Université Paris-Dauphine
Département MIDO

Éléments de correction

Travaux dirigés
Microéconomie 2

Table des matières

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Microéconomie 2

Chapitre 1: Théorie du consommateur

Dans les exercices qui suivent, les préférences d'un consommateur sur des paniers de 2 biens sont représentées par une fonction d'utilité

$$u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R} : (x, y) \to u(x, y)$$

Pour chacune des spécifications de la fonction u ci-dessous:

1. Déterminez ses propriétés: continue, différentiable, [strictement] croissante, [strictement] [quasi] concave, etc.
2. Représentez graphiquement les courbes d'indifférence du consommateur.
3. Déterminez la demande du consommateur $d(p, w)$, en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et d'un revenu $w \in \mathbb{R}_+$, en calculant, le cas échéant le taux marginal de substitution $TMS_{y\to x}$. Analysez les propriétés de cette demande. Exprimez-la en fonction d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y) \in \mathbb{R}^2_+$ du consommateur.

I. *Fonction d'utilité de Cobb-Douglas*: $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$ (exemples: $\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, ...)
Remarque: $\widetilde{u}(x, y) = x^a y^b$, $a, b > 0$, $\widehat{u}(x, y) = \alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y$ représentent les mêmes préférences. Pourquoi?

II. *Fonction d'utilité de Leontief*: $u(x, y) = \min(x, y)$.

III. *Fonction d'utilité linéaire*: $u(x, y) = ax + y$, $a > 0$.

IV. *Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante*: $u(x, y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $a, b > 0$, $0 \neq \rho \leq 1$, ou, de manière équivalente $\widetilde{u}(x, y) = (\alpha x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ ou encore $\widehat{u}(x, y) = \rho(\alpha x^\rho + y^\rho)$, $\alpha > 0$.
Remarque 1: Si $\rho = 1$, on retrouve le cas III, si $\rho \to 0$, le cas I et si $\rho \to -\infty$, un cas similaire au II (vérifiez ces propriétés).
Remarque 2: Etant donné une fonction de demande $d(p, w) = (d_x(p, w), d_y(p, w))$, on définit l'*élasticité de substitution* par

$$\xi_{xy}(p, w) = \frac{-\partial \left[\frac{d_x(p,w)}{d_y(p,w)}\right]}{\partial \left[\frac{p_x}{p_y}\right]} \frac{\frac{p_x}{p_y}}{\frac{d_x(p,w)}{d_y(p,w)}}$$

qui mesure la sensibilité de $\frac{d_x(p,w)}{d_y(p,w)}$ à une variation de $\frac{p_x}{p_y}$. Ce coefficient est indépendant de p et w pour les fonctions d'utilité ci-dessus (vérifiez-le), d'où la terminologie.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Microéconomie 2

Chapitre 2: Economies d'échange
A. Equilibre concurrentiel

Dans les exercices qui suivent, on considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Pour chacune des spécifications de e^i, u^i, $i = 1, 2$, ci-dessous, vérifiez si l'économie possède un équilibre concurrentiel. Si oui, déterminez les prix et les allocations correspondantes. Représentez les différentes quantités dans une boîte d'Edgeworth.

I. *Fonctions d'utilité de Cobb-Douglas*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}},\ u^2(x,y) = x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} \\ e^1 &= e^2 = (1,1) \end{aligned}$$

II. *Fonctions d'utilité de Leontief*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= u^2(x,y) = \min(x,y) \\ e^1 &= (3,7),\ e^2 = (7,3) \end{aligned}$$

III. *Fonctions d'utilité linéaires*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= ax + y,\ u^2(x,y) = x + ay,\ 0 < a < 1 \\ e^1 &= e^2 = (1,1) \end{aligned}$$

IV. *Fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= (\frac{1}{8}x^{-2} + y^{-2})^{\frac{-1}{2}} \equiv -2(\frac{1}{8}x^{-2} + y^{-2}) \\ u^2(x,y) &= (x^{-2} + \frac{1}{8}y^{-2})^{\frac{-1}{2}} \equiv -2(x^{-2} + \frac{1}{8}y^{-2}) \\ e^1 &= (1,0),\ e^2 = (0,1) \end{aligned}$$

Indication: pour cette dernière économie, on peut simplifier les calculs en prenant le bien y comme numéraire, c'est-à-dire en posant $p_y = 1$ et $p_x = p$, en déterminant les demandes respectives $d^i_x(p)$, $i = 1, 2$, des agents en bien x et en montrant ensuite que p est un prix d'équilibre ssi $p^{\frac{1}{3}}$ est solution de l'équation $(1 - z)(2z^2 + z + 2) = 0$.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Microéconomie 2

Chapitre 2: Economies d'échange
Equilibre concurrentiel (suite)

V. On considère toujours une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont $e^1 = e^2 = (1,1)$ et leurs fonctions d'utilité respectives

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} \text{ si } x \leq y \\ &= x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \text{ si } x > y \end{aligned}$$

$$u^2(x,y) = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$$

1. Représentez quelques courbes d'indifférence du consommateur 1. Montrez que les préférences de ce consommateur sont continues, strictement croissantes mais non convexes (ni différentiables partout).

2. Déterminez la correspondance de demande du consommateur 1. Que se passe-t-il quand $p_x = p_y$? Représentez graphiquement la demande en bien x en fonction de p_x, en posant $p_y = 1$.

3. Montrez que l'économie constituée des agent 1 et 2 n'a pas d'équilibre concurrentiel.

4. Considérons maintenant une économie comprenant 4 agents dans laquelle deux agents ont les mêmes préférences et la même dotation initiale que l'agent 1, tandis que les deux autres sont semblables à l'agent 2. Montrez que cette économie a un équilibre concurrentiel et déterminez-le.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Microéconomie 2

Chapitre 2: Economies d'échange
B. Optimum de Pareto, théorèmes du bien-être

Comme dans la section précédente, on considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$; $z = [(x^1, y^1), (x^2, y^2)]$ désigne une allocation. Pour chacune des spécifications de e^i, u^i, $i = 1, 2$, et z ci-dessous:

1. Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth.
2. Vérifiez, si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.
3. Le cas échéant, montrez que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminez ce transfert.

I. *Fonctions d'utilité de Cobb-Douglas*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}, \quad u^2(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \\ e^1 &= e^2 = (1,1) \\ z &= [(1, \frac{9}{5}), (1, \frac{1}{5})] \end{aligned}$$

II. *Fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= u^2(x,y) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \\ e^1 &= (\frac{1}{2}, 1), \quad e^2 = (\frac{3}{2}, 1) \\ z &= [(1,1), (1,1)] \end{aligned}$$

III. *Fonctions d'utilité linéaires*:

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= 2x + y, \; u^2(x,y) = x + 2y \\ e^1 + e^2 &= (1,1) \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}, \; u^2(x,y) = x + y \\ e^1 &= (2,1), \; e^2 = (1,2) \\ z &= [(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{5}{2}, \frac{3}{2})] \end{aligned}$$

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Microéconomie 2

Chapitre 3: Economies avec production

I. Soit la fonction de production de Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$, $\alpha, \beta > 0$.
1) Décrivez l'ensemble de production correspondant.
2) A quelles conditions (sur α et β) les rendements sont-ils décroissants? constants? croissants?

II. Soit la fonction de production à élasticité de substitution constante $g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$. Montrez que les rendements d'échelle sont constants.

III. On considère une entreprise décrite par son ensemble de production $Q \subseteq \mathbb{R}^L$. Soit $p \in \mathbb{R}^L_+$, $p \gg 0$, un vecteur de prix, et $y^* \in \mathbb{R}^L$ un plan de production qui maximise le profit de l'entreprise au prix p. Montrez que y^* est efficace.

III. On considère une économie de Robinson Crusoé. Les biens sont une denrée alimentaire x et le temps de loisir y. Le consommateur a une dotation initiale $e = (e_x, e_y) = (0, 24)$ et une fonction d'utilité de Cobb-Douglas $u(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. L'entreprise produit une quantité $g(t)$ de denrée alimentaire à partir de t heures de travail, le temps de travail étant $t = 24 - y$. On normalise le prix d'une unité de denrée alimentaire à 1 et on note w le salaire horaire.
1) Déterminez la fonction de demande $(d_x(w,\pi), d_t(w,\pi))$ du consommateur, en termes de denrée alimentaire et de travail, en fonction du salaire horaire w et du profit π de l'entreprise.
2) On suppose que $g(t) = \sqrt{t}$. Montrez que les rendements sont décroissants. Déterminez la fonction d'offre $(x^*(w), t^*(w))$ et le profit maximal $\pi^*(w)$ de l'entreprise en fonction du salaire horaire w. Montrez qu'il existe un équilibre concurrentiel et déterminez le salaire horaire à l'équilibre.
3) On suppose maintenant que $g(t) = at$, $a > 0$. Montrez que les rendements sont constants et qu'il existe un équilibre concurrentiel. Déterminez le salaire horaire à l'équilibre.
4) On suppose enfin que $g(t) = t^2$. Montrez que les rendements sont croissants, que le "problème unifié" de Robinson: $\max_{x,t} u(x, 24-t)$ sous $x = t^2$, $t \leq 24$ a une solution (optimum de Pareto) mais que cet optimum n'est pas décentralisable et qu'il n'y a donc pas d'équilibre concurrentiel.

IV. On considère une économie consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (x et y). Les dotations initiales des consommateurs, notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$, sont $e^1 = (10, 20)$ et $e^2 = (10, 32)$; leur fonction d'utilité est $u^i(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2$. Le consommateur 1 possède l'entreprise, qui produit du bien x à partir du bien y suivant la technologie $x = g(y) = 2\sqrt{y}$.
1) Déterminez la fonction de demande $(d^i_x(p,\pi), d^i_y(p,\pi))$ de chaque consommateur i, en termes des biens x et y, en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$ et du profit π de l'entreprise.
2) Déterminez la fonction d'offre $(x^*(p), y^*(p))$ et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$.
3) Montrez qu'il existe un équilibre concurrentiel et déterminez-le. Vérifiez que cet équilibre est Pareto-optimal.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO
Microéconomie 2

Chapitre 4 : Externalités et biens publics

I. On considère une variante de l'économie de l'exercice IV du chapitre sur la production, consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (1 et 2). Les dotations initiales des consommateurs sont e^1 = (10,20) et e^2 = (10,32), respectivement. Le consommateur 1 possède l'entreprise, qui produit du bien 1 à partir du bien 2 suivant la technologie $q = g(z) = 2z^{1/2}$ (pour éviter toute confusion, on désigne par z l'input en bien 2 et par q l'output en bien 1). La fonction d'utilité du consommateur 1 est $u^1(x,y) = (xy)^{1/2}$; le consommateur 2 subit maintenant une externalité de la part de l'entreprise : sa fonction d'utilité devient $u^2(x,y\,;z) = (xy)^{1/2} – 2z$, où z est la quantité de bien 2 utilisée par l'entreprise (et comme précédemment, x et y, les quantités de bien 1 et de bien 2, respectivement, consommées par le consommateur 2).

1) Montrez que l'équilibre concurrentiel calculé au chapitre IV est encore un équilibre dans l'économie avec externalité.
2) Vérifiez que l'allocation suivante : q=2, z=1, (x^1, y^1)=(12,22), (x^2, y^2)=(10,29) est réalisable et Pareto-domine l'équilibre.

II. On considère une économie, consistant en deux entreprises (1 et 2), un consommateur, un facteur de production et deux biens de consommation (1 et 2). Le consommateur détient initialement k unités du facteur de production (où k>0 est un paramètre fixé) ; l'entreprise h (h=1,2) produit exclusivement le bien de consommation h (h=1,2). La fonction de production de l'entreprise 1 est $y_1=g_1(z_1)= z_1$ tandis que celle de l'entreprise 2 est $y_2=g_2(z_2)=az_2$ où a>0 est perçu comme un un paramètre fixé par l'entreprise 2. En fait, $a=y_1$ où y_1 est la quantité de bien 1 produite par l'entreprise 1 et représente donc une externalité de production. Le consommateur ne tire d'utilité que des biens de consommation ; sa fonction d'utilité est $u(x_1,x_2)= x_1x_2$.

1) Déterminez (en fonction de k) l'équilibre concurrentiel de l'économie en normalisant à 1 le prix du facteur de production. (Indication : ne tenir compte de l'externalité qu'après avoir déterminé l'équilibre en traitant a comme un paramètre)
2) Déterminez (en fonction de k) et représentez graphiquement l'ensemble des productions (y_1,y_2) réalisables (y_h désignant la quantité de bien de consommation h produite par l'entreprise h, h=1,2).
3) En identifiant la quantité de bien h consommée par le consommateur avec la quantité de bien h produite, déterminez (en fonction de k) la (ou les) production(s) réalisable(s) (y_1^*,y_2^*) qui maximisent l'utilité du consommateur.
4) Comparez les solutions obtenues en 1) et en 4).
5) On modifie l'économie en taxant le bien 2. Pour ce bien, on distingue le prix à la production p_2 et le prix à la consommation p_2+t, où t désigne la taxe unitaire. Les recettes fiscales sont redistribuées au consommateur sous forme de transfert forfaitaire. Déterminez (en fonction de k et t) l'équilibre avec taxe.
6) Montrez qu'on peut choisir la taxe t pour que l'équilibre avec taxe calculé en 5) coïncide avec l'optimum calculé en 3).

III. On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2), dont les fonctions d'utilité sont, respectivement,

$$u^1(x^1,y) = \ln x^1 + 2\ln y$$
$$u^2(x^2,y) = 2\ln x^2 + \ln y$$

où $x^i>0$ désigne la quantité de bien privé consommée par l'agent i et $y>0$, la quantité d'un bien public produit dans l'économie. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y=g(z)=z$. La dotation initiale de chaque consommateur est de 15 unités de bien privé.

1) Caractérisez l'ensemble des allocations (x^1, x^2,y,z) réalisables dans cette économie.
2) Caractérisez l'ensemble des allocations (x^1, x^2,y,z) Pareto-optimales.
3) Déterminez l'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques pour les deux consommateurs.
4) Déterminez l'équilibre de Lindhal et montrez que c'est un optimum de Pareto.
5) Déterminez l'équilibre avec souscription (en déterminant au préalable les « fonctions de réaction » $z^1(z^2)$ et $z^2(z^1)$) et montrez que ce n'est pas un optimum de Pareto.

Chapitre 1

Théorie du consommateur

I - Fonction d'utilité de Cobb-Douglas

Soit $u(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$

Rappelons que si les préférences peuvent être représentées par $u(x, y) = x^{\alpha} y^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, alors elles peuvent l'être par une fonction croissante de u. Par exemple $(x^a y^b)^{\frac{1}{a+b}} = x^{\frac{a}{a+b}} y^{\frac{b}{a+b}}$, les exposants s'additionnant un à un $\left(\frac{b}{a+b} = 1 - \frac{a}{a+b}\right)$. Une représentation parfois utile consiste à prendre le logarithme de u, afin d'obtenir $u(x, y) = \alpha \log(x) + \beta \log(y)$.

1 - Propriétés de la fonction

- Cette fonction d'utilité est continue et différentiable. Notons que lorsque les préférences sont complètes, transitives et continues, il existe une fonction d'utilité continue u qui les représente. Calculons le taux marginal de substitution du bien y en bien x.

$$
\begin{aligned}
du(x, y) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 && (1.1)\\
&\Leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = TMS_{y \to x} && (1.2)\\
&\Leftrightarrow \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{1-\alpha}}{(1-\alpha) x^{\alpha} y^{-\alpha}} && (1.3)\\
&\Leftrightarrow TMS_{y \to x} = \frac{\alpha y}{(1-\alpha) x} && (1.4)
\end{aligned}
$$

- Vérifions que la fonction d'utilité représente des préférences convexes, c'est à dire que cette fonction est quasi-concave.

1ère méthode :

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux paniers de biens, et $\lambda \in [0, 1]$.

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) = [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2]^{\alpha} [\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2]^{1-\alpha}$$

En prenant le logarithme de u :

$$= \alpha \log\, [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] + (1-\alpha)\ \log\, [\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2]$$

Puisque la fonction logarithme est concave, on obtient :

$$\begin{aligned}
&u\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\right)\\
&\qquad \geq \alpha\lambda \log\ x_1 + \alpha(1-\lambda)\ \log\ x_2 + \lambda(1-\alpha)\ \log\ y_1 + (1-\alpha)(1-\lambda)\ \log\ y_2\\
&\qquad \geq \lambda[\alpha \log x_1 + (1-\alpha)\log y_1] + (1-\lambda)[\alpha \log x_2 + (1-\alpha)\log y_2]\\
&\qquad \geq \lambda u(x_1, y_1) + (1-\lambda)u(x_2, y_2) \qquad (1.5)\\
&\qquad \geq \min[u(x_1, y_1), u(x_2, y_2)]
\end{aligned}$$

2ème méthode :

Rappels :

La matrice hessienne d'une fonction numérique f est la matrice carrée, notée H(f), de ses dérivées partielles secondes.

Plus précisément, étant donnée une fonction f à valeurs réelles

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

et en supposant que toutes les dérivées partielles secondes de f existent, le coefficient d'indice i,j de la matrice hessienne de f vaut :

$$H(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

On appelle hessien le déterminant ($det\ H(f)$) de cette matrice. La matrice hessienne permet de déterminer la nature des points critiques de la fonction f, c'est-à-dire des points d'annulation du gradient (ou des dérivées partielles). Deux cas se présentent. Si le hessien s'annule, le point critique de f est dit dégénéré. Il faut dans ce cas calculer la trace de la matrice carrée (somme de ses éléments diagonaux). Si les points critiques sont non dégénérés, le signe des valeurs propres détermine la nature du point critique. Si la matrice est définie positive, le point constitue un minimum (toutes les valeurs propres de M sont positives). Si elle est définie négative, il s'agit d'un maximum. S'il y a des valeurs propres de chaque signe, on a affaire à un point selle. Dans ce dernier cas, on définit l'indice du point critique comme le nombre de valeurs propres négatives.

– Calculons les valeurs propres de la matrice hessienne associée à la fonction d'utilité :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha-1}\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} &= \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha}
\end{aligned}$$

$$H(u) = \begin{bmatrix} -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha} & \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha} \\ \alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha} & -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha-1} \end{bmatrix}$$

$$det\ H(u) = \alpha^2(1-\alpha)^2x^{2\alpha-2}y^{-2\alpha} - \alpha^2(1-\alpha)^2x^{2\alpha-2}y^{-2\alpha} = 0$$

$$Tr\ H(u) = -\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha} - \alpha(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha-1} \leq 0$$

Le déterminant étant nul, on calcule la trace de la matrice hessienne. Elle est négative. La fonction $H(u)$ est semi-définie négative. La fonction d'utilité est donc concave et par conséquent quasi-concave.

Egelement, il est possible d'étudier les courbes d'indifférence :

Posons $u = c$

$$\begin{aligned} c &= x^{\alpha}y^{1-\alpha} \\ &\Leftrightarrow y = \left(\frac{c}{x^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ &\Leftrightarrow y = c^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-\alpha}{1-\alpha}c^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{-1}{1-\alpha}} < 0 \quad \forall\ 0 < \alpha < 1 \tag{1.6}$$

Les courbes d'indifférence sont décroissantes.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}c^{\frac{1}{1-\alpha}}x^{\frac{-2+\alpha}{1-\alpha}} > 0 \quad \forall\ 0 < \alpha < 1 \tag{1.7}$$

Les courbes d'indifférence sont strictement convexes (Les fonctions d'utilité sont strictement quasi-concaves).

2 - Représentation graphique

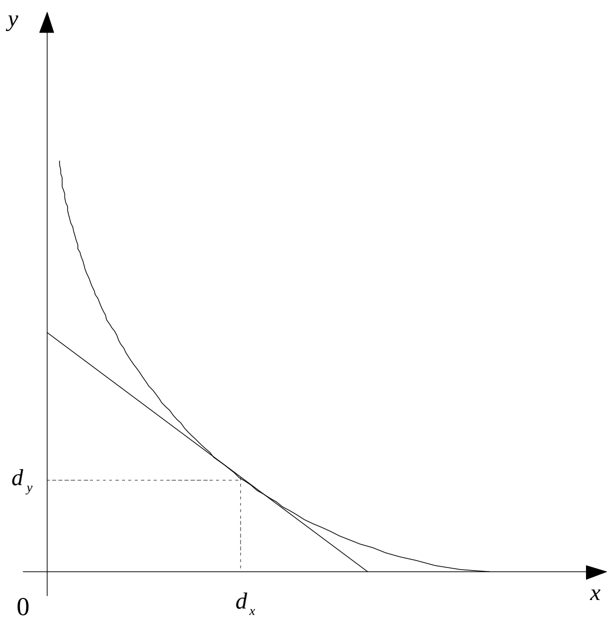


Fig. 1.1: Fonction d'utilité de Cobb-Douglas

3 - Demande du consommateur

Le programme du consommateur est le suivant :

$$\begin{cases} \max u(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha} \\ \qquad\qquad sc \\ x, y \geq 0 \\ p_x x + p_y y = w \end{cases} \tag{1.8}$$

Rappelons la résolution de ce programme d'optimisation par la méthode de Lagrange (on préfèrera par la suite égaliser directement le TMS au rapport des prix des biens) :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^{\alpha}y^{1-\alpha} + \lambda(w - p_x x - p_y y) \tag{1.9}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha} - \lambda p_x = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\alpha\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha-1}}{p_x} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = (1-\alpha)\, x^{\alpha}y^{-\alpha} - \lambda p_y = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{(1-\alpha)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha}}{p_y} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = w - p_x x - p_y y = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

$$\frac{\alpha\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1-\alpha}}{p_x} = \frac{(1-\alpha)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha}}{p_y} \tag{1.11}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha-1}}{(1-\alpha)\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha}} = \frac{\alpha y}{x\,(1-\alpha)} = \frac{p_x}{p_y} \tag{1.12}$$

Le TMS est égal au rapport des prix des biens. La tangente à la courbe d'utilité a le même coefficient directeur que la fonction de contrainte budgétaire. Notons que l'on obtient ce résultat plus directement à partir du calcul du TMS, ce que l'on fera par la suite.

$$TMS_{y\to x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}}{(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}} = \frac{\alpha y}{(1-\alpha)x} = \frac{p_x}{p_y} \tag{1.13}$$

Soit $d_y = \dfrac{d_x\,(1-\alpha)\,p_x}{\alpha p_y}$ la fonction de demande. En remplaçant cette fonction dans la contrainte, on obtient :

$$w - p_x d_x - p_y \frac{d_x\,(1-\alpha)\,p_x}{\alpha p_y} = 0 \tag{1.14}$$

$$\Leftrightarrow w - \frac{\alpha p_x d_x}{\alpha} - \frac{d_x\,(1-\alpha)\,p_x}{\alpha} = 0 \tag{1.15}$$

$$\Leftrightarrow w - \frac{d_x p_x}{\alpha} = 0 \tag{1.16}$$

$$\Leftrightarrow d_x(w,p) = \frac{\alpha w}{p_x} \tag{1.17}$$

$$\Leftrightarrow d_y(w,p) = \frac{d_x\,(1-\alpha)\,p_x}{\alpha p_y} = \frac{\frac{\alpha w}{p_x}\,(1-\alpha)\,p_x}{\alpha p_y} = \frac{(1-\alpha)\,w}{p_y} \tag{1.18}$$

En fonction des dotations initiales, les demandes s'écrivent :

$$\Leftrightarrow d_x(e,p) = \frac{\alpha(p_x e_x + p_y e_y)}{p_x} \tag{1.19}$$

$$\Leftrightarrow d_y(e,p) = \frac{(1-\alpha)\,(p_x e_x + p_y e_y)}{p_y} \tag{1.20}$$

II- Fonctions d'utilité de Leontiev

Soit $u(x,y) = \min(x,y)$

1 - Propriétés de la fonction

La fonction est continue, non différentiable (en coin)

$min(x,y) = cste = c$

Si $x < y \Rightarrow x = c$

Si $x > y \Rightarrow y = c$

$\Rightarrow x = y = c$

2 - Représentation graphique

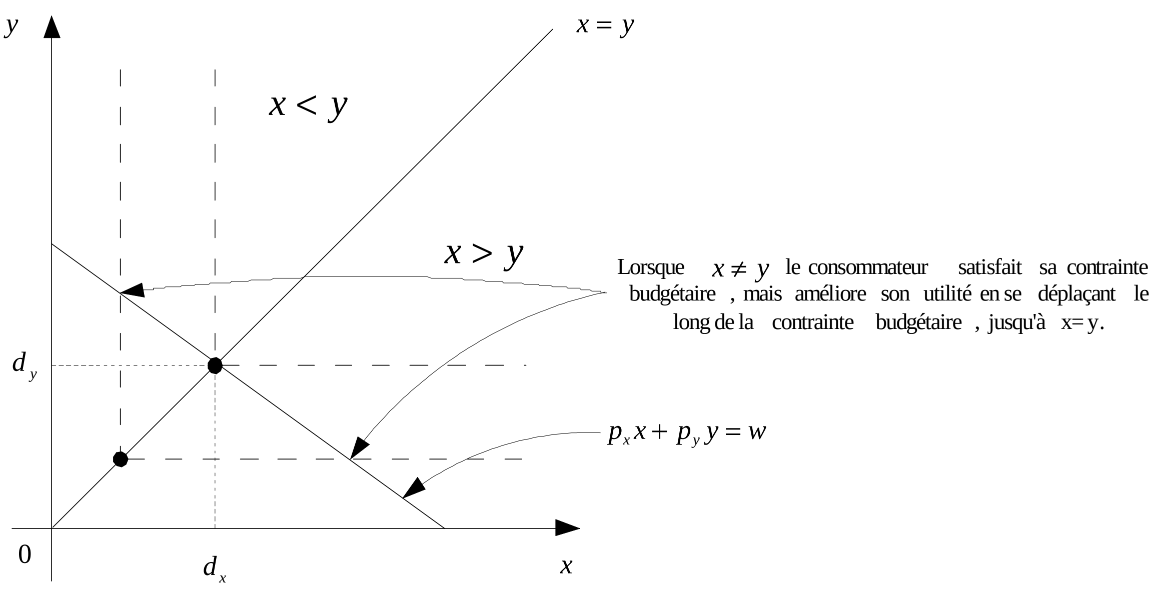


Fig. 1.2: Fonction d'utilité de Leontiev

3 - Demande du consommateur

Trois cas sont à envisager :

– Si $x > y$, $TMS_{y \to x} = 0$
– Si $x = y$, $TMS_{y \to x} = 1$
– Si $x < y$, $TMS_{y \to x} = \infty$

Le programme du consommateur est le suivant :

$$\begin{cases} \max u(x,y) = \min(x,y) \\ sc \\ p_x x + p_y y = w \end{cases} \tag{1.21}$$

L'optimum est atteint lorsque $x = y$.

En remplaçant cette égalité dans la contrainte budgétaire, on obtient les demandes suivantes :

$$d_x(w,p) = d_y(w,p) = \frac{w}{p_x + p_y}$$
$$d_x(e,p) = d_y(e,p) = \frac{p_x e_x + p_y e_y}{p_x + p_y}$$

III - Fonction d'utilité linéaire

Soit $u(x,y) = ax + y, \quad a > 0$

1 - Propriétés de la fonction

La fonction est continue, différentiable, strictement croissante

2 - Représentation graphique

Les courbes d'indifférence sont des droites parrallèles.

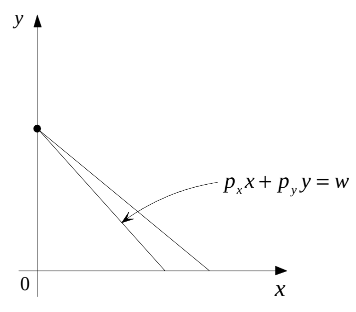


Fig. 1.3: $TMS_{y->x} < \frac{px}{py}$

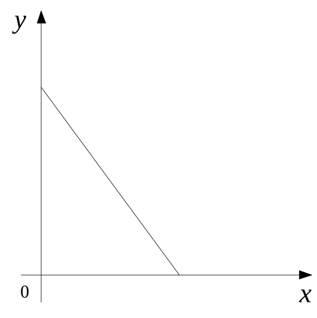


Fig. 1.4: $TMS_{y->x} = \frac{px}{py}$

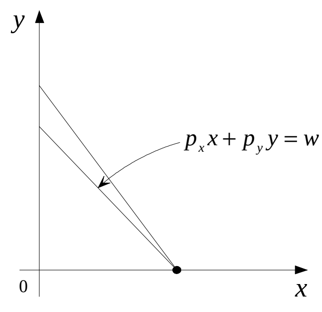


Fig. 1.5: $TMS_{y->x} > \frac{px}{py}$

3 - Demande du consommateur

Le taux marginal de substitution s'écrit :

$$TMS_{y\to x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = a \tag{1.22}$$

Déterminons les demandes en fonctions du revenu. Trois cas sont à envisager :

– Si $TMS_{y\to x} < \frac{p_x}{p_y}$, il y a un optimum en coin avec $\begin{cases} d_x(w,p) = 0 \\ d_y(w,p) = \frac{w}{p_y} \end{cases}$

– Si $TMS_{y\to x} = \frac{p_x}{p_y}$, il y a une multiplicité d'optima pour le consommateur.

– Si $TMS_{y\to x} > \frac{p_x}{p_y}$, il y a un optimum en coin avec $\begin{cases} d_x(w,p) = \frac{w}{p_x} \\ d_y(w,p) = 0 \end{cases}$

Les demandes en fonction des dotations initiales sont :

– Si $TMS_{y\to x} < \frac{p_x}{p_y} \begin{cases} d_x(e,p) = 0 \\ d_y(e,p) = \frac{e_x p_x + e_y p_y}{p_y} \end{cases}$

– Si $TMS_{y\to x} > \frac{p_x}{p_y} \begin{cases} d_x(e,p) = \frac{e_x p_x + e_y p_y}{p_y} \\ d_y(e,p) = 0 \end{cases}$

III - Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante

$u(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\forall a,b > 0,\ \forall 0 \neq \rho \leq 1$

Représentations équivalentes :

$\tilde{u}(x,y) = b^{\frac{1}{\rho}} u(x,y),\ b^{\frac{1}{\rho}} > 0$

$\hat{u}(x,y) = \rho\left(\tilde{u}(x,y)\right)^\rho$, avec ρu^ρ croissante, $\forall\ \rho \leq 1, \rho \neq 0$

1 - Propriétés de la fonction

Le taux marginal de substitution s'écrit :

$$TMS_{y\to x} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = \frac{a\left(ax^\rho + by^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} x^{\rho-1}}{b\left(ax^\rho + by^\rho\right)^{\frac{1-\rho}{\rho}} y^{\rho-1}} = \frac{a}{b}\left(\frac{y}{x}\right)^{1-\rho} \qquad \forall \rho \leq 1 \tag{1.23}$$

– Si $\rho \to 0$, on a $TMS_{y\to x} = \frac{a}{b}\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$ On retrouve la fonction de Cobb-Douglas

– Si $a = b$, $TMS_{y\to x} = \left(\frac{y}{x}\right)^{1-\rho} = 1 \quad$ si $x = y$

– Si $\rho \to -\infty$, $\begin{cases} TMS_{y\to x} = 1 & \text{si } x = y \\ TMS_{y\to x} \to 0 & \text{si } y < x \text{ i.e } \frac{y}{x} < 1 \\ TMS_{y\to x} \to \infty & \text{si } y > x \text{ i.e } \frac{y}{x} > 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ On retrouve la fonction de Leontiev

Prenons un cas particulier. Soit $\rho = -1 \Rightarrow u = \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}$

Soit $u = \dfrac{1}{c}$ avec c une constante,

$\Leftrightarrow y = \dfrac{b}{c - \dfrac{a}{x}}$

2 - Représentation graphique

On ne s'intéressera à priori qu'au cadran supérieur du graphique.

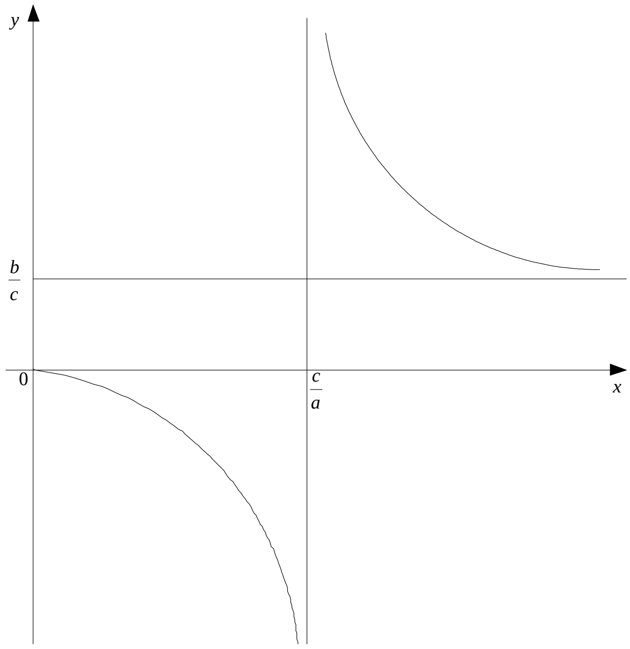


Fig. 1.6: Fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante

3 - Demande du consommateur

– Calculons les demandes en partant de l'égalité :

$$TMS_{y \to x} = \frac{a}{b} \left(\frac{y}{x} \right)^{1-\rho} = \frac{p_x}{p_y} \tag{1.24}$$

On remplace cette équation dans la contrainte $w = p_x x + p_y y$, on obtient :

$$d_x(p, w) = \frac{w}{p_x + p_y \left(\frac{b p_x}{a p_y} \right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \tag{1.25}$$

$$d_y(p,w) = \frac{w}{p_y + p_x\left(\frac{ap_y}{bp_x}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \tag{1.26}$$

$$d_x(e,p) = \frac{p_x e_x + p_y e_y}{p_x + p_y\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \tag{1.27}$$

$$d_y(e,p) = \frac{p_x e_x + p_y e_y}{p_y + p_x\left(\frac{ap_y}{bp_x}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}} \tag{1.28}$$

– Calculons $\dfrac{d\left(\dfrac{x}{y}\right)}{d\left(\dfrac{p_x}{p_y}\right)}$, sachant que $\dfrac{x}{y} = \left(\dfrac{ap_y}{bp_x}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\dfrac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{-1}{1-\rho}}$

$$\frac{d\left(\dfrac{x}{y}\right)}{d\left(\dfrac{p_x}{p_y}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{-1}{1-\rho}\right)\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{-1}{1-\rho}-1} \tag{1.29}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d(\dfrac{x}{y})}{d(\dfrac{p_x}{p_y})}\frac{\dfrac{p_x}{p_y}}{\dfrac{x}{y}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{1-\rho}}\left(\frac{-1}{1-\rho}\right)\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{-1}{1-\rho}}\left(\frac{bp_x}{ap_y}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} \tag{1.30}$$

$$\Leftrightarrow \zeta_{xy} = \frac{1}{1-\rho} \tag{1.31}$$

Ce coefficient est bien indépendant de p et w.

Chapitre 2

Économies d'échange

A. Équilibre concurrentiel

I- Fonctions d'utilité de Cobb-Douglas

Soient $u^1(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}$et $u^2(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ les fonctions d'utilités des agents 1 et 2 et $e^1 = e^2 = (1,1)$ les dotations initiales de ces agents.

