

京都大学大学院情報学研究科
通信情報システム専攻 修士課程入学者選抜試験問題
(平成30年度10月期入学・平成31年度4月期入学)

Admissions for October 2018 and for April 2019

Entrance Examination for Master's Program

Department of Communications and Computer Engineering

Graduate School of Informatics, Kyoto University

平成30年8月6日 9:00 – 12:00

August 6, 2018 9:00 a.m. - 12:00 noon

専門基礎A

Problem Set A

注意 (NOTES)

1. 解答開始の合図があるまで中を見てはいけない。
2. これは「専門基礎A」の問題用紙で、表紙共に 18 枚 ある。解答開始の合図があった後、枚数を確認、落丁または不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
3. 問題は9問(A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, A-9)ある。4問を選択して解答すること。 答案用紙の問題番号欄に問題番号を記入すること。
4. 解答は問題ごとに答案用紙1枚を使うこと。答案用紙1枚に2問以上の解答もしくは1問の解答を2枚以上の答案用紙に書いた場合は無効にすることがある。なお、必要な場合「裏に続く」と明記した上で裏面を使用してもよい。
5. 答案用紙は4枚綴じたまま使用し、切り離さないこと。
6. 答案用紙の綴じ込みがはずれた場合は、直ちに申し出ること。
7. 解答は日本語または英語で行うこと。

1. Do not open the pages before a call for starting.
2. This is the “**Problem Set A**” in 18 pages including this front cover.
After the call of starting, check all pages are in order and notify proctors (professors) immediately if missing pages or with unclear printings are found.
3. **Answer 4 of the following 9 questions;** A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6, A-7, A-8, and A-9. State the Question Numbers you choose on the Answer Sheet.
4. Use one sheet for each question. If required, the reverse side may be used, stating “Over” at the end of the page. Note that in case two or more questions are answered in one sheet or two or more sheets are used for one question, they may be regarded as no answers.
5. Do not separate the pages of answer sheets; keep them bound.
6. Notify proctors (professors) immediately if the pages are separated for some reason.
7. Answer the questions either in Japanese or English.

専門基礎 A

A-1, **A-2**, **A-3**, **A-4**, **A-5**, **A-6**, **A-7**, **A-8**, **A-9** の9問から4問を選択して解答せよ。

Problem Set A

Choose and answer 4 questions out of **A-1**, **A-2**, **A-3**, **A-4**, **A-5**, **A-6**, **A-7**, **A-8**, and **A-9**.

A-1

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) 以下の問に答えよ.

- (a) 変数変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のヤコビ行列およびその行列式を求めよ.
(b) 積分 I の結果を求めよ.

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R\}, \quad R > 0$$

- (c) 問 (b) の I について, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I$$

- (d) 次式を証明せよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- (e) 次式で定義される $x > 0$ の関数 $\Gamma(x)$ について, $\Gamma(1/2)$ の値を求めよ.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

(2) 以下の問に答えよ. ただし, 行列 A は次式で与えられる. また, a は実数である.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}$$

- (a) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ.
(b) n を正整数とする. A^n を求めよ.

continued on next page
次 頁 へ 続 く

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions.

(a) Find the Jacobi matrix and its determinant of the transformation $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.

(b) Evaluate the following integral I .

$$I = \iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \quad D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R \}, \quad R > 0$$

(c) Find the following limit, where I is defined in Question (b).

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I$$

(d) Prove the following equation.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(e) Find the value of $\Gamma(1/2)$, where $\Gamma(x)$ is a function of $x > 0$ defined by

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(2) A matrix \mathbf{A} is given by

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

where a is a real number. Answer the following questions.

(a) Find the eigenvalues and eigenvectors of matrix \mathbf{A} .

(b) Let n be a positive integer. Find \mathbf{A}^n .

A-2

下記の問 (1), (2), (3) から 2 つを選んで答えよ.

Answer two of the following questions (1), (2), and (3).

- (1) フーリエ変換に関する以下の問に答えよ. ただし, 関数 $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ は次式で定義される.

Answer the following questions related to a Fourier transform. Note that the Fourier transform of a function $f(t)$ is defined in the following.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (i = \sqrt{-1})$$

次の関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ のフーリエ変換を求めよ.

