Solutions TD1

1.1 ok

1.2 a) $f(u(x)) \geq f(u(y)) \overset{f \nearrow \text{ stricte}}{\iff} u(x) \geq u(y) \overset{\text{def}}{\iff} x \succsim y$

b) Dans ce cas la première équivalence est fausse

$u(x) \geq u(y) \implies f(u(x)) \geq f(u(y))$ tient toujours

mais $f(u(x)) \geq f(u(y))$ n'implique plus $u(x) \geq u(y)$..

<u>exemple</u> f cte, $u(z) = z \ \forall z \in \mathbb{R}$, $x = 2$, $y =$ [illegible]

$f(u(x)) = f(u(y))$ et $u(x) < u(y)$...

1.3 <u>Par induction</u>. Soit $M_1 := \{x \in X,\ x \leq y\ \forall y \in X\} \neq \emptyset$

On pose $u(z) = 1 \ \forall z \in M_1$

Si $M_1 = X$ on a fini, sinon $M_1 \subsetneq X$ et $X_1 := X \setminus M_1$

On pose $u(z) = 2 \ \forall z \in M_2 = \{x \in X_1,\ x \leq y,\ \forall y \in X_1\}$

et ainsi de suite.

Cet algorithme se termine après au plus $|X|$ étapes et nous avons construit une fonct° d'utilité représentant $\succsim$ à valeurs dans $\mathbb{N}$

<u>Rq</u>: De même, lorsque X est dénombrable on peut représenter $\succsim$ par une fonction d'utilité $u: X \to (0, 1)$

1.4 Supposons que $y \in C(\{x, y, z\})$, et posons $A = \{x, y\}$, $B = \{x, y, z\}$

Alors on a

$$y, x \in B \cap A$$
$$y \in C(B)$$
$$x \in C(A)$$

D'après le (WA) cela implique $y \in C(A)$, une contradiction.

Il suffit de vérifier que $C(B) = \{x\}$ ou $\{z\}$ ou $\{x, z\}$ ne contredit pas (WA). Mais cela est trivial puisque $A \cap B = \{x, y\}$.

Autrement dit, $z \notin A \cap B$ et du coup ne peut pas compromettre l'axiome.

$\boxed{\text{Solutions TD 1}}$

$\boxed{1.1}$ ok

$\boxed{1.2}$ a) $f(u(x)) \geq f(u(y)) \overset{f \nearrow \text{ stricte}}{\iff} u(x) \geq u(y) \overset{\text{def}}{\iff} x \succsim y$

b) Dans ce cas la première équivalence est fausse

$u(x) \geq u(y) \implies f(u(x)) \geq f(u(y))$ tient toujours

mais $f(u(x)) \geq f(u(y))$ n'implique plus $u(x) \geq u(y)$..

<u>exemple</u> f cte, $u(z) = z$ $\forall z \in \mathbb{R}$, $x = 0$, $y = 1$

$f(u(x)) = f(u(y))$ et $u(x) < u(y)$...

$\boxed{1.3}$ <u>Par induction</u>. Soit $M_1 = \{x \in X, x \succsim y \ \forall y \in X\} \neq \emptyset$

On pose $u(z) = 1$ $\forall z \in M_1$

Si $M_1 = X$ on a fini, sinon $M_1 \subsetneq X$ et $X_1 := X \setminus M_1$

On pose $u(z) = 2$ $\forall z \in M_2 = \{x \in X_1, x \succsim y, \forall y \in X_1\}$

et ainsi de suite.

Cet algorithme se termine après au plus $|X|$ étapes et nous avons construit une fonct° d'utilité représentant $\succsim$ à valeurs dans $\mathbb{N}$

<u>Rq</u>: De même, lorsque X est dénombrable on peut représenter $\succsim$ par une fonction d'utilité $u : X \to (0, 1)$

$\boxed{1.4}$ Supposons que $y \in C(\{x, y, z\})$, et posons $A = \{x, y\}$, $B = \{x, y, z\}$

Alors on a

$y, x \in B \cap A$

$y \in C(B)$

$x \in C(A)$

D'après le (WA), cela implique $y \in C(A)$, une contradiction.

Il suffit de vérifier que $C(B) = \{x\}$ ou $\{z\}$ ou $\{x, z\}$ ne contredit pas (WA). Mais cela est trivial puisque $A \cap B = \{x, y\}$.

Autrement dit, $z \notin A \cap B$ et du coup ne peut pas compromettre l'axiome.

Solutions TD 1

$\boxed{1.1}$ ok

$\boxed{1.2}$ a) $f(u(x)) \geq f(u(y)) \overset{f \nearrow \text{ stricte}}{\iff} u(x) \geq u(y) \overset{\text{def}}{\iff} x \succsim y$

b) Dans ce cas la première équivalence est fausse

$u(x) \geq u(y) \Rightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$ tient toujours

mais $f(u(x)) \geq f(u(y))$ n'implique plus $u(x) \geq u(y)$.

<u>exemple</u> $f = cte$, $u(z) = z \ \forall z \in \mathbb{R}$, $x = 0$, $y = 1$

$f(u(x)) = f(u(y))$ et $u(x) < u(y)$.