On a montré à la question 1 du chapitre 1 que la fonction Cobb-Douglas était continue, différentiable et strictement quasi-concave. Par ailleurs, les fonctions d'utilité sont strictement croissantes donc les prix des biens sont strictement positifs en chacun des équilibres concurrentiels.

En reprenant les équations 1.19 et 1.20 du chapitre 1, on obtient les demandes pour chacun des consommateurs.

– Demandes de l'agent 1 :

$$\begin{aligned} d_{x_1}(p) &= \frac{\frac{1}{4}(p_x+p_y)}{p_x} \\ d_{y_1}(p) &= \frac{\frac{3}{4}(p_x+p_y)}{p_y} \end{aligned} \tag{2.1}$$

– Demandes du l'agent 2 :

$$\begin{aligned} d_{x_2}(p) &= \frac{\frac{3}{4}(p_x+p_y)}{p_x} \\ d_{y_2}(p) &= \frac{\frac{1}{4}(p_x+p_y)}{p_y} \end{aligned} \tag{2.2}$$

– Apurement des marchés. Notons que l'on n'écrira que la condition du bien x, celle du bien y étant impliquée par la saturation des contraintes budgétaires (Loi de Walras)

$$d_{x_1}(p) + d_{x_2}(p) = 2 \tag{2.3}$$

$$\frac{1}{4}\frac{p_x+p_y}{p_x} + \frac{3}{4}\frac{p_x+p_y}{p_x} = 2 \tag{2.4}$$

En normalisant $p_x = p_y = 1$, on obtient $p_x = p_y = \frac{1}{2}$

En remplaçant dans 2.1 et 2.2, on trouve l'allocation d'équilibre :

$$\begin{cases} d_{x_1} = \frac{1}{2} & d_{y_1} = \frac{3}{2} \\ d_{x_2} = \frac{3}{2} & d_{y_2} = \frac{1}{2} \end{cases} \tag{2.5}$$

Représentation graphique

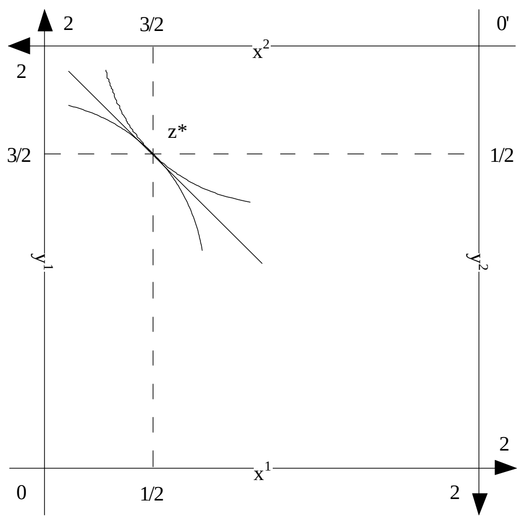


Fig. 2.1: Boîte d'Edgeworth. Fonctions de Cobb-Douglas

II - Fonctions de Leontief

Soient $u^1 = u^2 = \min(x, y)$ les fonctions d'utilités des agents 1 et 2 et $e^1 = (3, 7)$ et $e^2 = (7, 3)$ les dotations initiales de ces agents.

Deux biens sont complémentaires si la possession de l'un et de l'autre procure une satisfaction supérieure (inférieure si minimisation) à la somme des satisfactions des deux biens s'ils étaient pris isolément (vision cardinale de la super-additivité).

– Demandes de l'agent 1 :

$$d_{x_1}(p) = d_{y_1}(p) = \frac{3p_x + 7p_y}{p_x + p_y} \tag{2.6}$$

– Demandes de l'agent 2 :

$$d_{x_2}(p) = d_{y_2}(p) = \frac{7p_x + 3p_y}{p_x + p_y} \tag{2.7}$$

– Apurement des marchés :

$$d_{x_1}(p) + d_{x_2}(p) = 10 \tag{2.8}$$

(On aura également $d_{y_1}(p) + d_{y_2}(p) = 10$)

$p_x = p_y = \frac{1}{2} \Rightarrow ((5,5)(5,5))$ est un équilibre, mais on a également les équilibres suivants :

$p_x = \frac{1}{4}, p_y = \frac{3}{4} \Rightarrow ((6,6)\,(4,4))$

$p_x = \frac{3}{4}, p_y = \frac{1}{4} \Rightarrow ((4,4)\,(6,6))$

Il y a en fait un continuum d'équilibre. Les allocations varient de $(3,3)$, pour l'individu 1, à $(7,7)$.

Représentation graphique

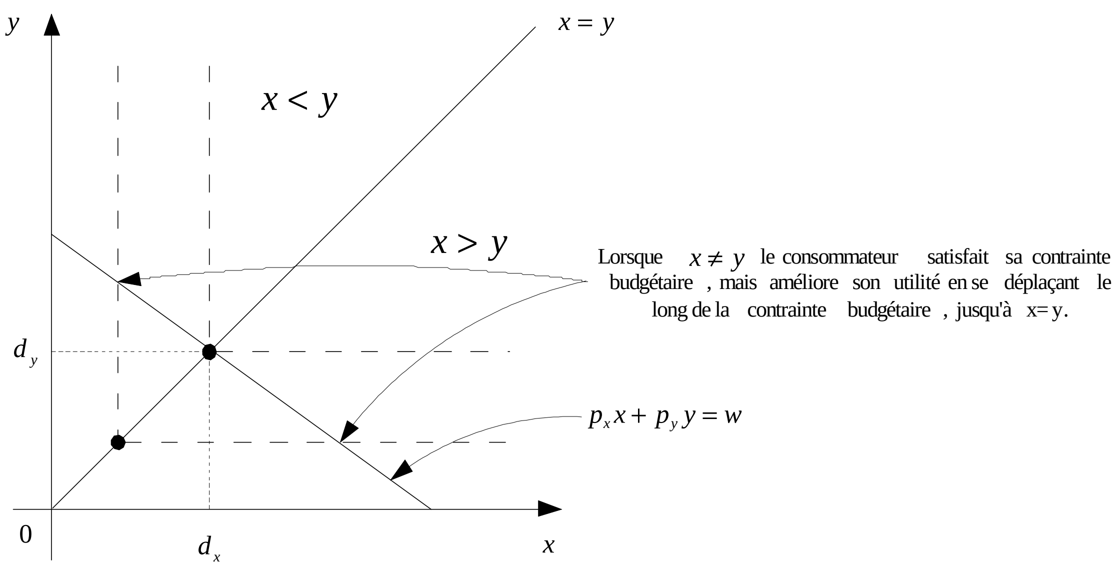


Fig. 2.2: Fonctions de Leontiev

III - Fonctions d'utilité linéaires

La démarche qui consiste à déterminer les demandes de chaque agent, puis à exploiter l'apurement des marchés, est toujours valide (définition de l'équilibre concurrentiel), mais il faut prêter attention au fait que les optima des agents sont atteints "au bord".

– Demande de l'agent 1 :

La courbe d'indifférence a pour pente $-a$

La contrainte budgétaire a pour pente $\dfrac{-p_x}{p_y}$

Si $a < \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow d_{x_1} = 0$

Si $a > \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow d_{y_1} = 0$

Si $a = \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow$"tout convient"

– Demande de l'agent 2 :

La courbe d'indifférence a pour pente $\dfrac{-1}{a}$

Si $\dfrac{1}{a} < \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow d_{x_2} = 0$

Si $\dfrac{1}{a} > \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow d_{y_2} = 0$

Si $\dfrac{1}{a} = \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow$"tout convient"

– Vérifions si les demandes sont compatibles

$0 < a < 1 \Rightarrow a < \dfrac{1}{a}$

On peut avoir :

$$\begin{array}{lll} \dfrac{p_x}{p_y} < a < \dfrac{1}{a} \Rightarrow d_{y_1} = d_{y_2} = 0 & \Rightarrow \text{Pas d'apurement possible} \\ a < \dfrac{1}{a} < \dfrac{p_x}{p_y} \Rightarrow d_{x_1} = d_{x_2} = 0 & \Rightarrow \text{Pas d'apurement possible} \\ a < \dfrac{p_x}{p_y} < \dfrac{1}{a} \Rightarrow d_{x_1} = 0,\ d_{y_2} = 0 & \Rightarrow \text{Pas de contradiction} \end{array} \tag{2.9}$$

On va avoir $d_{y_1} = 2,\ d_{x_2} = 2$

Par la contrainte budgétaire : $p_x d_{x_i} + p_y d_{y_i} = p_x + p_y\ (i = 1, 2) \Rightarrow p_x = p_y \Leftrightarrow \dfrac{p_x}{p_y} = 1$

IV - Fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante

Soient $u^1(x, y) = -2\left(\dfrac{1}{8}x^{-2} + y^{-2}\right)$ et $u^2(x, y) = -2\left(x^{-2} + \dfrac{1}{8}y^{-2}\right)$ les fonctions d'utilités des agents 1 et 2 et $e^1 = (1, 0)$ et $e^2 = (0, 1)$ les dotations initiales de ces agents.

Les hypothèses du théorème standard d'existence d'équilibre concurrentiel sont satisfaites : les fonctions d'utilité sont strictement croissantes et strictement quasi-concaves, la dotation initiale totale de chaque bien est positive. Il existe bien un équilibre.

– Demande de l'agent 1 en bien x :

$$TMS^1_{y\to x} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x}}{\frac{\partial u_1}{\partial y}} = \frac{y^3}{8x^3} = \frac{p_x}{p_y} = p \quad \Leftrightarrow y^3 = 8px^3 \tag{2.10}$$
$$\Leftrightarrow y = 2p^{\frac{1}{3}}x$$

Par la contrainte budgétaire :

$$\begin{aligned} px + y &= p \\ px + 2p^{\frac{1}{3}}x &= p \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$d_{x_1}(p) = \left(1 + 2p^{\frac{-2}{3}}\right)^{-1} = \frac{p}{p + 2p^{\frac{1}{3}}} \tag{2.12}$$

– Demande de l'agent 2 en bien x :

$$TMS^2_{y\to x} = \frac{8y^3}{x^3} = p \quad \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{3}}x \tag{2.13}$$

Par la contrainte budgétaire :

$$px + y = 1 \tag{2.14}$$

$$d_{x_2}(p) = \left(1 + \frac{1}{2}p^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}p^{\frac{1}{3}}} \tag{2.15}$$

– Apurement du marché du bien x :

$$\left(1 + 2p^{\frac{-2}{3}}\right)^{-1} + \left(p + \frac{1}{2}p^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = 1$$

On pose $p^{\frac{1}{3}} = z$

$$\left(1 + 2z^{-2}\right)^{-1} + \left(z^3 + \frac{1}{2}z\right)^{-1} = 1$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow z^3 + \tfrac{1}{2}z + 1 + 2z^{-2} = \left(1 + 2z^{-2}\right)\left(z^3 + \tfrac{1}{2}z\right) \\ &\Leftrightarrow 2z^3 - z^2 + z - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\left(z^3 - 1\right) - z(z-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z-1)\underbrace{\left(2z^2 + z + 2\right)}_{>0} = 0 \end{aligned}$$

Il y a une unique solution : $z = 1 \Rightarrow p = 1$

$\Rightarrow d_{x_1} = \dfrac{1}{3}, d_{x_2} = \dfrac{2}{3}$ (En remplaçant p par 1 dans $d_{x_1}(p)$ et $d_{x_2}(p)$)

Par symétrie, $d_{y_1} = \dfrac{2}{3}, d_{y_2} = \dfrac{1}{3}$

A. Équilibre concurrentiel (suite)

$$
\begin{aligned}
e^1 = e^2 &= (1,1)\\
U^1(x,y) &= x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} \text{si } x \leq y\\
U^1(x,y) &= x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \text{si } x > y\\
U^2(x,y) &= x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} \text{si } x > y
\end{aligned}
$$

1. Représentez quelques courbes d'indifférence du consommateur 1. Montrez que les préférences de ce consommateur sont continues, strictement croissantes mais non convexes (ni différentiables partout)

La fonction d'utilité $U^1(x,y)$ est une fonction de Cobb Douglas pour $x \leq y$ ou $x > y$.

– $(a,b) \geq (x,y) \Rightarrow U^1(a,b) > U^1(x,y)$

$\Longrightarrow$ L'utilité du consommateur est strictement croissante. Ses courbes d'indifférences dans le plan (x,y) sont strictement décroissantes.

– $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ x<y}} U^1(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(a,a)\\ x>y}} U^1(x,y) = U^1(a,a) = a$

$\Rightarrow$ Les courbes d'indifférences du consommateur 1 sont continues.

– $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} \dfrac{dU^1(x,y)}{d_x} = \lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} \dfrac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}y^{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4}$

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} \frac{dU^1(x,y)}{d_x} = \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{-3}{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} \frac{dU^1(x,y)}{d_x} \neq \lim_{\substack{x\to y\\ x>y}} \frac{dU^1(x,y)}{d_x}$$

$\Longrightarrow$ Les courbes d'indifférences ne sont pas différentiables en leur jonction (sur la bissectrice $x = y$)

– Le point (1,1) appartient à la corde reliant les points $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Or $U^1(1,1) = 1$

$U^1(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = U^1\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \leq 1$

$\Longrightarrow$ Les préférences de l'agent 1 ne sont pas convexes.

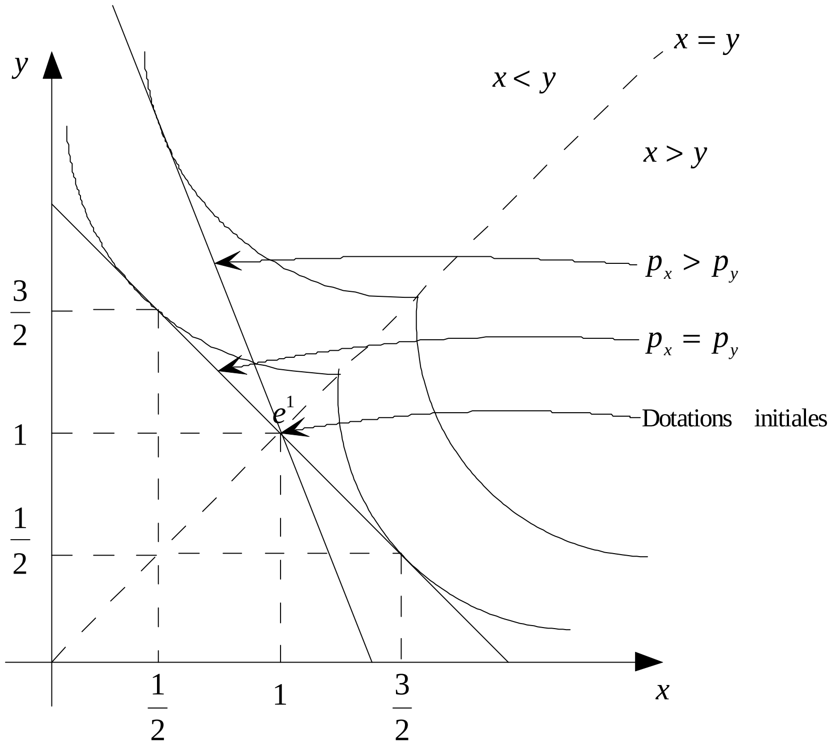


Fig. 2.3: Fonction d'utilité de Cobb Douglas pour l'agent 1

2. Déterminez la correspondance de demande du consommateur 1. Que se passe t-il quand $p_x = p_y$? Représentez graphiquement la demande en bien x en fonction de p_x, en posant $p_y = 1$.

– Si $p_x > p_y$, l'agent maximise son utilité en choisissant $x < y$
– Si $p_x < p_y$, l'agent maximise son utilité en choisissant $x > y$
– Si $p_x = p_y$, l'agent maximise son utilité en choisissant $x = y$

– Si $p_x > p_y$

$$d_x^1(p) = \frac{1}{4}\frac{p_x + p_y}{p_x} \tag{2.16}$$

$$d_y^1(p) = \frac{3}{4}\frac{p_x + p_y}{p_y} \tag{2.17}$$

– Si $p_x < p_y$, la pente de la contrainte budgétaire

$$d_x^1(p) = \frac{3}{4}\frac{p_x + p_y}{p_x} \tag{2.18}$$
$$d_y^1(p) = \frac{1}{4}\frac{p_x + p_y}{p_y} \tag{2.19}$$

Si $p_x = p_y$, le rapport des prix des biens est égal à 1. La pente de la contrainte budgétaire est de -1.

$$d^1(p) = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \right\} \tag{2.20}$$

Si $p_y = 1$, $d_x^1(p) = \frac{3}{4}\frac{1 + p_x}{p_x}$

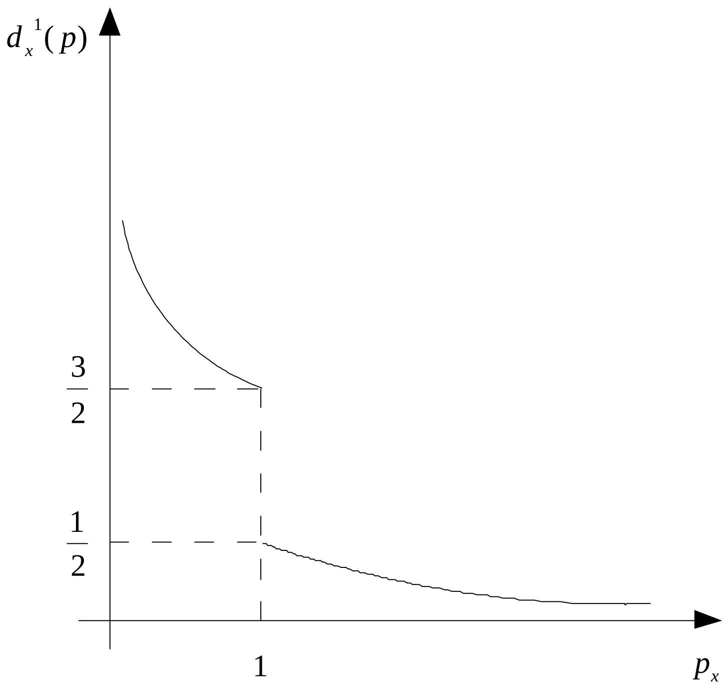


Fig. 2.4: Demande de bien x en fonction de Px

On note que la courbe est discontinue.

3. Montrez que l'économie constituée des agents 1 et 2 n'a pas d'équilibre concurrentiel.

$$d_x^2(p) = \frac{1}{2}\frac{p_x + p_y}{p_x} \tag{2.21}$$

$$d_x^2(p) = \frac{1}{2}\frac{p_x + p_y}{p_y} \tag{2.22}$$

Normalisons les prix : $p_x + p_y = 1$

Alors $p_x \leq p_y \Leftrightarrow px \leq \frac{1}{2}$

La condition d'apurement des marchés est la suivante :

$$d_x^1(p) + d_x^2(p) = 2 \tag{2.23}$$

– Si $p_x \leq \frac{1}{2}$,

$$\frac{3}{4p_x} + \frac{1}{2p_x} = 2 \Leftrightarrow p_x = \frac{5}{8} \Rightarrow \text{Apurement impossible} \tag{2.24}$$

– Si $p_x > \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{4p_x} + \frac{1}{2p_x} = 2 \Leftrightarrow p_x = \frac{3}{8} \Rightarrow \text{Apurement impossible} \tag{2.25}$$

4. Considérons maintenant une économie comprenant 4 agents dans laquelle deux agents ont les mêmes préférences et la même dotation initiale que l'agent 1, tandis que les deux autres sont semblables à l'agent 2. Montrez que cette économie a un équilibre concurrentiel et déterminez le.

Dans la nouvelle économie, on a un équilibre avec $p_x = p_y = \frac{1}{2}$. La première "copie" de l'agent 1 demande $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. La seconde copie de l'agent 1 demande $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ et les deux copies de l'agent 2 demandent (1,1). Les marchés s'apurent (Répliquer les agents pour se libérer des non convexités est un procédé général).

B. Optimum de Pareto, théorèmes du bien-être

I - Fonctions d'utilité de Cobb-Douglas

1. Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth

$$TMS^1_{y\to x}(x^1,y^1) = \frac{\frac{\partial U^1}{\partial x^1}}{\frac{\partial U^1}{\partial y^1}} = \frac{y^1}{3x^1} \tag{2.26}$$

$$TMS^2_{y\to x}(x^2,y^2) = \frac{\frac{\partial U^2}{\partial x^2}}{\frac{\partial U^2}{\partial y^2}} = \frac{3y^2}{x^2} \tag{2.27}$$

En tenant compte de la condition de faisabilité, l'égalité $TMS^1_{y\to x} = TMS^2_{y\to x}$ nous donne l'équation de la courbe des contrats.

$$\frac{y^1}{3x^1} = \frac{3(2-y^1)}{2-x^1}$$

$$\Leftrightarrow 9x^1 - 4x^1y^1 - y^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^1 = \frac{9x^1}{1+4x^1} \tag{2.28}$$

$$\frac{dy^1}{dx^1} = \frac{9}{(1+4x^1)^2} > 0$$

$$\frac{d^2y^1}{d(x^1)^2} = \frac{-18}{(1+4x^1)^3} < 0$$

La courbe des contrats est croissante et concave.

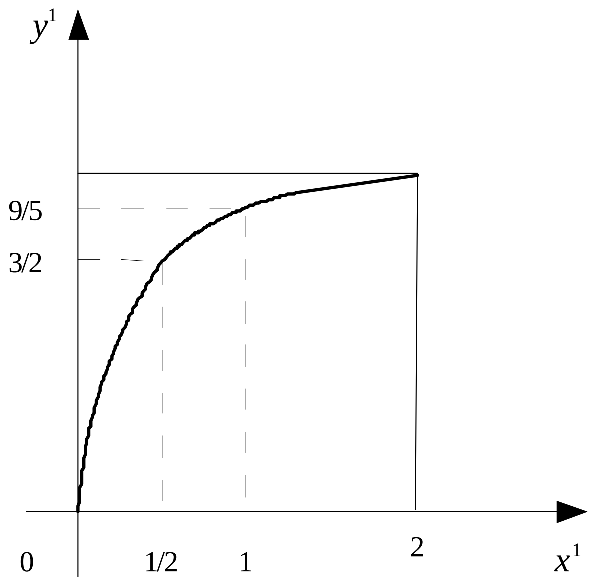


Fig. 2.5: Courbe des contrats. Fonctions d'utilité de Cobb-Douglas

2. Vérifiez, si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.

On a vu précédemment que $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ était une allocation d'équilibre concurrentiel. En cette allocation, $TMS^1_{y\to x} = TMS^2_{y\to x} = \frac{p_x}{p_y}$. Cette allocation est bien sur la courbe des contrats $y^1 = \frac{9x^1}{1+4x^1}$

3. Le cas échéant, montrez que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminez ce transfert.

$z = \left[\left(1, \frac{9}{5}\right), \left(1, \frac{1}{5}\right)\right]$ est une allocation Pareto-optimale pour laquelle toutes les quantités de biens sont strictement positives. Compte tenu des propriétés des fonctions d'utilité (strictement croissantes, quasi-concaves), le second théorème du bien être s'applique. Les prix sont donnés par :

$$\frac{p_x}{p_y} = TMS^1_{y\to x} = \frac{\frac{9}{5}}{3} = \frac{3}{5} = TMS^2_{y\to x} \tag{2.29}$$

$z = \left[\left(1, \frac{9}{5}\right), \left(1, \frac{1}{5}\right)\right]$ est une allocation concurrentielle si les dotations initiales sont $\left(1, \frac{9}{5}\right)$ et $\left(1, \frac{1}{5}\right)$ et les prix $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

On peut passer de $[(1,1),(1,1)]$ à $\left[\left(1, \frac{9}{5}\right), \left(1, \frac{1}{5}\right)\right]$ en effectuant un transfert de $\frac{4}{5}$ de bien y de l'agent 2 à l'agent 1. Mais il suffit que l'agent 1 ait la richesse $\frac{3}{5} + \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$ et l'agent 2 $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, tandis que les richesses initiales sont $\frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$ pour chacun. Il suffit donc que l'agent 2 transfère $\frac{4}{5}$ unités de richesse à l'agent 1 (cohérent avec $\frac{4}{5}$ de bien y au prix $p_y = 1$).

II. Fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante

1. Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth

$$TMS^1_{y\to x}(x^1, y^1) = \sqrt{\frac{y^1}{x^1}}$$
$$TMS^2_{y\to x}(x^2, y^2) = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}}$$

En tenant compte de la condition de faisabilité, l'égalité $TMS^1 = TMS^2$ nous donne l'équation de la courbe des contrats : $y^1 = x^1$

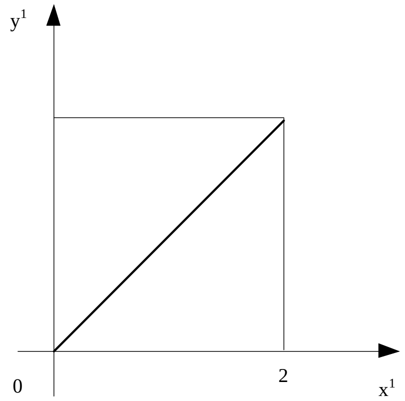


Fig. 2.6: Courbe des contrats. Fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante

2. Vérifiez, si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.

– Demande de l'agent 1

$$\begin{cases} TMS^1_{y\to x}(x^1, y^1) = \sqrt{\frac{y^1}{x^1}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x^1 + p_y y^1 = \frac{1}{2}p_x + p_y \end{cases} \tag{2.30}$$

$$p_x x^1 + p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x^1 = \frac{1}{2}p_x + p_y \tag{2.31}$$

$$d_{x_1}(p) = \frac{\frac{1}{2}p_x + p_y}{p_x\left(1 + \frac{p_x}{p_y}\right)} \tag{2.32}$$

– L'agent 2 a la même fonction d'utilité, mais n'a pas la même dotation initiale.

$$\begin{cases} TMS^2_{y\to x}(x^2, y^2) = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x^2 + p_y y^2 = \frac{3}{2}p_x + p_y \end{cases} \tag{2.33}$$

$$p_x x^2 + p_y \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2 x^2 = \frac{3}{2}p_x + p_y \tag{2.34}$$

$$d_{x_2}(p) = \frac{\frac{3}{2}p_x + p_y}{p_x\left(1 + \frac{p_x}{p_y}\right)} \tag{2.35}$$

– Apurement du marché de x :

$$\begin{aligned} d_{x_1}(p) + d_{x_2}(p) &= 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}p_x + p_y + \frac{3}{2}p_x + p_y = 2p_x\left(1 + \frac{p_x}{p_y}\right) \end{aligned}$$

$$p_x + p_y = p_x\left(1 + \frac{p_x}{p_y}\right)$$

$$\Leftrightarrow p_x = p_y$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} d_{x_1} = \frac{3}{4}, d_{x_2} = \frac{5}{4} \\ d_{y_1} = \frac{3}{4}, d_{y_2} = \frac{5}{4} \end{array}$$

3. Le cas échéant, montrez que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminez ce transfert.

$z = [(1,1),(1,1)]$ est une allocation Pareto-optimale pour laquelle toutes les quantités de bien sont supérieures à zéro. Les fonctions d'utilité sont strictement croissantes et quasi-concaves. Le second théorème du bien être s'applique. Les prix sont donnés par $\frac{p_x}{p_y} = TMS^1_{y\to x} = 1 = TMS^2_{y\to x} \Rightarrow p_x = p_y$. $z = [(1,1),(1,1)]$ est une allocation concurrentielle si les dotations initiales sont $[(1,1),(1,1)]$ et les prix $(1,1)$.

On peut passer de $\left[\left(\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{3}{2},1\right)\right]$ à $[(1,1),(1,1)]$ par un transfert de $\frac{1}{2}$ de bien x de l'agent 2 à l'agent 1. Il suffit de faire un transfert de richesse. On part de $\frac{3}{2}$ pour l'agent 1 et $\frac{5}{2}$ pour l'agent 2. Il faut arriver à 2 pour chacun. Il faut donc transférer $\frac{1}{2}$ unité de richesse de l'agent 2 à l'agent 1 (ce qui est cohérent avec le transfert d'une $\frac{1}{2}$ unité de bien x de l'agent 1 à l'agent 2.

III. Fonctions d'utilité linéaires

1. Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth

Comme de telles fonctions donnent typiquement lieu à des solutions en coin, on considère le problème d'optimisation qui permet de trouver les optima de Pareto.

$$\begin{cases} \max\limits_{(x^1,y^1),(x^2,y^2)} \alpha\left(2x^1 + y^1\right) + (1-\alpha)(x^2 + 2y^2) \\ sc \\ x^1 + x^2 = 1 \quad\quad , x_i \geq 0 \\ y^1 + y^2 = 1 \quad\quad , y_i \geq 0 \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\Leftrightarrow \max_{(x^1,y^1)} x^1(3\alpha - 1) + y^1(3\alpha - 2) \qquad\qquad 0 \leq x^1 \leq 1,\ 0 \leq y^1 \leq 1$$

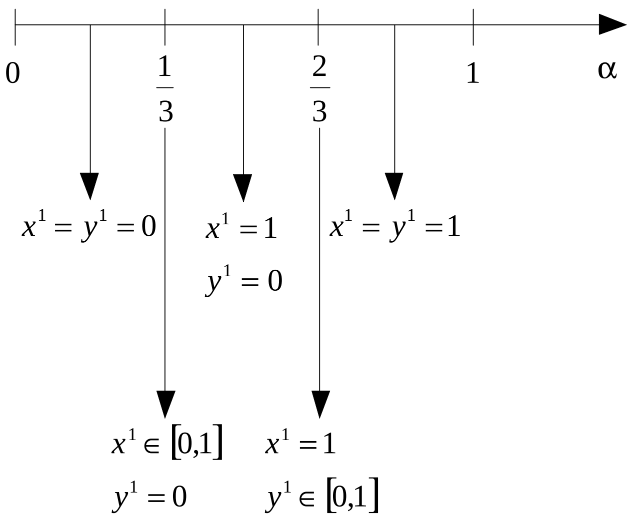


Fig. 2.7: Solutions en fonction de α

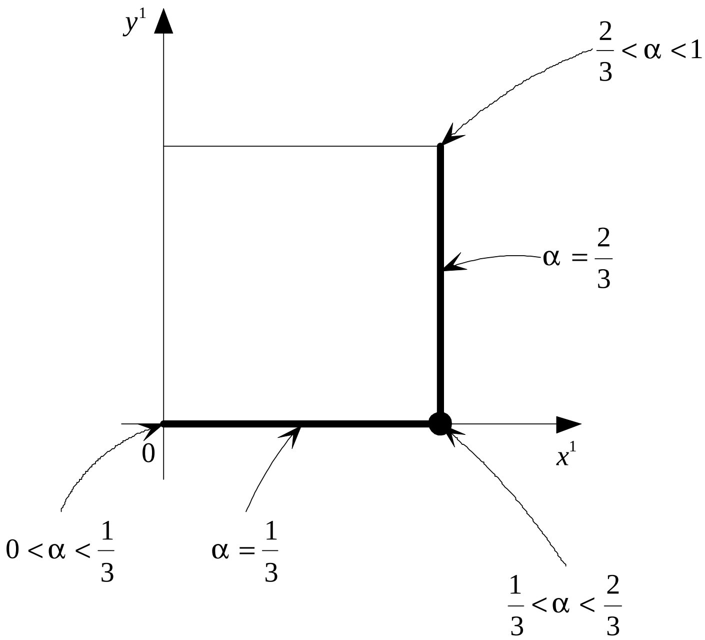


Fig. 2.8: Courbe des contrats. Fonctions d'utilité linéaires

2. Vérifiez, si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.

On ne peut répondre à cette question car on ne dispose pas des dotations initiales de chacun des agents. Si celles-ci sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pour chacun, on trouve un seul équilibre $p_x = p_y, (d_{x_1}, d_{y_1}) = (1, 0), (d_{x_2}, d_{y_2}) = (0, 1)$ (Comme vu précédemment).

3. Le cas échéant, montrez que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminez ce transfert.

Il n'y a pas de z qui soit donné.

IV.

Soit $u^1(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}, u^2(x, y) = x + y$

$e^1 = (2, 1)$, $e^2 = (1, 2)$

$z = \left[\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)\right]$

1. Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth

Optima intérieurs $TMS^1 = TMS^2 = 1 \Rightarrow y^1 = 3x^1$

A quoi s'ajoute le bord $x^1 \geq 1, y^1 = 3$

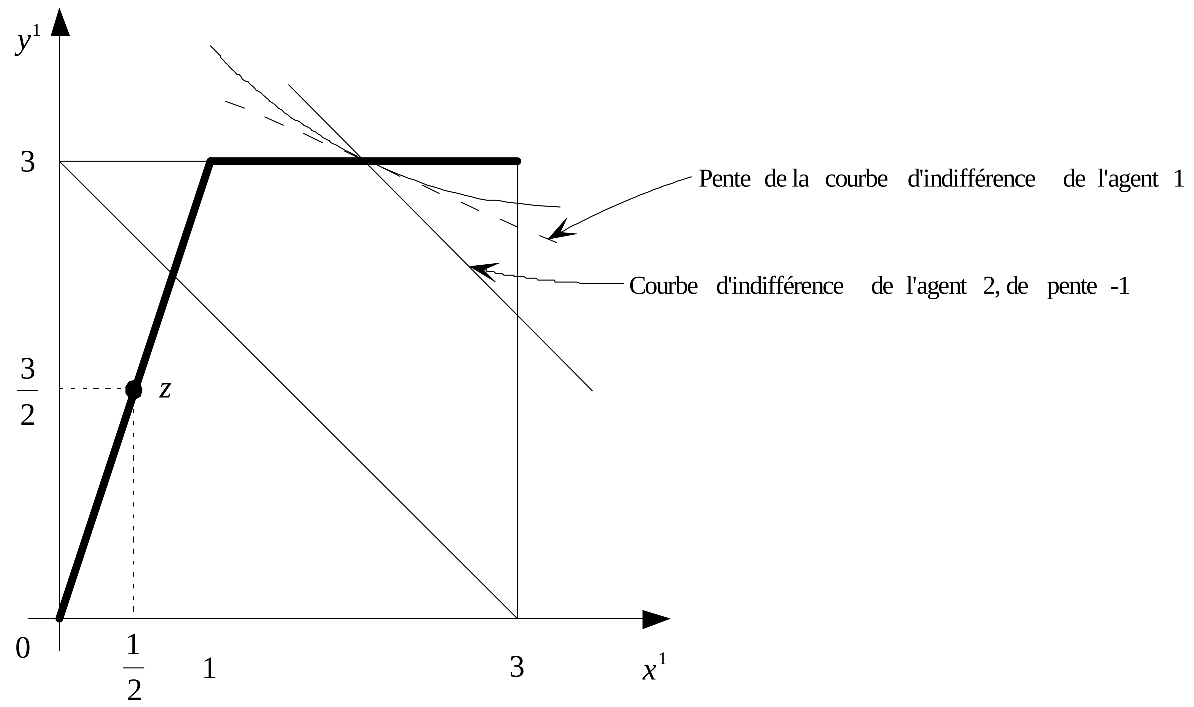


Fig. 2.9: Courbe des contrats. Fonctions d'utilité de Cobb-Douglas et fonctions d'utilité linéaires

Si $x^1 \geq 1$ et $y^1 = 3$, $TMS^1 \leq 1$ tandis que l'on a toujours $TMS^2 = 1$. On voit donc graphiquement qu'il n'est pas possible d'améliorer le sort des deux agents.

