平成 29 年度 10 月期入学 / 平成 30 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
（専門科目）

平成 29 年 8 月 7 日 9:00〜12:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 29 枚ある.
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない.
3. 試験開始後，枚数を確認し，落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること.
4. 問題は下記 14 題であり，日本語と英語の両方で出題されている. このうちいずれか**4 題を選択し，解答し**なさい.

5. 特に指定のない限り，日本語または英語で解答すること.
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること.

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version;
the English translation below is provided for reference only

October 2017 Admissions / April 2018 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

August 7, 2017
9:00 - 12:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 29 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the exam has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 14 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 4 questions.**

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問 生命情報学に関する以下の語句から8つを選んで、それぞれ4行以上10行以内で説明せよ。図を用いても良い。

(1) 連鎖解析
(2) 染色体の交叉
(3) 非コードRNA
(4) 偽遺伝子
(5) 次世代シーケンシング
(6) TMHMM
(7) メタゲノミクス
(8) ファンデルワールス力
(9) 量的形質遺伝子座
(10) 非翻訳領域

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. Choose and explain 8 terms from the following 10 terms related to bioinformatics, where 4-10 lines must be used for each explanation. Figure(s) can be used if necessary.

(1) Linkage analysis
(2) Chromosomal crossover
(3) Non-coding RNA
(4) Pseudogene
(5) Next-generation sequencing
(6) TMHMM
(7) Metagenomics
(8) Van der Waals force
(9) Quantitative trait locus (QTL)
(10) Untranslated region (UTR)

生命情報学では配列中における連続した固定長の文字列の出現回数に基づく特徴ベクトルがよく利用される．ここでは簡単のため，文字集合 {A,C} からなる文字列のみを考える．文字列 s に対し，$f_{\mathrm{AA}}(s), f_{\mathrm{CC}}(s), f_{\mathrm{AC}}(s), f_{\mathrm{CA}}(s)$ をそれぞれ連続した2文字，AA, CC, AC, CA の出現回数とし，特徴ベクトル $f(s)$ を

$$f(s) = (f_{\mathrm{AA}}(s), f_{\mathrm{CC}}(s), f_{\mathrm{AC}}(s), f_{\mathrm{CA}}(s))$$

と定義する．例えば,

$$f(\mathrm{ACAAAC}) = (2,0,2,1), \quad f(\mathrm{ACCACCCAA}) = (1,3,2,2)$$

となる．一方，特徴ベクトル $\mathbf{v}$ が与えられた時，$g(\mathbf{v})$ を

$$g(\mathbf{v}) = \{s | \, f(s) = \mathbf{v}\}$$

と定義する．また，集合 S の要素数を $|S|$ で表す．例えば,

$$g((0,0,1,1)) = \{\mathrm{ACA}, \mathrm{CAC}\}, \qquad g((2,2,1,0)) = \{\mathrm{AAACCC}\},$$
$$|g((0,0,1,1))| = 2, \qquad |g((2,2,1,0))| = 1$$

となる．以下の設問に答えよ．

設問 1　$f(\mathrm{AACCAACC})$，および，$f(\mathrm{CCCACAAAA})$ を求めよ．

設問 2　$g((1,0,2,1))$，および，$g((1,1,1,1))$ を求めよ．

設問 3　$|g((0,20,1,2))|$，および，$|g((100,100,5,3))|$ を求めよ．

設問 4　$|g((1,1,n,n))|$ は n に関する簡単な多項式となる．その多項式を理由とともに示せ．ただし，n は正整数とする．

設問 5　$|g((m,n,h,h-1))|$ は組合せの個数を表す項 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を2回用いた簡単な式で表現できる．その式を理由とともに示せ．ただし，m,n,h は2以上の整数とし，x, y は必ずしも同一のものが用いられるわけではないものとする．

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

In bioinformatics, feature vectors, each of which consists of the number of occurrences of each fixed length substring in a given biological sequence, have been widely used. Here, for simplicity, we only consider strings over $\{A, C\}$. For a given string s, let $f_{AA}(s)$, $f_{CC}(s)$, $f_{AC}(s)$, and $f_{CA}(s)$ denote the numbers of occurrences of AA, CC, AC, and CA, respectively, and define a feature vector $f(s)$ by

$$f(s) = (f_{AA}(s), f_{CC}(s), f_{AC}(s), f_{CA}(s)).$$

For example,

$$f(\mathrm{ACAAAC}) = (2, 0, 2, 1) \quad \text{and} \quad f(\mathrm{ACCACCCAA}) = (1, 3, 2, 2)$$

hold. On the other hand, for a given feature vector v, define $g(\mathrm{v})$ by

$$g(\mathrm{v}) = \{s \mid f(s) = \mathrm{v}\}.$$

For a set S, let $|S|$ denote the number of elements in S. Then, for example,

$$g((0,0,1,1)) = \{\mathrm{ACA}, \mathrm{CAC}\}, \qquad g((2,2,1,0)) = \{\mathrm{AAACCC}\},$$
$$|g((0,0,1,1))| = 2, \qquad \text{and} \qquad |g((2,2,1,0))| = 1$$

hold. Answer the following questions.