Find the Fourier transform of $f_1(t)$, $f_2(t)$, and $f_3(t)$ defined in the following.

$$f_1(t) = \begin{cases} 0 & (|t| > a_1 > 0) \\ \frac{1}{2a_1} & (|t| \leq a_1) \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} 0 & (|t| > a_2 > 0) \\ \frac{1}{a_2} - \frac{|t|}{a_2^2} & (|t| \leq a_2) \end{cases}$$

$$f_3(t) = \frac{\sin a_3 t}{a_3 t} \quad (a_3 > 0)$$

- (2) 次の微分方程式の一般解を求めよ.

Find the general solution of the following differential equation.

$$\frac{dy}{dx} - (y + \cos x) \sin x = 0$$

- (3) 以下の問に答えよ.

Answer the following questions.

- (a) 次の積分 I について, $z = e^{i\theta}$ ($i = \sqrt{-1}$) と置いて, z に関する複素積分で表せ.

By using $z = e^{i\theta}$ ($i = \sqrt{-1}$), express the following integral I in the complex integral with respect to z .

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \quad (0 < a < 1)$$

- (b) 問 (a) の結果を用いて, 積分 I を求めよ.

Evaluate the integral I taking the result of Question (a) into account.

下記のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

- (1) 図(a)のように、真空中に半径 a の内部導体と半径 b の外部導体で構成された長さ L ($\gg b > a$) の同軸円筒形キャパシタがあり、導体間 ($a < r < b$) は誘電率 ϵ の誘電体で満たされている。ここで r は同軸円筒形キャパシタの中心軸からの距離である。また、真空の誘電率を ϵ_0 とする。なお、 $\epsilon > \epsilon_0$ であり、導体の端部効果は無視できるものとする。

Consider a cylindrical co-axial capacitor of length L composed of inner and outer conductors of radii a and b ($L \gg b > a$), respectively, in vacuum as shown in Figure (a). The space between conductors ($a < r < b$) is filled with a dielectric material which has a permittivity ϵ , where r is a distance from the center axis of the cylindrical co-axial capacitor. The permittivity of vacuum is ϵ_0 . Here, $\epsilon > \epsilon_0$, and the edge effects of the conductors are assumed to be neglected.

- (a) 内部導体および外部導体にそれぞれ電荷 $+Q$ および $-Q$ を与えたとき、 r の関数として同軸円筒形キャパシタ内の電束密度および電場を求めよ。

Find the dielectric flux density and the electric field in the cylindrical co-axial capacitor as a function of r when the internal and external conductors have charges $+Q$ and $-Q$, respectively.

- (b) 同軸円筒形キャパシタの静電容量を求めよ。

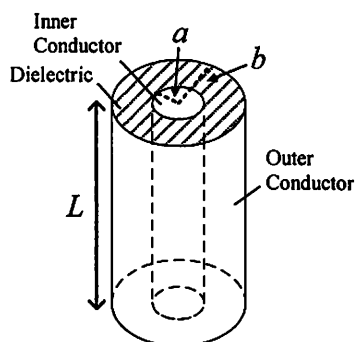
Find the capacitance of the cylindrical co-axial capacitor.

- (c) 図(b)のように、同軸円筒形キャパシタから誘電体を長さ x 引き抜いた時の静電容量を求めよ。

Consider that the dielectric material is pulled out by the length x from the cylindrical co-axial capacitor as shown in Figure (b). Find the capacitance.

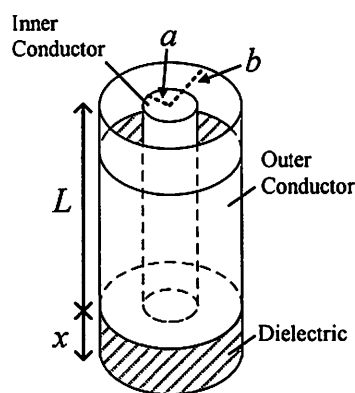
- (d) 問(c)において、導体間に一定電圧 V を与えた。この時の誘電体上端面に働く力とその方向を求めよ。

In the case of Question (c), a constant voltage V is applied between the conductors. Find the force at the upper end of the dielectric material and its direction.



図(a)

Figure (a)



図(b)

Figure (b)

- (2) 電磁気学に関する次の用語を説明せよ。

Explain the meanings of the following terms related to the electromagnetism.

- (a) (電気) 映像法

(Electric) image method

- (b) ファラデーの電磁誘導法則

Faraday's law of electromagnetic induction

- (c) ビオ・サバルの法則

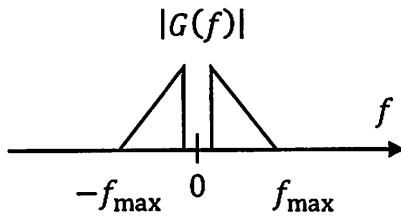
Biot-Savart law

A-4

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the separate pages.)

