Economie du risque - Licence MIDO

Marion Oury

Année académique 2015-2016

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Pourquoi s'intéresser à la question du risque

Jusqu'à présent, vous avez principalement abordé les questions économiques dans un univers certain. Les consommateurs choisissent le panier qu'ils estiment le meilleur, les entreprises choisissent une politique tarifaire ou une politique de production dans un univers certain où biens, demande globale ou ensembles de production sont connus.

Dans un grand nombre de situations, cette hypothèse en plus d'être irréaliste nous éloigne trop des contraintes auxquelles font effectivement face les agents pour qu'on puisse la conserver sans altérer fortement l'intérêt de l'outil d'analyse développé. D'où l'intérêt de considérer l'analyse économique dans un monde où les agents ne disposent pas de toute l'information sur ce que demain sera.

Cette remarque s'applique à tous les types d'agents économiques. Particuliers qui ne savent pas ce qu'il adviendra de leurs emplois, de la valeur de leurs patrimoines ... mais aussi du temps qu'il fera (utilité ou non de prendre un parapluie). Entreprises qui doivent prendre des décisions d'investissements, de lancements de produits, de gestion de trésorerie ... sans connaître précisément les réactions du marché et l'évolution du contexte général mais aussi des institutions spécifiques qui ont pour métier la gestion du risque : Banques et Assurances principalement (redécouverte de ce point ?).

Au niveau plus général, la société s'interroge sur sa façon d'accepter le risque (qui fait pourtant partie de son fonctionnement général). L'attitude face au risque et donc variable dans le temps et suivant les cultures.

Notre approche prendra la volonté d'accepter ou non le risque comme une donnée (comme dans la plupart des cas, l'approche économique est plutôt positive). Nous essaierons à partir de cette observation de développer un outil positif permettant d'appréhender le risque ainsi que de comprendre et de guide des décideurs en situations risqués. De plus, l'outil développé permettra aussi une approche normative de la contribution économique (CF plus loin).

Remarque : Avant d'avancer dans l'étude de ce sujet, un petit point sémantique peut clarifier certains éléments. L'économie distingue habituellement le risque de l'incertain. Le risque porte sur les événements dont on ne connaît pas nécessairement l'issue mais pour lesquels on peut apporter une probabilité objective associée à chacune des issues possibles. Lorsqu'on évoque la notion d'incertain, cela inclut des situations pour lesquelles les agents n'ont pas de distributions probabilistes pour l'ensemble des issues possibles. Ce cours portera sur le risque. (Pour l'incertain, Savage (Foundations of Statistics, 1954) demeure une référence).

1.2 Cadre de l'analyse et notation de base

Nous présentons des outils de base à utiliser par la suite, nous allons nous intéresser précisément à l'évaluation de ce bien qui constitue le thème du livre : une loterie.

Dans l'ensemble du cours, et sauf avis contraire, nous ferons l'hypothèse que l'individu ou l'entreprise - de façon plus générale "le décideur" - ne s'intéresse qu'à une seule chose : le niveau de sa richesse finale (ou toute fonction de celle-ci). Pour certains, cette hypothèse semble exagérément restrictive car ils ont tendance à penser que les moyens mis en oeuvre pour atteindre la richesse doivent être incorporés - au même titre que le résultat - dans l'évaluation. Pour d'autres, le critère de richesse finale est réellement le seul à prendre en considération. D'ailleurs - argumentent-ils parfois - ceux qui ne s'y conformeraient pas, finiraient par disparaître de la scène - sinon physiquement - en tout cas en termes économiques ! Nous e rentrerons pas dans ce débat. En fait, comme nous aurons souvent l'occasion de le constater, la théorie économique du risque est déjà suffisamment complexe dans le cadre unidimensionnel de la richesse finale pour qu'on se contente d'une approche pragmatique limitée à ce seul indice d'évaluation.