Q.1 Compute $f(\mathrm{AACCAACC})$ and $f(\mathrm{CCCACAAAA})$.

Q.2 Give $g((1, 0, 2, 1))$ and $g((1, 1, 1, 1))$.

Q.3 Compute $|g((0, 20, 1, 2))|$ and $|g((100, 100, 5, 3))|$.

Q.4 Let n be a positive integer. Then, $|g((1, 1, n, n))|$ can be represented as a polynomial in n. Give this polynomial, and explain its derivation.

Q.5 Let m, n, and h be integers not less than 2. Then, $|g((m, n, h, h-1))|$ can be represented as a mathematical expression using $\binom{x}{y}$ twice, where $\binom{x}{y}$ denotes the number of combinations, and different x and y may be used in two such terms. Give this expression, and explain its derivation.

設問　以下の数理的な概念・方法は、脳神経系のモデリングや解析でしばしば用いられる。それぞれについて、脳神経系のモデリングや解析でどのように利用されているかを、具体的な一例を挙げて説明せよ。数式や図を用いてもよい。

（1）フィッシャー情報量

（2）等価回路

（3）畳み込み

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q. The following quantitative concepts or methods are often used in neural modeling and analysis. Describe how each of them is used in neural modeling and analysis by giving a concrete example. Mathematical expressions and/or figures can be used.

(1) Fisher information

(2) Equivalent circuit

(3) Convolution

Figure 1は、ある心理物理実験の1試行における刺激と反応の時間経過を示している。S1として視覚刺激を、S2として聴覚刺激を用いた。これらをS1とS2の間の時間間隔(SOA: Stimulus Onset Asynchrony)を4段階に変化させて提示した。実験参加者には、それぞれの刺激を知覚したら、できるだけ素早く反応することを求めた。R1はS1に対する反応で、右手の人差し指によるキー押し反応が、R2はS2に対する反応で、左手の人差し指によるキー押し反応が、それぞれ割り当てられていた。RT1, RT2は、それぞれS1, S2に対する反応時間である。Figure 2は、S2に対する反応時間(RT2)を、SOAの関数として示したものである。

設問1　心理物理実験の従属変数としてよく用いられる反応時間について、その分布の一般的な性質について述べ、かつ、反応時間のサンプルから記述統計量を算出する際に考慮すべき点を述べよ。

設問2　この実験のように単純反応時間課題を用いた実験において、より早く反応するように強調する教示を与えると、そのような教示を与えなかった場合に比べて、エラー率や反応時間が影響を受ける。一般には、どのような影響を受けるかを、専門用語を用いて説明せよ。

設問3　この実験の結果はFigure 2のように、S1とS2の間のSOAの増加に伴ってRT2が短くなり、SOAが300ms以上になると一定となった。この結果の意味するところを説明せよ。その際、S1とS2は異なる感覚modalityに与えられている点、およびR1とR2は異なる手が用いられていることを考慮すること。また、SOAが短い時には、反応時間の減少の傾きが−1に近くなるという結果についても議論すること。

Non-Disclosure

Figure 1. Time sequence of the experiment.

Figure 2. A typical result of the experiment.

Figures 1 and 2. Modified from Pashler (1994). Dual-task interference in simple tasks: data and theory. *Psychological bulletin, 116*, 220–224.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Figure 1 shows the time sequences of stimuli and responses of a trial used in a psychophysical experiment. S1 and S2 indicate a visual stimulus and an auditory stimulus, respectively. The interval between S1 and S2 (SOA: stimulus onset asynchrony) is varied in four levels. The task is to respond to each stimulus as soon as it is perceived. R1 denotes a response to S1 made by the participant's right index finger, and R2 denotes a response to S2 made by his/her left index finger. RT1 and RT2 are reaction times to S1 and S2, respectively. Figure 2 shows RT2 as a function of SOA.

Q.1 Describe the general properties of distribution of reaction time frequently used as a dependent variable in psychophysical experiments, and describe the major important points that you should consider when you calculate descriptive statistics value from a sample of reaction time data.

Q.2 In experiments using simple reaction time as a dependent variable, if speeded responses are emphasized by instruction, it is known that error rates or reaction times are affected. Describe how these are affected using some technical terms.

Q.3 As shown in Figure 2, RT2 decreases as SOA increases, and then becomes constant when the SOA is longer than 300 ms. Explain the result in considering that S1 and S2 are given in different sensory modalities, and that R1 and R2 are responded by different hands. In addition, discuss the result that the slope of decreasing RTs approaches to -1 in the shorter SOAs in your explanation.

Non-Disclosure

Figure 1. Time sequence of the experiment. Figure 2. A typical result of the experiment.

Figures 1 and 2. Modified from Pashler (1994). Dual-task interference in simple tasks: data and theory. *Psychological bulletin, 116*, 220–224.

