２０１７年９月・２０１８年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

◎問題用紙が＿12＿ページあることを試験開始直後に確認してください。
◎解答用紙は＿4＿枚綴りが＿1＿組あることを試験開始直後に確認してください。

★ 問題 1, 問題 2, 問題 3 は必須問題です。
★ 問題 3には 3A と 3B があります。必ず一方を選択し, 解答してください。
★ 問題 4 から問題 11 は選択問題です。 1 問を選択し, 解答してください。
★ この問題用紙を持ち帰り, 面接試験の際に持参してください。

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：線形代数

問題番号 1

ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^4$ を $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として，$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 T を

$$T(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle}{\langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle}\vec{a}_1 - \frac{\langle \vec{x}, \vec{a}_2 \rangle}{\langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle}\vec{a}_2$$

とおく。次の問に答えよ。ただし，$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ は $\mathbb{R}^4$ の標準内積である。

(1) $T(\vec{a}_1)$ と $\langle T(\vec{x}), \vec{a}_1 \rangle$ を求めよ。

(2) $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ が $\mathbb{R}^4$ のすべてのベクトル $\vec{x}$ に対して成立するように 4 次正方行列 A を定めよ。

(3) (2) で得られた行列 A を，適当な直交行列 P による相似変換 $A \mapsto P^{-1}AP$ によって対角行列に変換する。このときの直交行列 P と対角行列を求めよ。

$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換	linear transformation on $\mathbb{R}^4$
4 次正方行列	4×4 matrix
直交行列	orthogonal matrix
相似変換	similarity transformation
対角行列に変換する	transform to diagonal matrix

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科 目 名 : 微分積分

問題番号 2

$\mathbb{R}$ 上の実数値関数 $\varphi(x)$ を次により定義する。

$$\varphi(x) = e^{-\frac{|x|}{2}} \cos x$$

次の問に答えよ。

(1) 次の広義積分の値を求めよ。

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$$

(2) $\lambda > 0$ に対して

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\varphi(\frac{x}{\lambda})$$

とおく。 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上定義された実数値連続関数で $\mathbb{R}$ 上有界であると仮定する。このとき, 次の極限を求めよ。

$$\lim_{\lambda \to +0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_\lambda(x)\, dx.$$

実数値	real valued
連続関数	continuous function
広義積分	improper integral
有界	bounded
極限	limit

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題 3 には 3A と 3B がある。 必ず一方を選び, 解答すること。

問題番号 3A

集合 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ に対して, 以下により X 上の二項関係 $\sim$ を定める: 元 $x, y \in X$ に対して

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

さらに $x \in X$ に対して, 以下により X の部分集合 $\overline{x}$ を定める:

$$\overline{x} := \{y \in X \mid x \sim y\}$$

そしてその全体のなす集合を $\overline{X}$ により表す:

$$\overline{X} := \{\overline{x} \mid x \in X\}$$

このとき, 以下の (1) ～ (4) を示せ。

(1) 二項関係 $\sim$ は X 上の同値関係となる。

(2) 元 $\overline{x} \in \overline{X}$ に対して $f(x) \in Y$ を対応させるとき, この対応により写像

$$g : \overline{X} \to Y; \quad \overline{x} \mapsto g(\overline{x}) = f(x)$$

が矛盾なく定まる。

(3) g は単射である。

(4) さらに f が全射ならば g は全単射となる。

集合	set	写像	mapping
二項関係	binary relation	元	element
部分集合	subset	同値関係	equivalence relation
矛盾なく定まる	well-defined	単射	injection, injective
全射	surjection, surjective	全単射	bijection, bijective

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科 目 名：基礎数理

問題番号 3

問題 3 には 3A と 3B がある。 必ず一方を選び, 解答すること。

問題番号 3B

実 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ において, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ の内積を $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \ = \ \sum_{i=1}^n x_i y_i$, ノルムを $\| \mathbf{x} \|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ とし, M を $\mathbb{R}^n$ の閉線形部分空間とする。このとき次の問に答えよ。

(1) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $d = \inf\{\| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \ ; \ \mathbf{y} \in M \}$ とし, $\| \mathbf{x} - \mathbf{y}_n \| \to d \ (n \to \infty)$ をみたす点列 $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, ..., \mathbf{y}_n, ...$ $(\mathbf{y}_n \in M)$ を取る。このとき

$$2\| \mathbf{y}_n - \mathbf{x} \|^2 + 2\| \mathbf{y}_m - \mathbf{x} \|^2 - \| \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_m - 2\mathbf{x} \|^2$$

を計算することによって, $\{\mathbf{y}_n\}$ は M の Cauchy 列となることを示せ。

(2) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{z_0} \| \ = \ \inf\{\| \mathbf{x} - \mathbf{z} \| \ ; \ \mathbf{z} \in M \}$$

をみたす $\mathbf{z}_0 \in M$ が一意に存在することを示せ。

(3) (2) において, すべての $\mathbf{y} \in M$ に対して $\langle \mathbf{x} - \mathbf{z}_0, \mathbf{y} \rangle \ = 0$ が成り立つことを示せ。