(1) 標本化定理に関する以下の問に答えよ.

時間関数 $g(t)$ で表される信号について, そのフーリエ変換を $G(f)$ とすると, 周波数スペクトル $|G(f)|$ は図(a)のようになる. ただし, f_{\max} は $G(f)$ の最大周波数である.



図(a)

(a) 周期 T_s のインパルス列 $s(t)$ が次式で与えられる時, $s(t)$ の指数フーリエ級数展開を導出せよ.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

ただし $\delta(t)$ はデルタ関数である.

(b) サンプリング周波数 $f_s = 1/T_s$ で関数 $g(t)$ の信号を標本化した関数 $g_s(t)$ は次式で与えられる.

$$g_s(t) = g(t)s(t)$$

$g_s(t)$ のフーリエ変換を $G_s(f)$ とした場合, $G_s(f)$ がどのような周波数領域の図を用いて説明せよ. また周波数領域でスペクトルが重ならない条件について述べよ.

(c) スペクトルが重ならない条件下で, 信号 $g(t)$ を $g_s(t)$ から復元するためのフィルタの条件について述べよ.

(2) 次に示す変調信号 $y(t)$ に関する以下の問に答えよ.

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i[k]p(t-kT) \cos 2\pi f_c t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} q[k]p(t-kT) \sin 2\pi f_c t$$

ここで f_c は搬送波の周波数, $p(t)$ はロールオフファクタ α のルートレイズドコサインロールオフパルス波形, T はシンボル間隔 ($f_c \gg 1/T$), $i[k]$, $q[k]$ はそれぞれ I チャンネルおよび Q チャンネルの情報系列とする.

- (a) $p(t)$ の周波数伝達関数を示せ.
- (b) $i[k] \in \{-1, 1\}$, $q[k] \in \{0\}$ とする. そのとき信号 $y(t)$ の変調方式の名称を答え, その特徴を 2 つ示せ.
- (c) $i[k] \in \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$, $q[k] \in \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$ とする. そのとき信号 $y(t)$ の変調方式の名称を答え, その特徴を 2 つ示せ.

continued on next page
次 頁 へ 続 く

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions related to the sampling theorem.

Given a time function $g(t)$, $G(f)$ corresponds to the Fourier transform of $g(t)$ where f_{\max} is the maximum frequency of $G(f)$. The frequency spectrum $|G(f)|$ is shown in Figure (a).

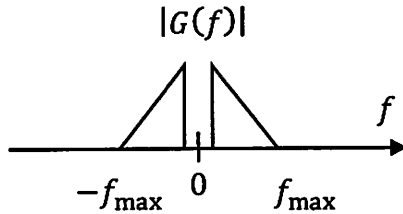


Figure (a)

(a) The impulse train $s(t)$ with period T_s is given by the following equation.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s),$$

where $\delta(t)$ is the delta function.

Derive the exponential Fourier series expansion of $s(t)$.

(b) Sampling $g(t)$ by the frequency $f_s = 1/T_s$ gives $g_s(t)$. $G_s(f)$ is the Fourier transform of $g_s(t)$. The function $g_s(t)$ is given by the following equation.

$$g_s(t) = g(t)s(t).$$

Explain $G_s(f)$ by using figures in the frequency domain.

Show the condition in the frequency domain to avoid spectral overlap.

(c) Show the condition of the filter required to recover the original signal $g(t)$ from $g_s(t)$ where the spectra do not overlap.

(2) Answer the following questions related to the modulated signal $y(t)$ shown below;

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} i[k]p(t - kT) \cos 2\pi f_c t - \sum_{k=-\infty}^{\infty} q[k]p(t - kT) \sin 2\pi f_c t ,$$

where f_c is the frequency of the carrier, $p(t)$ is a root raised cosine roll-off pulse with the roll-off factor α , T is the symbol duration, $f_c \gg 1/T$, and $i[k]$ and $q[k]$ are the information sequences of I channel and Q channel, respectively.

- (a) Show the frequency response of $p(t)$.
- (b) Assume $i[k] \in \{-1, 1\}$ and $q[k] \in \{0\}$. Answer the name of the modulation scheme used for $y(t)$ and explain two characteristics of the scheme.
- (c) Assume $i[k] \in \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$ and $q[k] \in \{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\}$. Answer the name of the modulation scheme used for $y(t)$ and explain two characteristics of the scheme.

下記のすべての問に答えよ。

(English translation is given on the next page.)