Figure 1 は、AX-CPT と呼ばれる課題の刺激提示スケジュールを示している。実験参加者には、手がかりとして A または B の文字が提示される。ブランクに続いて、プローブとして X または Y の文字が提示される。実験参加者の課題は、A に続いて X が提示された場合（AX 試行）にのみ反応キーを押し、それ以外の組み合わせの試行（AY 試行、BX 試行、BY 試行）ではキーを押さないというものであった。それぞれ４種類の試行は１ブロック内では AX: AY: BX: BY = 7: 1: 1: 1 の比率で提示された。

Figure 2 は、AX-CPT 課題の AX 試行における若齢者群、および高齢者群の脳活動を MRI 装置を用いて計測し、外側前頭前野の BOLD 信号の変化率（縦軸）を算出したものである。横軸は１試行内の時系列を示している。

設問１　BOLD 信号について説明せよ。

設問２　Figure 2 の結果を、この課題の遂行に関わる脳機能の加齢に伴う変化の観点から説明せよ。

Non-Disclosure

Figure 1. Time schedule of the AX-CPT experiment.

Figure 2. Brain activation to the AX-CPT task of young and older adults.

Figures 1 and 2. Modified from Paxton et al., (2008). Cognitive Control, Goal Maintenance, and Prefrontal Function in Healthy Aging. *Cerebral Cortex*, *18*, 1010–1028.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Figure 1 shows a schedule of stimulus presentation in an experimental task referred to as AX-CPT. A letter (A or B) was presented as a cue to participants. After a blank display, a letter (X or Y) was presented as a probe. A participant's task was to press a key if A was followed by X (AX trials), and not to press a key if the other cue-probe combinations were presented (i.e., AY, BX, and BY trials). The ratio of these four types of trials in an experimental block was as follows: AX: AY: BX: BY = 7: 1: 1: 1.

Figure 2 shows the percent change of BOLD signals of the AX trial (shown in the vertical axis) in the prefrontal regions measured by the MRI scanner, when young adults and older adults performed the AX-CPT task. The horizontal-axis shows the time schedule of the trial.

Q.1 Describe what the BOLD signal is.

Q.2 Explain the result in Figure 2 with respect to age difference in brain functions when performing the task.

Non-Disclosure

Figure 1. Time schedule of the AX-CPT experiment.

Figure 2. Brain activation to the AX-CPT task of young and older adults.

Figures 1 and 2. Modified from Paxton et al. (2008). Cognitive Control, Goal Maintenance, and Prefrontal Function in Healthy Aging. *Cerebral Cortex*, *18*, 1010–1028.

アトキンソンとシフリン(1968)の記憶モデルについて，以下の設問に答えよ．

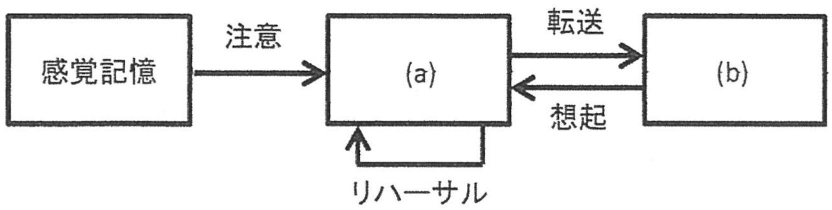


図１　アトキンソンとシフリン(1968)の記憶モデル

設問１　図１の(a)および(b)の機能の名称を述べよ．

設問２　感覚記憶の名称を，視覚入力と聴覚入力について，それぞれ述べよ．また，心理実験において，感覚記憶の影響を排除するためには，どのようにすればよいか述べよ．

設問３　図１の注意の役割を述べよ．

設問４　図１のリハーサルの役割について述べよ．また，聴覚提示された単語の記憶におけるリハーサルの効果を検証するための実験デザインを述べよ．

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Answer the following questions regarding the memory model proposed by Atkinson and Shiffrin (1968).

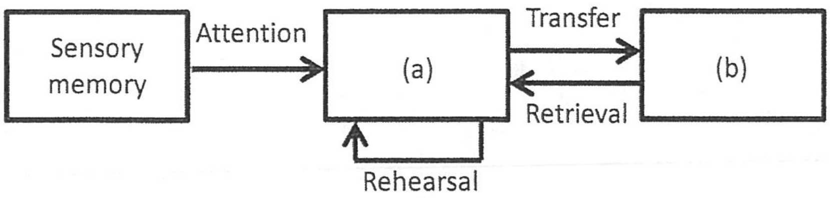


Fig. 1 The memory model proposed by Atkinson and Shiffrin (1968).

Q.1 What are the names of the functions shown in the boxes (a) and (b) in Fig. 1?

Q.2 Provide the names of memory types for visual and auditory inputs, respectively. How can these effects of the sensory memory be avoided in psychological experiments?

Q.3 What is the role of the attention in Fig. 1?

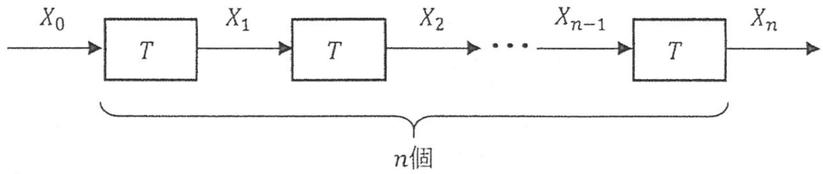
Q.4 What is the role of the rehearsal in Fig. 1? In addition, design an experiment to test the effect of the rehearsal on memorizing spoken words.