実 n 次元数ベクトル空間	n dimensional real vector space
内積	inner product
ノルム	norm
閉線形部分空間	closed linear subspace
Cauchy 列	Cauchy sequence

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 4

p を奇素数とし, 体 K を $K = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{p+1}{2} + \sqrt{p}}\right)$ とおく。
このとき, 以下の問に答えよ。

(1) $K \supsetneq \mathbb{Q}(\sqrt{p})$ を示し, 拡大次数 $(K : \mathbb{Q})$ を求めよ。

(2) K が $\mathbb{Q}$ のガロア拡大であることを示し, そのガロア群について論ぜよ。

奇素数	odd prime number
拡大次数	degree of field extension
ガロア拡大	Galois extension
ガロア群	Galois group

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 5

単位的可換環 A のイデアル I, J に対して, 集合 $\{xy | x \in I, y \in J\}$ により生成される A のイデアルを I, J の積と呼び, IJ により表す。また, 集合 $\{x | x^k \in I (\exists k > 0)\}$ を I の根基と呼び, $\sqrt{I}$ により表す。集合 $\sqrt{I}$ は A のイデアルとなり一般に, $I \subseteq \sqrt{I}$, および, $I \subseteq J \Rightarrow \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$ が成り立つ (これらの事実は以下において用いて良い)。
A のイデアル I, J に対して, 以下の命題を示せ。

(i) 正整数 $m > 0$ に対して, $\sqrt{I^m} = \sqrt{I}$ が成り立つことを示せ。ただし, I^m は m 個の I の積である。

(ii) $\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I}\sqrt{J}$ は成り立つか? 成り立つならその証明を与えよ。成り立たないならば反例を与えよ。

(iii) $\sqrt{I}\sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$ は成り立つか? 成り立つならその証明を与えよ。成り立たないならば反例を与えよ。

単位的可換環	unitary commutative ring
イデアル	ideal
集合	set
により生成される	generated by
積	product
根基	radical

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：幾何

問題番号 6

(1) 2 次元実射影空間 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ の定義を述べよ。$\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ がコンパクトな C^∞ 級多様体であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ から $\mathbb{R}$ へのはめ込みは存在しないことを示せ。

(3) $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ から $\mathbb{R}^2$ へのはめ込みは存在しないことを示せ。

(4) $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ へのはめ込みは存在するか？ 証明を付けて答えよ。

実射影空間	real projective space
コンパクト	compact
多様体	manifold
はめ込み	immersion

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 7

D を複素平面上の領域とする。 このとき以下の設問に答えよ。

(1) C^2 級関数 $u(x, y)$ は D 上の調和関数であるとする。 このとき

$$h(z) = u_x(x, y) - iu_y(x, y)\ ,\ z = x + iy \in D$$

は D 上の正則関数となることを証明せよ。

(2) D 上の複素数値関数 $f(z) = p(x, y) + iq(x, y)$ は正則で零点を持たないとする。 このとき

$$u(x, y) = \log |f(z)| = \log |p(x, y) + iq(x, y)|$$

は D 上の調和関数となることを示せ。

(3) 設問 (2) で得られた調和関数 $u(x, y)$ に対し，設問 (1) による正則関数をつくるとき，$h(z)$ はどのような関数になるか？f とその導関数 f' を用いて表示せよ。

複素平面	complex plane
領域	domain
調和関数	harmonic function
複素数値関数	complex-valued function
正則関数	holomorhic function
零点	zero
導関数	derivative

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 8

(a,b) を $\mathbb{R}$ における有限または無限区間とし，(a,b) 上の実数値自乗可積分関数 f に対しそのノルム $\|f\|_{L^2(a,b)}$ を以下のように定義する。

$$\|f\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

(1) f, g をともに (a,b) 上の実数値自乗可積分関数とする。任意の実数 t に対して

$$\int_a^b (tf(y) + g(y))^2 dy \geq 0$$

であることを用いて，Schwarz の不等式

$$\left|\int_a^b f(y)g(y)dy\right| \leq \|f\|_{L^2(a,b)}\|g\|_{L^2(a,b)}$$

を示せ。

(2) f はその導関数 f' とともに $\mathbb{R}$ 上の実数値自乗可積分関数とする。このとき，次の問に答えよ。

(i) 不等式

$$|f(x) - f(y)| \leq \|f'\|_{L^2(\mathbb{R})}|x-y|^{\frac{1}{2}}$$

がすべての $x, y \in \mathbb{R}$ で成り立つことを示せ。

(ii) 任意の $R > 0$ に対して，不等式

$$|f(x)| \leq \frac{2}{3}R^{\frac{1}{2}}\|f'\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{\sqrt{2}}R^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

がすべての $x \in \mathbb{R}$ で成り立つことを示せ。

(iii) $|f|$ の最大値 $\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ に対して

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2^{\frac{5}{4}}3^{-\frac{1}{2}}\|f'\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}\|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\mathbb{R})}$$

が成り立つことを示せ。

実数値自乗可積分関数	real valued square summable function
不等式	inequality
導関数	derivative
最大値	maximum