2. Vérifiez, si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.

– Demande de l'agent 1 :

$$\begin{cases} \dfrac{y^1}{3x^1} = \dfrac{p_x}{p_y} \\ p_x x^1 + p_y y^1 = 2p_x + p_y \end{cases}$$

$$d_{x_1}(p) = \frac{2p_x + p_y}{4p_x}$$

– Demande de l'agent 2 :

$$\begin{cases} \max(x^2 + y^2) \\ sc \\ p_x x^2 + p_y y^2 = p_x + 2p_y \end{cases}$$

Si $\dfrac{p_x}{p_y} < 1,\ y^2 = 0$

Si $\dfrac{p_x}{p_y} > 1,\ x^2 = 0$

– Equilibre : $p_x = p_y, d_{x_1} = \dfrac{3}{4}, d_{x_2} = \dfrac{9}{4}$ (apurement du bien 1).

Par les contraintes budgétaires, $\dfrac{3}{4} + d_{y_1} = 3$

$$d_{y_1} = \frac{9}{4}$$
$$d_{y_2} = \frac{3}{4}$$

Cet équilibre est à l'intersection de la courbe des contrats et de la contrainte budgétaire.

3. Le cas échéant, montrez que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminez ce transfert.

$z = \left[\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right), \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)\right]$ est une allocation Pareto-optimale pour laquelle toutes les quantités de bien sont supérieures à zéro. Les fonctions d'utilité sont strictement croissantes et quasi-concaves. Le second théorème du bien être s'applique. Les prix sont donnés par $\dfrac{p_x}{p_y} = TMS^1_{y\to x} = 1 = TMS^2_{y\to x} \Rightarrow p_x = p_y$. z est une allocation concurrentielle pour autant que le budget de l'agent 1 soit $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} = 2$ et que celui de l'agent 2 soit $\dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = 4$. Initialement, ces budgets sont respectivement $2 + 1 = 3$ et $1 + 2 = 3$. L'agent 1 doit donc transférer 1 unité de richesse à l'agent 2.

Chapitre 3

Économies avec production

III **1 - Déterminer la fonction de demande $(d_x(w,\pi), d_t(w,\pi))$ du consommateur, en termes de denrée alimentaire et de travail, en fonction du salaire horaire ω et du profit πde l'entreprise.**

production

y^* sol. de $\max p.y$ sous $y \in Q$

y^* efficace $\Leftrightarrow \nexists y \in Q \quad y^\ell \geq y^{*\ell} \quad \forall \ell$

$y^k > y^{*k} \quad \exists k.$

y^* pas efficace $\Rightarrow \exists y \in Q$ — $p.y > p.y^*$.

III. Robinson-Crusoé.

1) fn de demande du consommateur $\boxed{d(\omega,\pi)}$ $\quad y = 24 - t$

$R = 24\omega + \pi$

Rappel $u(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$

$TMS_{y \to x} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{\omega} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{24-t}{x} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\omega}$

CB $\begin{cases} \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{24-t}{x} = \frac{1}{\omega} \\ \underbrace{x + \omega(24-t)}_{\text{dépenses}} = \underbrace{24\omega + \pi}_{\text{gains}} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = \omega t + \pi}$

$\frac{x}{\omega} = t + \frac{\pi}{\omega}$

exactement comme dans TD1. Sauf que le revenu du consommateur intègre le profit de l'entreprise.

$24 - t = x \cdot \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\omega}$

$\boxed{t = 24 - x\frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\omega}}$

$t = 24 - \frac{1-\alpha}{\alpha}\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right)$

$t + \frac{1-\alpha}{\alpha} t = 24 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{\omega}$

$t\left(\frac{\alpha + 1 - \alpha}{\alpha}\right) = $ —

$x^* = \omega\left[24\alpha - (1-\alpha)\frac{\pi}{\omega}\right] + \pi$

$= \omega\, 24\alpha - (1-\alpha)\pi + \pi$

$\boxed{x^* = \alpha(24\omega + \pi)}$ (2)

$d_x(\omega,\pi)$ demande de bien

$\boxed{t^* = 24\alpha - (1-\alpha)\frac{\pi}{\omega}}$ (1)

$d_t(\omega,\pi)$ offre de travail

2 - On suppose que $g(t) = \sqrt{t}$. Montrer que les rendements sont décroissants. Déterminer la fonction d'offre $(x^*(w), t^*(w))$ et le profit maximal $\pi^*(w)$ de l'entreprise en fonction du salaire horaire w. Montrer qu'il existe un équilibre concurrentiel et déterminer le salaire horaire à l'équilibre.

3 - On suppose maintenant que $g(t) = at, a > 0$. Montrer que les rendements sont constants et qu'il existe un équilibre concurrentiel. Déterminer le salaire horaire à l'équilibre.

2) $g(t) = \sqrt{t}$

rendements décroissants : $g(kt) \leq k\, g(t) \quad k \geq 1$

$\sqrt{kt} = \sqrt{k}\sqrt{t} \leq k\sqrt{t}$ si $k \geq 1$.

fn d'offre $(x^*(\omega), t^*(\omega))$ - profit $\pi^*(\omega)$

$\max(x - \omega t)$ sous $x = \sqrt{t}$

$\Leftrightarrow \max(\sqrt{t} - \omega t) = \max \sqrt{t}(1 - \omega\sqrt{t})$ parab en $\sqrt{t}$

racines $\sqrt{t} = 0, \frac{1}{\omega}$

max en $\sqrt{t} = \frac{1}{2\omega}$

$$\boxed{t^*_p = \frac{1}{4\omega^2}} \quad \boxed{x^*_p = \frac{1}{2\omega}} \quad \text{offre du prod.}$$

$$\boxed{\pi^* = \underbrace{\frac{1}{2\omega}}_{x} - \underbrace{\frac{1}{4\omega}}_{\omega t} = \frac{1}{4\omega}}$$

en remplaçant ds la demande du conso

$$\left\{\begin{array}{l} t^*_c = 24\alpha - (1-\alpha)\cdot\frac{1}{4\omega^2} \\ x^*_c = \alpha\left(24\omega + \frac{1}{4\omega}\right) \end{array}\right\} \text{ demande du conso.}$$

apurement des marché.

$$x^*_c = x^*_p$$

$$\alpha\left(24\omega + \frac{1}{4\omega}\right) = \frac{1}{2\omega}$$

$$\alpha(96\omega^2 + 1) = 2$$

$$96\omega^2 = \frac{2}{\alpha} - 1 = \frac{2-\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2-\alpha}{96\alpha}}}$$

4 - On suppose enfin que $g(t) = t^2$. Montrer que les rendements sont croissants, que le "problème unifié" de Robinson : $\max_{x,t}\ u(x, 24-t)$ sous $x = t^2$, t≤ 24 a une solution (optimum de Pareto) mais que cet optimum n'est pas décentralisable et qu'il n'y a donc pas d'équilibre concurrentiel.

---

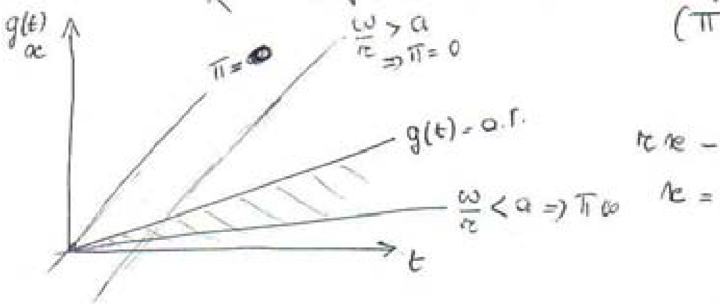
3) $x = at \quad a > 0$ rendement constant.

$g(kt) = akt = k\,g(t)$

équilibre $\Leftrightarrow$ pente de la fn de prod. $a = \frac{\omega^*}{r^*}$

$=$ pente des drs d'iso profit

$(\pi = rx - \omega t)$



$rx - \omega t = c$

$x = \frac{\omega}{r} t + c$

$\boxed{a = \omega^*}$ compte tenu de la normalisation.

prix déterminé indépendamment des préférences du conso.

$\boxed{\pi^* = 0}$

$$\begin{cases} t_c^* = t_p^* = 24\alpha \\ x_c^* = x_p^* = 24\alpha\omega = 24\alpha a. \end{cases}$$

---

4) $x = g(t) = t^2$ rendement croissant.

$\max_{x,t} u(x, 24-t)$ sous $x = t^2$, $t \leq 24$

$u(t^2, 24-t) = t^{2\alpha}(24-t)^{1-\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \cancel{t^{2\alpha}}(-1)(1-\alpha)\cancel{(24-t)^{-\alpha}} + 2\alpha t^{2\alpha-1}(24-t)^{\cancel{1-\alpha}} = 0$$

$$= (\alpha - 1) + 2\alpha \cdot \frac{24-t}{t} = 0$$

$$2\alpha \cdot \frac{24-t}{t} = 1 - \alpha$$

$$48\alpha - 2\alpha t = (1-\alpha)t$$

$$48\alpha = (2\alpha + 1 - \alpha)t = (\alpha+1)t$$

$\boxed{t^* = \frac{48\alpha}{\alpha+1}} \leq 24 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} \leq \frac{1}{2}$

$2\alpha \leq \alpha + 1$

$\alpha \leq 1$. ✓

$\boxed{x^* = \left(\frac{48\alpha}{\alpha+1}\right)^2}$

(4

pas décentralisable

équ. conc. $d_t^*(\omega, \pi) = 24\alpha - (1-\alpha)\frac{\pi}{\omega}$ avec ω prix du travail, ie salaire

$$t^* = \underbrace{24\alpha - (1-\alpha)\frac{\pi}{\omega}}_{\text{qté offerte par Robinson conso. en fn du salaire}} = \underbrace{\frac{48\alpha}{\alpha+1}}_{\text{qté optimale pr réaliser opti Pareto}}$$

$$\frac{1-\alpha}{\omega} \cdot \pi = 24\alpha - \frac{48\alpha}{\alpha+1}$$

$$\frac{1-\alpha}{\omega} \cdot \pi = 24\alpha\left[\frac{\alpha+1-2}{\alpha+1}\right]$$

$$\underbrace{\frac{1-\alpha}{\omega}}_{>0} \cdot \pi = 24\alpha \cdot \underbrace{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}}_{<0}$$

IV 1 - Déterminer la fonction de demande $\left(d_x^i(p,\pi), d_t^i(p,\pi)\right)$ de chaque consommateur i, en termes des biens x et y, en fonction du vecteur de prix $p=(p_x,p_y)$ et du profit π de l'entreprise.

2 - Déterminer la fonction d'offre $(x^*(p), y^*(p))$ et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise en fonction du vecteur de prix $p=(p_x,p_y)$

IV 2 consommateurs $e^1=(10,20)$
$e^2=(10,32)$ (5

$u^i(x,y)=x^{1/2}y^{1/2}=\sqrt{xy}$ $i=1,2$

$x=g(y)=2\sqrt{y}$ 1 entreprise possédée par conso 1.

(1) $TMS_{y\to x}=\dfrac{y}{x}$ pour chacun des conso $y=x\dfrac{p_x}{p_y}$

• $i=1$ - CB : $xp_x+yp_y=10p_x+20p_y+\pi$

$xp_x+xp_x=10p_x+20p_y+\pi$

$d^1(p,\pi)$ $\boxed{x^1=\dfrac{10p_x+20p_y+\pi}{2p_x}}$ $\boxed{y^1=\dfrac{10p_x+20p_y+\pi}{2p_y}}$

lo + to avec éco d'échange et pas π intérieur.

• $i=2$ CB $xp_x+yp_y=10p_x+32p_y$ pas de participation au profit

$d^2(p,\pi)$ $\boxed{x^2=\dfrac{10p_x+32p_y}{2p_x}}$ $\boxed{y^2=\dfrac{10p_x+32p_y}{2p_y}}$

(2) entreprise - $\max\limits_{x,y}(p_x x-p_y y)$ sous $x=2\sqrt{y}$

$\max\limits_{y}\ p_x 2\sqrt{y}-p_y y$

$=\sqrt{y}\left(2p_x-p_y\sqrt{y}\right)$

rac. $0,\ \dfrac{2p_x}{p_y}$

$\sqrt{y}=\dfrac{p_x}{p_y}$ $y^*=\left(\dfrac{p_x}{p_y}\right)^2$

$x^*=2\dfrac{p_x}{p_y}$

$\pi^*(p_x,p_y)=p_x\cdot 2\dfrac{p_x}{p_y}-p_y\left(\dfrac{p_x}{p_y}\right)^2=\dfrac{2p_x^2}{p_y}-\dfrac{p_x^2}{p_y}=\dfrac{p_x^2}{p_y}$

3 - Montrer qu'il existe un équilibre concurrentiel et le déterminer. Vérifier que cet équilibre est Pareto-optimal.

---

3) équilibre (6

apurement marché x

Somme de x

$$\underbrace{10}_{e_{1x}} + \underbrace{10}_{e_{2x}} + \underbrace{2\frac{p_x}{p_y}}_{+\pi} = x^1 + x^2 = \frac{20 p_x + 52 p_y + \frac{p_x^2}{p_y}}{2 p_x}$$

$(+ 2\sqrt{y})$

$p_x = 1$
$p_y = p$

$$20 + 2\cdot\frac{1}{p} = \frac{20 + 52p + \frac{1}{p}}{2}$$

$$\cancel{40}_{20} + 4\frac{1}{p} = \cancel{20} + 52p + \frac{1}{p}$$

$$20 + 3\cdot\frac{1}{p} - 52p = 0$$

$$20p + 3 - 52p^2 = 0$$

$$52p^2 - 20p - 3 = 0 \qquad \Delta' = 100 + 156 = 256$$

$$p = \frac{10 \pm 16}{52} \nearrow \frac{26}{52} = \frac{1}{2}.$$

$p_x = 1$, $p_y = 1/2$.

$x^* = 4$, $y^* = 4$, $\pi^* = 2$

$x^1 = \frac{10+10+2}{2} = 11$ $\qquad x^2 = \frac{10+16}{2} = 13$

$y^1 = \frac{10+10+2}{1} = 22$ $\qquad y^2 = \frac{10+16}{1} = 26.$

Optimum de Pareto TMS des 2 agents égaux = TMT de l'entreprise.

$$TMS^1 = \frac{y^1}{x^1} = \frac{11}{22} = \frac{y^2}{x^2} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2} = \frac{p_x}{p_y}.$$

reste à vérifier $= TMT = \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$ avec $Q : \{(x,y) : F(x,y) \leq 0\}$
output +
input −

$x = 2\sqrt{y}$ $\qquad x \leq 2\sqrt{y}$

$$\tilde{F}(x,y) = x - 2\sqrt{y} = x - 2\sqrt{-z} = F(x,z)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = -2(-1)\frac{1}{2}(-z)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{-z}} = \frac{1}{2}.$$

Chapitre 4

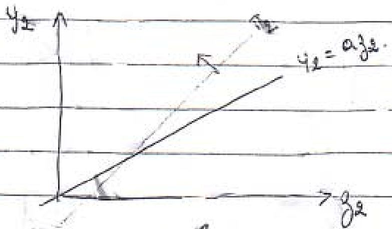
Externalités et biens publics

II. $y_1 = g_1(z_1) = z_1$ (3 biens, 1 fac, 2 de conso)

$y_2 = g_2(z_2) = a z_2$, $a > 0$ $\quad a = y_1$

conso a k unités du facteur de production.
utilité $u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$

1) * les entreprises ont une technologie à rendements constants. le profit sera donc nul.



$\Pi_2 = p_2 y_2 - z_2$ (car prix du fac $= 1$)

de pente $\frac{1}{p_2}$

calcul du prix
$\Leftrightarrow 0 = p_2 y_2 - z_2$
$\Leftrightarrow p_2 = \frac{z_2}{y_2} = \frac{1}{a}$

$\Rightarrow \boxed{p_2 = \frac{1}{a}}$, $a z_2 = y_2$

calcul du prix, pour firme 1 :
$\Pi_1 = p_1 y_1 - z_1$

de même, $\boxed{p_1 = 1}$ $\Leftrightarrow 0 = p_1 y_1 - z_1$, $z_1 = y_1$

pente :
$0 = p_2 y_2 - z_2$
$y_2 = z_2 / p_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}$

* conso $TMS = \frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2}$ $\Leftrightarrow p_2 x_2 = p_1 x_1$

CB $p_1 x_1 + p_2 x_2 = k$ $(+\pi(=0))$ car le profit est nul

$\Rightarrow$ demande $\boxed{x_1 = \frac{k}{2p_1}, \quad x_2 = \frac{k}{2p_2}}$

* apurement des marchés $\begin{cases} z_1 + z_2 = k \\ x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{x_1^* = y_1^* = \frac{k}{2}, \quad x_2^* = y_2^* = \frac{ka}{2}, \quad z_1^* = y_1^* = \frac{k}{2}, \quad z_2^* = \frac{y_2^*}{a} = \frac{k}{2}}$

$y = z_1$. $\qquad y_2 = a z_2$.

en tenant compte maintenant de $a = y_1$,

$$\boxed{x_2^* = y_2^* = \frac{k^2}{4}} = \frac{k}{2}$$

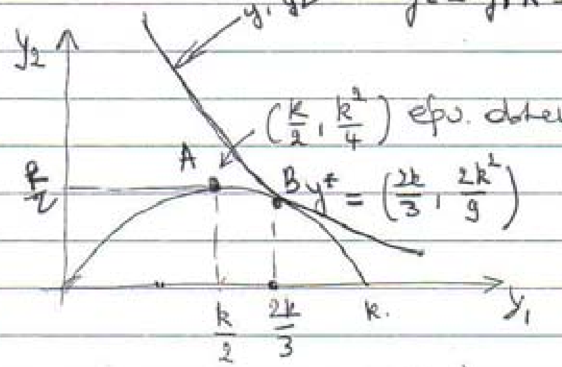
2) (y_1, y_2) réalisable $\iff$ $y_1 = z_1$

$y_2 = y_1 \cdot z_2$

$z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_1 + z_2 = k$

$y_2 = y_1\, z_2 = y_1(k - z_1) = y_1(k - y_1)$ parabole de rac. 0, k

$y_2 = y_1 k - y_1^2$ max en $\frac{k}{2}$.



3) max $y_1 y_2$ s.c. $y_2 \overset{(=)}{\leq} y_1(k - y_1)$ (maxi. front. production)

$x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ max $y_1^2(k - y_1) = \max k y_1^2 - y_1^3$

$2ky_1 - 3y_1^2 = 0 \iff 2k - 3y_1 = 0$

$y_1^* = \frac{2k}{3}$, $y_2^* = \frac{2k^2}{9}$ (Rappel : $y_2 = (k - y_1)y_1$ $\iff y_2 = \frac{2k}{3}\left(k - \frac{2k}{3}\right)$)

$y_1^{*②} > y_1^{*①}$ (cf graphique) ($y_2^{②} < y_2^{①}$ cf graphique)

4) on voit que les solutions sont différentes.
en particulier, l'équilibre n'est pas Pareto optimal
(la solution P.O. n'est pas "décentralisée"...).

Exo 4

5) Introduction d'une taxe

la CB du conso devient $p_1 x_1 + (p_2 + t) x_2 = k + T$
où T est la recette fiscale qui vient s'ajouter au revenu du consommateur

les demandes $x_1^* = \frac{k+T}{2p_1}$, $x_2^* = \frac{k+T}{2(p_2+t)}$

On a toujours $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{y_1^*}$, $z_1^* = y_1^*$, $z_2^* = \frac{y_2^*}{y_1^*}$

apurement $x_1^* = y_1^*$, $x_2^* = y_2^*$, $z_1^* + z_2^* = k$
$T = t x_2^* = t y_2^*$

Remarque : $T = t x_2^*$ fait partie de l'apurement des marchés mais n'est pas pris en compte comme contrainte

$$\rightarrow \quad x_1^* = \frac{k + t y_2^*}{2} = y_1^* \quad (1) \qquad \left(x_1^* = \frac{k+T}{2p_1} \right)$$

$$x_2^* = \frac{k + t y_2^*}{2\left(\frac{1}{y_1^*} + t\right)} = y_2^* \quad (2) \quad \text{(voir aussi à le fin)}$$

6) On cherche à vérifier s'il existe une solution pour t qui donne $(y_1^*, y_2^*) = \left(\frac{2k}{3}, \frac{2k^2}{9}\right)$ $\left(y_1^* = \frac{k + t y_2^*}{2} \right)$

$$(1) \quad \frac{2k}{3} = \frac{1}{2}\left(k + t\,\frac{2k^2}{9}\right) \iff kt = \frac{3}{2} \iff t = \frac{3}{2k}$$

On vérifie que (2) est alors vérifiée.

ou
On peut vouloir vérifier plus précisément que (1)(2) donnent bien une solution réalisable, $\forall t$, et visualiser mieux les choses...

tNIS

On reprend les équations (1) et (2) en omettant le *.

$$(1) \iff k + t y_2 = 2 y_1 \qquad (1')$$

$$(2) \iff k + t y_2 = 2\frac{y_2}{y_1} + 2 t y_2$$

$$k - t y_2 = 2\frac{y_2}{y_1} \qquad (2')$$

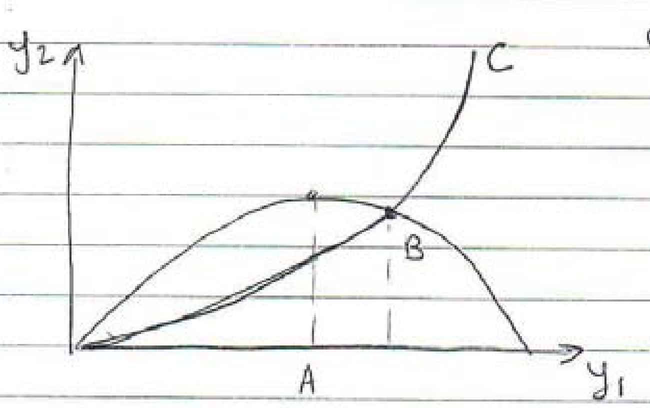
$$(1') + (2') \qquad 2k = 2y_1 + 2\frac{y_2}{y_1}$$

$$\iff \boxed{y_2 = y_1(k - y_1)}$$ Courbe qui délimite l'ens réalisable.

$$(1') - (2') \qquad 2t y_2 = 2y_1 - 2\frac{y_2}{y_1}$$

$$\iff \boxed{y_2 = \frac{y_1^2}{1 + t y_1}}$$ C

Courbe croissante, convexe qui intersecte la frontière réal. en y^* pour un choix de $t = \frac{3}{2k}$



Ex 6

II (biens publics cf P 7.6).

$u^1(x^1, y) = \ln x^1 + 2 \ln y$

$u^2(x^2, y) = 2 \ln x^2 + \ln y$

Chaque agent a initialement 15 unités de bien privé
fn de prod. $g(z) = z = y$.

(1) (x^1, x^2, y, z) réalisable

$\Leftrightarrow$ $x^1 > 0$, $x^2 > 0$, $y > 0$, $z = y$, $x^1 + x^2 + z = 30$ (1)

(15+15 dotations initiales)

(2) optima de Pareto

Condition de BLS (Condition de Bowen-Lindhal Samuelson).

$$\frac{\frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1, y)}{\frac{\partial u^1}{\partial x^1}(x^1, y)} + \frac{\frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2, y)}{\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x^2, y)} = g'(z)$$

$$\frac{2/y}{1/x^1} + \frac{1/y}{2/x^2} = 1$$

$$\frac{2x^1}{y} + \frac{x^2}{2y} = 1$$

$$\boxed{4x^1 + x^2 = 2y} \quad (2)$$

avec la condition de faisabilité (contrainte): $x^2 = 30 - x^1 - y$ (1)

d'où (2) $4x^1 + 30 - x^1 - y = 2y$

$3x^1 - 3y + 30 = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^1 = y - 10 \\ x^2 = 40 - 2y \\ 10 < y < 20 \end{array}} \quad \text{OP}$$

(et $z = y$)

(3) optima de Pareto avec contribution identique des 2 agents $x^1 = x^2$ (car mêmes dotations)

4) équilibre de Lindahl. Ex 17

(1). max $u^1(x^1, y^1)$ sous $x^1 + p^1 y^1 = 15$ (CB1)

$$THS^1 = \frac{1/x^1}{2/y^1} = \frac{1}{p^1}$$

$$\frac{y^1}{2x^1} = \frac{1}{p^1} \Leftrightarrow p^1 y^1 = 2x^1$$

d'où (CB1) $3x^1 = 15 \Rightarrow x^1 = 5$

$\Rightarrow y^1 = \frac{10}{p^1}$

(2) max $u^2(x^2, y^2)$ sous $x^2 + p^2 y^2 = 15$ (CB2)

$$THS^2 = \frac{2/x^2}{1/y^2} = \frac{1}{p^2}$$

$$\frac{2y^2}{x^2} = \frac{1}{p^2} \Leftrightarrow 2p^2 y^2 = x^2$$

d'où (CB2) $\frac{3}{2} x^2 = 15 \Rightarrow x^2 = 10$

$\Rightarrow y^2 = \frac{5}{p^2}$

$$y^1 = y^2 \Rightarrow \frac{10}{p^1} = \frac{5}{p^2} \Rightarrow \boxed{p^1 = 2p^2} \quad (*)$$

(3) entreprise max $[(p^1+p^2)y - y] \equiv \max [[(p^1+p^2) - 1] y]$ (Rendements constants)

$\Pi = 0 \Leftrightarrow y = (p_1+p_2) y$, $p_1 + p_2 = 1$

$p^1 + p^2 < 1 \Rightarrow y = 0$ imp.

$p^1 + p^2 > 1 \Rightarrow y \nearrow \infty$ "

$p^1 + p^2 = 1 \rightarrow$ profit nul - y indéfini

$\Rightarrow \boxed{p^1 + p^2 = 1}$ (// rendts cts).

$\Rightarrow p^1 = \frac{2}{3}$ $p^2 = \frac{1}{3}$ $\boxed{y = 15 \quad x^1 = 5 \quad x^2 = 10}$

(8) équilibre avec souscription EX 18

Conso 1 : $\max_{x^1, z^1, y} u^1(x^1, y)$ s.c. $x^1 = 15 - z^1$
$y = z^1 + z^2$

$\Leftrightarrow \max_{z^1} \ln(15 - z^1) + 2\ln(z^1 + z^2)$ z^2 donné
$\rightarrow z^1(z^2)$.

$$\frac{\partial u^1}{\partial z^1} = \frac{-1}{15 - z^1} + \frac{2}{z^1 + z^2} = \frac{30 - 3z^1 - z^2}{\underbrace{(15 - z^1)}_{>0}\underbrace{(z^1 + z^2)}_{>0}}$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial z^1} > 0 \text{ si } z^1 < \frac{30 - z^2}{3}$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial z^1} < 0 \text{ si } z^1 > \frac{30 - z^2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} z^1 &= \frac{30 - z^2}{3} && \text{si } z^2 \leq 30 \\ &= 0 && \text{si } z^2 > 30 \end{aligned}} \equiv z^1(z^2).$$

Conso 2 : $\max_{x^2, z^2, y} u^2(x^2, y)$ s.c. $x^2 = 15 - z^2$
$y = z^1 + z^2$

$\Leftrightarrow \max_{z^2} 2\ln(15 - z^2) + \ln(z^1 + z^2)$

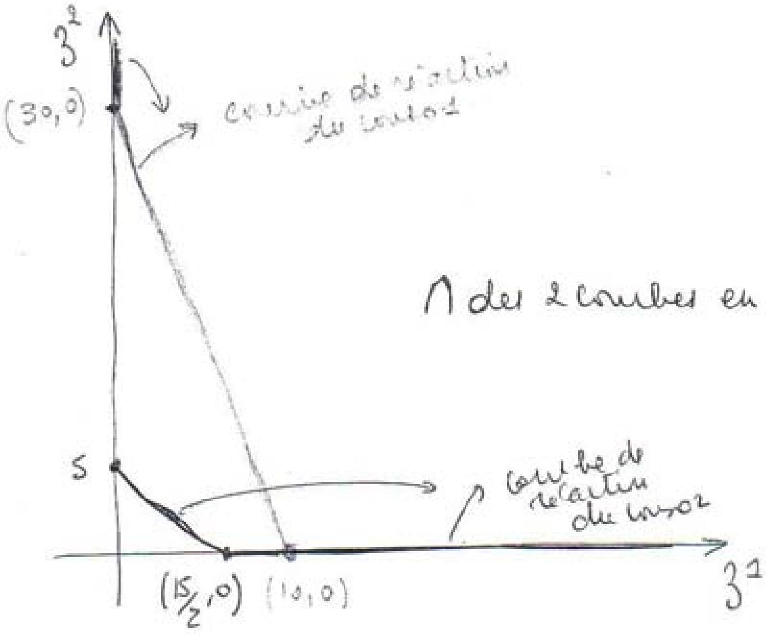
$$\frac{\partial u^2}{\partial z^2} = \frac{-2}{15 - z^2} + \frac{1}{z^1 + z^2} = \frac{15 - 2z^1 - 3z^2}{\underbrace{(15 - z^2)}_{>0}(z^1 + z^2)}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial z^2} > 0 \text{ si } z^2 < \frac{15 - 2z^1}{3}$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial z^2} < 0 \text{ si } z^2 > \frac{15 - 2z^1}{3}$$

Ex/

$$\boxed{\begin{aligned} z^2 &= \frac{15 - 2z^1}{3} && \text{si } z^1 \leq \frac{15}{2} \\ &= 0 && \text{si } z^1 > \frac{15}{2}. \end{aligned}}$$



$\cap$ des 2 courbes en (10,0)

$z^1 = 10$, $z^2 = 0$, $y = g^1 + g^2 = 10$

$x^1 = 5$ $x^2 = 15$

ne vérifie pas OP $\Rightarrow$ pas Pareto optimal.

Microéconomie 2

Annales

Université Paris-Dauphine
Département MIDO

Contrôle de Microéconomie 2, 6 avril 2007
Enseignant responsable: Françoise Forges

L'épreuve dure 2 heures. Les documents, les calculatrices, les téléphones portables et les agendas électroniques ne sont pas autorisés. Les réponses aux questions doivent être justifiées.

I. (12 pts) On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les fonctions d'utilité sont

$$u^1(x,y) = \frac{xy}{x+y},\ u^2(x,y) = \frac{xy}{x+4y}$$

et les dotations initiales sont $e^1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $e^2 = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.
1. (2 pts) A quelle classe ces fonctions d'utilité appartiennent-elles? Sont-elles (strictement) croissantes? (strictement) quasi-concaves?
2. (2 pts) Calculez le taux marginal de substitution $TMS_{y \to x}$ pour chacun des agents.
3. (2 pts) Déterminez la fonction de demande de chacun des agents.
4. (2 pts) Vérifiez que l'économie possède un équilibre concurrentiel et déterminez-en les prix et allocations, *en normalisant le prix du bien x à 1.*
5. (2 pts) Déterminez l'équation de la courbe des contrats.
6. (2 pts) Représentez les dotations initiales, l'allocation d'équilibre et la courbe des contrats dans une boîte d'Edgeworth.

II. (4 pts)
1. (2 pts) Enoncez la loi de Walras dans une économie d'échange; démontrez cette propriété (ou expliquez pourquoi elle est satisfaite)
2. (2 pts) Enoncez le premier théorème du bien-être; donnez une interprétation de ce résultat.

III. (4 pts) On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les fonctions d'utilité sont $u^1(x,y) = u^2(x,y) = \sqrt{xy}$ et la dotations initiale totale de chaque bien est 10.
1. (2 pts) Décrivez et représentez graphiquement l'ensemble V des utilités réalisables dans cette économie.
2. (2 pts) On considère la fonction d'utilité sociale $\Phi_\gamma(v^1, v^2) = \gamma v^1 + (1-\gamma)v^2$, $0 < \gamma < 1$. Quels sont les points de V qui maximisent $\Phi_\gamma(v^1, v^2)$ pour $\gamma = \frac{1}{2}$? Et pour $\gamma < \frac{1}{2}$? Et pour $\gamma > \frac{1}{2}$?

Corrigé du contrôle de micro économie II du 6/4/07.

I

1) $u^1(x,y) = \dfrac{xy}{x+y} = \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^{-1} = \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^{-1}$

$u^2(x,y) = \dfrac{xy}{x+4y} = \left(\dfrac{x+4y}{xy}\right)^{-1} = \left(4 \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^{-1}$

Ce sont des fns d'utilité à élasticité de substitution constante de param respectifs $a = b = 1$, $\rho = -1$ et $a = 4$, $b = 1$, $\rho = -1$.
Elles sont donc strictement croissantes et strictement quasi-concaves. (dém : voir TD + annexe)

2. $TMS^1_{y \to x} = \dfrac{\partial u^1/\partial x\,(x,y)}{\partial u^1/\partial y\,(x,y)}$

$\dfrac{\partial u^1}{\partial x}(x,y) = y \cdot \dfrac{(x+y) - x}{(x+y)^2} = \left(\dfrac{y}{x+y}\right)^2$

de même, $\dfrac{\partial u^1}{\partial y}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2$

$$\boxed{TMS^1_{y \to x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

- $\dfrac{\partial u^2}{\partial x}(x,y) = y\,\dfrac{(x+4y) - x}{(x+4y)^2} = \left(\dfrac{2y}{x+4y}\right)^2$

$\dfrac{\partial u^2}{\partial y}(x,y) = x\,\dfrac{(x+4y) - 4y}{(x+4y)^2} = \left(\dfrac{x}{x+4y}\right)^2$

$$\boxed{TMS^2_{y \to x} = \left(\frac{2y}{x}\right)^2}$$

3) fonction de demande de l'agent 1.

$$\begin{cases} \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \dfrac{p_x}{p_y} \iff y = x\sqrt{\dfrac{p_x}{p_y}} & (1) \\ \dfrac{1}{2}p_x + \dfrac{3}{2}p_y = x p_x + y p_y \iff p_x + 3p_y = 2(x p_x + y p_y) & (2) \end{cases}$$

$$(1)\text{ ds }(2)\quad p_x + 3p_y = 2\left(x p_x + x\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}\,p_y\right)$$
$$= 2x\left(p_x + \sqrt{p_x p_y}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}\,\frac{p_x + 3p_y}{p_x + \sqrt{p_x p_y}}}$$ si $p_x = 1$ et $p_y = p$ $$\boxed{x = \frac{1}{2}\,\frac{1+3p}{1+\sqrt{p}}}\ (a)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}\cdot\frac{p_x + 3p_y}{p_x + \sqrt{p_x p_y}}}$$ $$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p}}\,\frac{1+3p}{1+\sqrt{p}}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\,\frac{1+3p}{\sqrt{p}+p}}\ (b)$$

fonction de demande de l'agent 2

$$\left(\frac{2y}{x}\right)^2 = \frac{p_x}{p_y} \iff y = \frac{1}{2}x\sqrt{\frac{p_x}{p_y}} \qquad (1')$$

$$\frac{5}{2}p_x + \frac{1}{2}p_y = x p_x + y p_y \iff 5p_x + p_y = 2(x p_x + y p_y) \quad (2')$$

$$(1')\text{ ds }(2')\quad 5p_x + p_y = 2\left(x p_x + \frac{1}{2}p_y\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}\right)$$
$$= x\left(2p_x + \sqrt{p_x p_y}\right)$$

$$\boxed{x = \frac{5p_x + p_y}{2p_x + \sqrt{p_x p_y}}}$$ si $p_x = 1$ et $p_y = p$, $$\boxed{x = \frac{5+p}{2+\sqrt{p}}}\ (a')$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_x}{p_y}}\cdot\frac{5p_x + p_y}{2p_x + \sqrt{p_x p_y}}}$$ $$y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p}}\;\frac{5+p}{2+\sqrt{p}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(5p_x + p_y)}{2\sqrt{p_x p_y} + p_y}$$

$$\boxed{y = \frac{5+p}{2\left[2\sqrt{p}+p\right]}}\ (b')$$

4) <u>équ. concurrentiel</u>.

