、複数の光波が得られることを説明しなさい。

(3) 開口透過後の偏向角が満たす関係式を求めなさい。

(4) この光学素子の原理を利用して、凸レンズと同等の働きをする素子を作りたい。どのような手法が考えられるか説明しなさい。

(5) 設問 (4) で考えた手法に問題点があれば、その解決策について説明しなさい。

(6) 最先端のレーザー光源では、わずか数波しか持たない超短パルス光を発生できる。このような光を入射光として用いたとき、予想される現象について述べなさい。