Solutions TD 1

$\boxed{1.1}$ ok

$\boxed{1.2}$ a) $f(u(x)) \geq f(u(y)) \overset{f \nearrow \text{stricte}}{\iff} u(x) \geq u(y) \overset{\text{def}}{\iff} x \succsim y$

b) Dans ce cas la première équivalence est fausse

$u(x) \geq u(y) \implies f(u(x)) \geq f(u(y))$ tient toujours

mais $f(u(x)) \geq f(u(y))$ n'implique plus $u(x) \geq u(y)$...

<u>exemple</u> : $f = cte$, $u(z) = z \ \forall z \in \mathbb{R}$, $x = 0$, $y = 1$

$f(u(x)) = f(u(y))$ et $u(x) < u(y)$...

$\boxed{1.3}$ <u>Par induction</u>. Soit $M_1 := \{x \in X, x \precsim y \ \forall y \in X\} \neq \emptyset$.

On pose $u(z) = 1 \ \forall z \in M_1$.

Si $M_1 = X$ on a fini, sinon $M_1 \subsetneq X$ et $X_1 := X \setminus M_1$

On pose $u(z) = 2 \ \forall z \in M_2 = \{x \in X_1, x \precsim y, \forall y \in X_1\}$

et ainsi de suite.

Cet algorithme se termine après au plus $|X|$ étapes et nous avons construit une fonct° d'utilité représentant $\succsim$ à valeurs dans $\mathbb{N}$

<u>Rq</u> : De même, lorsque X est dénombrable on peut représenter $\succsim$ par une fonction d'utilité $u : X \to (0,1)$

$\boxed{1.4}$ Supposons que $y \in C(\{x,y,z\})$, et posons $A = \{x,y\}$, $B = \{x,y,z\}$

Alors on a

$$y, x \in B \cap A$$
$$y \in C(B)$$
$$x \in C(A)$$

D'après le (WA), cela implique $y \in C(A)$, une contradiction.

Il suffit de vérifier que $C(B) = \{x\}$ ou $\{z\}$ ou $\{x,z\}$ ne contredit pas (WA). Mais cela est trivial puisque $A \cap B = \{x,y\}$

Autrement dit, $z \notin A \cap B$ et du coup ne peut pas compromettre l'axiome.

$\boxed{1.5}$ Solution 1 : D'après le Thm de Debreu, il existe $u : X \to \mathbb{R}$ continue telle que $u(x) \geq u(y) \iff x \succsim y$.

D'après le Thm des valeurs intermédiaires

$$\left\{ \begin{array}{l} f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ continue} \\ f(1) \geq r \geq f(0) \end{array} \right. \implies \exists c \in [0,1] \text{ tq } f(c) = r$$

En l'appliquant à $f(t) := u(tx+(1-t)z)$, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $r = u(y)$

On a l'existence de $m = cx + (1-c)z \in [x,z]$ tq $u(m) = u(y)$

Et donc $m \sim y$

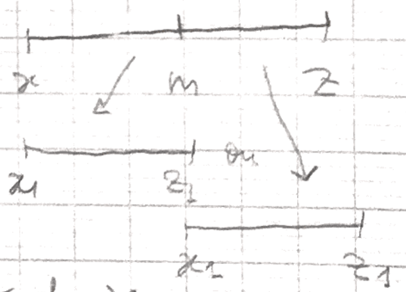
Solution 2 : Supposons $x \succ y \succ z$ (sinon, c'est bon)

Posons $m = \frac{x+z}{2}$. Alors $m \succ y$ ou $m \prec y$ ou $m \sim y$

Dans le premier cas, on pose $x_1 := m$, $z_1 = z$

Dans le 2nd, $x_1 := x$, $z_1 := m$

Dans le 3e, c'est fini



Si on n'a pas fini, on recommence en partant de x_1, z_1

En procédant de la sorte, soit on trouve $m \sim y$, soit 2 suites $(x_n)_n$ $(z_n)_n$

tq
- $x_n \succ y \succ z_n \quad \forall n$
- $\|x_n - z_n\| = \|x - z\| 2^{-n} \to 0$
- $x_n \to m$ et $z_n \to m$ (suites monotones bornées sur $[x,z]$)
- Par continuité, $m \succsim y$ et $y \succsim m$ (autrement dit $y \sim m$)

1.6. Oui, un exemple :

$$x \succsim y \iff x \geq y \quad \text{sur } [0,1].$$

$$\begin{cases} u(x) = x & \text{sur } [0, 1/2[\\ u(x) = x+1 & \text{sur } [1/2, 1] \end{cases}$$

(en général, exo 2 → prendre f st croissante, non continue)

2. $x = 1$ on a $x \succ y$, or $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ /
$y = 0{,}99$

$z \sim y$ donc on n'a pas $z \succ y$.

→ on ne peut construire $B(x, \varepsilon)$ t.q $\forall z \in B(x, \varepsilon)$, $z \succ y$.

1.8.

2). Additive, continue, pas monotone stricte : $u(x,y) = \lambda y$, $\lambda > 0$

Monotone, continue, pas additive : $u(x,y) = xy$

soit (x,y), (x',y') t.q. $xy > x'y'$
$x' > x$

alors $x(y+t) < x'(y'+t)$

$\Rightarrow t(x'-x) > xy - x'y'$

donc en choisissant $t > \frac{xy - x'y'}{x'-x} > 0$, $s = 0$, on a $xy > x'y'$
et $x(y+t) < x'(y'+$

1.7. Formulation de Kreps.

On définit $\succsim$ par : $x \succsim y \Leftrightarrow \neg\, y P x$

Montrons que : $\begin{bmatrix} P \text{ Asymétrique} \\ \text{Trans. nég} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \succsim \text{ réflexive, complète} \\ \text{transitive} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$: $\forall x$, $\neg\, x P x$ (asymétrique) donc $x \succsim x$ → <u>Réflexive</u>

$\forall x, y$ $\neg\, x P y$ ou $\neg\, y P x$ → <u>Complète</u>.

Transitive :

si $x \succsim y$, $y \succsim z$ $\Leftrightarrow$ $\neg\, z P y$ et $\neg\, y P x$

$\Rightarrow \neg\, z P x$ par trans. négative (contraposée)

donc $x \succsim z$.

(Trans. neg : $x P y \Rightarrow \underset{\text{(ou)}}{x P z \cup z P y}$ donc $\underset{\text{(et)}}{\neg\, x P z \wedge \neg\, z P y} \Rightarrow \neg\, x P y$)

$\Leftarrow$: $\forall x, y$ $x \succsim y$ ou $y \succsim x$ donc $x P y$ et $y P x$ impossible → Asymétrique.

Trans neg : $\neg\,(y \succsim x) \Rightarrow \neg\, y \succsim z$ ou $\neg\, z \succsim x$ (Transitivité de $\succsim$)

donc $x P y \Rightarrow x P z$ ou $z P y$