On sait qu'il en existe au moins un car les hypothèses du thm fondamental d'existence sont satisfaites.

apurement des marchés (a) pour x^1 + (a') pour $x^2 = 3$

$$\frac{1+3p}{2[1+\sqrt{p}]} + \frac{5+p}{2+\sqrt{p}} = 3$$

(on "voit" que $p=0$ et $p=1$ sont solutions)

$$\cancel{2}+\sqrt{p} + \cancel{6p} + 3p\sqrt{p} + \cancel{10} + 10\sqrt{p} + 2p + 2p\sqrt{p} =$$

dénominateur $4+6\sqrt{p}+2p$)

$$\cancel{12} + 12\sqrt{p} + 6\sqrt{p} + \cancel{6p}.$$

$$-7\sqrt{p} + 5p\sqrt{p} + 2p = 0$$

$(p \neq 0!)$

$$-7 + 5p + 2\sqrt{p} = 0$$

$$5p + 2\sqrt{p} - 7 = 0 \qquad \rho' = 1 + 35 = 36$$

$$\sqrt{p} = \frac{-1 \pm \sqrt{36}}{5} = 1$$ (rac. positive).

$\boxed{p=1}$ est solution.

$$x^1 = \frac{1}{2}\,\frac{1+3}{1+1} = 1 \implies x^2 = 2.$$

$$y^1 = \sqrt{\frac{1}{p}}\,x^1 = 1 \implies y^2 = 1$$

<u>allocation</u> $(1,1)$ pour l'agent 1

$(2,1)$ " " 2.

5) <u>Courbe des contrats</u>

$$\left(\frac{y^1}{x^1}\right)^2 = \left(\frac{2y^2}{x^2}\right)^2 \iff \frac{y^1}{x^1} = \frac{2y^2}{x^2}$$

et $x^1 + x^2 = 3$, $y^1 + y^2 = 2$

$$\boxed{\frac{y^1}{x^1} = \frac{2(2-y^1)}{3-x^1}}$$

(4

pour avoir la forme standard $y^1 = f(x^1)$:

$$y^1(3 - x^1) = 2x^1(2 - y^1)$$

$$3y^1 - x^1y^1 = 4x^1 - 2x^1y^1$$

$$4x^1 - x^1y^1 - 3y^1 = 0$$

$$\boxed{y^1 = \frac{4x^1}{x^1 + 3}}$$

$\frac{d}{dx^1} : \frac{12}{(x+3)^2} \geq 0$ ↗.

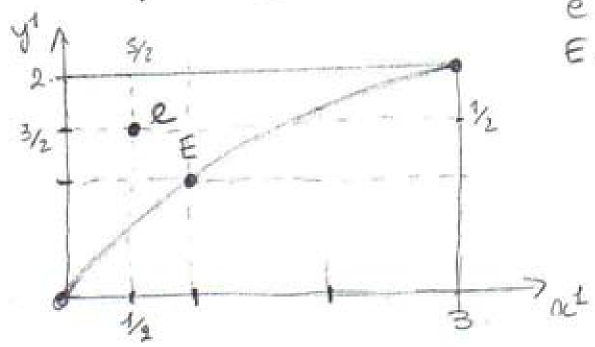
$\frac{d^2}{d(x^1)^2} : \frac{-24}{(x+3)^3} \leq 0$ concave.

passe par $(0,0)$, $(3,2)$, $(1,1)$, $(2, 8/5)$

6) boîte d'Edgeworth.

tot. de x : $1/2 + 5/2 = 3$

y : $3/2 + 1/2 = 2$



e = dot. init.
E = équ

II.

1) Soit une économie d'échange $\mathcal{E} = \{N, L, (u^i)_{1\leq i\leq n}, (e^i)_{1\leq i\leq n}\}$ dans laquelle les fonctions d'utilité sont toutes croissantes. Soit $d^i(p, e^i)$ la demande du consommateur i au prix $p \gg 0$ (supposée bien définie) - la loi de Walras dit que
$\forall i = 1, \ldots, n \quad \forall p \in \mathbb{R}^L_{++} \quad p \cdot d^i(p, e^i) = p \cdot e^i$
c.à.d de manière agrégée $p \cdot \sum_{i=1}^n d^i(p, e^i) = p \cdot \sum_{i=1}^n e^i$

Dém/Expl : $d^i(p, e^i)$ maximise $u^i(x)$ sous $p \cdot x \leq p \cdot e^i$ et si u^i est croissante, la contrainte budgétaire est saturée au maximum.

2) Soit $\mathcal{E} = \{N, L, (u^i)_{1\le i\le n}, (e^i)_{1\le i\le n}\}$ une économie d'échange dans laquelle les fonctions d'utilité sont croissantes.
Soit $(p, z) \in \mathbb{R}^L_+ \times (\mathbb{R}^L_+)^N$ un équilibre concurrentiel. Alors z est Pareto-optimale c.à.d il n'y a pas moyen de trouver y réalisable t.q. $u^i(y) \geq u^i(z)$ $\forall i$ avec au moins une inégalité stricte.

__Interprétation__: l'équilibre concurrentiel ne suppose aucune coordination des agents. Ceux-ci maximisent leur utilité individuelle sous contrainte budgétaire au prix p - les prix sont donnés, fixés pour ~~chaque agent~~ tous les marchés sont ainsi décentralisés. Le thm assure que malgré ce manque de coordination apparente, on arrive à une allocation qui ne peut pas être améliorée pour tous les agents simultanément c.à.d efficiente.

III.

1) On sait que PV, la frontière de Pareto de V, correspond aux utilités Pareto-optimales de l'économie. On a vu (en cours) que les optima de Pareto satisfaisaient $x^1 = y^1 = \alpha$ (courbe des contrats) $x^2 = y^2 = 10-\alpha$, $0 \leq \alpha \leq 10$.

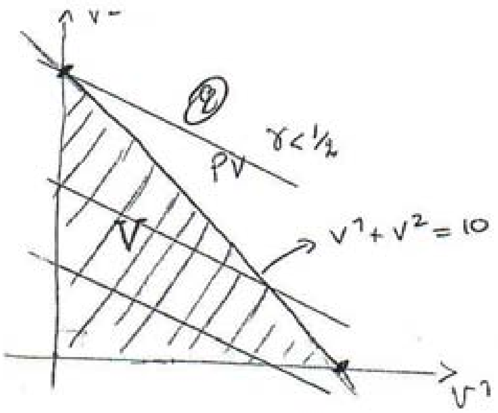
les utilités correspondantes sont

$$\underbrace{\sqrt{\alpha\alpha}}_{\text{agt } 1},\ \underbrace{\sqrt{(10-\alpha)(10-\alpha)}}_{\text{agt } 2} = (\alpha, 10-\alpha)$$

donc $PV = \{(\alpha, 10-\alpha) \mid 0 \leq \alpha \leq 10\}$

$= \{(v^1, v^2) : v^1 + v^2 = 10,\ v^1 \geq 0,\ v^2 \geq 0\}$.

$V = \{(v^1, v^2) : v^1 + v^2 \leq 10,\ v^1 \geq 0,\ v^2 \geq 0\}$.



2) $\max(\frac{1}{2}v^1 + \frac{1}{2}v^2)$ s.c. $(v^1, v^2) \in V$

les courbes de niveau de la fn objectif sont // à la frontière PV. <u>tous</u> les points de PV conviennent.

✱ $\max \gamma v^1 + (1-\gamma)v^2$ avec $\gamma < \frac{1}{2}$

les courbes de niveau de la fn objectif $\frac{\gamma}{1-\gamma}$ sont < 1 càd plus plats que la frontière de PV

→ sol. $(0, 10)$.

✱ de même si $\gamma > \frac{1}{2}$, sol. $(10, 0)$.

I.1. Analyse des propriétés de $u(x,y) = \frac{xy}{x+y}$ 2.1 (0)

- $u(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1}$. c'est donc une fonction d'utilité à élasticité de substitution constante, de paramètres $a = b = 1$, $\rho = -1$ (voir TD 1).

  On sait donc que cette fn d'utilité est strictement croissante et strictement quasi-concave.

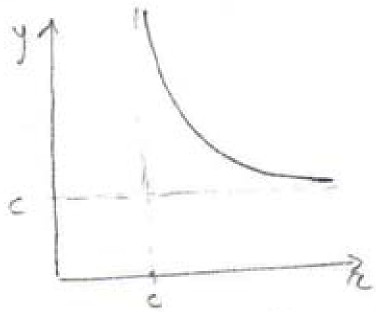
- vérification : le plus simple est de considérer une courbe d'indifférence

  $u(x,y) = c \iff y = \frac{cx}{x-c}$, $x > c$ / $\lim_{x \to +\infty} \frac{cx}{x-c} = c$

  $x>0, y>0$

  $\frac{dy}{dx} = c \cdot \frac{-c}{(x-c)^2} = \frac{-c^2}{(x-c)^2} < 0$ décroissante, strictement

  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2c^2}{(x-c)^3} > 0$ convexe, strictement

  Ce qui montre que u est bien strictement croissante et strictement quasi-concave

- On peut analyser, alternativement, directement la fn de 2 variables.

  $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) = \frac{y^2}{(x+y)^2} > 0$

  de même $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x}{x+y}\right)^2 > 0$ donc u est strictement croissante.

1.1. Analyse des propriétés de $u(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

2.1 0

- $u(x,y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1}$. c'est donc une fonction d'utilité à élasticité de substitution constante, de paramètres $a = b = 1$, $\rho = -1$ (voir TD 1).
  On sait donc que cette fn d'utilité est strictement croissante et strictement quasi-concave.

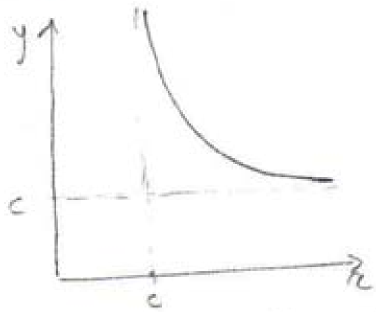
- vérification : le plus simple est de considérer une courbe d'indifférence

  $\underset{x>0,\, y>0}{u(x,y) = c} \iff y = \dfrac{cx}{x-c}$, $x > c$ / $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{cx}{x-c} = c$

  $\dfrac{dy}{dx} = c \cdot \dfrac{-c}{(x-c)^2} = \dfrac{-c^2}{(x-c)^2} < 0$ décroissante, strictement

  $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2c^2}{(x-c)^3} > 0$ convexe, strictement

  Ce qui montre que u est bien strictement croissante et strictement quasi-concave



- On peut analyser, alternativement, directement la fn de 2 variables.

  $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = y \cdot \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x+y}\right) = \dfrac{y^2}{(x+y)^2} > 0$

  de même $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^2 > 0$ donc u est strictement croissante.

ns. réalisable V dans l'exercice I du contrôle.

- La courbe des contrats nous donne les optima de Pareto en termes d'allocation. Pour l'ensemble RV, on doit traduire ces optima en utilités.

- $y^1 = \dfrac{4x^1}{x^1+3}$ et $u^1(x^1,y^1) = v^1 = \dfrac{x^1y^1}{x^1+y^1}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{v^1} = \frac{1}{x^1} + \frac{1}{y^1}$$

$$\frac{1}{v^1} = \frac{1}{x^1} + \frac{x^1+3}{4x^1} = \frac{x^1+7}{4x^1} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^1 = \frac{7v^1}{4-v^1}} \quad (1)$$

- On procède de même pour l'agent 2

$y^2 = 2 - y^1$ $\qquad 2 - y^2 = \dfrac{4(3-x^2)}{3-x^2+3} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \dfrac{2x^2}{6-x^2}$

$x^2 = 3 - x^1$

et $u^2(x^2,y^2) = v^2 = \dfrac{x^2y^2}{x^2+4y^2} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{v^2} = \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{4}{x^2} + \frac{6-x^2}{2x^2} = \frac{14-x^2}{2x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x^2 = \frac{14v^2}{2+v^2}} \quad (2)$$

- $x^1 + x^2 = 3$

$$\frac{7v^1}{4-v^1} + \frac{14v^2}{2+v^2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v^2 = \frac{6-5v^1}{11-v^1}}.$$

(pour résoudre, par exemple, on pose $\dfrac{14v^2}{2+v^2} = \gamma \quad \Leftrightarrow \quad v^2 = \dfrac{2\gamma}{14-\gamma}$

et $\gamma = 3 - \dfrac{7v^1}{4-v^1} = \dfrac{12-10v^1}{4v^1}$

$$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{2\cdot\left[\frac{12-10v^1}{4v^1}\right]}{14-\left[\frac{12-10v^1}{4v^1}\right]}$$

).

$e_x = 3 \quad e_y = 2$

Représentation de V

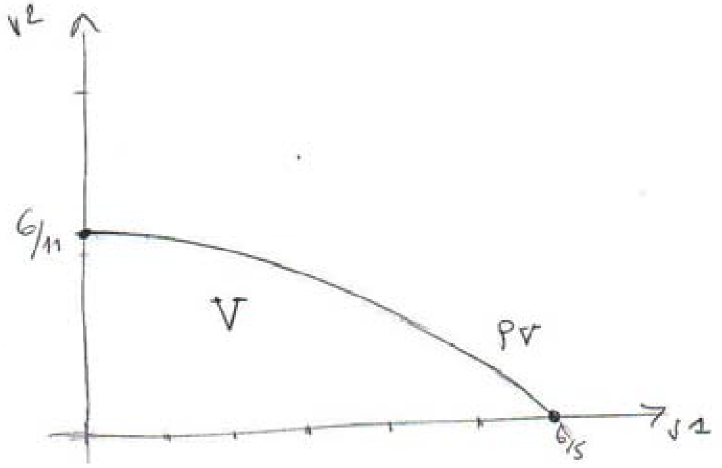
- Si $v^1 = 0$, $v^2 = \frac{6}{11}$ tous les biens à l'agent 2 : $\frac{2\times 3}{3+8} = \frac{6}{11}$

$v^2 = 0$, $6 - 5v^1 = 0 \Leftrightarrow v^1 = \frac{6}{5}$ $\quad \frac{2\times 3}{2+3} = \frac{6}{5}$

$$\frac{d}{dv^1}\left(\frac{6 - 5v^1}{11 - v^1}\right) = \frac{(11 - v^1)(-5) + (6 - 5v^1)}{(11 - v^1)^2}$$

$$= \frac{-55 + \cancel{5v^1} + 6 - \cancel{5v^1}}{(11 - v^1)^2} = \frac{-49}{(11 - v^1)^2} < 0 \searrow$$

$$\frac{d^2}{d(v^1)^2}\left(\text{—} \right) = (-2)(-49)\frac{-1}{(11 - v^1)^3} < 0 \quad \text{Concave.}$$



Examen de Microéconomie 2, juin 2007

Enseignant responsable : Françoise Forges

L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices, téléphones portables, agendas électroniques, etc. sont interdits. Les réponses aux questions doivent être justifiées.

I. (8 pts) On considère une économie d'échange à deux agents (1 et 2) et deux biens (1 et 2). On note x^i la consommation de bien 1 de l'agent i et y^i, la consommation de bien 2 de l'agent i ($i = 1, 2$). Les dotations initiales des agents sont $e^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et $e^2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ sont

$$u^1(x^1, y^1) = 3x^1 + y^1,\ u^2(x^2, y^2) = x^2 + 3y^2$$

1. (2 pts) Déterminez la demande de chacun des agents, en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$, compte tenu des dotations initiales $e^1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ et $e^2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.
2. (2 pts) Vérifiez que l'économie possède un équilibre concurrentiel et déterminez-en les prix et allocations.
3. (2 pts) Déterminez la courbe des contrats.
4. (2 pts) Représentez dans une boîte d'Edgeworth les dotations initiales, les prix et allocations d' équilibre(s) concurrentiel(s) et la courbe des contrats.

II. (3 pts) Définissez la notion d'externalités dans une économie. Les notions d'"équilibre concurrentiel" et d' "optimum de Pareto" ont-elles un sens en présence d'externalités ? Si oui, ces notions sont-elles liées entre elles ?

III. (9 pts) On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1, 2$), deux biens de consommation ($k = 1, 2$), un facteur de production (le travail) et deux entreprises ($j = 1, 2$). On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i ($i = 1, 2$). La dotation initiale du consommateur 1 est d'une unité de travail ; celle de l'agent 2, de 2 unités de travail. Leurs fonctions d'utilité sont $u^i(x^i, y^i) = \sqrt{x^i y^i}$, $i = 1, 2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = z_1$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = \frac{1}{2} z_2$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de travail, $k = 1, 2$). On suppose enfin que le consommateur 1 possède les entreprises.

1. (1 pt) Ecrivez les conditions que doit satisfaire une allocation $(x^1, y^1, x^2, y^2, q_1, z_1, q_2, z_2)$ pour être réalisable dans cette économie. Déduisez-en qu'une allocation (x^1, y^1, x^2, y^2) en biens de consommation est réalisable $\Leftrightarrow x^1 + x^2 + 2(y^1 + y^2) = 3$.
2. (3 pts) Montrez que l'économie possède un équilibre concurrentiel, en fixant le prix du travail à 1 et en notant p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1, 2$. Calculez l'utilité de chaque consommateur à l'équilibre.
3. (1 pt) Sans faire de calcul, peut-on affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto-optimal ?
4. (2 pts) En utilisant le point 1., montrez qu'une paire de niveaux d'utilités (v^1, v^2) pour les consommateurs est Pareto-optimale $\Leftrightarrow v^1 + v^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $v^1 \geq 0$, $v^2 \geq 0$. Représentez graphiquement l'ensemble des niveaux d'utilités réalisables dans l'économie et les niveaux d'utilités de l'équilibre concurrentiel.
5. (2 pts) On suppose à présent que l'entreprise 2 peut fixer son prix à $p_2 = 2(1 + \epsilon)$, avec $\epsilon > 0$, le prix du travail étant toujours fixé à 1, et verser son profit au premier consommateur, qui possède l'entreprise. Déterminez l'équilibre "concurrentiel" correspondant. Est-il Pareto-optimal ?

I. 1

Corrigé de l'examen de microéconomie du 14 juin 2007

I.

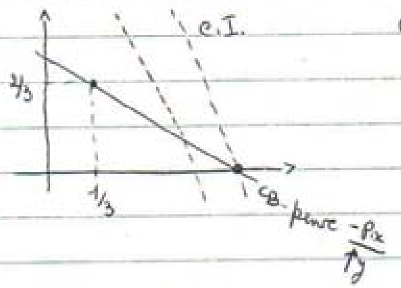
1) Demande de l'agent 1

$$\max_{x,y} (3x + y) \quad \text{sous} \quad p_x x + p_y y \leq \frac{1}{3} p_x + \frac{2}{3} p_y \quad \text{(C.B.)}$$

identification du prog. des agents : 0,5

$3x + y = c$ droite de pente -3

C.B. $p_x x + p_y y = c'$ droite de pente $\frac{-p_x}{p_y}$



C.I plus raide que CB $\Leftrightarrow 3 > \frac{p_x}{p_y}$

$\Rightarrow$ max pr $y^1 = 0$

$$\begin{cases} 3 > \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y^1 = 0 \quad (\text{et } x^1 = \dots \text{ sur CB}) \\ 3 < \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow x^1 = 0 \\ 3 = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \text{tout } (x^1, y^1) \text{ "sur la CB" convient.} \end{cases}$$

De façon similaire, demande de l'agent 2

$\frac{1}{3} > \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y^2 = 0$

$\frac{1}{3} < \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow x^2 = 0$

$\frac{1}{3} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow$ tout (x^2, y^2) sur CB convient.

Réponse finale correcte et détaillée : 1.
(OK si "$y^1 = 0$" est dit sous la forme "ne consomme que du x")

I.2

(I)

2) Equilibre concurrentiel

3 cas peuvent se présenter, étant donné p_x, p_y :

- $\frac{p_x}{p_y} < \frac{1}{3} < 3$ $\quad y^1 = y^2 = 0$ on ne pourra pas apurer le marché de y
- $\frac{p_x}{p_y} > 3 > \frac{1}{3}$ $\quad x^1 = x^2 = 0$ ——— x
- $\frac{1}{3} < \frac{p_x}{p_y} < 3$ $\quad y^1 = 0$ et $x^2 = 0$ compatible avec l'apurement on aura alors $x^1 = 1$ et $y^2 = 1$

La saturation de la contrainte budgétaire ($\equiv$ la loi de Walras) donne $p_x \cdot 1 + p_y \cdot 0 = \frac{1}{3} p_x + \frac{2}{3} p_y \Rightarrow p_x = p_y$

en normalisant $p_x + p_y = 1$, on trouve $p_x = p_y = 1/2$

les allocations sont (1, 0) pour l'agent 1
(0, 1) ——— 2

I3

(I) 3) Courbe des contrats

$u^1(x,y) = 3x + y \qquad u^2(x,y) = x + 3y$

$e^1 + e^2 = (1,1) \qquad e^1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad e^2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\max\ \alpha(3x^1 + y^1) + (1-\alpha)(x^2 + 3y^2)$ s.c. $x^1 + x^2 = 1$, $y^1 + y^2 = 1$

$\alpha(3x^1 + y^1) + (1-\alpha)(1 - x^1 + 3 - 3y^1)$

$\Leftrightarrow x^1(4\alpha - 1) + y^1(4\alpha - 3) + ct$

$= 0$ pour $\alpha = \frac{1}{4}$ $\qquad = 0$ pour $\alpha = \frac{3}{4}$

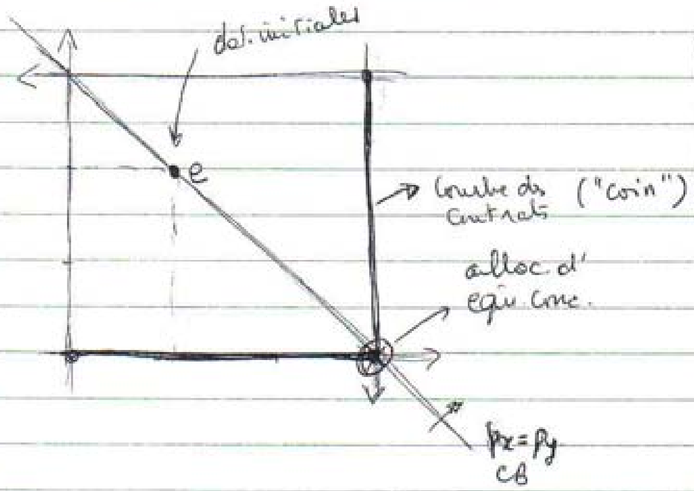
$< \quad < \qquad < \quad <$

α : 0 — $\frac{1}{4}$ — $\frac{3}{4}$ — 1

- $0 < \alpha < \frac{1}{4}$: $x^1 = y^1 = 0$
- $\alpha = \frac{1}{4}$: $x^1 \in [0,1]$, $y^1 = 0$
- $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{4}$: $x^1 = 1, y^1 = 0$
- $\alpha = \frac{3}{4}$: $x^1 = 1$, $y^1 \in [0,1]$
- $\frac{3}{4} < \alpha < 1$: $x^1 = y^1 = 0$

déduire la courbe des contrats. $\begin{cases} x^2 = 1 - x^1 \\ y^2 = 1 - y^1 \end{cases}$

4) **Boîte d'Edgeworth**



boîte carrée, axes : 0,5
dotation : un seul pt ! 0,5
équ. conc., dte de budget : 0,5
Courbe contrats : 0,5

II

(II) On appelle "externalité" tout effet indirect d'une activité de consommation ou de production sur une fonction d'utilité ou un ensemble de production. L'effet est indirect dans la mesure où il est créé par un agent mais en affecte un autre. Un tel effet n'est typiquement pas pris en compte par le système de prix.

La notion d'équilibre concurrentiel a un sens. Les effets externes sont alors traités comme des paramètres. Les consommateurs maximisent leur utilité, dans laquelle l'effet externe est un paramètre. De même, les producteurs maximisent leur profit en tenant compte de l'effet externe qui affecte l'ensemble de production comme d'un paramètre.

La notion d'optimum de Pareto a aussi un sens. Typiquement, on maximise l'utilité sociale (somme pondérée des utilités des agents) sous contraintes de faisabilité. Ces contraintes tiennent compte des effets externes. De plus, les effets externes apparaissent typiquement aussi dans les utilités.

Non, il n'y a pas en général de lien entre les 2 notions dès qu'il y a des externalités. Les thms du bien-être n'ont plus cours. Un équilibre concurrentiel ne sera pas en général Pareto-optimal.

III . 1

III 1) $(x^1, y^1, x^2, y^2, q_1, z_1, q_2, z_2)$ est réalisable

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^1 + x^2 = q_1 & (1) \\ y^1 + y^2 = q_2 & (2) \\ q_1 = z_1 & (3) \\ q_2 = \frac{1}{2} z_2 & (4) \\ z_1 + z_2 = 3 & (5) \end{cases}$$

(+ contraintes de positivité)

écriture de ces conditions : 0,5

(1) et (3) $x^1 + x^2 = z_1$

(2) et (4) $y^1 + y^2 = \frac{1}{2} z_2$

$$\Rightarrow (x^1 + x^2) + 2(y^1 + y^2) = z_1 + z_2$$

$$= 3 \text{ par } (5)$$

déduction : 0,5

$$\Rightarrow (x^1 + x^2) + 2(y^1 + y^2) = 3. \quad (*)$$

(+ contraintes de positivité)

Réciproquement, partant de $(*)$, on peut poser

$q_1 = x^1 + x^2$, $q_2 = y^1 + y^2$

$z_1 = q_1$ $z_2 = 2 q_2$

Considération de la réciproque : bonus de 0,5

on aura bien $z_1 + z_2 = 3$ par $(*)$.

III . 2

2) Equilibre concurrentiel.

- entreprises, maximisation du profit
  les rendements sont constants => le profit est nul

$$\Pi_1 = p_1 q_1 - z_1 = p_1 q_1 - q_1 = 0$$ (1 pt)

(prix du travail = 1 !)

$$(p_1 - 1)\, q_1 = 0 \implies \boxed{p_1 = 1}$$

de même, $\Pi_2 = p_2 q_2 - z_2 = p_2 q_2 - 2 q_2 = 0$

$$(p_2 - 2)\, q_2 = 0 \quad \boxed{p_2 = 2}$$

(1,5 pt) dont 0,5 utilités

- Consommateurs

consommateur 1 max $\sqrt{xy}$ sous $p_1 x + p_2 y \leq 1$

car 1 unité de travail au prix 1 et profit = 0

$$\iff x + 2y = 1 \quad (1)$$

$$TMS = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \iff x = 2y \quad (2)$$

(1) et (2) $\implies x = 1/2,\ y = 1/4$ $\quad \boxed{(x^1, y^1) = (1/2, 1/4)}$

(0,5) $u(x^1, y^1) = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$

Conso 2 max $\sqrt{xy}$ sous $x + 2y = 2$
même TMS : $x = 2y$

$$\boxed{(x^2, y^2) = (1, 1/2)}$$

$$u(x^2, y^2) = \sqrt{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

III.3

• ajustement des marchés

$x^1 + x^2 = q_1 = \frac{3}{2}$

$y^1 + y^2 = q_2 = \frac{3}{4}$ synthèse 0,5

$z_1 = q_1 = \frac{3}{2}$

$z_2 = 2q_2 = \frac{3}{2}$

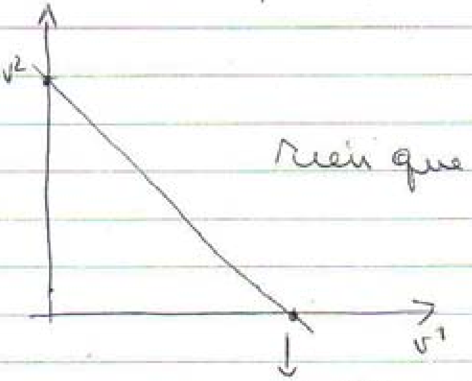
$\left.\begin{array}{l} z_1 = q_1 = \frac{3}{2} \\ z_2 = 2q_2 = \frac{3}{2} \end{array}\right\} z_1 + z_2 = 3.$

0,5

3) Sans faire aucun calcul, on peut affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto-optimal, par le 1er théorème du bien-être, car les fonctions d'utilité des consommateurs sont croissantes 0,5

4) Esquisse de "raisonnement" :

On a vu qu'avec ces fonctions d'utilité, la frontière de Pareto dans l'espace des utilités était "linéaire", on s'attend donc à $v^1 + v^2 \leq$ qq ch. d'une forme particulière.



rien que la représ. graph. = 0,5

ce pt correspond au max du conso 1 = quand il a tout - $x^2 = y^2 = 0$

$x^1 + 2y^1 = 3$ par (1).

III . 4

pour trouver le max du conso 1, on considère donc

$\max \sqrt{x^1 y^1}$ sous $\underbrace{x^1 + 2y^1 = 3}$.
analogue à une CB.

$TMS = \frac{y^1}{x^1} = \frac{1}{2}$ $\quad x^1 = 2y^1$

$\hookrightarrow x^1 = 3/2, \; y^1 = 3/4$

$v^1_{max} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

III. 5

raisonnement complet

optimum de Pareto :

contrainte du 1er thm éco d'échange

4) $\max \ \rho\sqrt{x^1y^1} + (1-\rho)\sqrt{x^2y^2}$ s.c. $x^1 + x^2 + 2(y^1+y^2) = 3$

si $\rho = 1$: $(x^2,y^2) = (0,0)$ si $\rho = 0$, $(x^1,y^1) = (0,0)$ – si $0<\rho<1$:

$\mathcal{L} = \rho\sqrt{x^1y^1} + (1-\rho)\sqrt{x^2y^2} - \lambda\left(x^1+x^2+2(y^1+y^2)-3\right)$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^1} = \rho\frac{\sqrt{y^1}}{2\sqrt{x^1}} - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^2} = (1-\rho)\frac{\sqrt{y^2}}{2\sqrt{x^2}} - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^1} = \rho\frac{\sqrt{x^1}}{2\sqrt{y^1}} - 2\lambda = 0$$

$$\lambda = \rho\,\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{y^1}{x^1}} = \frac{1}{2}\,\rho\,\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{x^1}{y^1}}$$

$$\frac{y^1}{x^1} = \frac{1}{2} \quad (\text{“Cond. de TMS”})$$

$$x^1 = 2y^1$$

N.B.

$(\lambda =)\ \rho\,\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\frac{y^1}{x^1}} = (1-\rho)\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}$

de même, $x^2 = 2y^2$.

$\rho\sqrt{\frac{1}{2}} = (1-\rho)\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \rho = 1/2$.

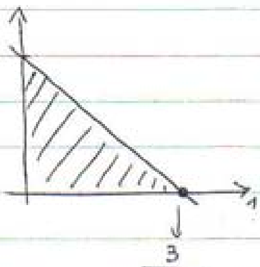
$x^1 = 2y^1 \iff y^1 = 1/2\,x^1$

$x^2 = 2y^2 \iff y^2 = 1/2\,x^2$

$(x^1+x^2) + 2(y^1+y^2) = 3 \iff 2(x^1+x^2) = 3$

$x^1+x^2 = 3/2 \ / \ y^1+y^2 = 3/4$

$$\begin{cases} v^1 = \sqrt{x^1y^1} = \sqrt{(2y^1)\cdot y^1} = \sqrt{2}\cdot y^1 \\ v^2 = \sqrt{2}\cdot y^2 \\ v^1+v^2 = \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \quad \left(= \sqrt{2}\,(y^1+y^2)\right) \end{cases}$$



$\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

III.6

5) entreprise 1 : bien de change $p_1 = 1$

2 $p_2 = 2(1+\varepsilon)$ fixé. $\Pi_2 = 2(1+\varepsilon)\, q_2 - 2q_2$

$\Pi_2 = 2\varepsilon q_2$

demande du conso 1.

$\max \sqrt{xy}$ sous $p_1 x + p_2 y \leq 1 + \Pi_2 = 1 + 2\varepsilon q_2$.

$\Leftrightarrow x + 2(1+\varepsilon) y = 1 + 2\varepsilon q_2$ (1)

TMS : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2(1+\varepsilon)}$

$\Leftrightarrow x = 2(1+\varepsilon) y$ (2)

(1) et (2) $2x = 1 + 2\varepsilon q_2$ $\boxed{x^1 = \dfrac{1+2\varepsilon q_2}{2}}$

$$\boxed{y^1 = \frac{1+2\varepsilon q_2}{4(1+\varepsilon)}}$$

le conso 2 est soumis aux mêmes p_1 et p_2 pour ses "achats", mais son revenu est juste 2 (car il dispose de 2 unités de Travail mais ne reçoit pas de profit)

$$\boxed{x^2 = \frac{2}{2} = 1 \qquad y^2 = \frac{2}{4(1+\varepsilon)} = \frac{1}{2(1+\varepsilon)}}$$

apurement du marché du bien 2 (y) :

$$\frac{1+2\varepsilon q_2}{4(1+\varepsilon)} + \frac{1}{2(1+\varepsilon)} = q_2$$

$$\boxed{q_2 = \frac{3}{4+2\varepsilon}} = \frac{3}{2(2+\varepsilon)}$$

III.7

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} x^1 = \dfrac{1+2\varepsilon}{2+\varepsilon} & y^1 = \dfrac{1+2\varepsilon}{2(1+\varepsilon)(2+\varepsilon)} \\[2ex] x^2 = 1 & y^2 = \dfrac{1}{2(1+\varepsilon)} \end{array}}$$

$$v^1 = \sqrt{x^1 y^1} = \frac{1+2\varepsilon}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+\varepsilon}\,(2+\varepsilon)}$$

$$v^2 = \sqrt{x^2 y^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt{1+\varepsilon}}$$

$$v^1 + v^2 = \frac{3\sqrt{1+\varepsilon}}{\sqrt{2}\,(2+\varepsilon)}$$

pas Pareto optimal si $< \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2+\varepsilon} < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1+\varepsilon < \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = 1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{4} \quad \checkmark.$$

Examen de Microéconomie 2, septembre 2007

Enseignant responsable : Françoise Forges

L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices, téléphones portables, agendas électroniques, etc. sont interdits. Les réponses aux questions doivent être justifiées.

I. (7 pts) On considère un consommateur dont les préférences sur des paniers de 2 biens (x, y) sont représentées par la fonction d'utilité $u(x, y) = \min(x, y)$.