La richesse finale du décideur est dénotée w_f et puisqu'il y a une richesse finale, on peut supposer qu'il y a également une richesse initiale dénotée, elle, w_0 . Si par exemple on s'intéresse à une firme, w_0 représente en fait la valeur des actifs moins celle des dettes envers les tiers et w_f est alors égale à w_o augmentée des profits non distribués de la période. Si ceux-ci sont certains - par exemple si on se place ex-post c-à-d après observation des profits non distribués de la période - w_f tout comme w_0 - n'est pas aléatoire. Bien entendu dans la pratique et en se plaçant au temps initial, nul ne peut prévoir avec certitude ce que deviendra sa richesse même dans un laps de temps extrêmement court. L'incertitude est notre lot quotidien. Nous adoptons la définition suivante :

$$\tilde{w}_f = w_0 + \tilde{x}$$

Où $\tilde{x}$ est l'élément aléatoire qui s'additionne à la composante certaine de la richesse (w_0) et rend la richesse finale également aléatoire. Remarquons que cette présentation est particulière en ce sens que la loterie est additive par rapport à w_0. Cette définition de w_f formalise en quelque sorte l'exemple de la firme évoqué plus haut où les profits non distribués (élément aléatoire) viennent s'ajouter à la richesse initiale certaine pour constituer une richesse finale. Comme nous aurons l'occasion de le dire plus tard, d'autres situations sont possibles. Ainsi le risque $\tilde{x}$ pourrait très bien être multiplicatif par rapport à la richesse initiale et on aurait dans ce cas :

$$\tilde{w}_f = w_0(1 + \tilde{x})$$

Un exemple évident d'une telle situation est fourni par le placement d'un capital initial déterminé (w_0) dont le taux de rendement, $\tilde{x}$, est aléatoire de sorte que $\tilde{w}_f$ obéit bien à la définition donnée.

Même si nous avons une tendance à privilégier des situations répondant aux caractéristiques de la première formulation, nous nous intéresserons également aux loteries multiplicatives ainsi d'ailleurs qu'à des situations intermédiaires. La loterie $\tilde{x}$, tantôt additive, tantôt multiplicative, peut être représentée soit par une variable aléatoire discrète soit par une variable aléatoire continue. Dans le premier cas, les résultats possibles sont notés x_i avec $(i = 1, ..., n)$ et leur probabilité respective p_i avec $(i = l, ..., n)$ et bien entendu $\sum p_i = 1$ et $0 \leq p_i \leq 1$. Cette notation un peu lourde est parfois condensée sous une forme vectorielle $[p; x]$, p étant le vecteur de probabilité et x celui des issues possibles. Dans le second cas, l'aléa $\tilde{x}$ est caractérisé par une fonction de densité $f(x)$ et/ou une loi cumulée $F(x)$.

Après avoir décrit dans ce chapitre le cadre de l'analyse, le chapitre 2 présente un survol de critères d'évaluation des loteries qui ont, à des moments divers, connu leur heure de gloire. En plus de son intérêt "historique" évident, l'étude de ces critères nous permet d'introduire naturellement, au chapitre 3, le concept fondamental d'espérance d'utilité. Nous adopterons dans ce chapitre, le plus poussé techniquement, un formalisme spécifique. Dans le chapitre 4, nous traiterons les notions d'équivalent certain, prix de vente et prime de risque d'une loterie.

Le chapitre 5 part de ces notions pour en présenter immédiatement deux autres : l'aversion relative et l'aversion partielle. On y étudie également quelques hypothèses raisonnables à faire sur le comportement de ces différents types d'aversion et on passe au crible de ces hypothèses diverses fonctions d'utilité couramment utilisées dans la littérature.

Dans le chapitre 6, on se concentre sur l'autre ingrédient de la prime de risque révélée par la formule d'Arrow-Pratt : la quantité de risque. On examine quelques définitions possibles de la notion de changement de risque et on montre leur cohérence interne. Le chapitre 7 portera sur les choix d'investissement en situation risquée avec une analyse fondamentale et et des éléments de statique comparative.