- (1) 図(a)に示す, アドミタンス行列で表現される2端子対回路網(4端子回路網)について考える. アドミタンス行列の定義は下記の通りである。

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

相反定理が成り立ち, かつ回路が対称である時, パラメータ間に成り立つ関係を示せ。

- (2) 図(b)と図(c)に示す回路のアドミタンス行列を求めよ。
 (3) 図(d)に示す回路のアドミタンス行列を求めよ。また, $I_2 = 0$ のとき, 角周波数 $\omega = 1/CR$ において $V_2/V_1 = 0$ となることを示せ。
 (4) 図(e)に示す理想的な演算増幅器を用いた回路について, V_2/V_1 を求めよ。

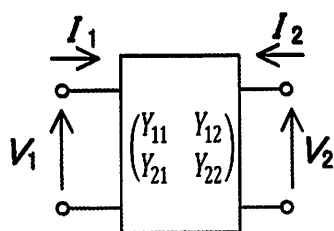


図 (a)

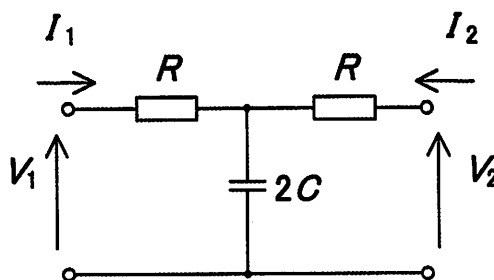


図 (b)

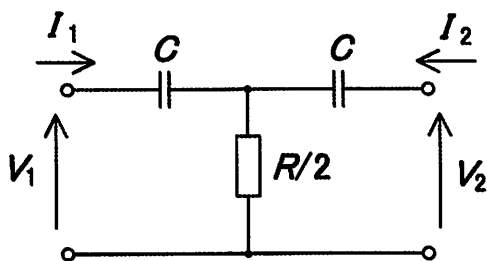


図 (c)

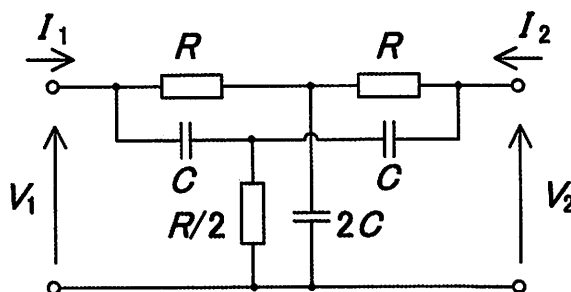


図 (d)

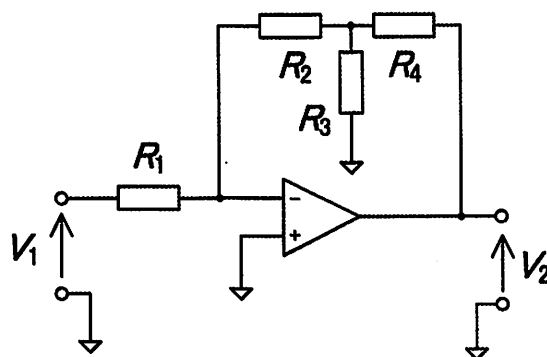


図 (e)

Answer all the following questions.

- (1) Consider a two-port network (four-terminal network) with an admittance matrix shown in Figure (a). Admittance matrix is defined as follows.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

When the reciprocity theorem holds, and the circuit is symmetrical, show relationship between elements of the matrix.

- (2) For the circuits shown in Figure (b) and Figure (c), find the admittance matrix of each circuit.
 (3) Find the admittance matrix of the circuit shown in Figure (d). When $I_2 = 0$, show $V_2/V_1 = 0$ at the angular frequency $\omega = 1/CR$.
 (4) For the circuit with an ideal operational amplifier shown in Figure (e), find V_2/V_1 .