入力アルファベットと出力アルファベットがともに$\{1,2\}$である 2 元通信路があり、その通信路行列Tは以下で与えられているとする。

$$T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

ここで、Tの(i,j)-要素はこの通信路に入力信号i $(i \in \{1,2\})$を入力したときに出力信号j $(j \in \{1,2\})$が出力される確率を表す。

下図のように、この 2 元通信路をn個連結した通信路を考える。入力信号をX_0とし、その確率が$P(X_0 = 1) = 0.6$、$P(X_0 = 2) = 0.4$と与えられているとする。また、k番目の通信路を通過した直後での信号をX_kとする。



設問 1 $X_1 = 2$であるとわかったときの、$X_0 \neq X_2$である確率を求めよ。

設問 2 $X_0 \neq X_i$となる$i \in \{1,2,\ldots,n\}$が存在するとき、$X_0 = 1$と$X_0 = 2$のいずれがより確からしいかを述べよ。

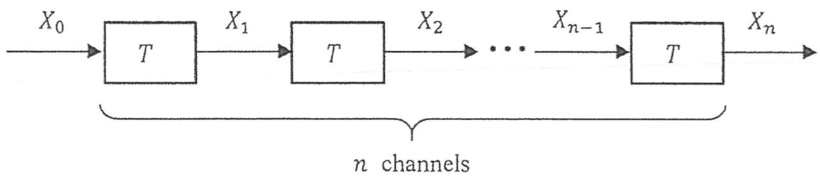
設問 3 X_nのエントロピーを$H(X_n)$としたとき、$\lim_{n\to\infty} H(X_n)$を求めよ。

設問 4 X_0とX_nの相互情報量を$I(X_0;X_n)$としたとき、$\lim_{n\to\infty} I(X_0;X_n)$を求めよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Assume we have a binary asymmetric channel, both of whose input alphabet and output alphabet are $\{1,2\}$; its channel matrix is given as $T = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$, whose (i, j)-element indicates the probability that the output signal is j ($j \in \{1,2\}$) when the input signal is i ($i \in \{1,2\}$).

We construct a connected channel consisting of n identical channels as shown in the figure below. The probability of the input signal X_0 is given by $P(X_0 = 1) = 0.6$ and $P(X_0 = 2) = 0.4$. Let X_k be the signal right after it passes the k-th channel.



Q.1 Give the probability of $X_0 \neq X_2$ when $X_1 = 2$.

Q.2 If there exists $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ such that $X_0 \neq X_i$, which of $X_0 = 1$ and $X_0 = 2$ is more probable?

Q.3 Let $H(X_n)$ be the entropy of X_n. Give $\lim_{n\to\infty} H(X_n)$.

Q.4 Let $I(X_0; X_n)$ be the mutual information of X_0 and X_n. Give $\lim_{n\to\infty} I(X_0; X_n)$.

設問 1　長さ N の離散時間信号 $x[n]$ $(0 \leq n < N)$ に対する離散時間フーリエ変換を $X[k]$ $(0 \leq k < N)$ で表す．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，j を虚数単位とする．

(1) $X[k]$ の計算式を書け．

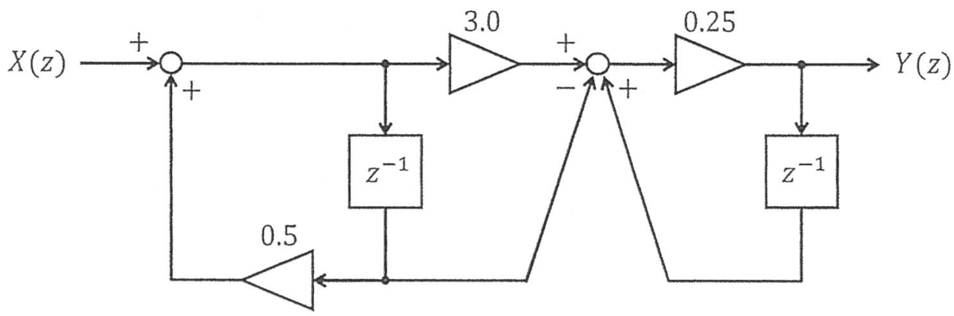
(2) $x[n] = 1$ $(0 \leq n < N)$ のとき，$X[k]$ $(0 \leq k < N)$ を求めよ．

(3) $x[0] = 1, x[n] = 0$ $(1 \leq n < N)$ のとき，$X[k]$ $(0 \leq k < N)$ を求めよ．

(4) $x[n] = \exp\left(\frac{j4\pi n}{N}\right)$ $(0 \leq n < N)$ のとき，$X[k]$ $(0 \leq k < N)$ を求めよ．

(5) $x[n] = \sin\left(\frac{4\pi n}{N}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{8\pi n}{N}\right)$ $(0 \leq n < N)$ のとき，$X[k]$ $(0 \leq k < N)$ を求めよ．

設問 2　以下のブロック線図で表される離散時間システムについて考える．



ただし，$X(z)$ および $Y(z)$ はそれぞれシステムの入力および出力である．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) このシステムは線形時不変システムであるか説明せよ．

(2) このシステムの伝達関数 $H(z)$ を求めよ．

(3) このシステムの零点と極を求めよ．

(4) このシステムの安定性について説明せよ．

(5) このシステムのインパルス応答 $h[n]$ を求めよ．ただし，n は非負整数とする．

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Let $X[k]$ $(0 \le k < N)$ be the discrete-time Fourier transform of a discrete-time signal $x[n]$ $(0 \le n < N)$ of length N. Answer the following questions. Use j to indicate the imaginary unit.