Chapitre 2

Les premiers critères d'évaluation des loteries : un aperçu

L'évaluation des risques est un sujet difficile et controversé. A titre d'exemple non exhaustif, citons la littérature abondante et complexe sur la valeur de la vie humaine. Les loteries n'échappent pas à cette règle. L'évaluation est aisée pour les loteries qui s'échangent sur des marchés larges et compétitifs. Personne ne niera que le titre d'une société cotée en bourse est une loterie car sa valeur de demain est perçue aujourd'hui comme un aléa. Toutefois si ce titre s'échange sur un marché actif où l'information est fluide, il en résulte aujourd'hui un prix de marché reflétant sans ambigüité la valeur du marché. Dans ce cas, le marché est un véhicule simple de la procédure d'évaluation. Tel est précisément un de ses rôles bien connus dans des économies décentralisées. Ces situations confortables (du point de vue de l'évaluation) sont cependant l'exception. Dans la majorité des cas, il n'y a pas de marché parfait pour les loteries détenues par un décideur et on ne peut échapper à la nécessité d'adopter un ou plusieurs critères d'évaluation. C'est la raison pour laquelle la théorie du risque contient un grand nombre de critères d'évaluation. Nous en évoquons quelques-uns ici avant d'approfondir dans les chapitres suivants celui que nous privilégions : le critère d'espérance d'utilité de la richesse finale.

Signalons cependant, avant de passer aux choses précises, un paradoxe intéressant. Les critères d'évaluation développés dans ces premiers chapitres et qui s'appliquent clairement aux loteries qu'on ne peut échanger sur un marché parfait ont été fort "utiles" pour comprendre la mise en oeuvre du mécanisme d'évaluation sur des marchés parfaits. On peut donc affirmer que la réflexion sur les critères d'évaluation est utile même quand on peut se dispenser de ces derniers. Enfin, conformément à ce qui se passe déjà en théorie des choix en certitude, un critère d'évaluation implique un critère de décision : une loterie $\tilde{x}$ est préférée à la loterie $\tilde{y}$ si et seulement si la valeur associée à $\tilde{x}$ et dénotée $V(\tilde{x})$ excède la valeur attachée à $\tilde{y}$, $V(\tilde{y})$. Cette notion sera utilisée abondamment dans la seconde partie quand nous lierons les choix en incertitude : à ce moment on caractérisera l'action qui, parmi toutes celles possibles, permet de maximiser la fonction d'évaluation. Passons maintenant en revue quelques critères d'évaluation qui ont été et sont encore régulièrement utilisés.

2.1 Le critère d'espérance mathématique

En vertu de ce critère, on évalue la loterie x tout simplement en calculant son espérance mathématique c-à-d :

$$V(\widetilde{x}) = E(\widetilde{x})$$

Où V indique la valeur (évaluation de) et où E symbolise de façon tout à fait usuelle l'espérance mathématique. En guise de rappel, indiquons que

$$E(\widetilde{x}) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

Pour une loi discrète et que

$$E(\widetilde{x}) = \int_a^b x f(x) dx$$

Pour une loi continue définie dans l'intervalle $[a, b]$.

Remarquons qu'au lieu d'évaluer $\widetilde{x}$ par le critère d'espérance mathématique on pourrait de façon équivalente évaluer $\tilde{w}_f$. On écrirait alors

$$V(\widetilde{w_f}) = V(w_0 + \widetilde{x}) = E(w_0 + \widetilde{x}) = w_0 + E(\widetilde{x})$$

Comme bien entendu $V(w_0) = w_0$, la richesse initiale n'affecte pas l'évaluation d'une loterie.

Le critère d'espérance mathématique est le plus ancien et il est tout à fait valable dans certains contextes bien précis alors que dans d'autres il est largement, insuffisant. Pour illustrer un cas où le critère d'espérance mathématique est efficace, considérons un individu qui fait face à un risque de sinistre décrit comme suit :

x	$p(x)$
0	$0,9$
-1000	$0,1$

Où $\tilde{x}$ est le montant du sinistre potentiel. Des calculs simples nous indiquent que $E(\tilde{x}) = -100$ et $\sigma(\tilde{x}) = 300$ et évidemment $\sigma(\tilde{x}) = 300$ est loin d'être négligeable.

