２０１６年９月・２０１７年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

◎問題用紙が１２ページあることを試験開始直後に確認してください.
◎解答用紙は４枚綴りが１組あることを試験開始直後に確認してください.

★ 問題１，問題２，問題３は必須問題です.
★ 問題３には３Ａと３Ｂがあります．必ず一方を選択し，解答してください.
★ 問題４から問題１１は選択問題です．１問を選択し，解答してください.
★ この問題用紙は持ち帰り，面接試験の際に持参してください.

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：　線形代数

問題番号 1

A を次で定義される 4 次正方行列とする．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha^4 & 0 & 2\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし，α は 0 でない実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の特性多項式を求めよ．

(2) 行列 P を

$$P = \frac{1}{4\alpha^3}(A+\alpha E)^2(-A+2\alpha E)$$

とおく．ただし，E は 4 次の単位行列である．P と P^2 を求めよ．

(3) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W を，$W = \{P\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^4\}$ とおく．W の次元と基底を求めよ．

(4) $\mathbb{R}^4$ の部分空間 V を，$V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid (A-\alpha E)^2\vec{x} = \vec{0}\}$ とおく．ただし，$\vec{0}$ は零ベクトルである．$V = W$ であることを示せ．

正方行列	square matrix
実数	real number
特性多項式	characteristic polynomial
単位行列	unit matrix
部分空間	subspace
次元	dimension
基底	basis
零ベクトル	zero vector

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：　微分積分

問題番号 2

$\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$ はすべての $i, j \in \mathbb{N}$ に対して $a_{ij} > 0$ をみたすものとする．$\displaystyle\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ の収束性について考える．以下の問に答えよ．

(1) $\alpha \in (0,1)$ に対して $a_{ij} = \alpha^{i+j}$ のとき $\displaystyle\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ を求めよ．

(2) 各 $n = 2, 3, \cdots$ に対して $b_n = \displaystyle\max_{i+j=n} a_{ij}$ とおき，

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

が存在すると仮定する．

(a) $c < 1$ の場合を考える．このとき $m \to \infty, n \to \infty$ とすると $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ は収束することを示せ．

(b) $c > 1$ の場合を考える．このとき $m \to \infty, n \to \infty$ とすると $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ は発散することを示せ．

(3) 実数値関数 $f(x,y)$ は $[0,\infty)\times[0,\infty)$ で連続，$(0,\infty)\times(0,\infty)$ で C^1 級，さらに $(0,\infty)\times(0,\infty)$ において $f(x,y) > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \leq 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \leq 0$ をみたすとする．このときすべての $m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\iint_{[1,m+1]\times[1,n+1]} f(x,y)\,dxdy \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(i,j) \leq \iint_{[0,m]\times[0,n]} f(x,y)\,dxdy$$

が成立することを示せ．

(4) $\beta > 0$ とする．

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(i^2+j^2)^{\beta/2}}$$

が収束するための必要十分条件を求めよ．

収束する	converge
発散する	diverge
実数値関数	real-valued function
連続	continuous
C^1 級	of class C^1
必要十分条件	necessary and sufficient condition

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題３には３Ａと３Ｂがあります．必ず一方を選び解答してください．

問題番号 3A

集合 X, Y, Z, X', Y', Z' と写像 $f, g, h, \varphi, \psi, \varphi', \psi'$ からなる図式

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y & \xrightarrow{\psi} & Z \\ f\downarrow & & g\downarrow & & h\downarrow \\ X' & \xrightarrow[\varphi']{} & Y' & \xrightarrow[\psi']{} & Z' \end{array}$$

において, 四角形 $XZZ'X'$ は可換, すなわち,

$$h \circ \psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi' \circ f$$

とする. このとき, 以下を示せ.

(1) 四角形 $XYY'X'$ が可換, すなわち,

$$g \circ \varphi = \varphi' \circ f,$$

かつ, φ が全射であるならば, 四角形 $YZZ'Y'$ が可換, すなわち,

$$h \circ \psi = \psi' \circ g$$

となる.

(2) 四角形 $YZZ'Y'$ が可換, すなわち,

$$h \circ \psi = \psi' \circ g,$$

かつ, ψ' が単射であるならば, 四角形 $XYY'X'$ が可換, すなわち,

$$g \circ \varphi = \varphi' \circ f$$

となる.