(1) Show the formula to compute $X[k]$.

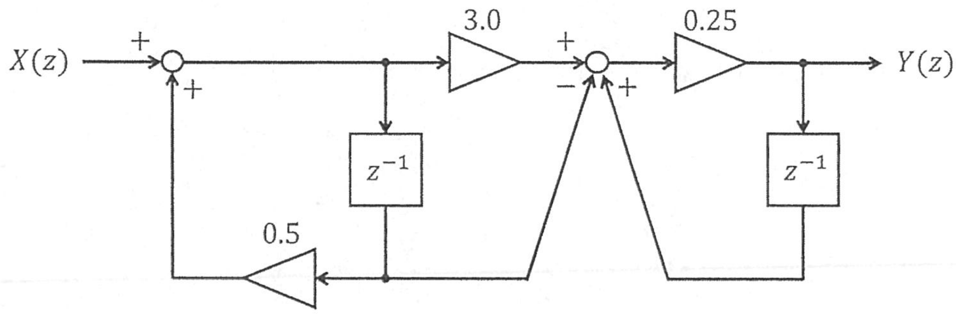
(2) When $x[n] = 1$ $(0 \le n < N)$, compute $X[k]$ $(0 \le k < N)$.

(3) When $x[0] = 1, x[n] = 0$ $(1 \le n < N)$, compute $X[k]$ $(0 \le k < N)$.

(4) When $x[n] = \exp\left(\frac{j4\pi n}{N}\right)$ $(0 \le n < N)$, compute $X[k]$ $(0 \le k < N)$.

(5) When $x[n] = \sin\left(\frac{4\pi n}{N}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{8\pi n}{N}\right)$ $(0 \le n < N)$, compute $X[k]$ $(0 \le k < N)$.

Q.2 Suppose that we have a discrete-time system shown below.



$X(z)$ and $Y(z)$ are the input and the output of the system, respectively. Answer the following questions.

(1) Explain whether this system is a linear time-invariant system.

(2) Derive the transfer function $H(z)$ of the system.

(3) Show the zero(s) and the pole(s) of the system.

(4) Explain the stability of the system.

(5) Compute the impulse response $h[n]$ of the system, where n is a nonnegative integer.

d次元のパターンベクトル $X = [x_1, \dots, x_d]^{\mathrm{T}}$を、クラス１またはクラス２に分類する問題を考える。

設問1　クラス１、クラス２の平均を各々M_1, M_2とするとき、未知のパターンXについて、M_1あるいはM_2との二乗距離に基づいて分類する方法を考える。この場合の識別決定境界を表す式を導出し、それが線形になることを示せ。

設問2　クラス１、クラス２が各々$N(M_1, \Sigma), N(M_2, \Sigma)$の$d$次元正規分布（ただし$\Sigma$は共分散行列）に従うと仮定し、未知のパターン$X$について、正規分布の尤度（確率密度関数の値）に基づいて分類する方法を考える。この場合の識別決定境界を表す式を導出し、それが線形になることを示せ。

設問3　設問１で得られた識別関数と設問２で得られた識別関数が等価になる条件を述べよ。

設問4　主成分分析を用いて、$Y = A^{\mathrm{T}}X$　（Aは$d \times d'$次元の行列（ただし$d' < d$））のように変換することを考える。行列Aを求める方法を述べよ。

設問5　Yの各要素についてシグモイド関数を適用した出力について、設問１あるいは設問２の方法を適用すると、全体の処理系は、Xを入力層、Yを中間層、クラス識別を出力層とするニューラルネットワークとみなすことができる。このように構成する方法と、同じ構造のニューラルネットワークを誤差逆伝播法により学習する方法を比較せよ。特に、いずれのクラスに属しているかわからない学習データが多数ある場合について論じよ。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

There are several approaches to classify a d-dimensional pattern vector $X = [x_1, \dots, x_d]^\mathrm{T}$ into class 1 or class 2.

Q.1 One approach is to classify unknown X based on the square distance between X and M_1 or M_2, where M_1 and M_2 are the means of class 1 and class 2, respectively. Derive a formula of the decision boundary and show it is a linear function.

Q.2 Another classification approach is based on the likelihood of a d-dimensional normal distribution (the value of the probability density function) when class 1 and class 2 follow normal distributions $N(M_1, \Sigma)$ and $N(M_2, \Sigma)$, where Σ is a covariance matrix. Derive a formula of the decision boundary and show it is a linear function.

Q.3 Describe under what condition the discriminant function of Q.1 is equivalent to the discriminant function of Q.2.

Q.4 We can apply a transform $Y = A^\mathrm{T}X$ (A is a matrix of $d \times d'$ dimension ($d' < d$)) using Principal Component Analysis. Describe a method to compute the matrix A.