Supposons maintenant que, dans le pays où réside cet individu, 10 000 personnes font face au même risque et que les sinistres soient indépendants. Si ces 10 000 personnes forment une mutuelle avec l'idée de faire payer les pertes de quelques-uns par les contributions faibles de beaucoup, que devient la contribution de chacun ? Pour financer le total des pertes, il faut exiger de chaque membre une cotisation égale à $\tilde{p} = 0,0001(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + ... + \tilde{x}_{10000})$, où $\tilde{p}$ est en fait le coût moyen des sinistres et où $\tilde{x}_i$ se rapporte au sinistre chez le ième individu de la collectivité. Des résultats bien connus de statistiques mathématiques nous apprennent que : $E[\tilde{p}] = -100$ et $\sigma(\tilde{p}) = 3$.

Le risque (si on accepte de dire qu'il est mesuré par la variance) est devenu très faible par rapport à l'espérance et il serait à toutes fins statistiques nul si n, le nombre de membres, tendait vers l'infini. Dans ce cas-ci, chaque risque peut être évalué par son espérance mathématique. Une telle démarche ne serait pas acceptable si le risque était considéré de façon isolée.

On ne sera pas surpris d'apprendre qu'une des branches de l'activité économique où le critère d'espérance mathématique a été le plus utilisé (à bon escient) est celui de de l'assurance-vie. Dans ce secteur en effet la « prime pure» n'est rien d'autre que l'espérance mathématique des engagements actualisés de la compagnie qui possède un grand nombre de contrats indépendants. Cette idée est connue depuis très longtemps [1].

En plus de permettre un rappel sans doute opportun de quelques notions de statistique, cet exemple et les commentaires qui l'accompagnent nous font comprendre la portée et les limites du critère d'espérance mathématique. Celui-ci est tout à fait valable pour évaluer une loterie pour autant

1. Dans un « prospectus» adressé à Louis XVI en 1788 pour justifier les assurances sur la vie (!), Clavière [1788] écrivait fort joliment : « L'on peut déterminer, sans danger d'un grand mécompte (c-à-d sans grand risque), la durée de la vie moyenne d'un certain nombre d'individus du même âge ; mais l'on sait qu'il est impossible d'assigner avec quelque certitude, la durée de vie individuelle de chacun d'eux. »

que celle-ci soit comprise dans un « portefeuille» de risques identiques et indépendants. Lorsque la loterie est isolée ou lorsqu'il y a des phénomènes de dépendance entre une multitude de loteries, ce critère d'espérance n'est pas un bon indicateur tant s'en faut. Construisons un exemple.

Soient deux situations. Dans la première (situation A) on reçoit avec certitude 10000 euros. Le fait qu'il y ait certitude implique que la probabilité de toucher 10000 euros est égale à l'unité et la situation A, se représente par un vecteur : $(1; 10000)$. Dans une situation B, il a 3 chances sur 10 de devoir payer 4000 euros et 7 chances sur 10 de recevoir 18000 euros. La représentation vectorielle de la situation B s'écrit : $(0,3; 0,7; -4000; +18000)$.

Beaucoup d'individus vont très naturellement préférer A, angoissés sans doute par l'éventualité non négligeable de devoir débourser 4000 euros. Or si on considère les seules espérances mathématiques, on obtient : $E(x_A) = 10000$ et $E(x_B) = -1200 + 12600 = 11400$.

Tout individu qui déclare préférer A rejette donc implicitement le critère d'évaluation fondé sur la seule espérance mathématique car celui-ci lui ferait adopter B.

Autre exemple : le Paradoxe de St Petersbourg.

2.2 Le critère « espérance-variance»

Ce critère dont le promoteur fut Markowitz reconnaît le rôle de l'espérance mathématique dans l'évaluation d'une loterie tout en le complétant par l'introduction de la notion de risque dans la procédure d'évaluation. Puisque - en accord avec une longue tradition - le risque semble pouvoir être appréhendé par la notion de variance, il est assez naturel d'écrire : $V(\tilde{w}_f) = f(E(\tilde{w}_f); \sigma^2(\tilde{w}_f))$.