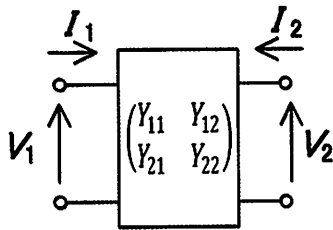


Figure (a)

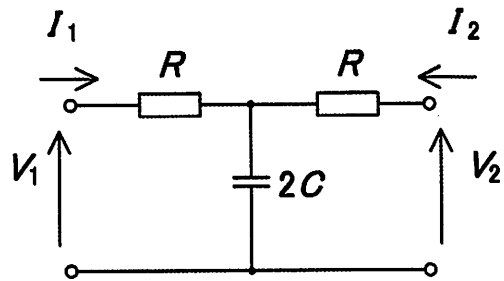


Figure (b)

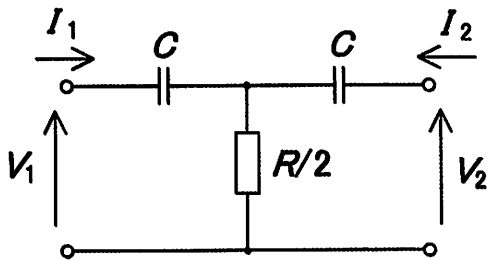


Figure (c)

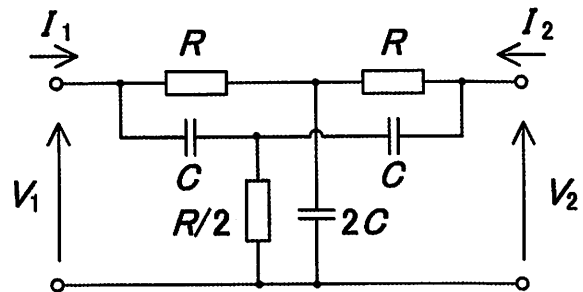


Figure (d)

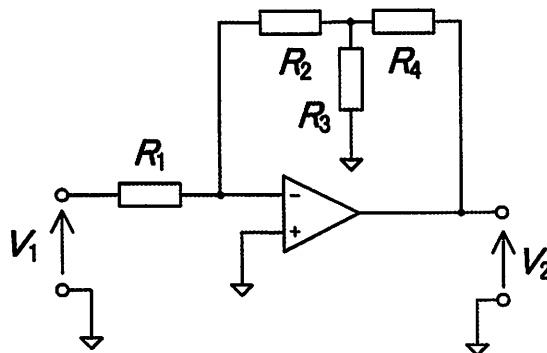


Figure (e)

A-6

下記のすべての問に答えよ。(English translation is given on the next page.)

(1) 情報源符号化に関する以下の問に答えよ。 $\log_2 3 = 1.6$, $\log_2 5 = 2.3$ を用いてよい。

表 (a)

記号	発生確率
A	0.4
B	0.2
C	0.2
D	0.1
E	0.05
F	0.05

表 (b)

記号	発生確率
A	0.4
B	0.2
C	0.2
D	0.1
E	0.1

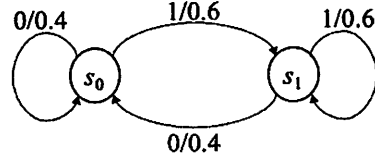


図 (a)

- (a) 記憶のない定常情報源 S_α の各記号の発生確率が表 (a) で与えられる。 S_α の歪みを許し、表 (b) で示される S_β を作成する。 S_α と S_β それぞれに 2 元ハフマン符号化を施し、平均符号長を求め比較せよ。また、平均符号長の下限も求め比較せよ。
- (b) 図 (a) のマルコフ情報源 S_γ のエントロピー $H(S_\gamma)$ を求めよ。

(2) 通信路に関する以下の問に答えよ。

- (a) ビット誤り率 p の 2 元対称通信路 (BSC) の通信路行列を示せ。
- (b) ビット誤り率 p の BSC の通信路容量を示せ (導出は不要である)。また、これを p の関数として図示せよ。
- (c) ビット誤り率 p と q の 2 つの BSC を縦続接続した通信路の通信路行列と通信路容量を求めよ。

continued on next page
次 頁 へ 続 く

Answer all the following questions.

- (1) Answer the following questions related to source coding. $\log_2 3 = 1.6$ and $\log_2 5 = 2.3$ may be used.

Table (a)

Symbol	Probability
A	0.4
B	0.2
C	0.2
D	0.1
E	0.05
F	0.05

Table (b)

Symbol	Probability
A	0.4
B	0.2
C	0.2
D	0.1
E	0.1

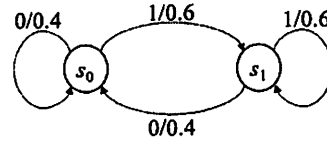


Figure (a)

- (a) Stationary memoryless information source S_α generates each symbol with the corresponding probability given in Table (a). S_β in Table (b) is produced from S_α by accepting distortion. Considering binary Huffman codes for S_α and S_β , find and compare the expected codeword lengths. In addition, find and compare the lower bounds of the expected codeword lengths.
- (b) Find the entropy, $H(S_\gamma)$, of Markov information source S_γ shown in Figure (a).
- (2) (a) Show the channel matrix of the binary symmetric channel (BSC) with bit error probability p .
- (b) Show the channel capacity of the BSC with bit error probability p (derivation is not required). In addition, graph it as a function of p .
- (c) Find the channel matrix and the capacity of a cascade of two BSCs with bit error probabilities p and q .

