２０１９年９月・２０２０年４月入学試験

大学院基幹理工学研究科修士課程

数学応用数理専攻

問題表紙

◎問題用紙が１３ページあることを試験開始直後に確認しなさい。
◎解答用紙が４枚綴りが１組あることを試験開始直後に確認しなさい。

★問題１，問題２，問題３は必須問題である。
★問題３には問題 3A と 3B があります。必ず一方を選択し，解答しなさい。
★問題４から問題 12 は選択問題です。１問を選択し，解答しなさい。
★この問題用紙を持ち帰り，面接試験の際に持参しなさい。

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：微分積分

問題番号 1

$F(\xi)$ を $\xi \in (0, \infty)$ で定義された C^2 級の実数値関数とする。$x > 0$，$t > 0$ に対して

$$u(x,t) = F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

で $u(x,t)$ を定義する。このとき次の問に答えよ。

(1) $F(\xi)$ が $F''(\xi) = -\dfrac{1}{2}F'(\xi)\xi$ を満たすとき，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を示せ。

(2) $\lim\limits_{x\to 0} u(x,t) = 1$, $\lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = 0$ が成立するとする。このとき $\displaystyle\int_0^\infty e^{-s^2}\,ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いて，$F(\xi) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_\xi^\infty e^{-s^2}\,ds$ を示せ。

(3) $\displaystyle\int_0^\infty u(x,t)\,dx = \sqrt{\frac{t}{\pi}}$ を示せ。

C^2 級	C^2 class
実数値関数	real valued function

2019年9月・2020年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：線形代数

問題番号 2

ベクトル $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^4$ を $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ として，$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換 T を

$$T(\vec{x}) = \vec{x} - \frac{2\Delta_1(\vec{x})}{\Delta}\vec{a}_1 - \frac{2\Delta_2(\vec{x})}{\Delta}\vec{a}_2$$

とおく。ただし，$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ を $\mathbb{R}^4$ の標準内積とするとき，

$$\Delta_1(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle \\ \langle \vec{x}, \vec{a}_2 \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{x}, \vec{a}_1 \rangle \\ \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle & \langle \vec{x}, \vec{a}_2 \rangle \end{vmatrix}$$

として，さらに，$\Delta = \Delta_1(\vec{a}_1)$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $T(\vec{a}_1)$, $T(\vec{a}_2)$ を求めよ。また，ベクトル $\vec{x}$ が $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ の両方と直交するとき，$T(\vec{x})$ を求めよ。

(2) すべてのベクトル $\vec{x} \in \mathbb{R}^4$ に対して，$T(T(\vec{x})) = \vec{x}$ であることを示せ。

(3) $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ が $\mathbb{R}^4$ のすべてのベクトル $\vec{x}$ に対して成立するように 4 次正方行列 A を求めよ。

(4) (3) で得られた行列 A を適当な直交行列 P による相似変換 $A \mapsto P^{-1}AP$ によって対角行列に変換する。このときの直交行列 P と対角行列を求めよ。

$\mathbb{R}^4$ 上の線形変換	linear transformation on $\mathbb{R}^4$
4 次正方行列	4×4 matrix
直交行列	orthogonal matrix
相似変換	similarity transformation
対角行列に変換する	transform to a diagonal matrix

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題３には３Ａと３Ｂがある。必ず一方を選び解答すること。

問題番号 ３Ａ

距離空間 (X,d) において，A は X の空でない部分集合とする。このとき，次の問に答えよ。

(1) A がコンパクトであることの定義を述べよ。

(2) A がコンパクトならば，A が有界集合であることを示せ。

(3) A がコンパクトならば，A の補集合 $A^C = \{x \in X \mid x \notin A\}$ が開集合であることを示せ。

距離空間	metric space
部分集合	subset
コンパクト	compact
定義	definition
有界集合	bounded set
補集合	complement
開集合	open set