1. (1 pt) Représentez graphiquement les courbes d'indifférence de ce consommateur.
2. (2 pts) Déterminez la demande du consommateur $d(p, R)$, en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et d'un revenu $R \in \mathbb{R}$, puis d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y) \in \mathbb{R}^2_+$ du consommateur.
3. (2 pts) On suppose à présent qu'il y a un deuxième consommateur, avec la même fonction d'utilité $u(x, y) = \min(x, y)$ et que les dotations initales respectives sont $e^1 = (e^1_x, e^1_y) = (2, 0)$ et $e^2 = (e^2_x, e^2_y) = (0, 2)$. Déterminez un équilibre concurrentiel de l'économie. Cet équilibre est-il unique ?
4. (2 pts) Sous les mêmes hypothèses qu'au point précédent, déterminez la courbe des contrats de l'économie et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth, dans laquelle vous indiquerez aussi les dotations initiales.

II. (9 pts) On considère une économie à deux consommateurs $(i = 1, 2)$, deux biens de consommation $(k = 1, 2)$, un facteur de production (le travail) et deux entreprises $(j = 1, 2)$. On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i $(i = 1, 2)$. La dotation initiale de chaque consommateur est d'une unité de travail. Leurs fonctions d'utilité (qui portent exclusivement sur les biens de consommation) sont respectivement $u^1(x^1, y^1) = \frac{1}{3} \ln x^1 + \frac{2}{3} \ln y^1$ et $u^2(x^2, y^2) = \frac{2}{3} \ln x^2 + \frac{1}{3} \ln y^2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = \sqrt{z_1}$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = 2\sqrt{z_2}$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de travail, $k = 1, 2$). On suppose enfin que chaque consommateur possède la moitié de chaque entreprise. On fixe le prix du travail à 1 et on note p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1, 2$.

1. (2 pts) Résolvez le programme de maximisation du profit de chaque entreprise, de manière à déduire les offres $\widehat{z}^k$, $k = 1, 2$, en fonction des prix.
2. (2 pts) Résolvez le programme d'optimisation du consommateur $i = 1, 2$, de manière à déduire sa demande $\widehat{x}^i, \widehat{y}^i$ en fonction de son revenu R^i et des prix.
3. (1 pt) Exprimez le revenu R^i du consommateur $i = 1, 2$ en fonction des prix.
4. (2 pts) Pour calculer l'équilibre concurrentiel de l'économie, écrivez les conditions d'apurement des marchés (travail et biens de consommation) en fonction des prix (p_1 et p_2) ; déduisez-en ces prix.
5. (2 pts) Faites la synthèse des résultats obtenus en complétant le texte suivant : A l'équilibre : l'entreprise 1 produit $\widehat{q}_1 = ...$ unités de bien 1 à partir de $\widehat{z}_1 = ...$ unités de travail et en tire un profit de $\widehat{\pi}_1 = ...$ L'entreprise 2 produit $\widehat{q}_2 = ...$ unités de bien 2 à partir de $\widehat{z}_2 = ...$ unités de travail et en tire un profit de $\widehat{\pi}_2 = ...$ Le consommateur 1 dispose donc d'un budget de $\widehat{R}^1 = ...$ et le consommateur 2, d'un budget de $\widehat{R}^2 = ...$ Le consommateur 1 consomme $\widehat{x}^1 = ...$ unités de bien 1 et $\widehat{y}^1 = ...$ unités de bien 2, ce qui lui coûte $\widehat{R}^1$. Le consommateur 2 consomme $\widehat{x}^2 = ...$ unités de bien 1 et $\widehat{y}^2 = ...$ unités de bien 2, ce qui lui coûte $\widehat{R}^2$. Les deux unités initiales de travail sont utilisées et le total de bien consommé correspond exactement au total de bien produit.

III. (4 pts) Définissez la notion de bien public dans une économie et donnez un exemple de tel bien. Peut-on définir la notion d' "optimum de Pareto" en présence d'un bien public ? Si oui, comment ? Qu'en est-il de la notion d' "équilibre concurrentiel" ? Les deux notions sont-elles liées entre elles ? Si oui, comment ?

Université Paris-Dauphine
Département MIDO

Microéconomie 2, avril 2008
Enseignant responsable: Françoise Forges

L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices, téléphones portables, agendas électroniques, etc. sont interdits. Les réponses aux questions doivent être justifiées.

Notations utilisées: dans les deux exercices ci-dessous, on considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$; $z = [(x^1, y^1), (x^2, y^2)]$ désigne une allocation.

I. (10 pts) Soit

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}}, \quad u^2(x,y) = x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} \\ e^1 &= e^2 = (1,1) \end{aligned}$$

1. (3 pts) Déterminez la demande de chacun des consommateurs en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et de sa dotation initiale.
2. (3 pts) Vérifiez que cette économie possède un équilibre concurrentiel et déterminez-le.
3. (2 pts) Donnez les équations qui caractérisent les allocations z Pareto-optimales (dans $\mathbb{R}^4$).
4. (2 pts) Montrez que l'allocation d'équilibre obtenue en 2. est Pareto-optimale. Est-ce surprenant?

II. (10 pts) Soit à présent

$$\begin{aligned} u^1(x,y) &= u^2(x,y) = \min(x,y) \\ e^1 &= (8,0) \qquad e^2 = (0,4) \end{aligned}$$

1. (2 pts) Représentez les dotations initiales et quelques courbes d'indifférence des consommateurs dans une boîte d'Edgeworth.
2. (2 pts) Déterminez la demande de chacun des consommateurs en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et de sa dotation initiale.
3. (2 pts) Cette économie possède-t-elle (au moins) un équilibre concurrentiel? Si oui, déterminez-le(s). Si non, expliquez pourquoi et indiquez quelle(s) hypothèse(s) du théorème d'existence d'un équilibre concurrentiel n'est (ne sont) pas satisfaite(s).
4. (2 pts) Montrez que l'allocation $z = [(3,1),(5,3)]$ est Pareto-optimale (vous pouvez vous contenter d'une représentation graphique).
5. (2 pts) Représentez l'ensemble des allocations Pareto-optimales (appelé aussi "courbe des contrats") de l'économie dans la boîte d'Edgeworth.

Remarque: le "barème" est indicatif et susceptible d'être modifié.

Université Paris-Dauphine
Département MIDO

Microéconomie 2, juin 2008
Enseignant responsable: Françoise Forges

L'épreuve dure 2 heures. Les documents, calculatrices, téléphones portables, agendas électroniques, etc. sont interdits. Les réponses aux questions doivent être justifiées ***brièvement****.*

I. (8 pts) On considère une économie d'échange à deux agents (1 et 2) et deux biens (x et y). Les dotations initiales respectives des agents sont

$$e^1 = (2, 1),\ e^2 = (1, 2)$$

et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$

$$u^1(x, y) = x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{5}} \ ; \quad u^2(x, y) = x + 2y$$

1. Déterminez la courbe des contrats. (2 pts)
2. Calculez les équilibres concurrentiels éventuels. (2 pts)
3. Représentez dans une boîte d'Edgeworth: les dotations initiales, quelques courbes d'indifférence de chaque consommateur, la courbe des contrats et les équilibres concurrentiels éventuels. (2 pts)
4. Montrez que l'allocation suivante

$$z = [(1, \frac{9}{4}), (2, \frac{3}{4})]$$

peut être obtenue dans un équilibre concurrentiel de l'économie, moyennant des transferts forfaitaires de richesse. (2pts)

II. (2 pts) On considère à nouveau une économie d'échange à deux agents (1 et 2) et deux biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont $e^1 = e^2 = (1, 1)$ et leurs fonctions d'utilité respectives

$$\begin{aligned} u^1(x, y) &= x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}} \text{ si } x \leq y \\ &= x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} \text{ si } x > y \\ u^2(x, y) &= x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Le théorème fondamental d'existence permet-il de conclure que cette économie possède un équilibre concurrentiel? Expliquez brièvement.

IV. (7 pts) On considère maintenant une économie composée de trois biens (le maïs q, les galettes x et l'huile y), deux consommateurs 1 et 2 et deux entreprises g et h. Chaque consommateur détient initialement 5 unités de maïs. Le consommateur 1 possède l'entreprise g, qui produit des galettes à partir de maïs suivant la fonction de production $x = 3q$. De même, le consommateur 2 possède l'entreprise h, qui produit de l'huile à partir de maïs suivant la fonction de production $y = 4q$. Les fonctions d'utilité des consommateurs 1 et 2 (qui ne consomment que des galettes et de l'huile) sont respectivement

$$u^1(x, y) = x^{\frac{2}{5}} y^{\frac{3}{5}} \ ; \quad u^2(x, y) = xy$$

1. Déterminez les équilibres concurrentiels de cette économie. (5 pts)
2. Que deviennent ces équilibres si le consommateur 1 possède l'entreprise h et le consommateur 2, l'entreprise g? (2 pts)

IV. (3 pts) Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ une économie d'échange dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont strictement croissantes et concaves. Montrez que l'ensemble des *utilités réalisables* défini par

$$V = \{(v^1, ..., v^N) \in \mathbb{R}^N : \exists \text{ une allocation réalisable } z \text{ telle que } v^i \leq u^i(z^i), i = 1, ..., N\}$$

est convexe. En quoi cette propriété est-elle utile?

Microéconomie 2

Aide-mémoire

Aide-mémoire de Microéconomie 2

Françoise Forges (francoise.forges@dauphine.fr)

2007-2008

Manuel de référence: J.-M. Tallon, "Equilibre général: une introduction", Eds Vuibert, 1997, disponible en ligne

Table des matières

Introduction, notations

Equilibre *général*:
Tous les biens $l = 1, ..., L$
Tous les agents $i = 1, ..., N$
Dans un premier temps: économie d'échange pur
Les biens, initialement détenus par les agents (ou consommateurs) sont échangés entre ceux-ci, de manière à maximiser leur satisfaction individuelle, compte tenu des ressources disponibles

Données:
- $e^i \in \mathbb{R}_+^L$: dotation initiale de i, $i = 1, ..., N$
- $\succsim^i$: préférences de i sur les paniers de biens, $i = 1, ..., N$

Equilibre concurrentiel $(p, z^1, ..., z^N)$
$p = (p_1, ..., p_L) \in \mathbb{R}_+^L$ vecteur de prix
$(z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$: allocation de biens
tels que
(1) z^i $(i = 1, ..., N)$ maximise les préférences $\succsim^i$ de i sous sa contrainte budgétaire
(2) les marchés $(l = 1, ..., L)$ s'apurent

Conditions garantissant l'existence (et, éventuellement, l'unicité) d'un tel équilibre? Propriétés d'un tel équilibre? Conditions d'application?

Chapitre I: Le consommateur

I.1 Préférences, fonction d'utilité

On considère un consommateur typique (on omet donc l'indice i)
$z = (z_1, ..., z_L) \in \mathbb{R}_+^L$ désigne un panier de biens
z_l: quantité de bien l
Le consommateur a des préférences $\succsim$ sur $\mathbb{R}_+^L$:
$z \succsim z'$: le consommateur préfère z à z' (et peut être indifférent entre z et z')
$z \sim z' \Leftrightarrow z \succsim z'$ et $z' \succsim z$: il est indifférent entre z et z'
$z \succ z' \Leftrightarrow z \succsim z'$ et non $z' \succsim z$: il préfère strictement z à z'

Définition: une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ représente $\succsim$ si $z \succsim z' \Leftrightarrow u(z) \geq u(z')$
Remarque: Si u représente $\succsim$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante, $f \circ u$ représente aussi $\succsim$

Hypothèses: $\succsim$ est une relation
• transitive: $\forall z, z', z'' \in \mathbb{R}_+^L : z \succsim z'$ et $z' \succsim z'' \Rightarrow z \succsim z''$
• complète: $\forall z, z' \in \mathbb{R}_+^L : z \succsim z'$ ou $z' \succsim z$
• continue: $\forall$ suites $z_t \to z$, $z'_t \to z'$: $z_t \succsim z'_t$, $t = 1, 2, ... \Rightarrow z \succsim z'$

Proposition: Si $\succsim$ satisfait les hypothèses ci-dessus, $\exists u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ continue qui représente $\succsim$

Autres propriétés usuelles des préférences $\succsim$:
• monotones ($\Leftrightarrow u$ est croissante): $z \gg z'$ (c.à.d. $z_l > z'_l$, $l = 1, ..., L$) $\Rightarrow z \succ z'$ ($\Leftrightarrow u(z) > u(z')$)
• strictement monotones ($\Leftrightarrow u$ est strictement croissante): $z > z'$ (c.à.d. $z \geq z'$ et $z \neq z'$) $\Rightarrow z \succ z'$ ($\Leftrightarrow u(z) > u(z')$)
• convexes: $\forall z \in \mathbb{R}_+^L$: $P = \{z' : z' \succsim z\}$ est un ensemble convexe, c.à.d. $z' \succsim z$ et $z'' \succsim z \Rightarrow \lambda z' + (1-\lambda) z'' \succsim z$, $\forall\ 0 < \lambda < 1$
En termes d'une fonction d'utilité u représentant $\succsim$: $\{z' : u(z') \geq r\}$ convexe $\forall r \in \mathbb{R}$; on dit que u est quasi-concave.
Proposition: u est quasi-concave $\Leftrightarrow \forall z \neq z'$ $u(\lambda z + (1-\lambda) z') \geq \min\{u(z), u(z')\}$, $\forall\ 0 < \lambda < 1$. *Démonstration: exercice*

• strictement convexes: $z' \succsim z$, $z'' \succsim z$ et $z' \neq z'' \Rightarrow \lambda z' + (1-\lambda) z'' \succ z$, $\forall\ 0 < \lambda < 1$; u représentant $\succsim$ est alors strictement quasi-concave (inégalité ci-dessus stricte)

Autres propriétés de la fonction d'utilité u:
• u est différentiable
• u est concave: $\forall z, z'$ $u(\lambda z+(1-\lambda)z') \geq \lambda u(z)+(1-\lambda)u(z')$, $\forall\, 0 < \lambda < 1$
Proposition: u concave $\Rightarrow$ u quasi-concave, mais l'inverse n'est pas vrai.
Démonstration: exercice
Proposition: si u est différentiable deux fois continûment, u est concave $\Leftrightarrow$ $D^2u(z)$ est semi-définie négative $\forall z$

I.2 Le taux marginal de substitution

Pour fixer les idées: $L = 2$. On note les paniers de biens $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$
Définition: le taux marginal de substitution du second bien, y, pour le premier, x, en un point (x_0, y_0), noté $TMS_{y\to x}(x_0, y_0)$, est la quantité de bien y qu'il faut donner au consommateur pour compenser la perte marginale d'une unité de bien x en ce point
Si la fonction d'utilité u est différentiable, $TMS_{y\to x}(x_0, y_0)$ correspond à la valeur absolue de la pente de la courbe d'indifférence en (x_0, y_0):
$TMS_{y\to x}(x_0, y_0) = -\frac{dy}{dx}|_{u(x,y)=u(x_0,y_0)}$

En différentiant $u(x, y) = c$ (où c est une constante), on trouve
$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}$
On déduit
$TMS_{y\to x}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)}$

I.3 La contrainte budgétaire

L biens; $p = (p_1, ..., p_L) \in \mathbb{R}^L_{++}$: vecteur de prix, donné
p_l: prix d'une unité de bien l, quelle qu'en soit la quantité
$w \in \mathbb{R}^L_+$: revenu du consommateur, provenant par exemple d'une dotation initiale $e = (e_1, ..., e_L) \in \mathbb{R}^L_+$: $w = p_1e_1 + ... + p_Le_L = p.e$
Le consommateur peut acquérir les paniers de biens $z = (z_1, ..., z_L) \in \mathbb{R}^L_+$ dont la valeur ne dépasse pas le revenu disponible w, c.à.d. tels que $p.z \leq w$. C'est la contrainte budgétaire (C.B.) du consommateur
Si $L = 2$, on note le panier de biens $z = (x, y)$, et le prix $p = (p_x, p_y)$. La contrainte budgétaire est $p_xx + p_yy \leq w$
En fonction d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y)$: $p_xx + p_yy \leq p_xe_x + p_ye_y$
La C.B. correspond donc à une droite de pente $\frac{-p_x}{p_y}$, passant par le point $e = (e_x, e_y)$
$\frac{p_x}{p_y}$ = quantité de bien y qu'on peut acquérir avec 1 unité de bien x

I.4 L'optimisation du consommateur

Pour fixer les idées: $L = 2$. Le problème du consommateur qui dispose d'un revenu w est

$\max_{(x,y)} u(x,y)$ sous $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $p_x x + p_y y \leq w$

Ce problème a une solution dès lors que u est continue et $p_x > 0$, $p_y > 0$

On suppose u croissante, de sorte que la C.B. sera saturée: $p_x x + p_y y = w$

Supposons de plus u différentiable; on dispose alors de conditions *nécessaires* pour un optimum "*intérieur*" $x^* > 0$, $y^* > 0$: $\exists \lambda^* > 0$ tel que (x^*, y^*, λ^*) maximise le lagrangien $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = u(x,y) - \lambda(p_x x + p_y y - w)$

Les conditions du premier ordre sont $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow$ C.B.

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \lambda p_x = 0$ (1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \lambda p_y = 0$ (2)

(1) et (2) $\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}{p_x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}{p_y}$ d'où, à l'optimum (x^*, y^*),

$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x^*,y^*)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x^*,y^*)} = TMS_{y \to x}\ (x^*, y^*)$ (3)

Intuition de $\frac{p_x}{p_y} = TMS_{y \to x}\ (x^*, y^*)$: supposons $TMS_{y \to x}\ (x^*, y^*) < \frac{p_x}{p_y}$. En vendant 1 unité de bien x, le consommateur obtiendrait un revenu p_x qui lui permettrait d'acheter $\frac{p_x}{p_y}$ unités de bien y et $\frac{p_x}{p_y} >$ la quantité de bien y qui compense la perte d'1 unité de bien x: (x^*, y^*) ne peut être un optimum

Proposition: Si les préférences du consommateur sont *strictement convexes*, c.à.d. si u est *strictement quasi-concave*, le problème d'optimisation du consommateur a une solution unique

Dans ce cas, (3) et la C.B. permettent de déduire la *fonction* de demande du consommateur:

$$x^* = d_x(p,w),\ y^* = d_y(p,w)$$

ou, en remplaçant w par $p_x e_x + p_y e_y$,

$$x^* = D_x(p,e),\ y^* = D_y(p,e)$$

Remarque 1: Si u n'est pas strictement quasi-concave, le problème d'optimisation du consommateur peut avoir plusieurs solutions et on fait face à une *correspondance* de demande

Remarque 2: Le problème d'optimisation est soluble dès que u est *continue*, même si u n'est pas différentiable, mais alors, on ne peut pas recourir aux conditions du premier ordre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou "min" en T.D.)

Remarque 3: Si u est différentiable, les conditions du premier ordre sont juste *nécessaires* pour une solution $x^* > 0$, $y^* > 0$ mais $x^* = 0$ ou $y^* = 0$ est concevable (voir par exemple les fonctions d'utilité linéaires en T.D.)

Résumé et généralisation à L biens

$p \in \mathbb{R}^L_{++}$, $w \in \mathbb{R}_+$ fixés
$d(p, w) = \{z^* \in \mathbb{R}^L_+ : u(z^*) = \max_{z \geq 0} u(z) \text{ sous } p.z \leq w\}$
définit la *demande* du consommateur
Supposons u différentiable; si les conditions du premier ordre
$\frac{\partial u}{\partial z_l}(z^*) = \lambda^* p_l$, $l = 1, ..., L$ (C.P.O.) et $p.z^* = w$ (C.B.)
sont satisfaites en $z^* \gg 0$, alors $z^* \in d(p, w)$
(C.P.O.) $\Rightarrow TMS_{k \to l}(z^*) = \frac{\frac{\partial u}{\partial z_l}(z^*)}{\frac{\partial u}{\partial z_k}(z^*)} = \frac{p_l}{p_k} \ \forall k, l$

Si $d(p, w)$ est un singleton, $z^*(p, w)$, $\forall p$, on peut parler de *fonction de demande* du consommateur: $d(., w) : p \to d(p, w) \in \mathbb{R}^L_+$

Interprétation du multiplicateur de Lagrange

On suppose u différentiable et la fonction de demande bien définie; on fixe p et on note $z^*(w) = d(p, w)$ pour ce p; $u(z^*(w))$ représente le niveau d'utilité du consommateur à l'optimum
$\frac{du(z^*(w))}{dw} = \sum_l \frac{\partial u}{\partial z_l}(z^*(w)) \frac{dz_l^*(w)}{dw} = \sum_l \lambda^* p_l \frac{dz_l^*(w)}{dw} =$
$\lambda^* \frac{d}{dw}[\sum_l p_l z_l^*(w)] = \lambda^*$, qui est donc l'*utilité marginale* du revenu

Propriétés de la fonction de demande (supposée bien définie)

• Homogène de degré 0 par rapport au prix et au revenu: $d(\alpha p, \alpha w) = d(p, w)$ $\forall \alpha > 0$. De même, en fonction des dotations initiales, $D(\alpha p, e) = D(p, e)$. *Démonstration: exercice*

• Loi de Walras: $p.d(p, w) = w$ ou $p.[D(p, e) - e] = 0$; $D(p, e) - e$ s'appelle la "demande excédentaire". *Démonstration: exercice*

• Continuité par rapport à $p \gg 0$: sous nos hypothèses de préférences continues et monotones. Attention: $p_l \to 0 \Rightarrow d_l(p, w) \to \infty$!

Chapitre II: Economies d'échange

Une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ consiste en

• L biens, $l = 1, ..., L$

• N agents (ou consommateurs) $i = 1, ..., N$ caractérisés chacun par une dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}^L_+$ et des préférences $\succsim^i$ sur $\mathbb{R}^L_+$, représentées par une fonction d'utilité u^i

II.A. Equilibre concurrentiel

Définition:

Un équilibre concurrentiel $(p, z^1, ..., z^N)$ pour $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ consiste en

• un vecteur de prix $p = (p_1, ..., p_L) \in \mathbb{R}^L_+$

• une allocation $z = (z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}^L_+)^N$

tels que

• $\forall i = 1, ..., N$, z^i maximise l'utilité u^i de i sous sa contrainte budgétaire: z^i est solution de $\max_{\zeta\in\mathbb{R}^L_+} u^i(\zeta)$ sous $p.\zeta \leq p.e^i$ c.à.d. $\sum_{l=1}^L p_l\zeta_l \leq \sum_{l=1}^L p_l e^i_l$, $i = 1, ..., N$

• les marchés ($l = 1, ..., L$) s'apurent: $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$ c.à.d. $\sum_{i=1}^N z^i_l = \sum_{i=1}^N e^i_l$, $l = 1, ..., L$

Interprétation: "main invisible"

- Le systéme de prix suffit à équilibrer les demandes des agents, qui n'agissent que pour maximiser leurs préférences individuelles

- Les agents sont négligeables, ils n'ont pas d'influence sur les prix (par exemple, ils sont très nombreux)

Théorème fondamental: existence

Si l'économie $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ satisfait:

• $\sum_{i=1}^N e^i \gg 0$ (c.à.d. $\sum_{i=1}^N e^i_l > 0$, $l = 1, ..., L$: tous les biens sont présents dans l'économie)

• la fonction d'utilité u^i de chaque agent i ($i = 1, ..., N$) est continue, strictement croissante et strictement quasi-concave

Alors $\mathcal{E}$ a (au moins) un équilibre concurrentiel

Remarques: Le théorème donne simplement des conditions *suffisantes* pour l'*existence* d'un équilibre. Une démonstration standard du résultat fait appel à un théorème de point fixe; nous y reviendrons. Une économie qui ne satisfait pas les conditions ci-dessus peut néanmoins avoir un équilibre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou linéaires en T.D.). L'unicité, question délicate, fait l'objet d'énoncés de nature tout à fait différente.

Calcul pratique d'équilibres et boîte d'Edgeworth

2 biens x, y

2 consommateurs 1,2 de dotations initiales respectives $e^1 = (e^1_x, e^1_y)$, $e^2 = (e^2_x, e^2_y)$ et de fonctions d'utilité respectives u^1, u^2

On se place dans le cas "régulier": $e^1_x + e^2_x > 0$, $e^1_y + e^2_y > 0$, u^1, u^2 continues, strictement croissantes, strictement quasi-concaves et de plus, continûment différentiables

Un équilibre consiste en une paire de prix $p = (p_x, p_y)$ et une allocation $((x^1, y^1), (x^2, y^2))$

(Etape 1) La résolution des problèmes d'optimisation individuels fournit les demandes $(x^1(p), y^1(p))$ et $(x^2(p), y^2(p))$ de chaque consommateur, en fonction de p:

En supposant une solution $x^i > 0$, $y^i > 0$, $i = 1, 2$:

$TMS^i_{y\to x}\ (x^i, y^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial x}(x^i, y^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial y}(x^i, y^i)} = \frac{p_x}{p_y}$ (C.P.O.)

$p_x x^i + p_y y^i = p_x e^i_x + p_y e^i_y$ (C.B.)

En particulier, $TMS^1_{y\to x}\ (x^1, y^1) = TMS^2_{y\to x}\ (x^2, y^2) = \frac{p_x}{p_y}$

(Etape 2) Les conditions d'apurement des marchés:

$x^1(p) + x^2(p) = e^1_x + e^2_x$ (i), $y^1(p) + y^2(p) = e^1_y + e^2_y$ (ii)

permettent de déduire $p = (p_x, p_y)$

(i) et (ii) ne sont pas indépendantes: chaque agent sature sa contrainte budgétaire, d'où

$p_x[x^1(p) + x^2(p) - e^1_x - e^2_x] + p_y[y^1(p) + y^2(p) - e^1_y - e^2_y] = 0$

on garde donc un degré de liberté pour le vecteur de prix, qu'on peut normaliser; par exemple, $p_x + p_y = 1$, $p_x = 1$ (bien x numéraire), etc.

Ayant déterminé p, on trouve l'allocation d'équilibre $((x^{*1}, y^{*1}), (x^{*2}, y^{*2}))$ en remplaçant p dans l'expression des demandes des consommateurs

Remarque: si les fonctions d'utilité ne sont pas différentiables, ou si la solution du problème d'optimisation d'un des deux consommateurs n'est pas strictement positive, on peut suivre la même démarche, c.à.d.

- Etape 1: déterminer la (fonction de) demande de chacun des consommateurs
- Etape 2: vérifier pour quel(s) prix ces demandes sont compatibles, au sens où les marchés s'apurent

MAIS on ne peut plus égaliser d'emblée les TMS !!! (voir exemples en T.D.)

Quelques éléments de démonstration du théorème fondamental d'existence d'un équilibre concurrentiel dans une économie d'échange

Résultat auxiliaire (théorème de point fixe de Brouwer): Soit $S \subseteq \mathbb{R}^L$, $S \neq \emptyset$, compact, convexe et $g : S \to S$ une fonction continue. Sous ces hypothèses, g a un point fixe, c.à.d. $\exists\ p^* \in S$ tel que $g(p^*) = p^*$

Remarque: la continuité de g est essentielle, y compris "au bord"

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie d'échange satisfaisant les hypothèses du théorème. Les dotations initiales e^i resteront fixées

Soit S l'ensemble des prix normalisés: $S = \{p \in \mathbb{R}^L_+ \colon \sum_l p_l = 1\}$

int $S = \{p \in S \colon p \gg 0\}$

Comme u^i est strictement croissante et strictement quasi-concave, la fonction de demande du consommateur i, $d^i : S \to \mathbb{R}^L_+$, est bien définie et satisfait la loi de Walras $p.d^i(p) = p.e^i$, $\forall\ p \gg 0$

La fonction de demande excédentaire f^i est définie par $f^i(p) = d^i(p) - e^i$. Par la loi de Walras, $p.f^i(p) = 0$, $\forall\ p \gg 0$

Les hypothèses garantissent que $f^i : S \to \mathbb{R}^L_+$ est continue sur int S. Cependant, si $p_l \to 0$, $f^i_l(p) \to \infty$, ce qui est de nature à poser quelques problèmes techniques. Dans ces éléments de démonstration, nous les négligerons

Soit $f = \sum_{i=1}^N f^i$ la demande excédentaire agrégée

Par la loi de Walras, $p.f(p) = 0$, c.à.d. $\sum_l p^*_l f_l(p^*) = 0\ \forall\ p \gg 0$

p^* est un prix d'équilibre concurrentiel $\Leftrightarrow f(p^*) = 0$

Un tel prix existe dès que $\exists\ p^* \gg 0$: $f(p^*) \leq 0$

En effet, on a alors $p^*_l f_l(p^*) \leq 0$, $l = 1, ..., L$; par la loi de Walras ($\sum_l p^*_l f_l(p^*) = 0$), on déduit $f_l(p^*) = 0$, $l = 1, ..., L$

Etape principale du raisonnement: lemme

Supposons que $h : S \to S$ soit une fonction continue (sur tout S) telle que $p.h(p) = 0\ \forall\ p \in S$; alors $\exists\ p^* \in S$ tel que $h(p^*) \leq 0$, c.à.d. $h_l(p^*) \leq 0$, $l = 1, ..., L$

Remarque: le lemme ne s'applique pas directement à la fonction de demande excédentaire agrégée dans la mesure où sa définition au bord pose problème

Démonstration du lemme: on définit une fonction $g : S \to S$

$$g_l(p) = \frac{p_l + \max\{0, h_l(p)\}}{1 + \sum_k \max\{0, h_k(p)\}} \quad l = 1, ..., L$$

Intuition: si $h_l(p) \leq 0$, on maintient le prix du bien l; si $h_l(p) > 0$, on l'augmente

Par le théorème de Brouwer, $\exists\ p^* \in S : p^* = g(p^*)$

$$p_l^* \sum\nolimits_k \max\{0, h_k(p)\} = \max\{0, h_l(p^*)\}\ l = 1, ..., L$$

En multipliant par $h_l(p^*)$ et en sommant sur l

$$\sum\nolimits_l p_l^* h_l(p^*) \sum\nolimits_k \max\{0, h_k(p)\} = \sum\nolimits_l h_l(p^*) \max\{0, h_l(p^*)\}$$

Comme $p.h(p) = 0$,

$$0 = \sum\nolimits_l h_l(p^*) \max\{0, h_l(p^*)\} \Rightarrow h_l(p^*) \leq 0 \quad l = 1, ..., L$$

ce qui établit le lemme

Exemple: l'unicité (globale) de l'équilibre n'est pas garantie par les hypothèses du théorème d'existence

$u^1(x, y) = (\alpha x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $u^2(x, y) = (x^\rho + \alpha y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ (fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante, voir T.D.) avec $\rho = -2$

$e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$

$d_x^1(p) + d_x^2(p) = 1 \Leftrightarrow ar^3 - r^2 + r - a = 0$, où $r = (\frac{p_x}{p_y})^{\frac{1}{3}}$ et $a = \alpha^{-\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow (r - 1)(ar^2 + (a - 1)r + a) = 0$

Pour $\alpha = 64$, $a = \frac{1}{4}$, $(r - 1)(r^2 - 3r + 1) = 0$ a 3 racines: $r = 1$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,62$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,38$. On a donc 3 prix d'équilibre possibles

II.B. Optimalité de Pareto

Economie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$

Une allocation $z = (z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ est *réalisable* si $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$ c.à.d. $\sum_{i=1}^N z_l^i = \sum_{i=1}^N e_l^i$, $l = 1, ..., L$

Soient z et $\widetilde{z}$ des allocations réalisables; $\widetilde{z}$ *Pareto-domine* z si $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $u^i(\widetilde{z}^i) \geq u^i(z^i)$ et $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$

Une allocation (réalisable) z est *Pareto-optimale* si elle n'est Pareto-dominée par aucune allocation (réalisable)

Remarque 1: La Pareto-dominance ne permet pas nécessairement de comparer deux allocations données

Remarque 2: Le concept d'optimum de Pareto ne fait pas appel à la notion de prix

Remarque 3: A un optimum de Pareto, il n'existe plus d'échage mutuellement avantageux

Remarque 4: Les optima de Pareto dépendent de la dotation initiale totale des agents, non de la répartition de cette dotation entre les agents

Premier théorème du bien-être

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont croissantes; si $(\widetilde{p}, \widetilde{z})$ est un équilibre concurrentiel, $\widetilde{z}$ est une allocation Pareto-optimale

Démonstration: Puisque $(\widetilde{p}, \widetilde{z})$ est un équilibre, on a, pour chaque i, compte tenu de la croissance de u^i, $\forall\ \zeta^i \in \mathbb{R}_+^L$

$p.\zeta^i \leq p.e^i \Rightarrow u^i(\zeta^i) \leq u^i(\widetilde{z}^i)$

$p.\zeta^i < p.e^i \Rightarrow u^i(\zeta^i) < u^i(\widetilde{z}^i)$

Par l'absurde, supposons que $\widetilde{z}$ soit Pareto-dominée par z: $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$. $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $u^i(z^i) \geq u^i(\widetilde{z}^i)$ et $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $u^j(z^j) > u^j(\widetilde{z}^j)$

On doit avoir $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $p.z^i \geq p.e^i$ et $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $p.z^j > p.e^j$

En sommant, $\sum_{i=1}^N (p.z^i) > \sum_{i=1}^N (p.e^i)$, c.à.d. $p.\sum_{i=1}^N z^i > p.\sum_{i=1}^N e^i$, mais ceci contredit $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$: cqfd

Résultat auxiliaire: théorème de séparation

Théorème: Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ deux ensembles convexes disjoints ($A \cap B = \emptyset$). Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \neq 0$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $\gamma.x > c\ \forall x \in A$ et $\gamma.y < c\ \forall y \in B$

Corollaire: Soit $B \subseteq \mathbb{R}^N$ un ensemble convexe et $x \notin int(B)$. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \neq 0$, tel que $\gamma.x \geq \gamma.y\ \forall y \in B$

Second théorème du bien-être

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont strictement croissantes et quasi-concaves; si $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^1, ..., \widetilde{z}^N)$ est une allocation Pareto-optimale telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, $i = 1, ..., N$, $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre concurrentiel de $\mathcal{E}' = \{L, N, (\widetilde{z}^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$, c.à.d. $\exists\ p$ tel que $\widetilde{z}^i$ maximise $u^i(z^i)$ sous $p.z^i \leq p.\widetilde{z}^i$ $i = 1, ..., N$

Base de la démonstration: $P^i = \{z^i \in \mathbb{R}^L_+ : u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i)\}$, $i = 1, ..., N$

P^i est convexe par la quasi-concavité de u^i

$P = \sum_i P^i = \{z \in \mathbb{R}^L_+ : z = \sum_i z^i,\ z^i \in P^i,\ i = 1, ..., N\}$

P est également convexe

Soit $\zeta = \sum_i \widetilde{z}^i$; comme $\widetilde{z}$ est Pareto-optimale, $\zeta \notin P$

Par le théorème de séparation, $\exists\ p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$, tel que $p.\zeta \leq p.z$, $\forall z \in P$

On vérifie ensuite (*exercice*): $p > 0$ et la condition d'optimalité de chaque consommateur: $\forall\ i = 1, ..., N$, $u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i) \Rightarrow p.z^i > p.\widetilde{z}^i$

Remarque 1: Le second théorème du bien-être n'est pas nécessairement vrai dans une économie où les préférences ne sont pas convexes (voir exemple graphique)

Remarque 2: Pour faire de $\widetilde{z}$ une allocation d'équilibre, on a modifié les dotations initiales de e^i à $\widetilde{z}^i$, $i = 1, ..., N$, ce qui peut être lourd à réaliser. Il suffit en fait d'effectuer des *transferts forfaitaires* de richesse, compte tenu des prix p qui permettent la *décentralisation* de $\widetilde{z}$

Pour énoncer précisément ce résultat: $(p, z) \in \mathbb{R}^L_+ \times (\mathbb{R}^L_+)^N$ est un équilibre avec transferts de $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ s'il existe $w^1 \in \mathbb{R}$, ...,$w^N \in \mathbb{R}$ tels que

- $\sum_{i=1}^N w^i = p. \sum_{i=1}^N e^i$
- $\forall i = 1, ..., N$, z^i est solution de $\max_{\zeta\in\mathbb{R}^L_+} u^i(\zeta)$ sous $p.\zeta \leq w^i$, $i = 1, ..., N$
- $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$

Le transfert à l'agent i est $t^i = w^i - p.e^i$, $i = 1, ..., N$; $\sum_{i=1}^N t^i = 0$

Propriété: Si (p, z) est un équilibre concurrentiel, avec (p, z) est un équilibre avec transferts (il suffit de prendre $w^i = p.e^i$, $i = 1, ..., N$)

Variante du second théorème du bien-être: Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont strictement croissantes et quasi-concaves; si $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^1, ..., \widetilde{z}^N)$ est une allocation Pareto-optimale telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, $i = 1, ..., N$, $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre avec transferts de $\mathcal{E}$

Démonstration: Il suffit de prendre $w^i = p.\widetilde{z}^i$, $i = 1, ..., N$, où p est le prix qu'on a construit dans la démonstration précédente. Le transfert à l'agent i est $t^i = p.\widetilde{z}^i - p.e^i$

Caractérisation des optima de Pareto

Rappel: une *allocation* $z = (z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ de $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ est *réalisable* si $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$

On considère l'ensemble des *utilités réalisables*:

$V = \{(v^1, ..., v^N) \in \mathbb{R}^N : \exists$ une allocation réalisable z telle que $v^i \leq u^i(z^i)$, $i = 1, ..., N\}$

V est *monotone*: $y \leq v$, $v \in V \Rightarrow y \in V$

PV: frontière de Pareto de V

$PV = \{(v^1, ..., v^N) \in V : \nexists\ (\widetilde{v}^1, ..., \widetilde{v}^N) \in V$ tel que $\forall\ i\ \widetilde{v}^i \geq v^i$ et $\exists\ j$ $\widetilde{v}^j > v^j\}$

Proposition: une allocation réalisable z est Pareto-optimale $\Leftrightarrow (u^1(z^1), ..., u^N(z^N)) \in PV$. *Démonstration: exercice*

On introduit $\gamma^i \geq 0$, le poids du consommateur i, $i = 1, ..., N$

On considère le problème d'*optimisation sociale* $\max_{v \in V} \sum_{i=1}^N \gamma^i v^i$ (O.S.)