Cette écriture formalise notre intuition suivant laquelle la valeur d'une loterie dépend d'une part de son rendement et d'autre part de son risque mesuré par la variance.

La forme de la fonction va d'ailleurs nous donner quelques indications précieuses sur les préférences du décideur. Puisque le rendement est un phénomène unanimement apprécié il est tout à fait naturel d'admettre que la dérivée partielle de f par rapport à $E(\tilde{w}_f)$ est strictement positive. Si le signe positif de la dérivée partielle de f par rapport à son premier argument ne pose aucun problème, une plus grande diversité d'opinion se manifeste pour celui par rapport au second argument, noté f_2. Pour cette dérivée partielle trois situations sont envisageables.

f_2 est toujours égal à zéro. Cela signifie que dans son appréciation de la loterie, le décideur n'est guère influencé par le niveau de risque. Le seul élément qui le concerne est l'espérance. On retrouve ainsi implicitement le critère d'espérance mathématique Le critère d'espérance est donc un cas particulier du critère espérance-variance. On dit que le décideur est « neutre au risque».

Comme la comparaison entre les situations A et B à la fin de la section précédente l'indiquait, il semble naturel de supposer que, pour les individus préférant A, f_2 est négatif. En effet, si nous calculons les variances des loteries contenues en A et B, nous obtenons : 0 pour A et 101640000 pour B. Si en dépit du fait que $E(\tilde{x}_B)$ excède $E(\tilde{x}_A)$ un individu (utilisant le critère $E - \sigma^2$) préfére A, cela ne peut s'expliquer que par un poids négatif de la variance dans l'évaluation de la loterie. On traduit ce phénomène en termes mathématiques par une valeur négative de la dérivée partielle f_2. Si en tout point, f_2 est négative, on dit que le décideur manifeste de « l'aversion au risque ». Ceci implique en effet qu'entre deux loteries de même espérance, tout individu averse au risque choisit celle de variance minimale.

Par symétrie, on dit qu'une valeur positive de f_2 indique un comportement de «goût du risque» puisqu'un accroissement de la variance de la loterie (ceteris paribus) conduit le décideur à lui attacher une valeur plus importante.

On considère souvent la *variante linéaire* de la fonction de Markowitz qui prend la forme suivante :

$$V(\tilde{w}_f) = E(\tilde{w}_f) - k\sigma^2(\tilde{w}_f)$$

Où k est une constante de sorte que $f_1 = 1$ et $f_2 = -k$. Il est facile d'interpréter le coefficient k. S'il est positif, il y a aversion au risque et plus il est élevé, plus cette aversion est forte. Pour bien saisir cette affirmation, considérons un individu, Monsieur S. qui adopte cette forme de valorisation pour évaluer les loteries et se déclare indifférent entre les loteries 1 et 2 suivantes : $L_1 = (1/2; 1/2; -6; 10)$, $L_2 = (1/2; 1/2; -10; 20)$. $\sigma^2(L_1) = 64$ et $\sigma^2(L_2) = 225$. Si M. S. est indifférent entre L_1 et L_2, cela signifie qu'il y attache la même valeur et donc que $k = 3/161 = 0,01863$. Imaginons maintenant que M. T., confronté aux deux mêmes loteries, nous apprend qu'il préfère L_1. On devine donc que, rejetant la loterie plus risquée, M. T. est plus riscophobe que M. S. Par calcul de k_T on va pouvoir préciser cet accroissement d'aversion au risque. En effet, si M. T. nous tient le discours suivant : «Je pourrais accepter L_2 comme équivalent à L_1 si chacun des résultats de L_2 était majoré de 2 », nous pouvons alors évaluer k_T. L'ajout d'une constante ne change pas une variance et donc pour M. T., l'indifférence entre la loterie inchangée et la loterie 2 modifiée implique : $k_T = 5/161 = 0,03106$

Il apparaît ainsi que M. T. est plus riscophobe que M. S. et la version simplifiée (linéaire) du critère $E - \sigma^2$ nous permet même de dire qu'il l'est 1,667 fois plus.