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：基礎数理

問題番号 3

問題３には３Ａと３Ｂがある。必ず一方を選び解答すること。

問題番号 ３Ｂ

n を正整数，d を非負整数とし，$s_{n,d}$ を n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ に関する次数が d の単項式の総数とする。たとえば，2 変数の 3 次の単項式は

$$x_1^3,\ x_1^2x_2,\ x_1x_2^2,\ x_2^3$$

で全てであるから $s_{2,3} = 4$ である。また，$s_{n,0} = 1$ とする。次の問に答えよ。

(1) $s_{n,d} = \binom{n+d-1}{d}$ を証明せよ。ただし，$\binom{m}{r}$ は二項係数（m 個のなかから r 個を選ぶ組み合わせの数）である。

(2) $|t| < 1$ に対して

$$\frac{1}{(1-t)^n} = \sum_{d=0}^{\infty} s_{n,d}\, t^d$$

が成り立つことを示せ。

正整数／非負整数	positive/non-negative integer
次数	degree
単項式	monomial
総数	total number
二項係数	binomial coefficient

2019年9月・2020年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科 目 名：代数

問題番号 4

Aを体K上の2変数多項式環$A = K[x, y]$とし，$f, g \in A$を定数でない多項式とする。

(1) A-加群の準同型写像$G : A \oplus A \to A$，$H : A \to A \oplus A$を

$$G(a, b) = af + bg, \qquad H(c) = (cg, -cf)$$

で定義する。このとき，

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{H} A \oplus A \xrightarrow{G} A \longrightarrow A/(f, g) \longrightarrow 0$$

が完全列になることと，f, gが互いに素であることが同値であることを示せ。

(2) f, gが互いに素であり，さらに，f, gはともに斉次式であると仮定しよう。このとき，$A/(f, g)$は有限次元のK-ベクトル空間になることを示し，また，その次元を求めよ。

体	field
多項式（環）	polynomial (ring)
加群	module
準同型写像	homomorphism
完全列	exact sequence
互いに素	coprime
斉次式	homogeneous polynomial
有限次元	finite dimensional
ベクトル空間	vector space
次元	dimension

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：代数

問題番号 5

有理数の全体からなる加法群 $\mathbb{Q}$ について，次の問に答えよ。

(1) $\mathbb{Q}$ の任意の有限生成部分群 H は巡回群であることを示せ。

(2) $\mathbb{Q}$ の真部分群 H で有限個の元で生成されないものの例を挙げよ。

(3) $\mathbb{Q}$ の指数有限な真部分群は存在しないことを示せ。

有理数	rational number
加法群	additive group
有限生成	finitely generated
部分群	subgroup
巡回群	cyclic group
真部分群	proper subgroup
指数有限	finite index

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 6

線形空間 X および X 上のノルム $\|\cdot\|$ を

$$X = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots) \;\middle|\; x_n \in \mathbb{R}\,(n \in \mathbb{N}),\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n| < \infty \right\},$$

$$\|\vec{x}\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}|x_n| \quad (\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots))$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) $(X, \|\cdot\|)$ は完備であることを示せ。

(2) 実数列 $a_1,\ a_2, \ldots$ および $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in X$ に対して

$$f(\vec{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

とおく。$f(\vec{x})$ が X 上の有界線形汎関数を与えるための $a_1, a_2, \ldots$ に対する条件を求めよ。

(3) 集合 $A \subset X$ を

$$A = \left\{ \vec{x} \in X \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq 1 \right\}$$

で定義する。A は $(X, \|\cdot\|)$ における有界集合か否か，またコンパクト集合か否か判定せよ。理由も述べよ。

線形空間	linear space
有界集合	bounded set
ノルム	norm
コンパクト集合	compact set
完備	complete
有界線形汎関数	bounded linear functional

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：解析

問題番号 7

λ を正のパラメーターとして，次の問に答えよ。

(1) k を実定数とするとき，初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - \lambda y = kx, \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, \quad \dfrac{dy}{dx}(0) = 1 \end{cases}$$