Q.5 When we apply the sigmoid function to each component of Y and then apply the method of Q.1 or Q.2 to this output, the entire system can be regarded as a neural network which consists of the input layer of X, an intermediate layer of Y, and the output layer of class decision. Compare this method with the backpropagation training of the network of the same structure. Discuss in particular on the case when there are many samples whose classes are unknown.

設問　配列 a の l 番目から h 番目の要素を昇順に並べ変えるクイックソート手続き qsort(a,l,h) の擬似コードを以下に示す．swap(a,i,j) は配列 a の i 番目と j 番目の要素を交換する手続きである．

```
qsort(a, l, h) :
if l < h
  then
      b := l; p := a[l];
      for i := l + 1 to h step 1 do
         if (p > a[i]) then b := b + 1; swap(a, [A], [B]); fi od
      swap(a, l, b);
      qsort(a, l, b − 1);
      qsort(a, b + 1, h); fi
```

(1) $\boxed{\mathrm{A}}$, $\boxed{\mathrm{B}}$ にあてはまる式を与え，手続き qsort を完成させよ．

(2) 配列 $a = [3, 5, 1, 7, 9, 2, 5]$ に対して qsort$(a, 0, 6)$ を実行した時に，配列 a の要素がどのように変化するかを図示して説明せよ．

(3) 長さ 7 の配列 a に対して qsort$(a, 0, 6)$ を実行した時に，要素間の比較回数が最大になるように a の初期要素 $a[0], \ldots, a[6]$ を与えよ．一般に，長さが n の配列 a に対して qsort$(a, 0, n-1)$ を実行する時，要素間の最大比較回数は何回になるか答えよ．

(4) 代入文 "$b := l;$" の前に "swap$(a,$ rand$(l, h), l);$" を挿入するとしよう．ただし rand(x, y) はx 以上 y 以下のランダムな整数を表す．この修正にはどのようなメリットがあるか答えよ．

(5) マージソートが，どのようなアルゴリズムかを説明し，様々な観点からクイックソートと比較せよ．

Q. The following pseudocode is a procedure for quicksort $\mathsf{qsort}(a, l, h)$ to sort, given an array a, elements $a[l], a[l+1], \ldots, a[h]$ in the increasing order, where $\mathsf{swap}(a, i, j)$ is a procedure to swap the i-th and j-th elements of the array a.

$\mathsf{qsort}(a, l, h)$:
if $l < h$
  then
    $b := l;\ p := a[l];$
    for $i := l + 1$ to h step 1 do
      if $(p > a[i])$ then $b := b + 1;$ swap$(a, \boxed{\text{A}}, \boxed{\text{B}});$ fi od
    swap$(a, l, b);$
    qsort$(a, l, b - 1);$
    qsort$(a, b + 1, h);$ fi

(1) Give expressions for $\boxed{\text{A}}$ and $\boxed{\text{B}}$ to complete the procedure qsort.

(2) Suppose we have an array $a = [3, 5, 1, 7, 9, 2, 5]$. Explain with an illustration the changes of the elements in a when $\mathsf{qsort}(a, 0, 6)$ is run.

(3) Suppose we have an array a of length 7. Give initial values of $a[0], \ldots, a[6]$ so that $\mathsf{qsort}(a, 0, 6)$ performs the largest number of comparisons between array elements. When $\mathsf{qsort}(a, 0, n - 1)$ is run on an array a of length n, how many comparisons of array elements are performed in the worst case?

(4) Suppose we insert "$\mathsf{swap}(a, \mathsf{rand}(l, h), l);$ " before the assignment "$b := l;$ ", where $\mathsf{rand}(x, y)$ chooses randomly an integer i such that $x \leq i \leq y$. Explain a merit of this modification.

(5) Explain mergesort and compare it with quicksort from various viewpoints.

設問１　２進表現について，以下の問に答えよ．

(a) 次の数を８ビットの２の補数表現で表せ．

(i) +28　　(ii) −40

(b) 次の８ビットの２の補数表現の２進数を８ビット符号付き絶対値表現に変換せよ．

(i) 11000000　　(ii) 10111111

(c) 次の８ビットの２の補数表現の２進数体系での加算および減算の結果を示せ．

(i) 11000000+11000000　　(ii) 11000000+10111111

(iii) 11000000−10111111　　(iv) 10111111−11000000

(d) 8ビットの2の補数表現の2進数体系で 10111111 を2ビット算術右シフトした結果を示せ．

設問２　次の６ビットの２の補数表現の２進数に対する乗算において全ての部分積を明示することにより２次のブースのアルゴリズムを説明せよ．

被乗数：011101，乗数：010110

設問３　コンピュータ（命令セットアーキテクチャ）における以下のデータアドレシングモードについて説明せよ．

(a) 即値　　(b) レジスタ　　(c) ベース相対（ベース＋オフセット）

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Answer the following questions on the binary number system.

(a) Express the following numbers in the 8-bit two's complement representation.
(i) +28 (ii) −40

(b) Convert the following 8-bit two's complement binary numbers into the 8-bit sign-and-magnitude representation.
(i) 11000000 (ii) 10111111

(c) Show the results of the following additions and subtractions in the 8-bit two's complement binary number system.
(i) 11000000+11000000 (ii) 11000000+10111111
(iii) 11000000−10111111 (iv) 10111111−11000000

(d) Show the result of the 2-bit arithmetic right shift operation on 10111111 in the 8-bit two's complement binary number system.