Proposition: Si $\exists\ \gamma^i > 0$, $i = 1, ..., N$ tels que $v_* = (v_*^1, ..., v_*^N)$ soit solution de (O.S.), $v_* \in PV$

Démonstration: Par l'absurde, supposons $v_* \notin PV$. Alors $\exists\ (\widetilde{v}^1, ..., \widetilde{v}^N) \in V$ tel que $\forall\ i\ \widetilde{v}^i \geq v_*^i$ et $\exists\ j\ \widetilde{v}^j > v_*^j$. Comme $\gamma^i > 0\ \forall\ i$, on en déduit $\sum_i \gamma^i \widetilde{v}^i > \sum_i \gamma^i v_*^i$, contradiction, cqfd

Proposition: Si V est convexe, $\forall\ \widetilde{v} \in PV$, $\exists\ \gamma^i \geq 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls ($\gamma \neq 0$), tels que $\widetilde{v}$ soit solution de (O.S.)

Démonstration: Soit $\widetilde{v} \in PV$; $\widetilde{v} \notin int(V)$. Par le théorème de séparation, $\exists\ \gamma \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^N \gamma^i \widetilde{v}^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma^i v^i\ \forall v \in V$. Il reste à montrer que $\gamma^i \geq 0$, $\forall\ i$. Par l'absurde, supposons $\gamma^j < 0$ pour un certain j; en prenant $v \in V$ tel que $v^j < 0$, $|v^j|$ très grand, on aurait $\gamma^j v^j > \gamma^j \widetilde{v}^j$, contradiction, cqfd

Remarque: Les propriétés ci-dessus s'appliquent même si l'ensemble des utilités réalisables ne provient pas d'une économie d'échange, mais d'un problème de décision collective quelconque

Proposition: Si, dans l'économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$, les fonctions d'utilité u^i sont concaves, V est convexe. *Démonstration: exercice*

Le problème d'*optimisation sociale* dans une économie d'échange

Soit $\gamma^i > 0$, $i = 1, ..., N$; si $\widetilde{z}$ est solution de $\max_{z \geq 0} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i)$ sous $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$ c.à.d. $\sum_{i=1}^N z_l^i \leq \sum_{i=1}^N e_l^i$, $l = 1, ..., L$, $\widetilde{z}$ est une allocation Pareto-optimale

Supposons les fonctions d'utilité u^i croissantes et concaves, $i = 1, ..., N$. Soit $\widetilde{z}$ une allocation Pareto-optimale; $\exists\ \gamma^i \geq 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls ($\gamma \neq 0$), tels que $\widetilde{z}$ soit solution de $\max_{z \geq 0} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i)$ sous $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$

Si les fonctions d'utilité u^i sont différentiables, on considère les conditions du premier ordre associées au problème d'optimisation sociale en $z \gg 0$

$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) - \sum_{l=1}^L \lambda_l \left(\sum_{i=1}^N z_l^i - \sum_{i=1}^N e_l^i \right)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_l^i} = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i) - \lambda_l = 0\ i = 1, ..., N,\ l = 1, ..., L$

$\Leftrightarrow \lambda_l = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i)\ i = 1, ..., N,\ l = 1, ..., L$

$\Rightarrow TMS_{l \to k}^i(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial z_k^i}(z^i)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_k}\ \forall\ i = 1, ..., N$

En une solution $z \gg 0$, les TMS des agents (relatifs à une paire de biens quelconques) sont égaux entre eux. On se rappelle que cette condition est satisfaite en une allocation d'équilibre concurrentiel z ($TMS_{l \to k}^i(z^i) = \frac{p_l}{p_k}$, où p est le prix d'équilibre). Par le premier théorème du bien-être, on s'attend à cette propriété. Elle indique aussi comment calculer le prix qui permet de décentraliser une allocation Pareto-optimale en un équilibre concurrentiel, suivant le second théorème du bien-être: $\frac{p_l}{p_k} = \frac{\lambda_l}{\lambda_k}$

Exercice: soit $e_l = \sum_{i=1}^N e_l^i$ la dotation totale en bien l, $l = 1, ..., L$ et $\widetilde{z} = \widetilde{z}(\gamma, e) \gg 0$ l'allocation Pareto-optimale dérivée ci-dessus; montrer que λ_l est l'utilité sociale marginale de e_l, c.à.d. $\lambda_l = \frac{d}{de_l}[\sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(\widetilde{z}^i)]$

Interprétation du poids γ^i de l'agent i à un optimum $\widetilde{z} \gg 0$

On a vu que $\frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i) = \frac{\lambda_l}{\gamma^i}$ (1)

Par le second théorème du bien-être, $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre; on peut prendre $\widetilde{p} = \lambda$ comme prix associé; soit μ^i le multiplicateur de la contrainte budgétaire de l'agent i: $\frac{\partial u^i(\widetilde{z}^i)}{\partial z_l^i} = \mu^i \widetilde{p}_l = \mu^i \lambda_l$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow \gamma^i = \frac{1}{\mu^i}$ c.à.d. γ^i est l'inverse de l'utilité marginale du revenu de l'agent i

Chapitre III: Economies avec production

Une économie avec production (et propriété privée)
$\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ consiste en

• L biens, $l = 1, ..., L$

• N agents (ou consommateurs) $i = 1, ..., N$ caractérisés chacun par une dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}^L_+$ et une fonction d'utilité u^i

• M entreprises $j = 1, ..., M$ caractérisées chacune par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^L$

• une part $\theta^{ij} \geq 0$ de l'entreprise j pour chaque agent i: $\sum_{i=1}^N \theta^{ij} = 1$, $j = 1, ..., M$

III.1 Le producteur

On considère un producteur typique (on omet donc l'indice j) caractérisé par son ensemble de production $Q \subseteq \mathbb{R}^L$. Q décrit la technologie de l'entreprise, qui permettra de transformer les dotations initiales des agents

Les inputs sont comptés négativement et les outputs, positivement

Exemple: si $L = 3$, $(-1; 1; -0,5) \in Q$ signifie qu'on peut produire 1 unité de bien 2 à partir d'1 unité de bien 1 et de 0,5 unité de bien 3

Exemple: $Q = \{(-x, y) : x \in \mathbb{R}^K_+, y \in \mathbb{R}_+, y \leq g(x)\}$ décrit la production d'un seul output à partir de K inputs, grâce à une fonction de production $g : \mathbb{R}^K_+ \to \mathbb{R}_+$

Propriétés usuelles d'un ensemble de production:

• $0 \in Q$: il est possible de ne rien produire

• $Q \cap \mathbb{R}^L_+ \subseteq \{0\}$: il n'est pas possible de produire sans input

• $Q - \mathbb{R}^L_+ \subseteq Q$: élimination libre

• Q est fermé

• Q est convexe

• Rendements d'échelle: Q est à rendements décroissants si $q \in Q$, $0 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow \rho q \in Q$; Q est à rendements croissants si $q \in Q$, $\rho \geq 1 \Rightarrow \rho q \in Q$; Q est à rendements constants si $q \in Q$, $\rho \geq 0 \Rightarrow \rho q \in Q$

Proposition

• Si $0 \in Q$ et Q est convexe, Q est à rendements décroissants

• Si Q est décrit par une fonction de production g:
$Q = \{(-x, y) : x \in \mathbb{R}^K_+, y \in \mathbb{R}_+, y \leq g(x)\}$

Q est convexe $\Leftrightarrow$ g est concave

Q est à rendements décroissants $\Leftrightarrow$ $g(\lambda x) \leq \lambda g(x)$ $\forall$ $\lambda \geq 1$ (ce qui explique la terminologie). *Démonstration: exercice*

Plan de production efficace

analogue à l'optimalité de Pareto vue dans une économie d'échange

$q \in Q$ est efficace $\Leftrightarrow \nexists\, q' \in Q$: $q' > q$ (c.à.d. $q' \geq q$, $q' \neq q$)

$\Leftrightarrow$ il n'est pas possible d'augmenter la production d'un output sans diminuer celle d'un autre output ou sans accroître la consommation d'un input, il n'est pas possible de réduire la quantité utilisée d'un input sans augmenter celle d'un autre input ou sans diminuer la production d'un output

Si Q est décrit par une fonction de production g, l'ensemble des plans de production efficaces correspond à une partie de la frontière de Q, où $y = g(x)$

Optimum du producteur

Soit $p = (p_l)_{1\leq l \leq L} \in \mathbb{R}^L_+$ un vecteur de prix; le producteur, comme le consommateur est "preneur de prix" (hypothèse de concurrence parfaite)

$q \in Q$ procure un profit $\pi(p) = p.q = \sum_{l=1}^{L} p_l q_l$ au producteur

Exemple: Si les prix sont $(1, 10, 2)$, $(-1; 1; -0,5)$ procure un profit de $1 \times (-1) + 10 \times 1 + 2 \times (-0,5) = 8$

L'objectif du producteur est de maximiser son profit sous ses contraintes technologiques: $\max_{q\in Q} p.q$

Justification: On suppose que les consommateurs $1, ..., N$ sont propriétaires de l'entreprise; soit $\theta^i \geq 0$ la part du consommateur i ($\sum_{i=1}^{N} \theta^i = 1$); le consommateur reçoit la part $\theta^i p.q$ du profit de l'entreprise, qui contribue à son revenu. Comme les consommateurs maximisent leur utilité sous la contrainte de ne pas dépasser leur revenu, ils ont intérêt à avoir le revenu le plus élevé possible et sont donc unanimes pour que l'entreprise maximise son profit

Le problème d'optimisation du producteur $\max_{q\in Q} p.q$ n'a pas nécessairement de solution car Q n'est pas borné

Si les rendements sont croissants, le problème n'a pas de solution; mais ceci peut arriver même si les rendements sont décroissants

Si Q est à rendements constants, le profit maximal, s'il existe, est nécessairement nul. *Démonstration: exercice*

Conditions nécessaires pour un optimum dans le cas d'une fonction de production g, différentiable, d'un seul output

$Q = \{(-x, y) : x \in \mathbb{R}^K_+,\ y \in \mathbb{R}_+,\ y \leq g(x)\}$

$r =$ prix de l'output; $w_k =$ prix de l'input k, $k = 1, ..., K$; $p = (r, w_1, ..., w_K)$

Le problème du producteur est $\max_{x,y}(ry - w.x)$ sous $y = g(x)$. On s'intéresse aux solutions $(x, y) \gg 0$

$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = ry - w.x - \lambda(y - g(x)) = ry - \sum_{k=1}^{K} w_k x_k - \lambda(y - g(x))$

Conditions du premier ordre: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}(x,y,\lambda) = -w_k + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 0 \; \forall \; k$ et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = r - \lambda = 0$

En un optimum (x^*, y^*): (1) $TMST_{k \to l}(x^*) =_{\text{déf}} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_k}(x^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_l}(x^*)} = \frac{w_k}{w_l} \; \forall \; k, l$: le taux marginal de substitution technique de l'input k à l'input l est égal au rapport du prix de ces inputs et (2) $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x^*) = \frac{w_k}{r}$: la productivité marginale de chaque input est égale au rapport du prix de ce facteur au prix de l'output.

Fonction d'offre du producteur

Si $\forall \; p$, $\max_{q \in Q} p.q$ a une solution, et que cette solution soit unique, on la note $q^*(p)$; q^* définit alors la *fonction d'offre* (nette) du producteur

Proposition: si Q est strictement convexe ($q, \; q' \in Q$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha q + (1-\alpha)q' \in \text{int}Q$) et que $\max_{q \in Q} p.q$ ait une solution, cette solution est unique. *Démonstration: exercice*

Propriétés de la fonction d'offre $q^*(.)$, supposée bien définie (c.à.d.$\forall \; p$, $\max_{q \in Q} p.q$ a une solution unique)

• Homogène de degré 0 par rapport au prix $q^*(\alpha p) = q^*(p) \; \forall \alpha > 0$. *Démonstration: exercice*

• Efficacité: soit $p \gg 0$; $q^*(p)$ est efficace. *Démonstration: exercice*

• Loi de l'offre: quand le prix d'un bien augmente, l'offre (nette) de ce bien ne peut diminuer. Formellement, $(p - p').(q(p) - q(p')) \geq 0 \; \forall \; p, p'$. En particulier, $(p_l - p'_l)(q_l(p) - q_l(p')) \geq 0 \; l = 1, ..., L$

Démonstration: $p.q(p') \leq p.q(p)$ car $q(p)$ est l'optimum en p; de même, $p'.q(p) \leq p'.q(p')$, ce qui équivaut à $-p'.q(p) \geq -p'.q(p')$; il suffit alors de sommer. cqfd

III.2 Plusieurs producteurs: offre agrégée

Nous supposons maintenant qu'il y a M entreprises $j = 1, ..., M$, caractérisées chacune par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^L$. On définit l'ensemble de production agrégé par

$Q_{AG} = \sum_{j=1}^{M} Q^j = \{q \in \mathbb{R}^L | \exists \; q^j \in Q^j, \; j = 1, ..., M : q = \sum_{j=1}^{M} q^j\}$

Proposition: Soit p un vecteur de prix, $q^{j*} \in Q^j$, $j = 1, ..., M$ et $q^*_{AG} = \sum_{j=1}^{M} q^{j*}$. q^*_{AG} est solution de $\max_{q \in Q_{AG}} p.q \Leftrightarrow q^{j*}$ est solution de $\max_{q \in Q^j} p.q$, $\forall \; j = 1, ..., M$. En particulier, l'offre agrégée $q^*_{AG}(p) = \sum_{j=1}^{M} q^{j*}(p)$, définie à partir des fonctions d'offre $q^{j*}(p)$ de chaque firme j, peut se voir comme la fonction d'offre d'une entreprise représentative et satisfait la loi de l'offre

Démonstration:

$\Rightarrow$: supposons par l'absurde qu'une entreprise, m, réalise un profit strictement plus élevé en choisissant q^m plutôt que q^{m*}, c.à.d. $p.q^m > p.q^{m*}$. Soit $q_{AG} = \sum_{j \neq m} q^{j*} + q^m$; $p.q_{AG} > p.q^*_{AG}$, contradiction.

$\Leftarrow$: supposons par l'absurde qu'il existe $q_{AG} \in Q_{AG}$ tel que $p.q_{AG} > p.q^*_{AG}$. Par définition de Q_{AG}, $q_{AG} = \sum_{j=1}^M q^j$, avec $q^j \in Q^j$, $j = 1, ..., M$; $p. \sum_{j=1}^M q^j > p. \sum_{j=1}^M q^{j*} \Rightarrow \exists\ m$: $p.q^m > p.q^{m*}$, contradiction. cqfd

III.3 Equilibre concurrentiel avec production

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}, (Q^j)_{1 \leq j \leq M}, (\theta^{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}\}$. Un équilibre concurrentiel (p, q, z) pour $\mathcal{E}$ consiste en un vecteur de prix $p = (p_1, ..., p_L) \in \mathbb{R}^L_+$ et une allocation $(q, z) = (q^1, ..., q^M, z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}^L)^M \times (\mathbb{R}^L_+)^N$, où q est un plan de production, tels que

- $\forall j = 1, ..., M$, q^j maximise le profit $p.\chi^j$ de l'entreprise j sous $\chi^j \in Q^j$
- $\forall i = 1, ..., N$, z^i maximise l'utilité $u^i(\zeta)$ du consommateur i sous sa contrainte budgétaire $p.\zeta \leq p.e^i + \sum_{j=1}^M \theta^{ij}(p.q^j)$
- les marchés $(l = 1, ..., L)$ s'apurent: $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i + \sum_{j=1}^M q^j$

Le profit de l'entreprise j s'écrit $p.\chi^j = \sum_{l=1}^L p_l \chi^j_l$

La contrainte budgétaire du consommateur i s'écrit

$\sum_{l=1}^L p_l \zeta_l \leq \sum_{l=1}^L p_l e^i_l + \sum_{j=1}^M \theta^{ij} \sum_{l=1}^L p_l q^j_l$

La condition d'apurement des marchés s'écrit

$\sum_{i=1}^N z^i_l = \sum_{i=1}^N e^i_l + + \sum_{j=1}^M q^j_l$, $l = 1, ..., L$

L'existence d'un équilibre suppose que la maximisation du profit des entreprises ait une solution et exclut donc les rendements croissants. En ajoutant des hypothèses (typiquement de convexité) sur les ensembles de production, on généralise le théorème fondamental d'existence vu dans le cadre des économies d'échange

III.4 L'économie de Robinson Crusoé

Un consommateur, une entreprise possédée par le consommateur

Deux biens: nourriture (x) et loisir (y); travail $t = 24 - y$

r = prix d'une unité de nourriture; w = salaire horaire

Robinson-firme est décrit par une fonction de production $g : t \rightarrow g(t)$ qui transforme du travail en nourriture; il maximise son profit $\pi = rx - wt = rx - w(24 - y)$ sous $g(t) = x$

Les droites d'isoprofit, dans le plan (y, x) ont une pente $\frac{-w}{r}$ (voir graphique)

Robinson-consommateur a une dotation initiale $(e_x, e_y) = (0, 24)$ et une fonction d'utilité u; il maximise $u(x, y) = u(x, 24 - t)$ sous $rx + wy = 24w +$

$\pi \Leftrightarrow rx = wt + \pi$: il consacre son salaire et son profit d'actionnaire à l'achat du bien de consommation; la pente de la contrainte budgétaire dans le plan (y, x) est $\frac{-w}{r}$ (voir graphique)

Exemple 1: la fonction de production g est (strictement) concave et $g(0) = 0$; les rendements sont *décroissants* (voir graphique)

A l'équilibre, les quantités de nourriture produite (output) et de nourriture consommée doivent être égales et la quantité de travail utilisée comme input doit être égale à 24 - la quantité de loisir consommée; de plus, le profit π de Robinson-firme apparaît dans la contrainte budgétaire de Robinson-consommateur. L'équilibre est une solution du problème unifié de Robinson, c.à.d. un optimum de Pareto (voir graphique)

Exemple 2: la fonction de production g est une droite; les rendements sont *constants*; les droites d'isoprofit, dans le plan (t, x) ont une pente $\frac{w}{r} > 0$; à l'optimum du producteur, le profit doit être nul

Si la pente de g est $> \frac{w}{r}$, il n'y a pas de solution: $\pi \to \infty$

Si la pente de g est $< \frac{w}{r}$, la seule solution possible est de ne rien produire (ce qui ne peut constituer un équilibre, vu les préférences de Robinson-consommateur)

Il faut donc que la pente de g soit $= \frac{w}{r}$; si un équilibre existe, son prix est déterminé indépendamment des préférences du consommateur (voir graphique)

Exemple 3: la fonction de production g est convexe; les rendements sont *croissants*. On peut encore trouver une solution au problème unifié de Robinson, c.à.d. un optimum de Pareto, mais celui-ci n'est pas décentralisable par un système de prix: il n'y a pas d'équilibre (voir graphique)

III.5 Optimalité de Pareto

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1 \le i \le N}, (Q^j)_{1 \le j \le M}, (\theta^{ij})_{1 \le i \le N, 1 \le j \le M}\}$

Soit $(q, z) = (q^1, ..., q^M, z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}^L)^M \times (\mathbb{R}^L_+)^N$ une allocation; (q, z) est *réalisable* (dans $\mathcal{E}$) si $q^j \in Q^j$, $j = 1, ..., M$ et $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i + \sum_{j=1}^M q^j$ c.à.d. $\sum_{i=1}^N z^i_l = \sum_{i=1}^N e^i_l + \sum_{j=1}^M q^j_l$, $l = 1, ..., L$

Une allocation (q, z) réalisable est *Pareto-optimale* (dans $\mathcal{E}$) si

$\nexists$ $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ réalisable tel que $\forall\ 1 \le i \le N$, $u^i(\widetilde{z}^i) \ge u^i(z^i)$ et $\exists\ 1 \le j \le N$, $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$

Le bien-être est donc celui des consommateurs, qui possèdent les entreprises. Celles-ci sont juste des technologies de transformation des dotations en biens produits, source de satisfaction pour les consommateurs

Premier théorème du bien-être

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont croissantes; si $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})$ est un équilibre concurrentiel, $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est Pareto-optimale

Démonstration: On procède comme dans le cas d'une économie d'échange. Soit $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})$ un équilibre; supposons, par l'absurde, que $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ soit Pareto-dominée par (q, z). On montre que $p.\sum_{j=1}^{M} q^j > p.\sum_{j=1}^{M} \widetilde{q}^j$, ce qui contredit que $\widetilde{q}^j$ maximise le profit du producteur j, $j = 1, ..., N$. cqfd

Second théorème du bien-être

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont strictement croissantes et quasi-concaves et les ensembles de production Q^j, $j = 1, ..., M$ sont convexes; si l'allocation $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est Pareto-optimale dans $\mathcal{E}$ et telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, $i = 1, ..., N$, il existe un vecteur de prix $\widetilde{p}$ tel que

(i) $\widetilde{q}^j$ maximise $\widetilde{p}.q^j$ sous $q^j \in Q^j$

(ii) $\widetilde{z}^i$ maximise $u^i(z^i)$ sous $p.z^i \leq p.\widetilde{z}^i$, $i = 1, ..., N$

Comme dans le cas d'une économie d'échange, une variante du second théorème du bien-être s'énonce sous la forme: si $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est une allocation Pareto-optimale dans $\mathcal{E}$, telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, $i = 1, ..., N$, $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est une allocation d'équilibre avec transferts de $\mathcal{E}$

Caractérisation des optima de Pareto

On suppose que les ensembles de production Q^j, $j = 1, ..., M$, sont de la forme $Q^j = \{q^j \in \mathbb{R}^L : G^j(q^j) \leq 0\}$ où $G^j : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe (d'où Q^j est un ensemble convexe) et telle que $G^j(0) \leq 0$; en un plan de production q^j efficace, $G^j(q^j) = 0$. On suppose aussi que les fonctions d'utilité u^i sont croissantes et concaves, $i = 1, ..., N$.

Soit $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ une allocation Pareto-optimale. En procédant comme pour une économie d'échange, on montre que $\exists\ \gamma^i \geq 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls $(\gamma \neq 0)$, tels que $\widetilde{z}$ soit solution du problème d'optimisation sociale

$\max_{q,z} \sum_{i=1}^{N} \gamma^i u^i(z^i)$

sous $G^j(q^j) = 0$, $j = 1, ..., M$ et $\sum_{i=1}^{N} z_l^i = \sum_{i=1}^{N} e_l^i + \sum_{j=1}^{M} q_l^j$, $l = 1, ..., L$

Si les fonctions G^j et u^i sont différentiables, on considère les conditions du premier ordre associées au problème, en $z \gg 0$

$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \gamma^i u^i(z^i) - \sum_{j=1}^{M} \mu^j G^j(q^j) - \sum_{l=1}^{L} \lambda_l \left(\sum_{i=1}^{N} z_l^i - \sum_{i=1}^{N} e_l^i - \sum_{j=1}^{M} q_l^j\right)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_l^i} = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i) - \lambda_l = 0$ $i = 1, ..., N$, $l = 1, ..., L$

$\Leftrightarrow \lambda_l = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i)$ $i = 1, ..., N$, $l = 1, ..., L$

$\Rightarrow TMS_{l\to k}^i(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial z_l^i}(z^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial z_k^i}(z^i)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_k}$ $\forall\ i, k, l$ (1)

De même, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_l^j} = \mu^j \frac{\partial G^j}{\partial q_l^j}(q^j) - \lambda_l = 0$ $j = 1, ..., M$, $l = 1, ..., L$

$\Leftrightarrow \lambda_l = \mu^j \frac{\partial G^j}{\partial q_l^j}(q^j)$ $j = 1, ..., M$, $l = 1, ..., L$

$\Rightarrow TMT_{l\to k}^j(q^j) = \frac{\frac{\partial G^j}{\partial q_l^j}(q^j)}{\frac{\partial G^j}{\partial q_k^j}(q^j)} = \frac{\lambda_l}{\lambda_k}$ $\forall\ j, k, l$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow$ En un optimum $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$, $TMS_{l\to k}^i(\widetilde{z}^i) = TMT_{l\to k}^j(\widetilde{q}^j)$ $\forall\ i, j, k, l$

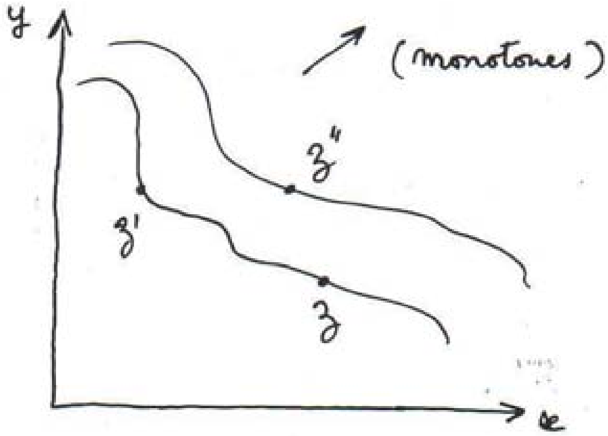
Le taux marginal de substitution de *chaque* agent entre deux biens quelconques doit être égal au taux marginal de *transformation* de chaque entreprise entre ces deux biens. En particulier, les taux marginaux de substitution des différents agents sont égaux entre eux.

Microéconomie 2

Eléments de cours

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES PRÉFÉRENCES : COURBES D'INDIFFÉRENCE

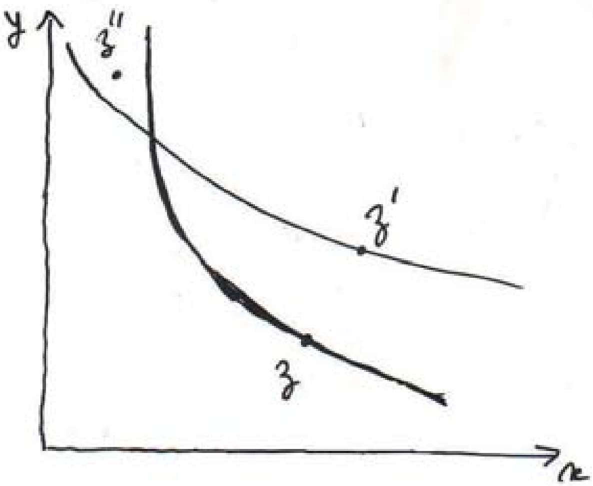
$L = 2$, 2 biens



$z \sim z'$

$z'' \succ z$, $z'' \succ z'$

$\succsim$ relation transitive : les courbes d'indifférence ne se croisent pas

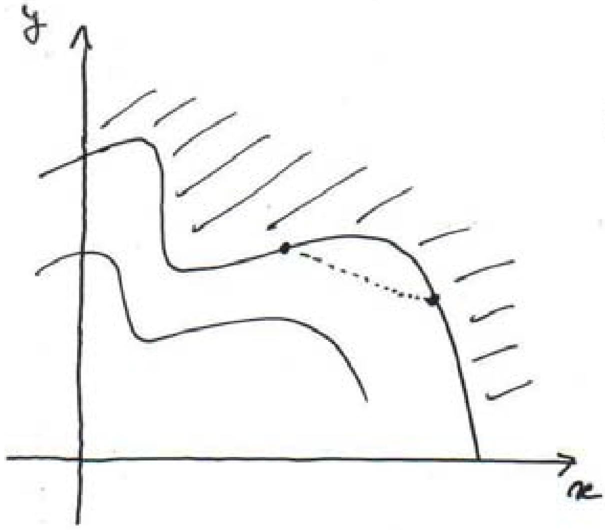


$z'' \succ z'$

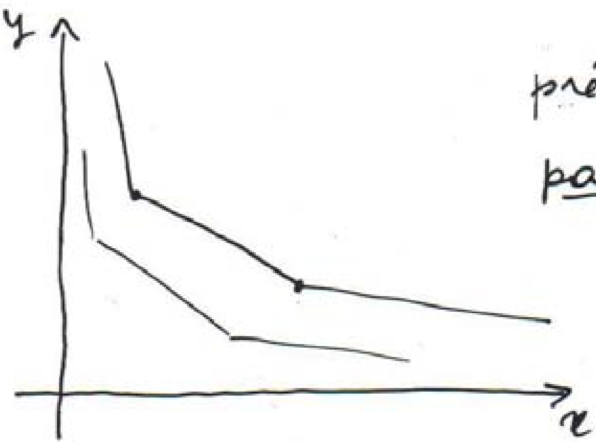
$z' \succ z$

mais pas $z'' \succ z$

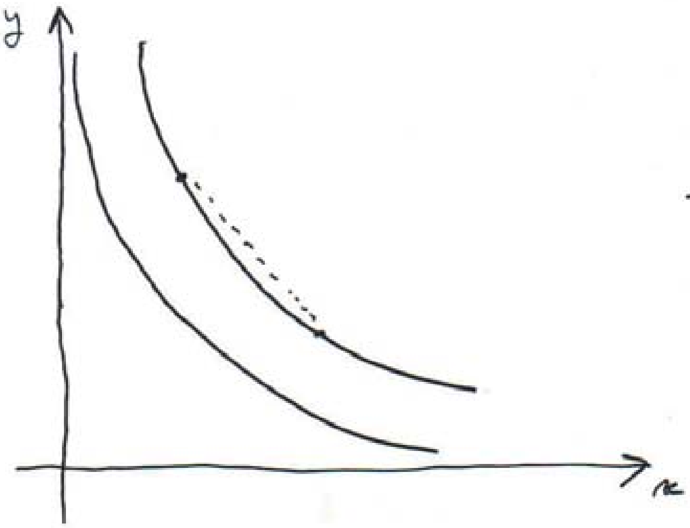
A.1



préférences non-convexes



préférences convexes,
pas strictement convexes

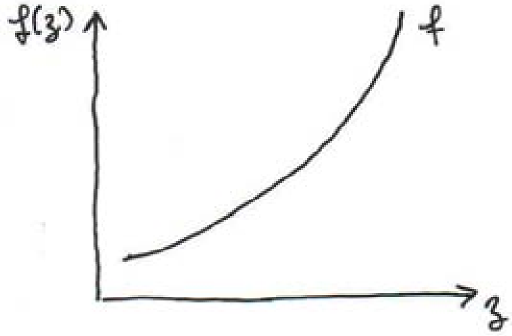


préférences
strictement convexes

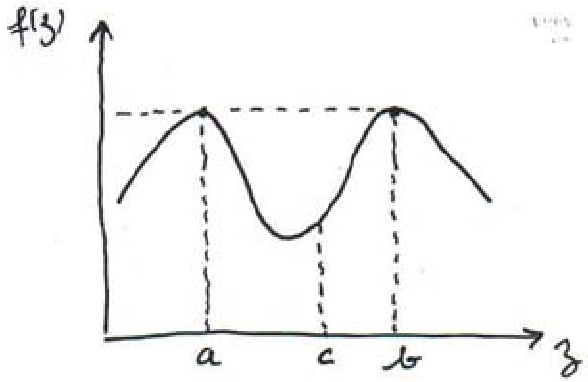
A.2

<u>Parenthèse</u> : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (1 bien)

Pas utile en équilibre général, mais en théorie de la décision ...



convexe croissante $\Rightarrow$ quasi-concave !