の解 y を求めよ。

(2) 境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ u(0) = 0, \quad \dfrac{du}{dx}(\pi) = 0 \end{cases}$$

を考える。この境界値問題の非自明な解が存在するような λ の値とそのときの解 u を求めよ。

(3) 定数 θ は $0 < \theta < \pi$ を満たすとする。このとき，境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d^2v}{dx^2} - \lambda v = 0, \quad 0 < x < \theta, \\ \dfrac{d^2v}{dx^2} + \lambda v = 0, \quad \theta < x < \pi, \\ v(0) = 0, \quad \dfrac{dv}{dx}(\pi) = 0 \end{cases}$$

を考える。これを満たす非自明な関数 $v \in C^1([0,\pi]) \cap C^2([0,\theta)) \cap C^2((\theta,\pi])$ が存在するような λ の値が

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$$

と可算無限個存在することを示せ。また，$\lambda = \lambda_n$ のときの関数 v を λ_n を用いて表せ。

正のパラメーター	positive parameter
実定数	real constant
初期値問題	initial value problem
境界値問題	boundary value problem
非自明な解	non-trivial solution
非自明な関数	non-trivial function
可算無限個	countably infinite

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題

大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：幾何

問題番号 8

X と Y を弧状連結なハウスドルフ空間とする。連続写像 $f : Y \to X$ は局所同相写像とする。つまり Y の任意の点 q に対し, q の開近傍 W と $f(q)$ の開近傍 V が存在して, f の W への制限は W から V の上への同相写像になるとする。閉区間 $I = [0, 1]$ からの連続写像 $\alpha : I \to X$ と $\beta : I \to Y$ を, それぞれ X と Y の曲線という。$\alpha = f \circ \beta$ を満たすとき, β を α の f による持ち上げという。次の問に答えよ。

(1) β_1, β_2 が共に α の f による持ち上げで, $\beta_1(0) = \beta_2(0)$ を満たすならば, 任意の $t \in I$ に対し $\beta_1(t) = \beta_2(t)$ となることを示せ。

(2) X の任意の曲線 α と $f^{-1}(\alpha(0))$ の任意の元 q に対し, α の f による持ち上げ β が存在して $q = \beta(0)$ を満たすと仮定する。このとき X のある点 p_0 での f による逆像 $f^{-1}(p_0)$ の元の個数が n ならば, X の任意の点 p での f による逆像 $f^{-1}(p)$ の元の個数も n であることを示せ。

弧状連結	arcwise connected
ハウスドルフ空間	Hausdorff space
局所同相写像	local homeomorphism
閉区間	closed interval
連続写像	continuous map
開近傍	open neighborhood
曲線	curve
持ち上げ	lift
逆像	inverse image

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：幾何

問題番号 9

n 次元球面 $S^n = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$ を考える。S^n の x における接ベクトル空間を $T_x S^n$ と書く。次の問に答えよ。

(1) 写像

$$F : S^1 \times S^1 \to S^2, \quad ((s,t),(a,b)) \mapsto (as, at, b)$$

が「微分写像 $DF_{((s,t),(a,b))} : T_{((s,t),(a,b))} S^1 \times S^1 \to T_{(as,at,b)} S^2$ の階数が 2」を満たす点 $((s,t),(a,b))$ の全体を求めよ。

(2) (1) で定義された写像 F を考える。各点 $x = (x_0, x_1, x_2) \in S^2$ に対して，集合 $F^{-1}(x)$ の元の個数を求めよ。

(3) 写像

$$G : S^1 \times S^2 \to S^3, \quad ((s,t),(a,b,c)) \mapsto (as, at, b, c)$$

が「微分写像 $DG_{((s,t),(a,b,c))} : T_{((s,t),(a,b,c))} S^1 \times S^2 \to T_{(as,at,b,c)} S^3$ の階数が 3」を満たす点 $((s,t),(a,b,c))$ の全体を求めよ。

n 次元球面	n-dimensional sphere
接ベクトル空間	tangent vector space
階数	rank
微分写像	derivative/differential