2017年9月・2018年4月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：確率・統計

問題番号 9

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は互いに独立な確率変数列で各々平均 μ $(-\infty < \mu < \infty)$, 分散 σ^2 $(0 < \sigma^2 < \infty)$ を持つ正規分布に従うとする。このとき次の問に答えよ。

(1) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とするとき $E[\bar{X}^2]$ を求めよ。

(2) $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$ とするとき $(\bar{X}, \hat{\sigma}^2)$ は (μ, σ^2) に対する完備十分統計量であることを示せ。

(3) μ^2 の一様最小分散不偏推定量を求めよ。

互いに独立	mutually independent
確率変数	random variable
完備十分統計量	complete sufficient statistic
一様最小分散不偏推定量	uniformly minimum variance unbiased estimator

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：応用数学

問題番号 10

方程式 $f(x) = x^2 - 2 = 0$ に対するニュートン法

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

が全ての初期値 $x_0 \neq 0$ に対して解に収束することを示したい。次の問に答えよ。ただし，丸め誤差, オーバーフロー, アンダーフロー等の数値誤差は考えないものとする。

(1) $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ とおく。 $x \geq 1$ のとき $g(x) \geq 1$ を示せ。

(2) $x_0 \geq 1$ に対してニュートン法が解に収束することを示せ。

(3) $x_0 \neq 0$ に対してニュートン法が解に収束することを示せ。

ニュートン法	Newton's method
初期値	initial value
収束する	converge
丸め誤差	rounding error
オーバーフロー	overflow
アンダーフロー	underflow

２０１７年９月・２０１８年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科 目 名：情報数学

問題番号 11

マルコフ情報源 S から N 個のシンボル $\{s_i\}$ $(i = 1, \cdots, N)$ のどれかが順次出力され，観測されるとする。観測されるシンボルの平均生起個数は平均分岐数 (パープレキシティー) と呼ばれる。以下の (1) ～ (5) のように，シンボル生起確率 $P(s_i)$ $(i = 1, \cdots, N)$ もしくは直前のシンボル s_j の生起履歴を考慮した条件付生起確率 $P(s_i|s_j)$ $(i, j = 1, \cdots, N)$ が与えられたとき，それぞれの場合の情報源について平均分岐数 $PX(S)$ の値，もしくはその存在範囲を，計算式および理由と共に示せ。

(1) $N = 4,\ P(s_1) = \frac{1}{2},\ P(s_2) = \frac{1}{4},\ P(s_3) = P(s_4) = \frac{1}{8}$

(2) $N = 4,\ P(s_1) = \frac{1}{2},\ P(s_2) = \frac{1}{4},\ P(s_3) = P(s_4) = \frac{1}{8},$
$P(s_1|s_1) = \frac{1}{2}, P(s_2|s_1) = 0,\ P(s_3|s_1) = \frac{1}{4},\ P(s_4|s_1) = \frac{1}{4},$
$P(s_1|s_2) = 0,\ P(s_2|s_2) = \frac{1}{2},\ P(s_3|s_2) = \frac{1}{4},\ P(s_4|s_2) = \frac{1}{4},$
$P(s_1|s_3) = 1,\ P(s_2|s_3) = 0,\ P(s_3|s_3) = 0,\ P(s_4|s_3) = 0,$
$P(s_1|s_4) = 1,\ P(s_2|s_4) = 0,\ P(s_3|s_4) = 0,\ P(s_4|s_4) = 0$

(3) $N = 4,$
$P(s_1|s_1) = \frac{1}{2},\ P(s_2|s_1) = \frac{1}{4},\ P(s_3|s_1) = 0,\ P(s_4|s_1) = \frac{1}{4},$
$P(s_1|s_2) = \frac{1}{4},\ P(s_2|s_2) = \frac{1}{2},\ P(s_3|s_2) = \frac{1}{4},\ P(s_4|s_2) = 0,$
$P(s_1|s_3) = 0,\ P(s_2|s_3) = \frac{1}{4},\ P(s_3|s_3) = \frac{1}{2},\ P(s_4|s_3) = \frac{1}{4},$
$P(s_1|s_4) = \frac{1}{4},\ P(s_2|s_4) = 0,\ P(s_3|s_4) = \frac{1}{4},\ P(s_4|s_4) = \frac{1}{2}$

(4) $N = 4,\ P(s_1) = \frac{1}{2},\ P(s_2) = \frac{1}{4},\ P(s_3) = P(s_4) = \frac{1}{8},$
$P(s_1|s_1) = \frac{1}{2},\ P(s_2|s_1) = \frac{1}{2},\ P(s_3|s_1) = P(s_4|s_1) = 0$

(5) $N = 4,\ P(s_1) = \frac{1}{2}, P(s_2) = \frac{1}{4}$

マルコフ情報源	Markov information source
シンボル	symbol
順次出力され	successively output
観測される	observed
平均生起個数	average occurrence frequency
生起履歴	occurrence history
条件付生起確率	conditional occurrence probability
平均分岐数	perplexity
存在範囲	range