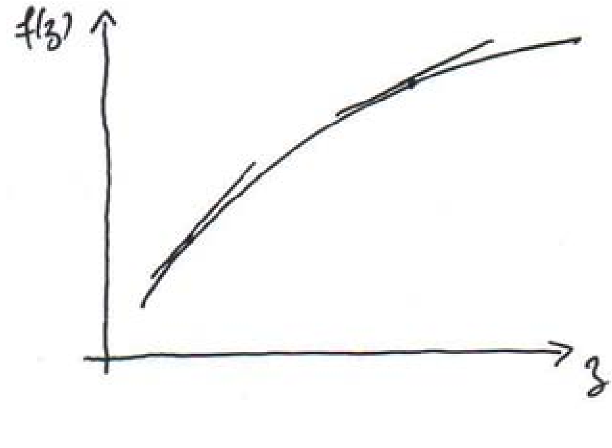
f <u>non</u> quasi-concave

$f(a) = f(b)$

$f(c) < \min\{f(a), f(b)\}$

f concave $\Rightarrow$ f quasi-concave

vrai aussi si $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$



concave : "en-dessous de la tangente"

+ dérivable

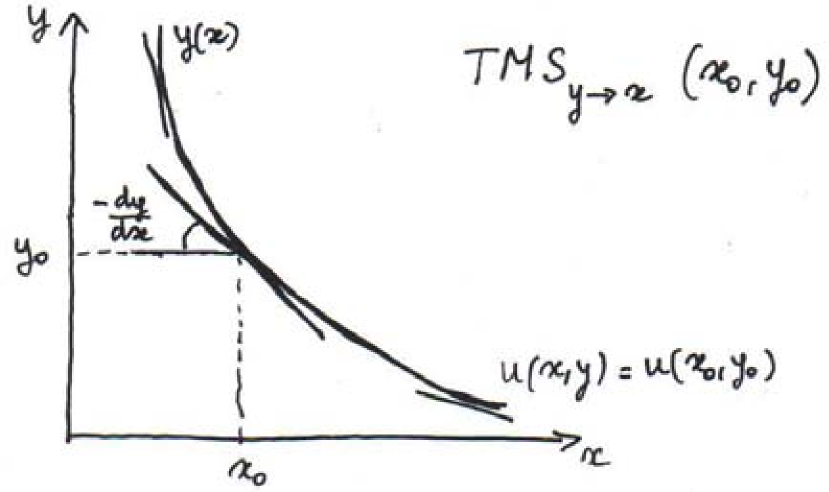
$f' \searrow$

$f'' < 0$

$\hookrightarrow$ gén. $D^2 f$ si $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$

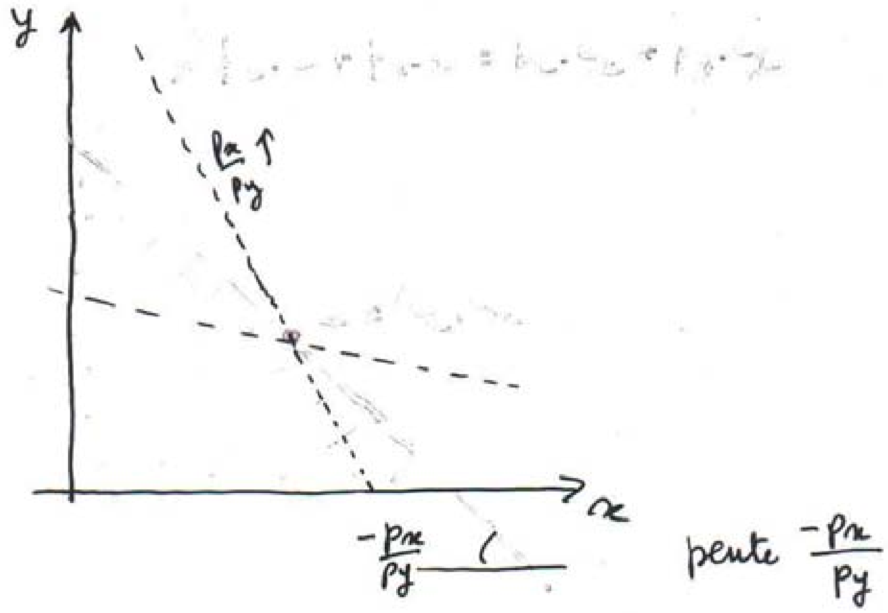
(A.3)

TAUX MARGINAL DE SUBSTITUTION



Décroissant le long d'une courbe d'indifférence, si les préférences sont convexes

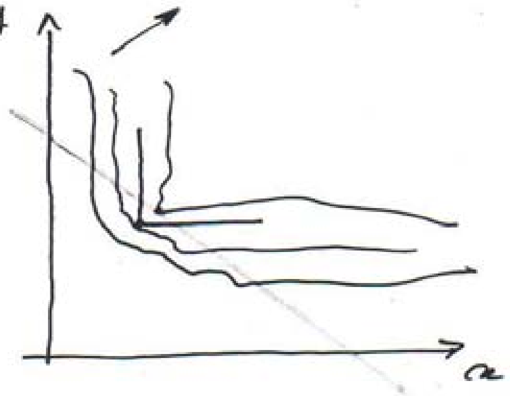
CONTRAINTE BUDGÉTAIRE



(A.4)

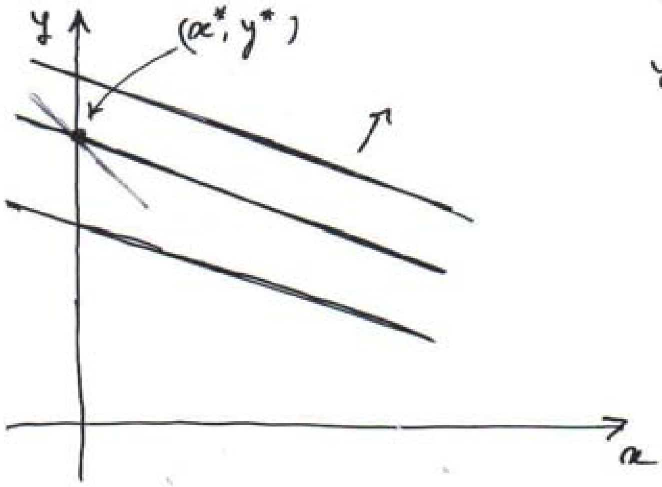
OPTIMISATION DU CONSOMMATEUR

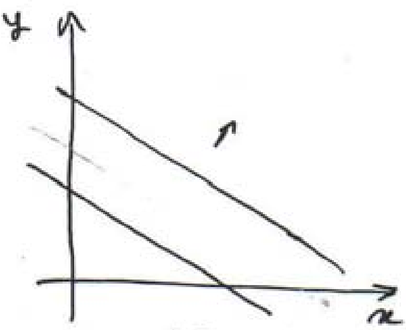
SATURATION de la CONTRAINTE BUDGÉTAIRE



préférences monotones

FONCTIONS d'UTILITÉ linéaires : une solution "au bord" est possible (voir T.D)

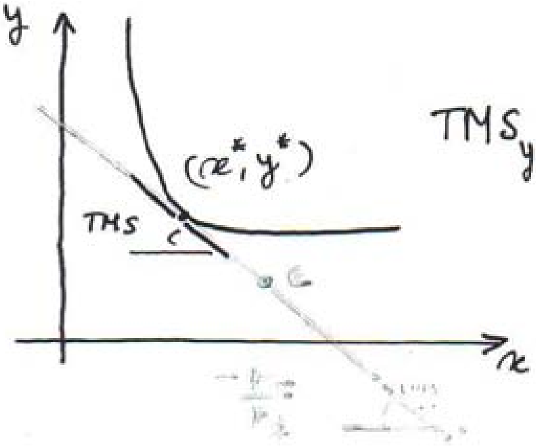




MULTIPLICITÉ d'OPTIMA !

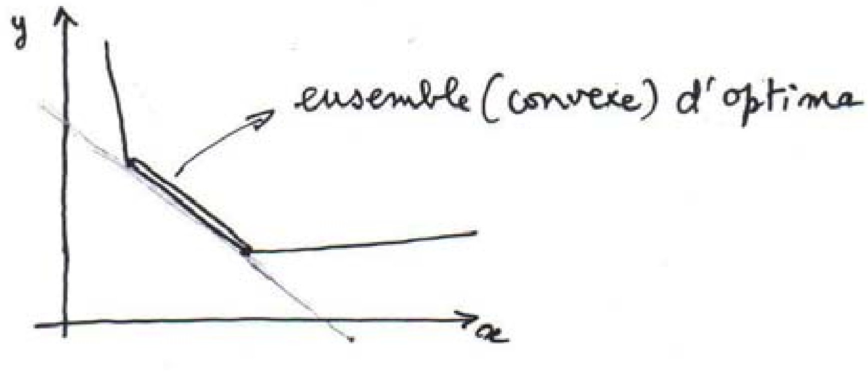
OPTIMISATION DU CONSOMMATEUR

PRÉFÉRENCES STRICTEMENT CONVEXES, UTILITÉ STRICTEMENT QUASI-CONCAVE + DIFFÉRENTIABLE

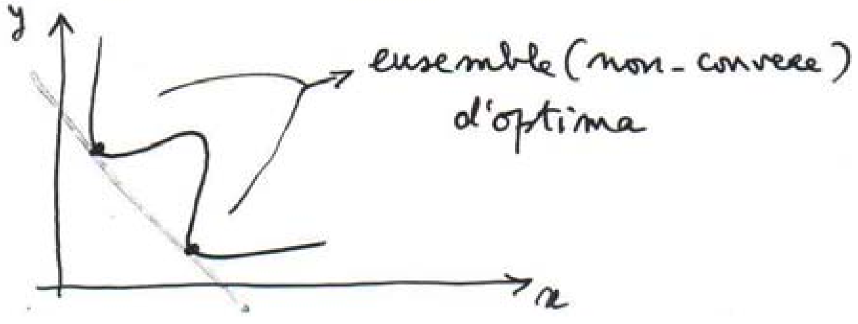


$$TMS_{y \to x}(x^*, y^*) = \frac{p_x}{p_y}$$

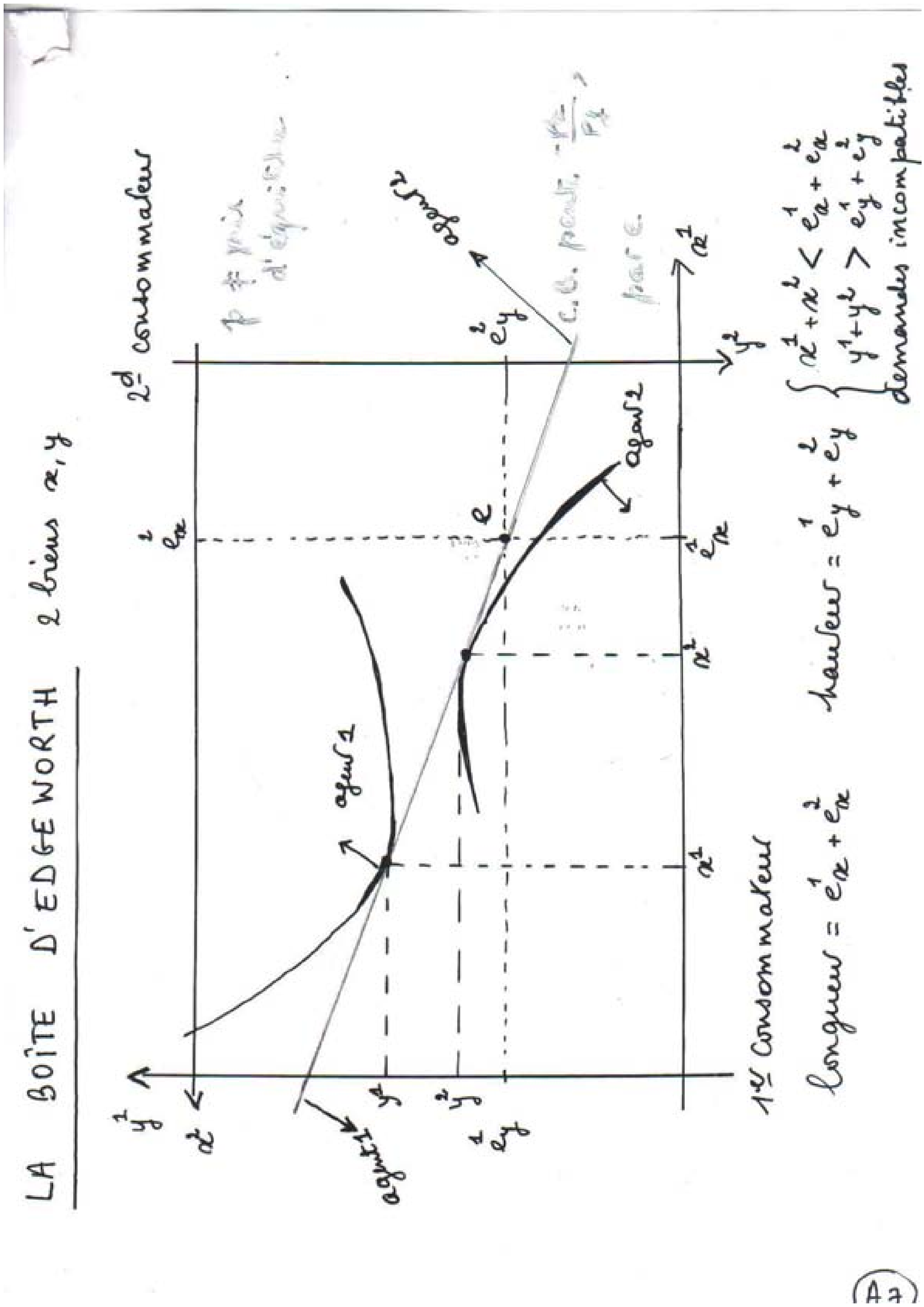
PRÉFÉRENCES CONVEXES, PAS STRICTEMENT

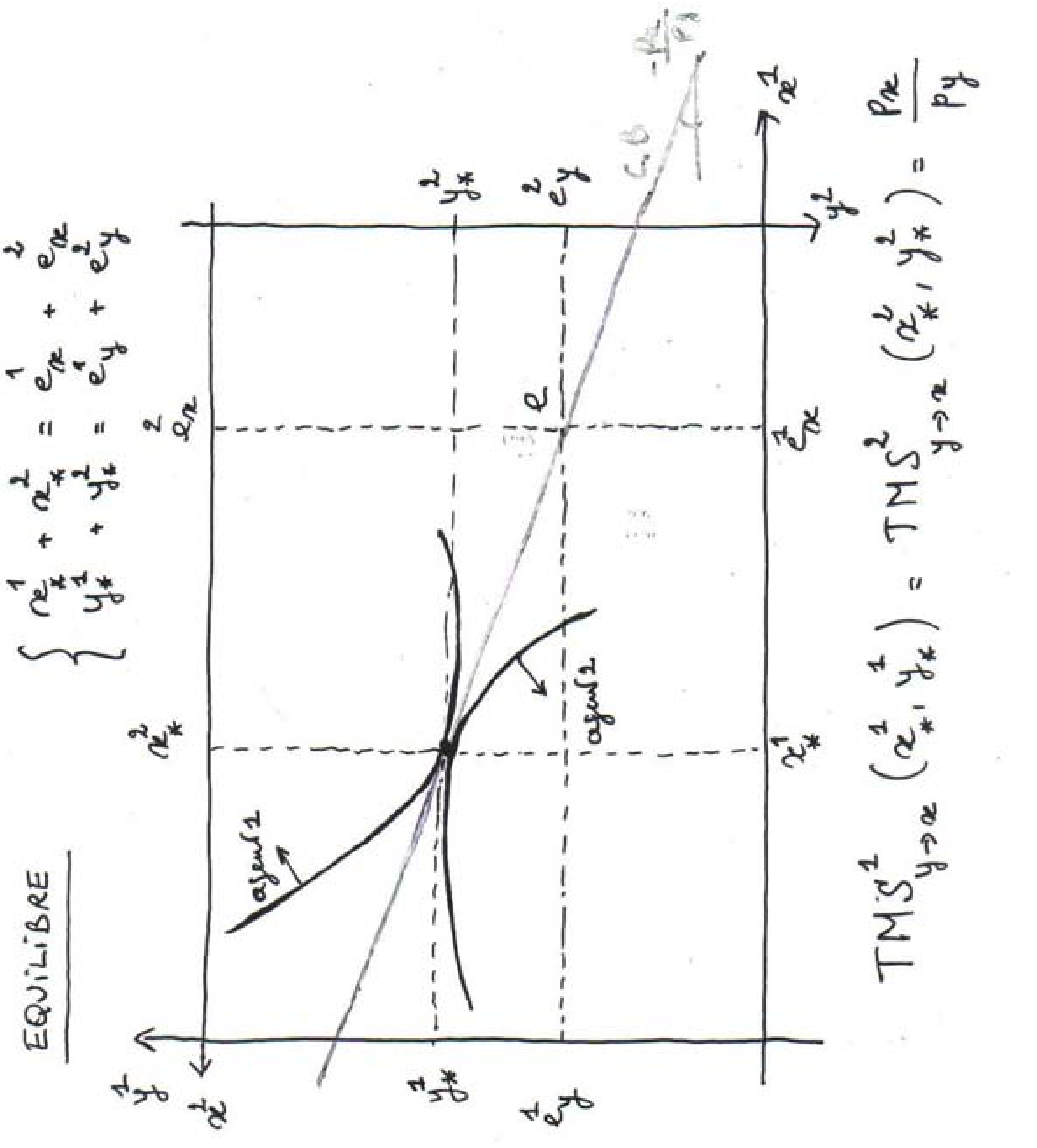


PRÉFÉRENCES NON-CONVEXES



(A.6)

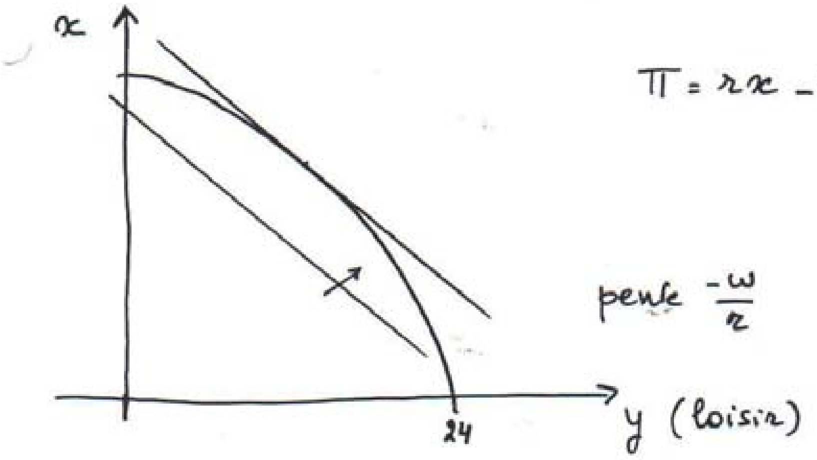

LA BOÎTE D'EDGEWORTH
2 biens x, y
2nd consommateur
1er consommateur
agent 1
agent 2
e
Longueur = $e_x^1 + e_x^2$
hauteur = $e_y^1 + e_y^2$
$x^1 + x^2 < e_x^1 + e_x^2$
$y^1 + y^2 > e_y^1 + e_y^2$
demandes incompatibles
A7


EQUILIBRE
x¹* + x²* = e¹x + e²x
y¹* + y²* = e¹y + e²y
TMS¹y→x (x¹*, y¹*) = TMS²y→x (x²*, y²*) = px/py

(A.8)

ÉCONOMIE de ROBINSON CRUSOÉ.

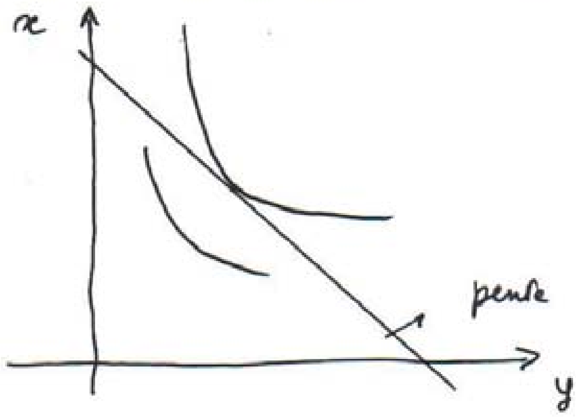
ROBINSON-FIRME, RENDEMENTS DÉCROISSANTS



$\Pi = rx - \omega(24-y)$

pente $\frac{-\omega}{r}$

ROBINSON - CONSOMMATEUR

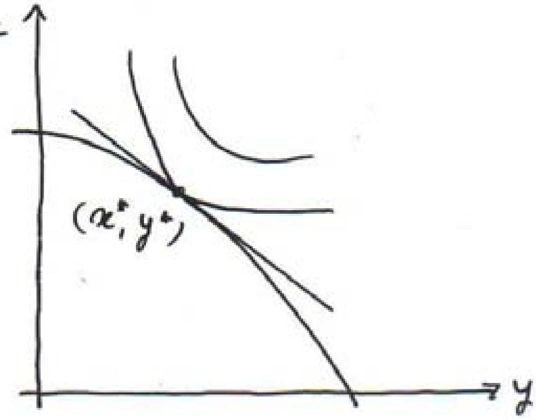


C.B. $rx + \omega y = 24\omega + \Pi$

pente $\frac{-\omega}{r}$.

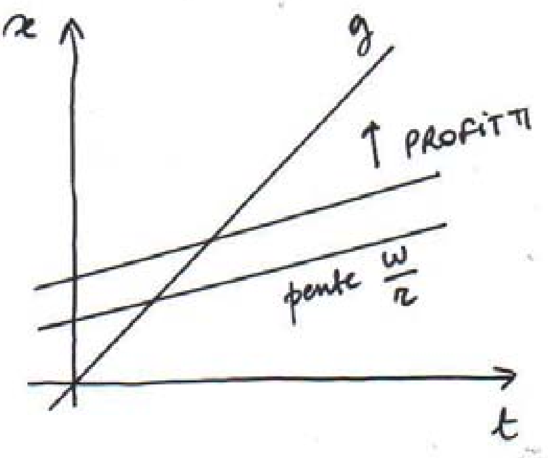
PROBLÈME "UNIFIÉ"

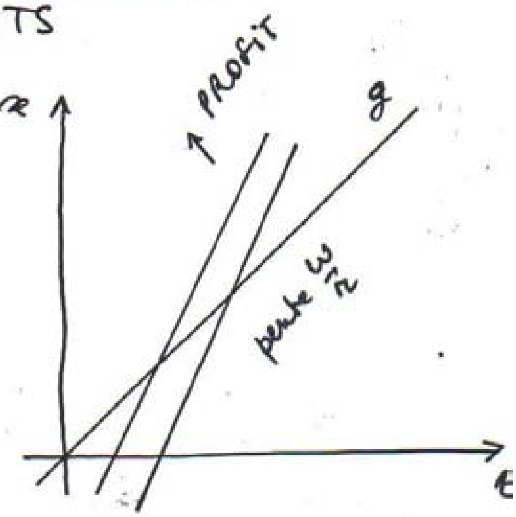
équilibre (x^*, y^*)



ÉCONOMIE de ROBINSON CRUSOÉ :

RENDEMENTS CONSTANTS

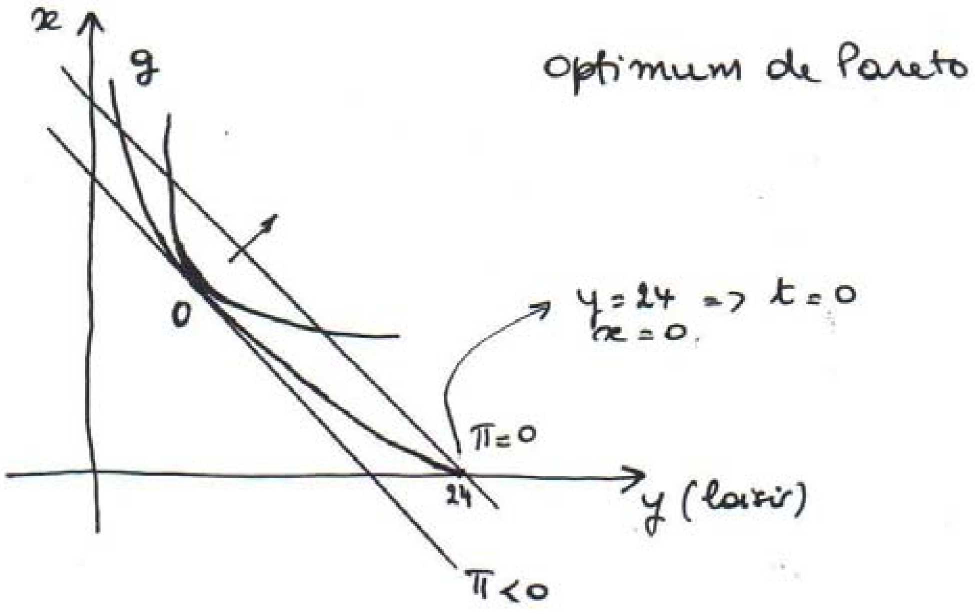




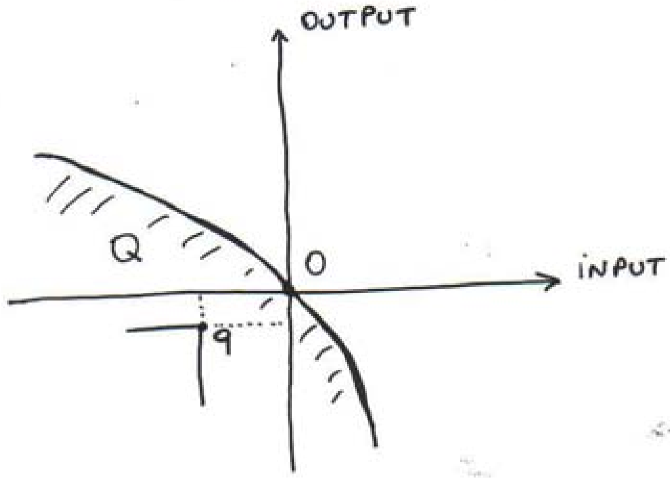
pente de g > $\frac{w}{r}$
$\pi \to \infty$

pente de g < $\frac{w}{r}$
$x^*, t^* \to 0$

RENDEMENTS CROISSANTS



ENSEMBLE de PRODUCTION

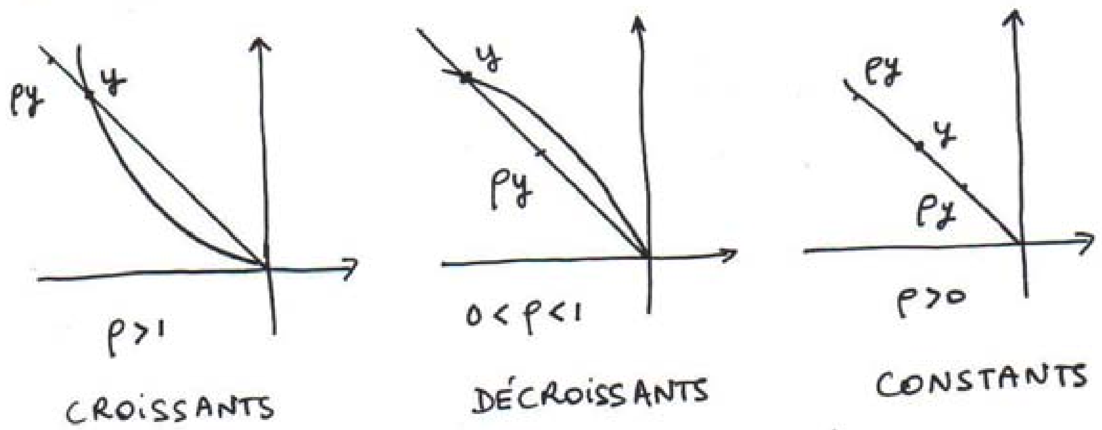


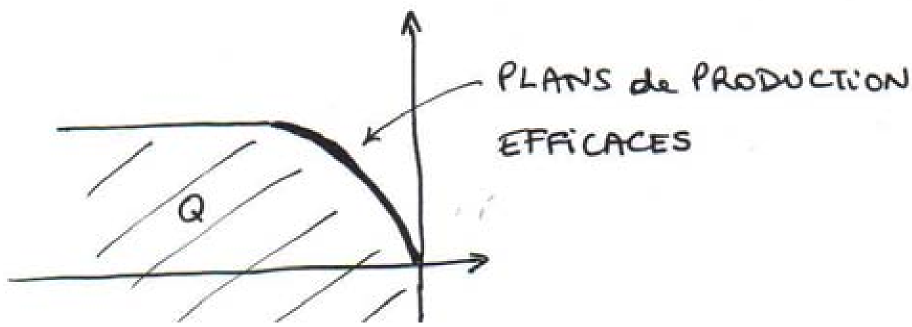
$0 \in Q$

Q convexe

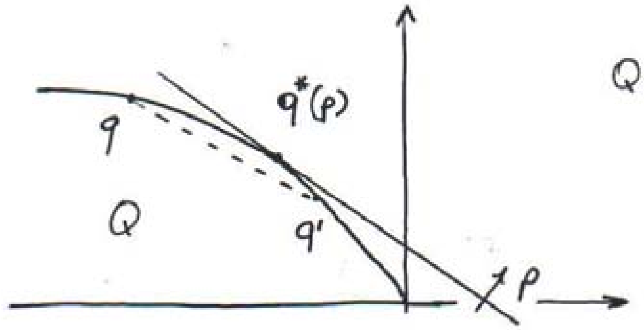
élimination libre

RENDEMENTS d'ÉCHELLE

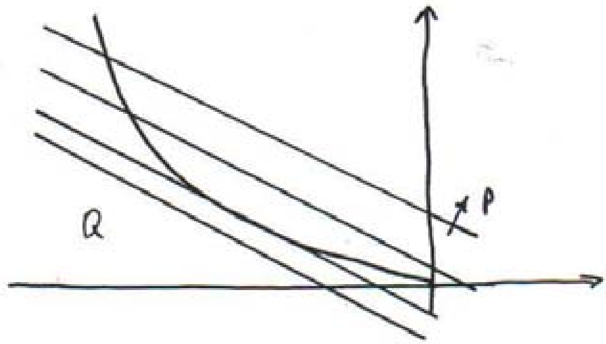




MAXIMISATION du PROFIT

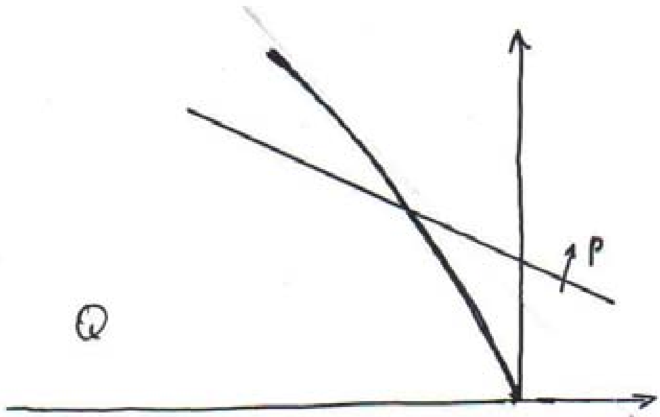


Q strictement convexe



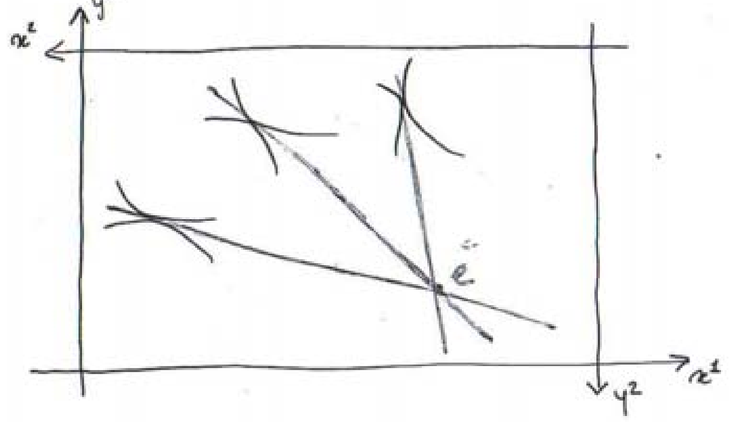
Q à rendements croissants

$\pi(p) \nearrow \infty$



Q à rendements décroissants, strictement convexe, mais pas de solution

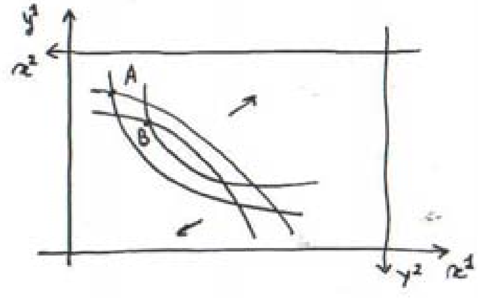
UNE MULTIPLICITÉ d'ÉQUILIBRES (exemple)



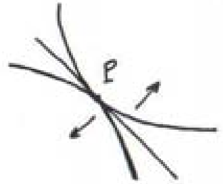
A a

OPTIMALITÉ de PARETO

$L = N = 2$ Boîte d'Edgeworth.