Q.2 Explain radix-4 modified Booth's algorithm by showing all the partial products of the multiplication for the following pair of 6-bit two's complement binary numbers.

Multiplicand: 011101, Multiplier: 010110

Q.3 Explain the following data addressing modes in a computer (instruction set architecture).

(a) immediate (b) register (c) base-relative (base + offset)

下記のすべての設問に答えよ.

設問 1　下記の問に答えよ.

(1) 次の積分の結果を求めよ.

$$f(s) = \int_0^1 e^{-sx} dx, \quad s \geq 0$$

(2) 問 (1) の $f(s)$ について, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{s \to 0} \frac{df(s)}{ds}$$

(3) n を正整数とする. 問 (1) の $f(s)$ について, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{s \to 0} \frac{d^n f(s)}{ds^n}$$

設問 2　下記の問に答えよ. 関数 $\Gamma(x)$ は次式で定義される.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

(1) 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$$

(2) 整数 m に対し, 関数 $J_m(x)$ を次式で定義する.

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}$$

次の等式が成り立つことを示せ.

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2\frac{dJ_m(x)}{dx}$$

設問 3　下記の問に答えよ.

(1) 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & a & 3 & a & 2 \\ a & 1 & 2 & 2 & 3a \\ 3a & 2a & a & 2a & 5 \\ a & a & 3 & a & 2 \\ 4 & a & 1 & a & a \end{vmatrix}$$

(2) 行列 A は次式で与えられる. ただし, $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, $z = r\cos\theta$ である.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix}$$

行列式 $\det(A)$, $\det(A^{-1})$, $\det(A^2)$ をそれぞれ求めよ.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Answer all the following questions.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Evaluate the following integral.

$$f(s) = \int_0^1 e^{-sx}\,dx, \quad s \geq 0$$

(2) Find the following limit. Function $f(s)$ is defined in Question (1).

$$\lim_{s \to 0} \frac{df(s)}{ds}$$

(3) Let n be a positive integer. Find the following limit. Funtion $f(s)$ is defined in Question (1).

$$\lim_{s \to 0} \frac{d^n f(s)}{ds^n}$$

Q.2 Answer the following questions. Function $\Gamma(x)$ is defined as

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt, \quad x > 0.$$

(1) Show that

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x).$$

(2) Let m be an integer. Function $J_m(x)$ is defined as

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n}.$$

Show that

$$J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x) = 2\frac{dJ_m(x)}{dx}.$$

Q.3 Answer the following questions.

(1) Find the following determinant.

$$\begin{vmatrix} 2a^2 & a & 3 & a & 2 \\ a & 1 & 2 & 2 & 3a \\ 3a & 2a & a & 2a & 5 \\ a & a & 3 & a & 2 \\ 4 & a & 1 & a & a \end{vmatrix}$$

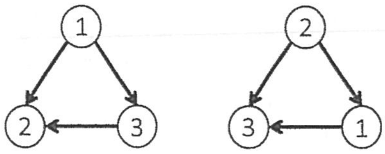
(2) Matrix A is given as

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix},$$

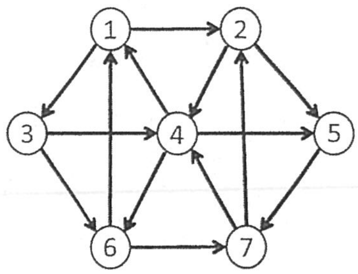
where $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$, and $z = r\cos\theta$. Find determinants $\det(A)$, $\det(A^{-1})$, and $\det(A^2)$.

$G=(V,A)$ を単純有向グラフとする。ここで V は頂点集合、A は枝集合である。2 頂点 u と v に対して、u から v へ向かう枝を (u,v) と表す。V の部分集合 S が G の帰還頂点集合（**feedback vertex set; FVS**）であるとは、G から S の頂点全てと、S の頂点に接続する全ての枝を取り除いて出来るグラフが、有向閉路を持たないことである。G の帰還頂点集合のうちサイズが最小のものを G の最小帰還頂点集合と言い、そのサイズを $\mathrm{minFVS}(G)$ と書く。単純有向グラフ $G=(V,A)$ において、V の任意の異なる 2 頂点 u, v に対して、(u,v) と (v,u) のうち丁度 1 つが A に入っているものをトーナメントと言う。

本問題では各頂点には 1 から $|V|$ の整数値がラベルとして重複なく付与されており、同型であってもラベルの対応しないグラフは異なるグラフと考える。例えば以下の 2 つのグラフは、同型であるが異なるグラフである。以下の設問に答えよ。



設問 1. 以下のグラフを G_1 とすると、$\mathrm{minFVS}(G_1)=2$ である。その理由を答えよ。



設問 2. n 頂点のトーナメントは幾つ存在するか？ 理由も答えよ。

設問 3. $\mathcal{T}$ を 5 頂点のトーナメント全体の集合とする。任意の $G\in\mathcal{T}$ には有向閉路を形成しない 3 頂点が存在することを示せ。