A-7

以下のすべての問に答えよ。

Answer all the following questions.

- (1) 定義域を自然数全体，値域を実数全体とする関数 $f(n), g(n)$ において， $n \rightarrow \infty$ のとき $(g(n)/f(n))$ が 0 に収束するとき， $f(n)$ は $g(n)$ よりも漸近的な増加の勢いが大きいという。以下の関数①～⑥を， $n \rightarrow \infty$ のときの漸近的な増加の勢いが大きい順に並べよ。
(ただし対数の底は 2 とする。)

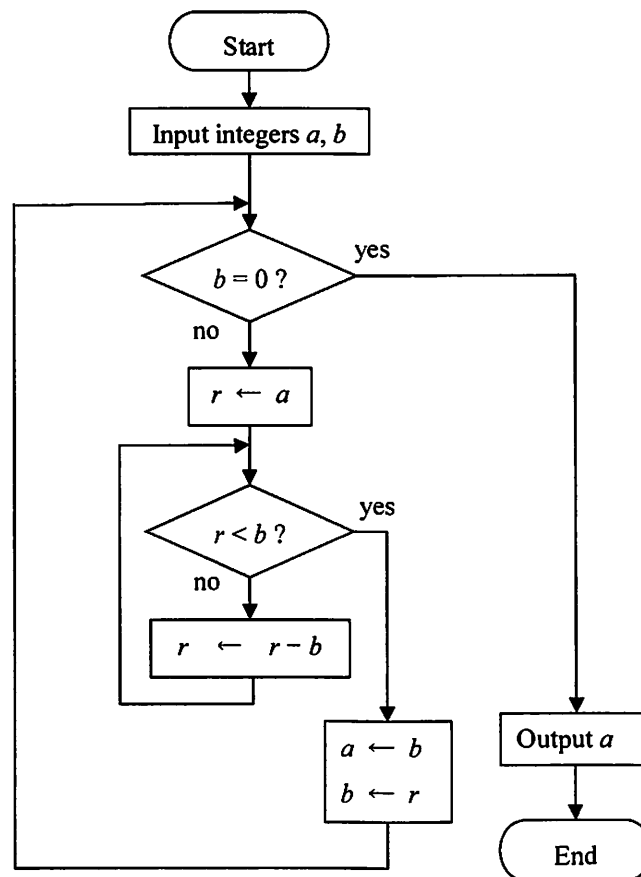
For given two functions $f(n)$ and $g(n)$ whose domains and ranges are the set of natural numbers and the set of real numbers, respectively, we say $f(n)$ grows asymptotically faster than $g(n)$ if and only if $(g(n)/f(n))$ converges to 0 as $n \rightarrow \infty$. Sort the following functions ①～⑥ from the fastest to the slowest in terms of asymptotical growth. (Note that the base of the logarithm is 2.)

- ① $n! - 100 n^{100}$
 - ② $n^{\log n}$
 - ③ $\log n + (100 / 2^n)$
 - ④ $100 \sin^2 n$
 - ⑤ $n^{100} / \log n$
 - ⑥ $(n / 100) - 100$
- (2) どんなに大きい次数を持つ多項式関数よりも漸近的な増加の勢いが大きい関数を上記①～⑥の中から全て選び出せ。また，その理由を付すこと。
List all the functions in the above ①～⑥ that grow asymptotically faster than any polynomial function of any large degree, and explain why.
- (3) どんな定数 $c > 0$ に対する指数関数 2^{cn} よりも漸近的な増加の勢いが大きい関数を上記①～⑥の中から全て選び出せ。また，その理由を付すこと。
List all the functions in the above ①～⑥ that grow asymptotically faster than any exponential functions 2^{cn} for a constant $c > 0$, and explain why.

continued on next page
次 頁 へ 続 <

下記のフローチャートが表す手続きに関して、問(4)~(7)に答えよ。

Answer the questions (4)~(7) on the procedure shown by the following flowchart.



- (4) $a = 4, b = 15$ を入力として与えたときに得られる出力を求めよ。

Answer the output of this algorithm for the input $a = 4, b = 15$.