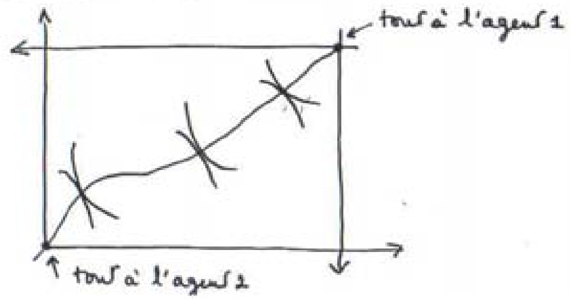
B domine A au sens de Pareto
mais B n'est pas une allocation Pareto-optimale



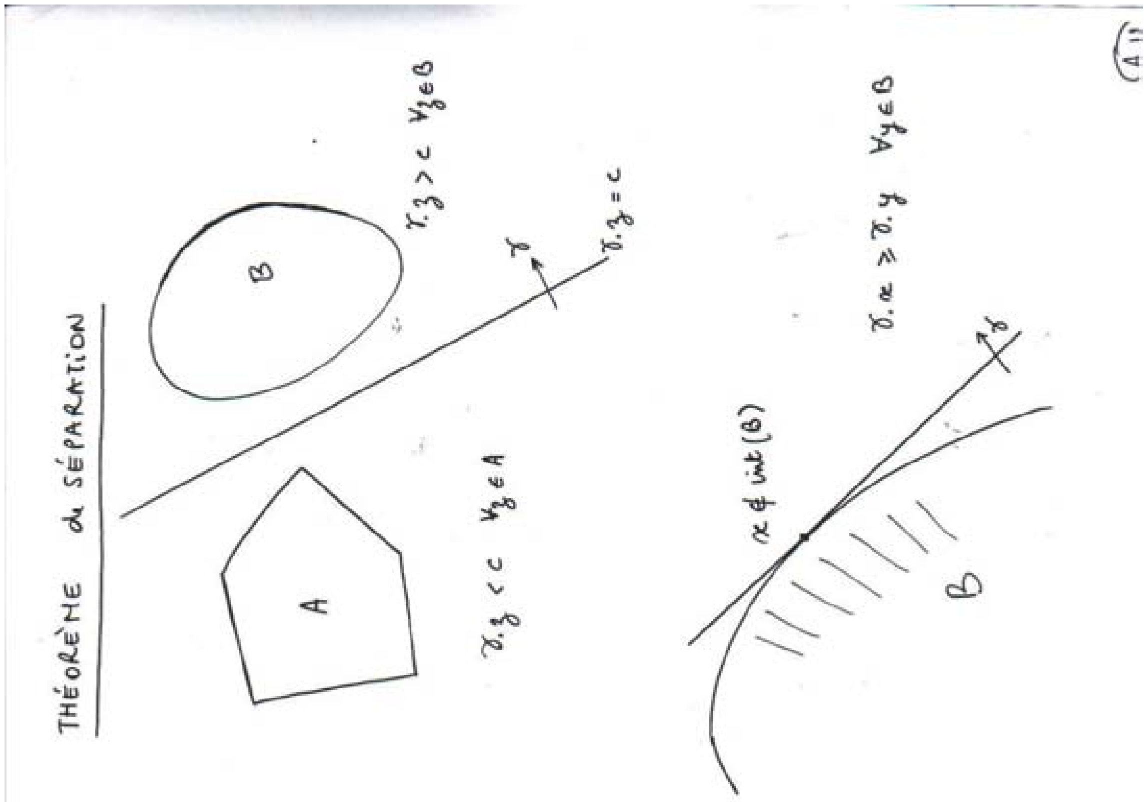
P Pareto-optimale

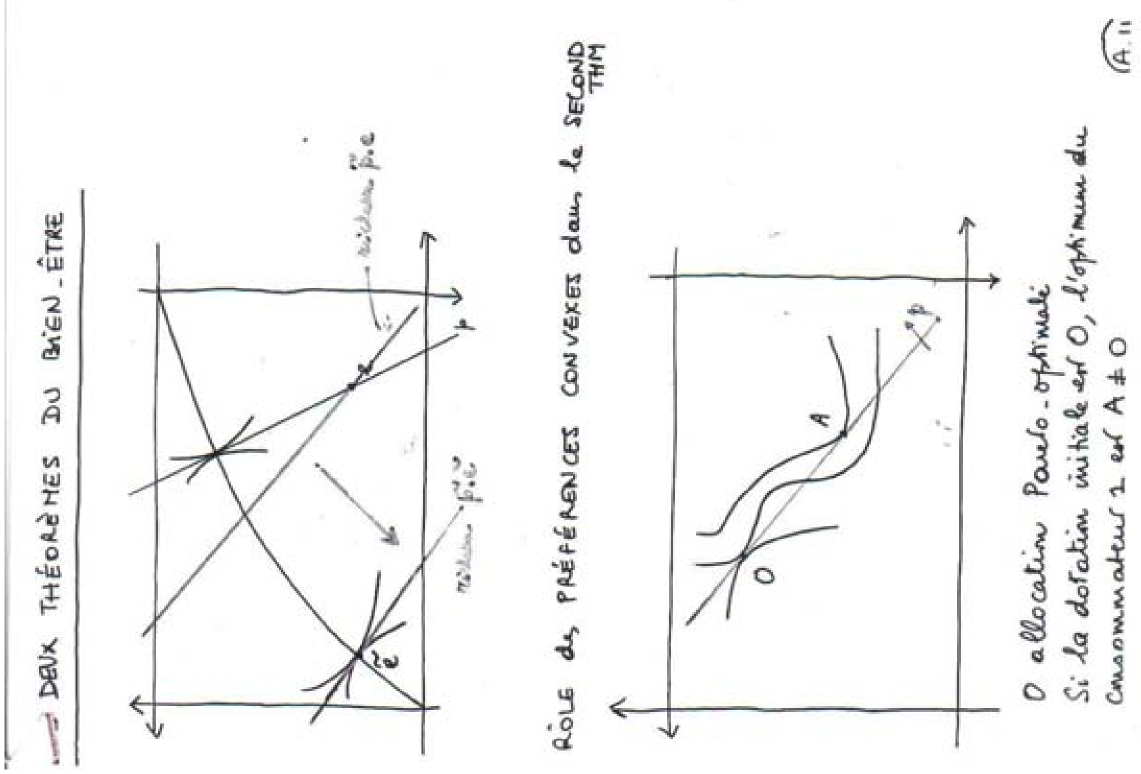
Les courbes d'indifférence sont tangentes, les TMS sont égaux

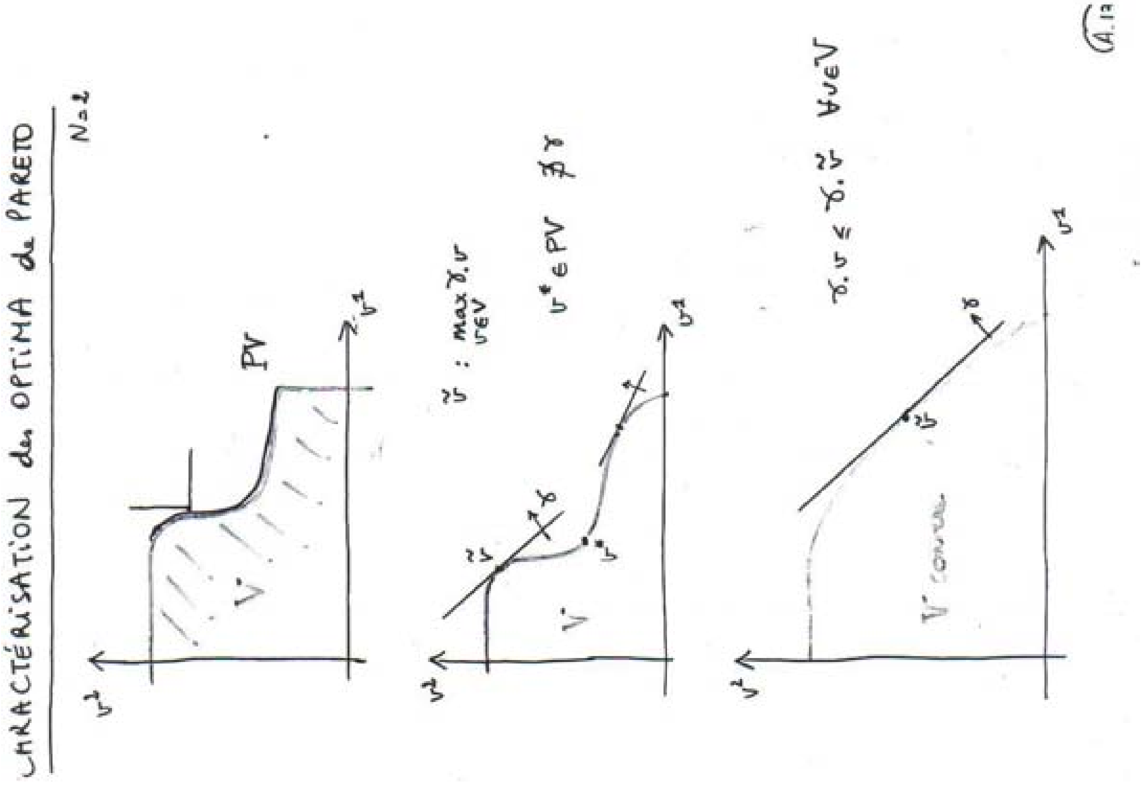
COURBE DES CONTRATS



A.1a


THÉORÈME DE SÉPARATION
A
B
γ.z < c ∀z ∈ A
γ.z > c ∀z ∈ B
γ.z = c
γ
x ∉ int(B)
γ.x ≥ γ.y ∀y ∈ B
A 11


DEUX THÉORÈMES DU BIEN-ÊTRE
RÔLE DES PRÉFÉRENCES CONVEXES DANS LE SECOND THM
O
A
p
O allocation Pareto-optimale
Si la dotation initiale est O, l'optimum du consommateur 1 est A ≠ O
A 11


CARACTÉRISATION des OPTIMA de PARETO
N=2
PV
V
$\tilde{v}$: max $\gamma . v$, $v \in V$
$v^* \in PV$ ∄ γ
$\gamma . v \leq \gamma . \tilde{v}$ $\forall v \in V$
V convexe

EQUILIBRE GÉNÉRAL CALCULABLE

Equilibre GÉNÉRAL : nécessaire pour évaluer des politiques économiques qui ont un impact sur l'ensemble d'une économie

Calcul d'un équilibre général => résolution d'un "grand" système d'équations, dont les inconnues sont les prix, exprimant l'équilibre entre l'offre et la demande

H. SCARF 1973...
J. SHOVEN, J. WHALLEY 1973, 1984...

EXEMPLE

4 biens :
- 2 biens de consommation (outputs)
  - $h=1$ biens industriels
  - $h=2$ services
- 2 facteurs de production (inputs)
  - travail (ℓ)
  - capital (k)

- 2 (types de) producteurs : 1 pour chaque bien de consommation h

- 2 (types de) consommateurs $i = 1, 2$

$i = 1$ "capitaliste" : dotation initiale

$$\bar{k}^1 = \bar{K} = 25$$
$$\bar{\ell}^1 = 0$$

$i = 2$ "salarié" : $\bar{k}^2 = 0$

$$\bar{\ell}^2 = \bar{L} = 60$$

$$\bar{k}^1 + \bar{k}^2 = \bar{K} = 25 \, , \quad \bar{\ell}^1 + \bar{\ell}^2 = \bar{L} = 60$$

PRODUCTION

Le producteur h ($h = 1, 2$) produit du bien h à partir de capital et de travail, suivant une fonction de production

$$\boxed{y_h = g_h(\ell_h, k_h) \qquad h = 1, 2}$$

ℓ_h = quantité de travail utilisée dans le secteur h

k_h = " " capital " " "

y_h = " de bien h produite

CONSOMMATION

Chaque consommateur $i=1,2$ consomme chacun des 2 biens $h=1,2$:

$\boxed{\begin{array}{l} u^i(x_1^i, x_2^i) \text{ utilité de } i,\ i=1,2 \\ x_h^i = \text{quantité de bien } h \text{ consommée par } i \end{array}}$

Pas d'utilité pour les facteurs ! (pas d'arbitrage travail - loisirs ...)

EQUILIBRE 12 variables

- 4 prix :
  - p_1 : biens industriels
  - p_2 : services
  - w : travail ($\rightarrow$ salaire)
  - c : capital
- 2 plans de production $\underset{h=1,2}{}$ $(\ell_h, k_h, y_h = g_h(\ell_h, k_h))$ $h=1,2$
- 2 allocations de consommation x_h^i $i=1,2$ $h=1,2$

tels que (1) les entreprises maximisent leur profit sous contrainte de production

(2) les consommateurs maximisent leur utilité sous contrainte budgétaire

(3) les marchés s'apurent

SPÉCIFICATION et RÉSOLUTION du MODÈLE

- PRODUCTION

g_h à "élasticité de substitution constante" entre les facteurs capital et travail ("C.E.S.")

$$\boxed{y_h = \phi_h \left[\delta_h \, \ell_h^{\rho_h} + (1-\delta_h)\, k_h^{\rho_h} \right]^{1/\rho_h} \qquad h = 1,2}$$

paramètres $\phi_h > 0$, $0 < \delta_h < 1$, $\rho_h < 1$

$g_h(\lambda \ell_h, \lambda k_h) = \lambda\, g_h(\ell_h, k_h) \quad \forall \lambda$

rendements constants $\Rightarrow$ profit nul

$\left\{ \begin{array}{l} w \text{ (salaire)}, \; c \text{ (prix du capital)} : \text{donnés} \\ y_h : \text{quantité du bien de consommation, donnée} \end{array} \right.$

$\rightarrow$ "DEMANDE DE FACTEURS"

$$\boxed{\begin{array}{l} \left(\ell_h^*(w,c,y_h),\; k_h^*(w,c,y_h) \right) = \text{solution de} \\ \min\limits_{\ell_h, k_h} \left[w \ell_h + c k_h \right] \text{ sous } y_h = g_h(\ell_h, k_h) \end{array}}$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \ell_h^*(w,c,y_h) = \cdots & [1] \\ k_h^*(w,c,y_h) = \cdots & [2] \end{array} \right.$ 2 équations pour chaque $h = 1,2$

$$\frac{k_h^*(w, c, y_h)}{\ell_h^*(w, c, y_h)} = \underbrace{\left[\frac{(1-\delta_h)\, w}{\delta_h\, c}\right]^{\sigma_h}} = \text{"}\frac{k_h^*}{\ell_h^*}\left(\frac{w}{c}\right)\text{"}$$

où $\sigma_h = \dfrac{1}{1-\rho_h}$ indépendant de y_h !

$\dfrac{k_h^*}{\ell_h^*}$: "intensité capitalistique"

$$\frac{d\left(k_h^*/\ell_h^*\right)}{d(w/c)} = \sigma_h \frac{k_h^*/\ell_h^*}{w/c}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\frac{d\left(k_h^*/\ell_h^*\right)}{\left(k_h^*/\ell_h^*\right)} = \sigma_h \frac{d(w/c)}{w/c}}$$

σ_h : élasticité de substitution / constante ici

Si w/c augmente de 1 %, l'intensité capitalistique $\dfrac{k_h^*}{\ell_h^*}$ augmente de σ_h %

$\sigma_1 = 2$ Dans le secteur industriel, capital et travail sont fortement substituables

$\sigma_2 = 0{,}5$ Dans le secteur des services, capital et travail sont faiblement substituables

5

Comme les rendements sont constants, tout niveau de production correspond à une situation optimale de l'entreprise - pour autant que $y_h = g_h(\ell_h, k_h)$ - Le niveau de production sera déterminé par la demande des consommateurs.

La condition de profit nul s'écrit

$$p_h y_h - w\ell_h^*(w,c,y_h) - c k_h^*(w,c,y_h) = 0 \qquad h=1,2$$

$\Leftrightarrow$

$$\boxed{p_h = \underbrace{\frac{w\ell_h^*(w,c,y_h) + c k_h^*(w,c,y_h)}{y_h}}_{\text{indépendant de } y_h} = C_M^h(w,c) \qquad h=1,2}$$

[9], [10]

Le prix du bien de consommation h est égal au coût moyen de production du bien h

• CONSOMMATION

$$u^i(x_1^i, x_2^i) = \left[(\alpha_1^i)^{1-\rho^i} (x_1^i)^{\rho^i} + (\alpha_2^i)^{1-\rho^i} (x_2^i)^{\rho^i} \right]^{1/\rho^i}$$

fonction d'utilité à élasticité de substitution constante.

$\alpha_1^i \geq 0$, $\alpha_2^i \geq 0$, $\alpha_1^i + \alpha_2^i = 1$, $\rho^i < 1$

Contrainte budgétaire de i :

$$p_1 x_1^i + p_2 x_2^i = R^i = w\bar{l}^i + c\bar{k}^i \qquad i = 1, 2$$

où $(\bar{l}^i, \bar{k}^i)$ dotation initiale de i

car le profit des entreprises est nul

demande du consommateur i en biens $h = 1, 2$:

$$\boxed{x_h^{*i}(p_1, p_2, R^i) = x_h^{*i}(p_1, p_2, w, c)} \quad [3], [4]$$

2 équations pr chaque consommateur $i = 1, 2$

on a $$\frac{d(x_1^{*i}/x_2^{*i})}{x_1^{*i}/x_2^{*i}} = \sigma^i \frac{d(p_2/p_1)}{p_2/p_1} \quad \text{(voir TD)}$$

$\sigma^i = \dfrac{1}{1-\rho^i}$ élasticité de substitution de l'agent i

Un accroissement de 1% de $\frac{p_2}{p_1}$ conduit à augmenter x_1^{*i}/x_2^{*i} de σ^i %

$\sigma^1 = 1,5$ $\sigma^2 = 0,75$: les demandes de biens industriels et services sont plus fortement substituables pour le capitaliste que pour le salarié

• <u>ÉQUILIBRE</u>

$$(p_1, p_2, w, c, y_1, y_2) \longrightarrow \begin{cases} \ell^*_h(w,c,y_h), \; k^*_h(w,c,y_h) \\ x^{*i}_h(p_1,p_2,w,c) \end{cases}$$

apurement des marchés (4 biens en tout)

$$\begin{cases} \ell^*_1(w,c,y_1) + \ell^*_2(w,c,y_2) = \bar{L} & [5] \\ k^*_1(w,c,y_1) + k^*_2(w,c,y_2) = \bar{K} & [6] \\ x^{*1}_1(p_1,p_2,w,c) + x^{*2}_1(p_1,p_2,w,c) = y_1 & [7] \\ x^{*1}_2(p_1,p_2,w,c) + x^{*2}_2(p_1,p_2,w,c) = y_2 & [8] \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} p_1 = C^1_M(w,c) & [9] \\ p_2 = C^2_M(w,c) & [10] \end{cases}$$

on remplace y_1, y_2 de [7], [8] dans [5] [6]

↳ 4 équations ([5], [6], [9] et [10]) pour les prix

on normalise le salaire à 1 : $w = 1$ (loi de Walras!)

→ 1er tableau : Equilibre général sans taxe

1012 *Journal of Economic Literature, Vol. XXII (September 1984)*

TABLE 2
EQUILIBRIUM SOLUTION FOR ILLUSTRATIVE SIMPLE NO TAX GENERAL-EQUILIBRIUM MODEL
(PARAMETER VALUES SPECIFIED IN TABLE 1)

Equilibrium Prices

Manufacturing Output	1.399
Nonmanufacturing Output	1.093
Capital	1.373
Labor	1.000

Production

	Quantity	Revenue	Capital	Capital Cost ck_1
Manufacturing	24.942	34.898	6.212	8.532
Nonmanufacturing	54.378	59.439	18.788	25.805
Total		94.337	25.000	34.337

	Labor	Labor Cost	Total Cost	Cost Per Unit Output
Manufacturing	26.366	26.366	34.898	1.399
Nonmanufacturing	33.634	33.634	59.439	1.093
Total	60.000	60.000	94.337	

Demands

	Manufacturing	Nonmanufacturing	Expenditure
Rich Households	11.514	16.674	34.337
Poor Households	13.428	37.704	60.000
Total	24.942	54.378	94.337

	Labor Income	Capital Income	Total Income
Rich Households	0	34.337	34.337
Poor Households	60.000	0	60.000
Total	60.000	34.337	94.337

EQUILIBRE GÉNÉRAL "AVEC TAXE"

Nouveau concept ! Mais les mêmes techniques s'appliquent. Cependant, les résultats vus précédemment (comme le 1er thm du bien-être) ne s'appliquent pas automatiquement !

EXEMPLE :
Impôt au taux de 50% sur le revenu net du capital dans le secteur industriel

recettes fiscales → 40% au capitaliste
recettes fiscales → 60% au salarié

Remarque :
Revenu du capital = 34,337 ~ 1/3
travail = 60,000 ~ 2/3

mais n_1 capitalistes (avec chacun $\frac{25}{n_1}$ du capital)

n_2 salariés (" " $\frac{60}{n_2}$ de travail)

$n_1 \ll n_2$ ...

Avec la taxe, le prix du facteur capital devient 1,5c (au lieu de c) dans le secteur industriel.
EFFET ?

Effet de la taxe

Réponse naïve : d'après nos calculs, le coût du capital dans le secteur industriel est $ck_1 = 1{,}373 \times 6{,}212 = 8{,}532$

donc la taxe devrait rapporter $\frac{8{,}532}{2} = 4{,}266$

Mais il faut en fait tout recalculer avec le nouveau coût du facteur capital dans le secteur industriel ! $\to$ second tableau

Recettes fiscales de $\frac{1}{3}[6{,}832] = 2{,}278$

Sans taxe		avec taxe
$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1{,}399}{1{,}093}$	$\nearrow$	$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1{,}467}{1{,}006}$

le prix relatif des biens industriels augmente

$\frac{c}{w} = c = 1{,}373$	$\searrow$	$\frac{c}{w} = c = 1{,}128$

le revenu net du capital diminue
le prix après impôt du facteur capital dans le secteur industriel augmente : $1{,}5c = 1{,}692$
$\Rightarrow$ technique moins capitalistique dans le secteur industriel : $k_1/l_1 \searrow$

TABLE 3

EQUILIBRIUM SOLUTION FOR ILLUSTRATIVE SIMPLE GENERAL-EQUILIBRIUM MODEL WITH 50% TAX ON MANUFACTURING CAPITAL

Equilibrium Prices

Manufacturing Output	1.467
Nonmanufacturing Output	1.006
Capital	1.128
Labor	1.000

Production

	Quantity	Revenue	Capital	Capital Cost (including tax)
Manufacturing	22.387	32.830	4.039	6.832
Nonmanufacturing	57.307	57.639	20.961	23.637
Total		90.469	25.000	30.469

	Labor	Labor Cost	Total Cost	Cost Per Unit Output
Manufacturing	25.999	25.999	32.831	1.467
Nonmanufacturing	34.001	34.001	57.638	1.006
Total	60.000	60.000	90.469	

Demands

	Manufacturing	Nonmanufacturing	Expenditure
Rich Households	8.989	15.827	29.102
Poor Households	13.398	41.480	61.367
Total	22.387	57.307	90.469

	Labor Income	Capital Income	Transfers	Total Income
Rich Households	0	28.191	.911	29.102
Poor Households	60.000	0	1.367	61.367
Total	60.000	28.191	2.278	90.469

"BIEN - ÊTRE"

l'état de l'économie associé à l'équilibre général avec taxe" n'est pas un optimum de Pareto

Chaque consommateur maximise son utilité sous contrainte budgétaire =>

$$TMS^1 = TMS^2 = \frac{P_1}{P_2}$$

Chaque entreprise maximise son profit sous contrainte technologique.

le prix du facteur capital est $1,5c$ pour $h=1$
c pour $h=2$

$$TMST^1 = \frac{w}{1,5c} = \frac{2w}{3c} \neq TMST^2 = \frac{w}{c}$$

"EXTERNALITÉS" ou "EFFETS EXTERNES"

Effets ("positifs" ou "négatifs") indirects

d'une activité < de production ou de consommation

sur < un ensemble de production ou une fonction d'utilité

indirects = qui ne sont pas pris en compte par les marchés

Illustrations classiques :

* apiculteur et cultivateur (externalité de production, positive, réciproque)
* pollution (production ou consommation)

Cours : économie d'échange (→ consommation)

TD : production

En présence d'externalités, l'équilibre concurrentiel n'est pas nécessairement Pareto-optimal.

EXEMPLE : 2 consommateurs 1, 2

2 biens x, y

$e^1 = (1, 0) \quad e^2 = (0, 1)$

Jusqu'ici, les agents n'avaient d'utilité que pour leur propre consommation :

x^i = quantité de bien x consommée par l'agent i

y^i = " " " y " " "

$u^i(x^i, y^i)$

A présent, l'utilité de l'agent 1 dépend de la consommation en bien x de l'agent 2

$$u^1(x^1, y^1; x^2) = \sqrt{x^1 y^1} - x^2$$

$$u^2(x^2, y^2) = \sqrt{x^2 y^2}$$

Equilibre concurrentiel : l'agent 1 ne contrôle pas x^2 !

paramètre

(x^1, y^1) max. $u^1(x^1, y^1; x^2)$

$$\text{s.c.q. } p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$$

$$\max_{(x^1,y^1)} \left[\sqrt{x^1 y^1} - x^2\right] \text{ sc } p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$$

identique à $\max_{(x^1,y^1)} \sqrt{x^1 y^1}$ sc ...

$$\Rightarrow \quad d_x^1(p) = \frac{1}{2} \qquad d_y^1(p) = \frac{1}{2}\frac{p_x}{p_y}$$

Pour le consommateur 2, pas d'externalité

$$\Rightarrow \quad d_x^2(p) = \frac{1}{2}\frac{p_y}{p_x} \qquad d_y^2(p) = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ $p_x = p_y$, chaque agent a $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ exactement comme sans externalité mais les utilités à l'équilibre sont

$$u_*^1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$u_*^2 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

L'équilibre <u>n'est pas Pareto-optimal</u>

Soit $(x_0^1, y_0^1) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{5}\right)$ $\quad (x_0^2, y_0^2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$

c'est une allocation réalisable :

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1, \quad \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

$$u_0^1 = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}} - \frac{1}{3} \qquad u_0^2 = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5}}$$

$$u_0^1 > u_*^1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} > \frac{1}{9} \Leftrightarrow 2 > \frac{15}{9} \quad ✓$$

$$u_0^2 > u_*^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{15} > \frac{1}{16} \quad ✓$$

EXTERNALITÉS : CONDITIONS d'OPTIMALITÉ de PARETO

EXEMPLE (qui généralise le précédent)

2 agents (1 et 2), 2 biens (x et y)

la consommation de bien x par un agent affecte l'autre.

$$\max_{x,y} \rho^1 u^1(x^1, y^1; x^2) + \rho^2 u^2(x^2, y^2; x^1)$$

$$\text{s.c.} \quad x^1 + x^2 = e_x$$
$$y^1 + y^2 = e_y$$

avec $\rho^1 > 0$, $\rho^2 > 0$

$$\mathcal{L} = \rho^1 u^1(x^1, y^1, x^2) + \rho^2 u^2(x^2, y^2, x^1) - \lambda_x (x^1 + x^2 - e_x) - \lambda_y (y^1 + y^2 - e_y)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^1} = \rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \lambda_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^2} = \rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \lambda_x = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^1} = \rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial y^1} - \lambda_y = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^2} = \rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial y^2} - \lambda_y = 0 \quad (4)$$

(1), (3) et (4)

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p^1\, \partial u^1/\partial x^1}{p^1\, \partial u^1/\partial y^1} + \frac{p^2\, \partial u^2/\partial x^1}{p^2\, \partial u^2/\partial y^2}$$

= d_y par (3)   = d_y par (4)

$$\frac{dx}{dy} = TMS^1_{y^1 \to x^1} + TMS^2_{y^2 \to x^1} \qquad (5)$$

En procédant de même avec (2), (3) et (4)

$$\frac{dx}{dy} = TMS^1_{y^1 \to x^2} + TMS^2_{y^2 \to x^2} \qquad (6)$$

Dans l'exemple initial, à l'équilibre concurrentiel

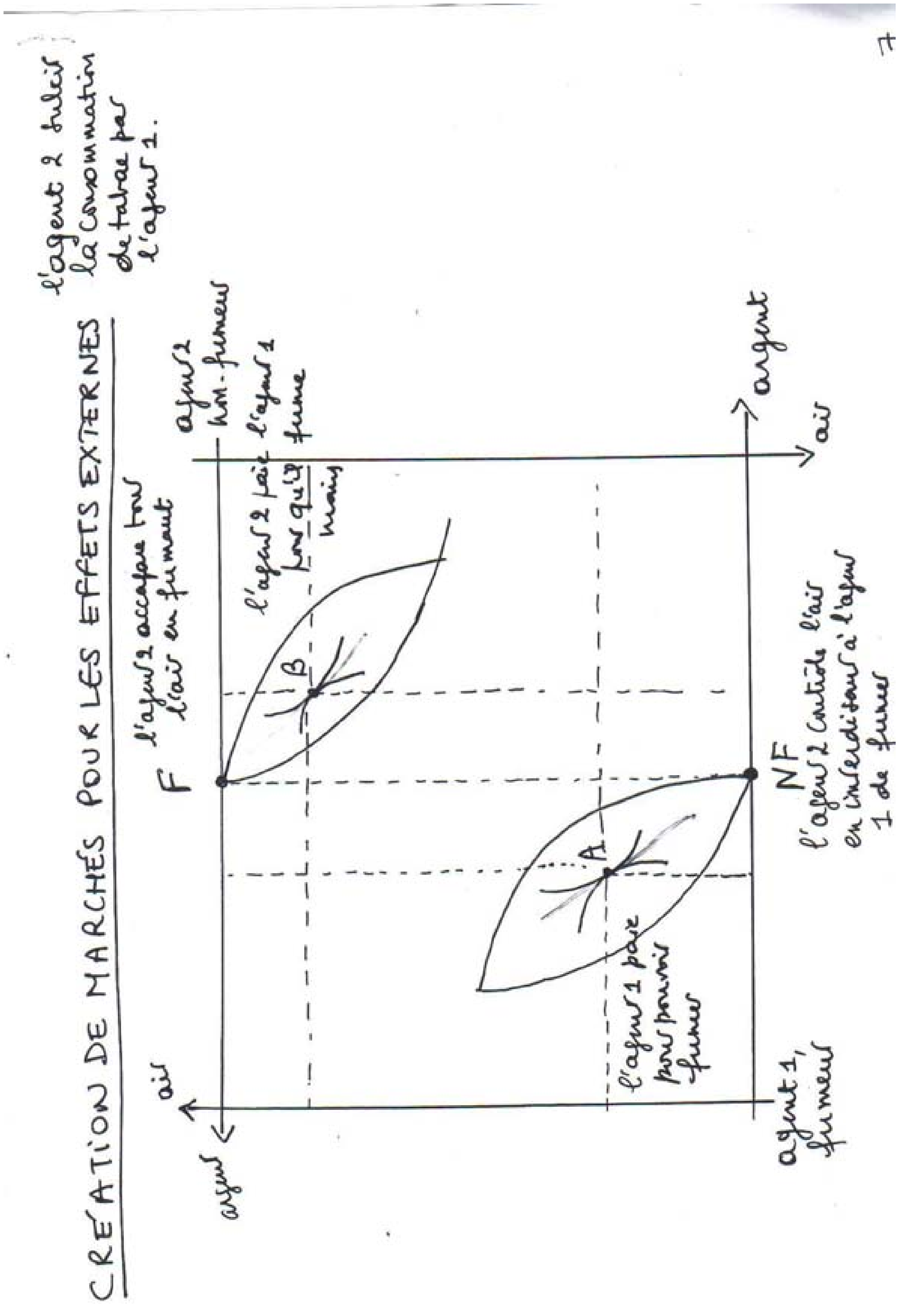
$$TMS^1_{y^1 \to x^1} = TMS^2_{y^2 \to x^2} = \frac{p_x}{p_y} = 1$$

$TMS^2_{y^2 \to x^1} = 0$ car u^2 ne dépend pas de x^1

$$TMS^1_{y^1 \to x^2} = \frac{-1}{1/2} = -2$$

(5) donne $1 + 0 \neq -2 + 1 \equiv (6)$

OPTIMUM de PARETO : notion tout à fait générale. Equilibre concurrentiel approprié quand il y a des marchés.


CRÉATION DE MARCHÉS POUR LES EFFETS EXTERNES
l'agent 2 subit la consommation de tabac par l'agent 1.
air
argent
F
B
A
NF
agent 1 fumeur
agent 2 non-fumeur
air
argent
l'agent 1 paie pour pouvoir fumer
l'agent 2 contrôle l'air en interdisant à l'agent 1 de fumer

BIENS PUBLICS

Un bien est "public" si son usage par un agent n'empêche pas son usage par d'autres agents

(1) Allocations Pareto-optimales, condition de Bowen-Lindhal-Samuelson

EXEMPLE : 2 agents

2 biens $\begin{cases} \text{privé } x \\ \text{public } y \end{cases}$

x^i = quantité de bien x consommée par l'agent i, $i=1,2$

y = quantité de bien public

préférences des agents :

$u^i(x^i, y)$ $i=1,2$ u^i strictement croissante

" concave

différentiable

Le bien public est produit à partir de bien privé : (≡ financé)

$y = g(z)$ $\quad z$ input de bien privé

y output de bien public

$z = g^{-1}(y)$ = quantité de bien privé nécessaire à la production de y unités de bien public

g^{-1} = "fonction de coût" (du bien public en bien privé)

On suppose que la dotation totale, initiale, en bien privé est e.

Allocation : (x^1, x^2, z, y) $\quad x^i \geq 0,$ $z \geq 0, y \geq 0$

Réalisable si $\begin{cases} x^1 + x^2 + z = e \\ g(z) = y \end{cases}$

OPTIMUM de PARETO

$$\max_{x,y,z} \; a^1 u^1(x^1, y) + a^2 u^2(x^2, y)$$

sous
$$\begin{cases} x^1 + x^2 + z = e & (\lambda) \\ g(z) = y & (\mu) \\ (x^1 \geq 0,\; x^2 \geq 0,\; y \geq 0,\; z \geq 0) & \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = a^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i}(x^i, y) - \lambda = 0 \qquad i = 1, 2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a^1 \frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1, y) + a^2 \frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2, y) - \mu = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\lambda + \mu g'(z) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1, y)}{\frac{\partial u^1}{\partial x^1}(x^1, y)} + \frac{\frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2, y)}{\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x^2, y)} = \frac{1}{g'(z)}}$$

condition de B-L-S.

Interprétation de la condition de B.L.S

$$\frac{\frac{\partial u^i}{\partial y}(x^i, y)}{\frac{\partial u^i}{\partial x^i}(x^i, y)} = TMS^i_{x^i \to y}$$

= taux marginal de substitution du bien privé au bien public, pour l'agent i

= Contribution supplémentaire maximale (en x^i) que le consommateur i accepte pour bénéficier d'une unité supplémentaire de bien public

= "disponibilité marginale à payer" du consommateur i

$$\frac{1}{g'(z)} = (g^{-1})'(g(z)) = (g^{-1})'(y)$$

= coût marginal de production du bien public

BLS ≡ la somme des disponibilités marginales à payer = le coût marginal du bien public

② Equilibre de Lindhal

Pseudo équilibre concurrentiel pour une économie avec biens publics, avec des prix personnalisés pour le bien public (assez artificiels).

On reprend l'exemple précédent
$e = e^1 + e^2$, $p_x = 1$

• Chaque consommateur i résout

$$\max_{x^i, y} u^i(x^i, y) \quad \text{sous} \quad x^i \geq 0,\ y \geq 0 \text{ et}$$
$$(\text{C.B.}) \quad x^i + p^i y = e^i$$

où p^i = prix d'une unité de bien public pour le consommateur i

$\longrightarrow$ demandes $\boxed{x^i(p^i)\ ,\ y^i(p^i) \qquad i = 1, 2}$

- Le bien public est produit par une "entreprise", qui considère que le prix d'une unité d'output (y) est $p = p^1 + p^2$. L'entreprise maximise son profit : $\max_{y,z} (p^1 + p^2)y - z$

sous $g(z) = y$, $z \geq 0$, $y \geq 0$

$\rightarrow$ offre de bien public $\boxed{y(p^1 + p^2)}$

demande d'input $\boxed{z(p^1 + p^2)}$

Un équilibre de LINDHAL est un système de prix personnalisés $(\tilde{p}^1, \tilde{p}^2)$ et une allocation associée telle que

$$y(\tilde{p}^1 + \tilde{p}^2) = y^1(\tilde{p}^1) = y^2(\tilde{p}^2)$$

$$x^1(\tilde{p}^1) + x^2(\tilde{p}^2) + z(\tilde{p}^1 + \tilde{p}^2) = e^1 + e^2$$

En écrivant les conditions du 1er ordre des consommateurs et du producteur, on montre que l'allocation de l'équilibre de Lindhal satisfait B-L-S : elle est donc Pareto optimale mais la mise en oeuvre du mécanisme de "marché" sous-jacent paraît difficile en pratique !

③ Equilibre avec souscription

Problème de décision interactive :

Chaque agent choisit la quantité de bien privé qu'il consacre au bien public

On suppose ces choix indépendants et simultanés.

≠ équilibre concurrentiel

Externalité : la décision d'un agent influence le sort des autres ...

Equilibre de Nash : chaque agent détermine sa contribution au bien public comme une réponse optimale à celle des autres agents, considérée comme donnée.

Exemple précédent.

Agent 1 cherche sa réponse optimale à la contribution z^2 de l'agent 2 :

$$\max_{x^1, z^1, y} u^1(x^1, y) \quad \text{sous} \quad \begin{cases} x^1 = e^1 - z^1 \\ y = g(z^1 + z^2) \\ z^1 \geq 0,\ x^1 \geq 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow \tilde{z}^1(z^2)$ fonction de meilleure réponse

Pour chaque contribution possible z^2 de l'agent 2 au bien public, l'agent 1 calcule sa contribution optimale $\tilde{z}^1(z^2)$, qui maximise son utilité u^1.

De même, pour chaque contribution z^1 de l'agent 1, l'agent 2 calcule sa contribution optimale $\tilde{z}^2(z^1)$

Un <u>équilibre avec souscription</u> est une paire de contributions (z^{*1}, z^{*2}) telle que $\begin{cases} z^{*1} = \tilde{z}^1(z^{*2}) \\ z^{*2} = \tilde{z}^2(z^{*1}) \end{cases}$

<u>N.B.</u> : par les contraintes,

$$\begin{cases} x^{*1} = e^1 - z^{*1} \\ x^{*2} = e^2 - z^{*2} \\ y^* = g(z^{*1} + z^{*2}) \end{cases}$$

En général, <u>PAS</u> Pareto-optimal !