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：関数論

問題番号 10

$f(z)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で，1 位の極 ki $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ を除いて正則であり，そこでの留数は

$$\mathrm{Res}(f(z); ki) = \frac{1}{k^2}$$

を満たすものとする。次の問に答えよ。

(1) $g(z) = f(i - 2z)$ とおくとき，$g(z)$ のすべての極と，そこにおける留数を求めよ。

(2)

$$\mathrm{Res}(f(z)^2; ki) = \frac{2}{k^2} \lim_{z \to ki} \frac{d}{dz} \left((z - ki) f(z)\right)$$

を示せ。

(3) $\mathrm{Res}(f(z)g(z); -i)$ を求めよ。

(4) 線積分

$$\int_{|z| = \sqrt{2}} g(z)\, dz$$

を求めよ。ただし積分路は正の向きにとるものとする。

正則関数	holomorpic function
留数	residue
有理型関数	meromorphic function
極	pole
線積分	contour integral
正の向き	positive direction

2019年9月・2020年4月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：確率・統計

問題番号 11

X, X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ は実数値確率変数で，任意の有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

を満たすとする。ただし，$\mathbb{E}$ は期待値を表す。このとき，次の問に答えよ。

(1) $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ のとき $\sup_{K>0} \mathbb{E}[|X| \wedge K] < \infty$ を示せ。ただし，$A \wedge B$ は，A と B のうち小さいほうを表すものとする。

(2) $\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ のとき，$\mathbb{E}[|X|] < \infty$ であることを示せ。

(3) 各 n に対して $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ のとき，$\mathbb{E}[|X|] < \infty$ は正しいか。正しければ証明し，誤りであれば反例をあげて説明せよ。

実数値確率変数	real-valued random variable
有界連続関数	continuous and bounded function
期待値	expectation
実数	real number
反例	counter example

２０１９年９月・２０２０年４月入学試験問題
大学院基幹理工学研究科修士課程数学応用数理専攻

科　目　名：　応用数学

問題番号 12

2次元ポテンシャル流において，複素速度ポテンシャルが

$$f(\zeta) = \zeta e^{-i\alpha} + \frac{1}{\zeta} e^{i\alpha} - i\kappa \log \zeta \qquad (*)$$

で与えられる速さ1の一様流が半径1の円柱 ($|\zeta| \leq 1$) を過ぎる流れを考える。ただし，$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，$\kappa$ は実定数，ζ は複素数であり $\log \zeta = \log |\zeta| + i \arg \zeta$, $-\pi < \arg \zeta \leq \pi$ であるとする。$|\zeta| \geq 1$ となる ζ に対して複素数 z を定める変換

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \qquad (\star)$$

を $(*)$ に適用すると，速さ1の一様流が長さ4の平板に斜めにあたる流れの複素速度ポテンシャルが得られる。このとき次の問に答えよ。

(1) $|\zeta| = R$ が変換 $(\star)$ によって z 平面に写されるとき，z 平面上で描く図形を求めよ。ただし，R は実定数で $R \geq 1$ とする。

(2) $\kappa = 0$ のとき，平板を過ぎる流れのよどみ点をすべて求めよ。なお，平板を過ぎる流れのよどみ点とは $\dfrac{df}{dz} = 0$ となる z 平面上の点である。

(3) $\displaystyle\lim_{z \to 2} \frac{df}{dz}$ が存在するための κ の条件を求めよ。

(4) κ が (3) で求めた条件を満たすとき，平板を過ぎる流れのよどみ点をすべて求めよ。

2次元ポテンシャル流	2-dimensional potential flow
複素速度ポテンシャル	complex velocity potential
速さ	velocity
一様流	uniform flow
半径	radius
円柱	cylinder
流れ	flow
実定数	real constant
複素数	complex number
変換	transformation
平板	flat plate
平面	plane
よどみ点	stagnation point
条件	condition