- (5) この手続きは、正整数の組を入力したときに何を計算するものであるか、入力と出力との間の算術的な関係を述べよ。

What is calculated by this procedure if a pair of positive integers is input? Answer the arithmetic relation between the input and the output.

- (6) この手続きに対して、どんな正整数の組を入力しても必ず有限ステップで終了するか否かを答えよ。また、その理由を付すこと。

Answer whether this procedure terminates in a finite number of steps for any pair of positive integers, and explain why.

- (7) 入力の少なくとも一方が 0 または負の整数であった場合、どんな動作が起こるかを説明せよ。

Explain the behavior of this procedure if at least one of the input integers is less than or equal to zero.

A-8

下記のすべての問に答えよ.

(1) 2進表現について, 以下の問に答えよ.

(a) 次の数を8ビットの2の補数表現で表せ.

(i) +36

(ii) -24

(b) 次の8ビットの2の補数表現の2進数を8ビット符号付き絶対値表現に変換せよ.

(i) 10101111

(ii) 11110000

(c) 次の8ビットの2の補数表現の2進数体系での加算および減算の結果を示せ.

(i) 10101111+11110000

(ii) 10101111+10101111

(iii) 10101111-11110000

(iv) 11110000-10101111

(d) 8ビットの2の補数表現の2進数体系で10101111を2ビット算術右シフトした結果を示せ.

(2) AND ゲート, OR ゲート, XOR ゲートを用いて4ビット桁上げ先見加算器の論理回路図を描け. ただし, 最下位桁へのキャリー入力はないものとし, 最上位桁のキャリー出力は描かなくて良い.

(3) 「ロード/ストア・アーキテクチャ」について説明せよ.

Answer all the following questions.

(1) Answer the following questions on the binary number system.

(a) Express the following numbers in the 8-bit two's complement representation.

(i) +36

(ii) -24

(b) Convert the following 8-bit two's complement binary numbers into the 8-bit sign-and-magnitude representation.

(i) 10101111

(ii) 11110000

(c) Show the results of the following additions and subtractions in the 8-bit two's complement binary number system.

(i) 10101111+11110000

(ii) 10101111+10101111

(iii) 10101111-11110000

(iv) 11110000-10101111

(d) Show the result of the 2-bit arithmetic right shift operation on 10101111 in the 8-bit two's complement binary number system.

(2) Draw a logic circuit diagram of a 4-bit carry-lookahead adder using AND gates, OR gates and XOR gates. Note that there is no carry input to the least significant bit position and you do not need to draw the carry output of the most significant bit position.

(3) Explain 'load/store architecture'.

以下の問に答えよ。算術オーバーフローは起こらないものと仮定せよ。(English translation is given on the next page.)

以下のBNFで文法が定義されるプログラミング言語 \mathcal{L} を考える。

$$\begin{aligned} e &::= x \mid n \mid \text{true} \mid \text{false} \mid e_1 \text{ op } e_2 \mid \text{let } x = e_1 \text{ in } e_2 \mid \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \\ \text{op} &::= + \mid - \mid \times \mid = \mid \leq \end{aligned}$$

e は式を表すメタ変数, op は二項演算を表すメタ変数, n は整数定数を表すメタ変数である。この言語の値は整数もしくは真偽値である。値をメタ変数 v で表すことにする。 \mathcal{L} の式 e の意味は、以下の仕様に従い定められる。

- x : 評価時に x が値 v に束縛されている場合には v に評価される。
 - n : 整数 n に評価される。
 - $\text{true}, \text{false}$: 対応する真偽値に評価される。
 - $e_1 \text{ op } e_2$: 式 e_1 が整数 n_1 に、式 e_2 が整数 n_2 に評価されるとき、 n_1 と n_2 を二項演算 op で計算した結果の値に評価される。
 - $\text{let } x = e_1 \text{ in } e_2$: 式 e_1 の評価結果が v_1 で、変数 x を値 v_1 に束縛して式 e_2 を評価した結果が v_2 であるとき、 v_2 に評価される。
 - $\text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$: e を評価した結果が真を表す真偽値である場合には e_1 を評価した結果を、偽を表す真偽値である場合には e_2 を評価した結果に評価される。
- (1) 意味が上記の仕様では定められていない式の一つを書け。
- (2) 言語 \mathcal{L} のインタプリタのプログラムを示せ。解答に先立ち、使用するプログラミング言語を以下から一つ選択し明示すること: C, C++, Java, Python, Scheme, Racket, OCaml, Haskell。解答にあたっては以下の点に留意すること。
- 動作の理解を容易にするために、ソースコードには適宜説明を加えること。
 - インタプリタの実装をすべて書く必要はなく、式 x 、式 $\text{let } x = e_1 \text{ in } e_2$ 、式 $\text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ に対する動作が分かるように説明されていればよい。
 - 変数の値への束縛は環境を用いて管理せよ。環境をどのようなデータ構造で実装したかを説明すること。
 - 言語仕様中の未定義動作については、解答においてその未定義動作をどのように扱ったかを説明すること。
- (3) 言語 \mathcal{L} をさらに以下の構文で拡張する。