$\boxed{1.3}$ <u>Par induction</u>. Soit $M_1 := \{x \in X, x \precsim y \ \forall y \in X\} \neq \emptyset$

On pose $u(z) = 1 \ \forall z \in M_1$

Si $M_1 = X$ on a fini, sinon $M_1 \subsetneq X$ et $X_1 := X \setminus M_1$

On pose $u(z) = 2 \ \forall z \in M_2 = \{x \in X_1, x \precsim y, \forall y \in X_1\}$

et ainsi de suite.

Cet algorithme se termine après au plus $|X|$ étapes et nous avons construit une fonct° d'utilité représentant $\succsim$ à valeurs dans $\mathbb{N}$

<u>Rq</u>: De même, lorsque X est dénombrable on peut représenter $\succsim$ par une fonction d'utilité $u: X \to (0,1)$

$\boxed{1.4}$ Supposons que $y \in C(\{x, y, z\})$, et posons $A = \{x, y\}$, $B = \{x, y, z\}$

Alors on a

$y, x \in B \cap A$
$y \in C(B)$
$x \in C(A)$

D'après le (WA), cela implique $y \in C(A)$, une contradiction.

Il suffit de vérifier que $C(B) = \{x\}$ ou $\{z\}$ ou $\{x, z\}$ ne contredit pas (WA). Mais cela est trivial puisque $A \cap B = \{x, y\}$

Autrement dit, $z \notin A \cap B$ et du coup ne peut pas compromettre l'axiome.

Solutions TD 1

1.1 ok

1.2 a) $f(u(x)) \geq f(u(y)) \overset{f \nearrow \text{stricte}}{\iff} u(x) \geq u(y) \overset{\text{def}}{\iff} x \succsim y$

b) Dans ce cas la première équivalence est fausse

$u(x) \geq u(y) \Rightarrow f(u(x)) \geq f(u(y))$ tient toujours

mais $f(u(x)) \geq f(u(y))$ n'implique plus $u(x) \geq u(y)$...

<u>exemple</u> : $f = \text{cte}$, $u(z) = z \ \forall z \in \mathbb{R}$, $x = 0$, $y = 1$

$f(u(x)) = f(u(y))$ et $u(x) < u(y)$...

1.3 <u>Par induction.</u> Soit $M_1 := \{x \in X, x \preceq y \ \forall y \in X\} \neq \emptyset$.

On pose $u(z) = 1 \ \forall z \in M_1$.

Si $M_1 = X$ on a fini, sinon $M_1 \subsetneq X$ et $X_1 := X \setminus M_1$

On pose $u(z) = 2 \ \forall z \in M_2 = \{x \in X_1, x \preceq y, \forall y \in X_1\}$

et ainsi de suite.

Cet algorithme se termine après au plus $|X|$ étapes et nous avons construit une fonct° d'utilité représentant $\succsim$ à valeurs dans $\mathbb{N}$

<u>Rq</u> : De même, lorsque X est dénombrable on peut représenter $\succsim$ par une fonction d'utilité $u : X \to (0, 1)$

1.4 Supposons que $y \in C(\{x, y, z\})$, et posons $A = \{x, y\}$, $B = \{x, y, z\}$

Alors on a

$y, x \in B \cap A$

$y \in C(B)$

$x \in C(A)$

D'après le (WA), cela implique $y \in C(A)$, une contradiction.

Il suffit de vérifier que $C(B) = \{x\}$ ou $\{z\}$ ou $\{x, z\}$ ne contredit pas (WA). Mais cela est trivial puisque $A \cap B = \{x, y\}$

Autrement dit, $z \notin A \cap B$ et du coup ne peut pas compromettre l'axiome.

$\boxed{1.5}$ Solution 1 : D'après le Thm de Debreu, il existe $u : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$.

D'après le Thm des valeurs intermédiaires

$$\left\{\begin{array}{l} f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue} \\ f(1) \geq r \geq f(0) \end{array}\right. \Rightarrow \exists c \in [0,1] \text{ tq } f(c) = r$$

En l'appliquant à $f(t) := u(tx + (1-t)z)$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $r = u(y)$

on a l'existence de $m = cx + (1-c)z \in [x,z]$ tq $u(m) = u(y)$

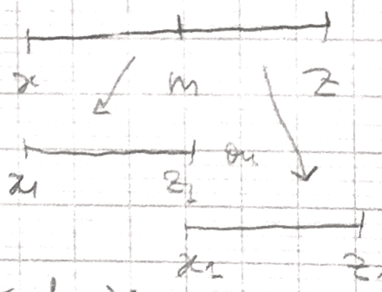
Et donc $m \sim y$

Solution 2 : Supposons $x \succ y \succ z$ (sinon, c'est bon)

Posons $m = \frac{x+z}{2}$. Alors $m \succ y$ ou $m \prec y$ ou $m \sim y$

Dans le premier cas, on pose $x_1 := m$, $z_1 = z$

Dans le 2^{nd}, $x_1 := x$, $z_1 := m$



Dans le 3^e, c'est fini

Si on n'a pas fini, on recommence en partant de x_1, z_1

En procédant de la sorte, soit on trouve $m \sim y$, soit 2 suites $(x_n)_n$ $(z_n)_n$

tq
- $x_n \succ y \succ z_n \quad \forall n$
- $\|x_n - z_n\| = \|x - z\| 2^{-n} \to 0$
- $x_n \to m$ et $z_n \to m$ (suites monotones bornées sur $[x,z]$)
- Par continuité, $m \succsim y$ et $y \succsim m$ (autrement dit $y \sim m$)