集合	set
写像	mapping
図式	diagram
四角形	square
可換	commutative
単射	injection
全射	surjection

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題３には３Ａと３Ｂがあります．必ず一方を選び解答してください．

問題番号 3B

次の１次分数変換

$$w = \frac{z-i}{z+i} \qquad (*)$$

を考える．以下の問に答えよ．

(1) 変換 $(*)$ が上半平面 $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ を開円板 $\{|w| < 1\}$ の上に１対１に写すことを示せ．ここで，$\mathrm{Im}\, z$ は z の虚部である．

(2) 単位円 $\{|z| = 1\}$ の上半平面にある半円が変換 $(*)$ により，どのような図形に写されるか述べよ．

１次分数変換	linear fractional transformation
上半平面	upper half plane
開円板	open disk
上に	onto
１対１	one to one
虚部	imaginary part
半円	semicircle

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 4

p を奇素数とするとき, 以下の問に答えよ.

(1) p 元体 $\mathbb{F}_p$ の加法群としての自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p, +)$ は乗法群 $\mathbb{F}_p^\times$ と同型である. 同型写像 $f : \mathbb{F}_p^\times \to \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p, +)$ を具体的に記述せよ.

(2) p 次対称群 S_p の部分群 H_p で, 半直積 $\mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{F}_p^\times$ と同型のものが存在することを示し, H_5 $(p = 5)$ を生成する 2 個の置換を具体的に与えよ.

(3) 剰余類系 S_5/H_5 への S_5 の作用から得られる準同型写像 $g : S_5 \to S_6$ は単射であること, および $g(S_5)$ は S_6 の可移部分群であることを示せ.

奇素数	odd prime number	p 元体	the field with p elements
加法群	additive group	乗法群	multiplicative group
自己同型群	automorphism group	同型写像	isomorphism
p 次対称群	symmetric group of degree p	部分群	subgroup
半直積	semi-direct product	生成する	generate
置換	permutation	剰余類系	system of cosets
作用	action	準同型写像	homomorphism
単射	injective map	可移部分群	transitive subgroup

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 5

単位的可換環 A に対して, 以下を示せ.

(1) A の真のイデアル $M \subsetneq A$ について, 任意の元 $x \in A \setminus M$ が単元であるとき, A は局所環で, M はその極大イデアルである.

(2) A の極大イデアル M について, 任意の元 $x \in M$ に対して $1+x$ が A の単元となるとき, A は局所環である.

単位的可換環	unitary commutative ring
真のイデアル	proper ideal
元	element
単元	unit
局所環	local ring
極大イデアル	maximal ideal

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科 目 名：幾何

問題番号 6

n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ が等長写像であるとは, $\mathbb{R}^n$ の任意の 2 点 $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ を満たすこととする. ここで d は $\mathbb{R}^n$ のユークリッド距離とする.

(1) 原点を原点に写す等長写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し, ある n 次直交行列 A が存在して $f(x) = Ax$ が成立することを示せ.

(2) 任意の等長写像 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し, ある n 次直交行列 A とある $b \in \mathbb{R}^n$ が存在して $f(x) = Ax + b$ が成立することを示せ.

(3) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への等長写像の全体を $E(n)$ とすると, 写像の合成に関して $E(n)$ は群になり, 一般線形群 $GL(n+1, \mathbb{R})$ の閉部分群と同型になることを示せ.

n 次元ユークリッド空間	n-dimensional Euclidean space
写像	map
原点	origin
等長写像	isometry
ユークリッド距離	Euclidean metric
n 次直交行列	orthogonal matrix of degree n
写像の合成	composition of maps
群	group
一般線形群	general linear group
閉部分群	closed subgroup
同型	isomorphism

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 7

以下の問に答えよ．

(1) λ を定数とするとき，境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

を考える．この境界値問題の非自明な解が存在するような λ の値とそのときの解 u を求めよ．

(2) a を正の定数とする．このとき

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dx^2} + \left(a - \displaystyle\int_0^1 v(x)^2\,dx\right) v = 0, & 0 < x < 1, \\ v(x) > 0, & 0 < x < 1, \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases}$$

の解 v が存在するための a が満たすべき必要十分条件を求めよ．またこのときの解 v を求めよ．

境界値問題	boundary value problem
非自明な解	non-trivial solution
必要十分条件	necessary and sufficient condition

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 8

f は $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可積分な実数値関数であるとする．g は $\mathbb{R}$ 上の C^1 級の実数値関数であり，g の導関数 g' は $\mathbb{R}$ 上でルベーグ可積分であるとする．$t \in \mathbb{R}$ に対して

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(x)| dx$$

とおく．この関数 h が $\mathbb{R}$ 上の連続関数であることは知られている．以下の問に答えよ．

(1) u が区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数であるとき，次の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon \int_0^1 \frac{u(t)}{t^{1-\varepsilon}} dt = u(0).$$