設問 4. $\mathcal{T}$ は設問 3 と同じものとする。

$$\max_{G\in\mathcal{T}}\{\mathrm{minFVS}(G)\}$$

の値を、理由と共に答えよ。（ヒント： 設問 3 を利用せよ）

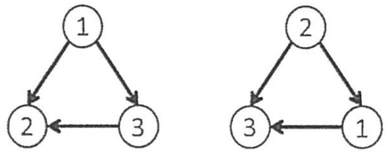
設問 5. $G=(V,A)$ をトーナメントとする。任意の $u\in V$ について $(u,v)\in A$ なる $v\in V$ が存在するならば、G に有向閉路が存在することを示せ。

設問 6. n 頂点のトーナメント G で、$\mathrm{minFVS}(G)=0$ のものは幾つ存在するか？ 理由も答えよ。（ヒント： 設問 5 を利用せよ）

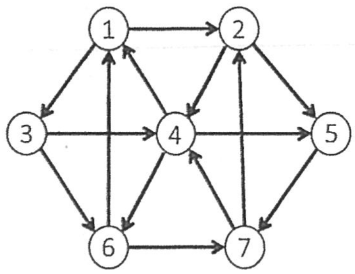
Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Let $G = (V, A)$ be a simple directed graph, where V is the set of vertices and A is the set of arcs. For vertices u and v, (u, v) denotes the arc going from u to v. A subset S of V is called a **feedback vertex set** or an **FVS** of G if the graph obtained from G by removing all the vertices in S and all the arcs having at least one endpoint in S has no directed cycle. An FVS of G of the minimum size is called a **minimum feedback vertex set** of G, and its size is denoted by minFVS(G). A simple directed graph $G = (V, A)$ is called a **tournament** if, for any pair of vertices u and v in V, exactly one of (u, v) and (v, u) is in A.

In this question, we assume that each vertex has a label from 1 to $|V|$ without duplication, and even if isomorphic, two graphs are regarded as different if their labels do not correspond to each other. For example, the following two graphs are different although they are isomorphic. Answer the following questions.



Q.1 Let G_1 be the following graph. Give a reason for minFVS(G_1) = 2.



Q.2 What is the number of tournaments with n vertices? Answer with a reason.

Q.3 Let $\mathcal{T}$ be the set of tournaments with five vertices. Show that for any $G \in \mathcal{T}$, there exist three vertices that do not constitute a directed cycle.

Q.4 Let $\mathcal{T}$ be the same as in Q.3. What is the value of

$$\max_{G \in \mathcal{T}} \{\text{minFVS}(G)\}?$$

Answer with a reason. (Hint: Use Q.3.)

Q.5 Let $G = (V, A)$ be a tournament. Show that G has a directed cycle if, for any $u \in V$, there exists a vertex $v \in V$ such that $(u, v) \in A$.

Q.6 What is the number of tournaments G with n vertices such that minFVS(G) = 0? Answer with a reason. (Hint: Use Q.5.)

ベルヌーイ試行において事象Eの起こる確率をpとする.

設問1　n 回のベルヌーイ試行を行った時, 事象Eの起こる回数を確率変数 X_nで表す. 確率 $P(X_n = k)$を求めよ. ただし、$k = 0,1,2,\cdots,n$ とする.

設問2　X_nの平均μと分散σ^2を求めよ.

設問3　$np = \lambda$ （λ は定数）とおく. このとき、$f(k) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$を求めよ.

設問4　$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$を示せ.

設問5　確率変数Xの確率分布$P(X = k) = f(k)$, $k = 0,1,2,\cdots$ を考える. Xの平均μと分散σ^2を求めよ.

設問6　Xの従う分布の名称を答えよ. また、その特徴を説明せよ.

設問7　100 ページの本を文字認識させたところ、100 個の認識誤りが起こった. この本からランダムに 1 ページを選んだとき, そのページに認識誤りが 3 個以上起こる確率を計算し, 結果を有効数字 2 桁で示せ. ただし, 認識誤りは本全体にわたってランダムに起こるとし, ネイピア数 e を 2.72 と近似する.

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Let p be the probability of an occurrence of event E in a Bernoulli trial.

Q.1 Suppose the Bernoulli trial is repeated n times. Let X_n be a random variable denoting the number of occurrences of event E. Derive the probability $P(X_n = k)$, where $k = 0,1,2,\cdots,n$.

Q.2 Derive the mean μ and the variance σ^2 of X_n.

Q.3 Let $np = \lambda$, where λ is constant. Derive $f(k) = \lim_{n\to\infty} P(X_n = k)$.

Q.4 Show $\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = 1$.

Q.5 Consider the probability distribution $P(X = k) = f(k)$, $k = 0,1,2,\cdots$ of a random variable X. Derive the mean μ and the variance σ^2 of X.

Q.6 What is the name of the distribution of X? Explain its features.

Q.7 Suppose 100 recognition errors occur when character recognition is performed for a book of 100 pages. When a page is randomly selected, calculate the probability that at least 3 recognition errors occur in the page. Show the result with two significant digits. Assume that the recognition errors randomly occur in the whole book. Approximate the Napier's constant e as 2.72.