$$e ::= \dots \mid \text{loop}$$

式 loop は、評価しようとするとき必ず発散する式であるとする。すなわち、 loop の評価は停止することがない。このとき、 e_1 と e_2 が等価であるとは、 e_1 を空の環境の下で評価した結果が値 v となること、かつそのときに限り、 e_2 を空の環境の下で評価した結果が値 v となることをいう。以下の点について論ぜよ。

1. 式 $\text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$ と式 $\text{let } x = e \text{ in let } x_1 = e_1 \text{ in let } x_2 = e_2 \text{ in if } x \text{ then } x_1 \text{ else } x_2$ (ただし、変数 x, x_1, x_2 はプログラムの他の場所には現れない互いに相異なる変数) とは、この拡張された構文を備えるプログラミング言語において等価であると言えるか。
2. 式の構文が loop で拡張される前の言語においては、上記の2つの式は等価であると言えるか。

Answer all the following questions. Assume that overflows do not happen during execution of a program.

\mathcal{L} is a programming language whose syntax is defined by the following BNF:

$$\begin{aligned} e &::= x \mid n \mid \text{true} \mid \text{false} \mid e_1 \text{ op } e_2 \mid \text{let } x = e_1 \text{ in } e_2 \mid \text{if } e \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \\ \text{op} &::= + \mid - \mid \times \mid = \mid \leq \end{aligned}$$

e is the metavariable for *expressions*; op is for *binary operators*; n is for integer constants. A *value* in this language is an integer or a Boolean value; we use metavariable v for the values. The semantics of the expressions of \mathcal{L} is defined according to the following specification.

- If x is bound to value v at the time of the evaluation, then x evaluates to v .
 - n evaluates to the integer n .
 - **true** and **false** evaluate to the corresponding Boolean values.
 - $e_1 \text{ op } e_2$ evaluates to the value obtained by applying the binary operation op to n_1 and n_2 where the integer n_1 is the result of evaluating e_1 and the integer n_2 is the result of evaluating e_2 .
 - **let** $x = e_1$ **in** e_2 evaluates to v_2 if v_1 is the result of evaluating e_1 and v_2 is the result of evaluating e_2 after binding x to v_1 .
 - **if** e **then** e_1 **else** e_2 evaluates to the result of evaluating e_1 if e evaluates to the Boolean value representing true and e_2 if e evaluates to the Boolean value representing false.
- (1) Write an expression whose semantics is not defined in the above specification.
 - (2) Describe a program that implements an interpreter for \mathcal{L} . First declare one programming language that you use from the following choices: C, C++, Java, Python, Scheme, Racket, OCaml, and Haskell. Your answer should satisfy the following conditions:
 - You need to add explanation to your source code so that it can be easily understood.
 - You do not need to write down the whole implementation of your interpreter; it suffices to show the implementation of the expression x , the expression **let** $x = e_1$ **in** e_2 , and the expression **if** e **then** e_1 **else** e_2 .
 - You should use an environment to express bindings of variables to values. You should explain the data structure that you use to implement an environment.
 - You should explain how you deal with the undefined behaviors in the above specification.
 - (3) We would like to extend \mathcal{L} with the following syntax further.

$$e ::= \dots \mid \text{loop}$$

Expression **loop** diverges if we try to evaluate it; the evaluation of **loop** never terminates. Two expressions e_1 and e_2 are said to be *equivalent* if e_1 evaluates to v under the empty environment if and only if e_2 evaluates to v under the empty environment. Discuss each of the following questions.

1. Let variables x, x_1 , and x_2 be mutually different. Are expressions **if** e **then** e_1 **else** e_2 and **let** $x = e$ **in** **let** $x_1 = e_1$ **in** **let** $x_2 = e_2$ **in** **if** x **then** x_1 **else** x_2 equivalent in the language equipped with **loop** if x, x_1 , and x_2 do not appear elsewhere in the program?
2. Are the above two expressions equivalent in the language that is *not* extended with the primitive **loop**?