(2) $t \in [0, 1]$ に対して

$$v(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 |f(x+tr) - f(x)| dr \right) dx$$

により定義される関数 v は連続関数であることを示せ．

(3) 次の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \left| \int_0^1 f(x+rt) dr \right| dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx.$$

(4) 次の等式を示せ．

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \frac{|g(x+t) - g(x)|}{t^{2-\varepsilon}} dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} |g'(x)| dx.$$

ルベーグ可積分	Lebesgue integrable
実数値関数	real-valued function
C^1 級	of class C^1
導関数	derivative
区間	interval
連続関数	continuous function
等式	equality

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科 目 名：確率・統計

問題番号 9

$X_1, X_2, \ldots$ は平均 θ，分散 1 をもつ正規分布からの無作為標本とする．また，確率変数 Y_n は $\{X_n\}_{n=1,2,\ldots}$ と独立で，以下を満たす確率変数とする．

$$P(Y_n = 1) = n^{-2} = 1 - P(Y_n = 0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

ただし，P は確率を表す．

(1) $X_1, \ldots, X_n$ から作った θ に対する最尤推定量を $\widehat{\theta}_n$ とするとき，$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ の分布を求めよ．理由は述べなくてよい．

(2) (1) で求めた $\widehat{\theta}_n$ を用いて $Z_n = (1 - Y_n)\widehat{\theta}_n + \sqrt{n}Y_n$ とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} V\left(\sqrt{n}(Z_n - \theta)\right)$$

を求めよ．ただし，$V(X)$ は X の分散を表す．

(3) $n \to \infty$ のとき，$\sqrt{n}(Z_n - \theta)$ の漸近分散を求めよ．

平均	mean
分散	variance
正規分布	normal distribution
無作為標本	random sample
確率変数	random variable
独立	independent
確率	probability
最尤推定量	maximum likelihood estimator
漸近分散	asymptotic variance

2016年9月・2017年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：応用数学

問題番号 10

以下の問に答えよ．

(1) 根付き2分順序木および根付き正則2分順序木の定義を述べよ．

(2) ノードの個数が n $(n \geq 1)$ の相異なる根付き2分順序木の個数を $b(n)$ で表す．$b(n) = \Omega(2^n)$ であることを示せ．

(3) 葉の個数が n $(n \geq 2)$ の相異なる根付き正則2分順序木の個数は $b(n-1)$ であることを示せ．

(4) 頂点が n 個（$n \geq 3$）の凸 n 角形を P_n とする．P_n において，隣接しない2つの頂点を結ぶ線分を弦という．P_n は $n-3$ 本の互いに交差しない弦によって $n-2$ 個の互いに共通部分のない三角形に分割される．これを P_n の三角形分割と呼ぶ．P_n を三角形分割する仕方は $b(n-2)$ 通りあることを示せ．

(5) P_n の三角形分割における弦の長さの総和の最小値を求める多項式時間アルゴリズムを示せ．アルゴリズムは，基本的な方針がわかるように示せばよく，きちんとしたプログラムを書かなくてもよい．

根付き（正則）2分順序木	rooted (regular) binary ordered tree
ノード	node
葉	leaf
頂点	vertex
凸 n 角形	convex polygon with n vertices
隣接	adjacent
弦	chord
互いに	pairwise
三角形	triangle
三角形分割	triangulation
多項式時間アルゴリズム	polynomial-time algorithm

２０１６年９月・２０１７年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：応用数学

問題番号 11

$a_0 \geq b_0 > 0$ なる正の数 a_0, b_0 と，漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{$\star$}$$

から定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n$ と $\lim_{n\to\infty} b_n$ が共に存在し，$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ となることを示せ．

(2) $A > B > 0$ に対し，$a = \frac{A+B}{2}, b = \sqrt{AB}$ とおく．積分

$$K(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$$

は

$$K(a,b) = K(A,B)$$

を満たすことを変数変換

$$\tan\theta = \frac{\sin 2\varphi}{k + \cos 2\varphi}, \qquad k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

を用いて示せ．

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ の値を α とおく．$K(a_0, b_0)$ を α を用いて表せ．

(4) $K(a_0, b_0)$ の値を数値計算によって求める場合，漸化式 $(\star)$ を用いるとわずかな回数の計算でよい近似値を求めることができる．その理由を説明せよ．

漸化式	recurrence relation
数列	sequence
積分	integral
数値計算	numerical computation
近似値	approximation