Signalons que le modèle «espérance-variance » constitue un objet de controverse récurrent en théorie du risque et nous aurons plus tard l'occasion de préciser certaines de ses faiblesses. La présentation que nous venons d'en produire met en lumière deux de ses avantages - et non des moindres - sa grande simplicité et son caractère très intuitif.

2.3 Les critères du type « safety-first »

Il existe une grande variété de critères de ce type. Nous n'en examinerons qu'un exemple ici pour donner au lecteur l'idée de base de cette approche qui est fort séduisante et cependant très peu utilisée à ce jour.

Les critères de type safety-first, et particulièrement celui que nous exposons ici, présentent beaucoup d'analogie avec la forme linéaire du modèle espérance-variance.

Il s'agit également d'une méthode d'évaluation fondée sur une pondération relative du rendement vis-à.vis du risque mais, cette fois, le risque n'est pas mesuré par la variance de l'aléa. Au contraire, les tenants de l'approche «safety-first » considèrent que le décideur fait une distinction entre les réalisations de w_f suivant qu'elles excèdent ou non un seuil (t) considéré par le décideur comme un niveau au-dessous duquel il ne faut pas, si possible, tomber.

La détermination du seuil critique a fait l'objet de nombreuses discussions. Il y a des cas cependant où ce seuil s'impose naturellement et nous en donnons un exemple plus loin. Signalons toutefois pour le lecteur féru d'histoire que la première application du concept safety-first fut faite ... en 1786 par Tetens (qui voulait mesurer le risque encouru par une compagnie d'assurance souscrivant un contrat. Cet auteur avait défini le risque comme la situation où l'indemnité payée par la compagnie - c-à-d la réalisation de l'aléa- dépassait le seuil naturel constitué par la prime encaissée et provoquait ainsi une perte sur le contrat). En quelque sorte, l'individu tend à mesurer le risque par la probabilité de voir se réaliser des valeurs de w_f inférieures au seuil tolérable, t, et par l'intensité de l'écart négatif entre ces réalisations et le seuil. Alors qu'il ne se sent nullement concerné par la variabilité de w_f pour les réalisations supérieures à t, le décideur va s'attacher dans son évaluation de la loterie à la variabilité de w_f au-dessous de t. Un des concepts statistiques qui reflète cette approche du risque est celui de «semi-variance» par rapport au seuil t qui est défini comme suit pour une loi continue :

$$\sigma^{2-}(t) = \int_a^t (w_f - t)^2 f(w_f) dw_f$$

où a est la plus basse valeur que peut prendre w_f.

Cette semi-variance est en quelque sorte une variance doublement tronquée puisque d'une part l'intégrale va de a jusqu'à t (et non jusqu'à b, la valeur supérieure de w_f) et parce que les déviations sont exprimées non par rapport à l'espérance mais par rapport au seuil tolérable t. Une fois que $\sigma^{2-}(t)$ est calculé la loterie $\tilde{w}_f$ est alors évaluée par :

$$V(\tilde{w}_f) = E(\tilde{w}_f) - k\sigma^{2-}(t)$$

Pour saisir la différence entre les critères espérance-variance d'une part et «safety-first» d'autre part, considérons un exemple. Soient deux loteries A et B caractérisées comme suit :

x_A	$p(x_A)$	x_B	$p(x_B)$
-1	$0,2$	-20	$0,01$
4	$0,3$	7	$0,49$
10	$0,5$	8	$0,5$

Avec $w_0 = 3$ et $k = 1$.

Si l'individu apprécie sa situation par le critère espérance-variance, son choix est aisé. En effet, la loterie B apporte plus de rendement que A et elle est moins risquée. Tout décideur riscophobe qui mesure le risque par la variance et adopte le critère $E - \sigma^2$ linéaire ne doit même pas s'interroger sur son arbitrage entre rendement et risque (la valeur de k) car quel que soit k positif, la loterie B «domine» la loterie A en ce sens qu'à la fois elle apporte plus d'un bien (le rendement, E) et moins d'une nuisance (le risque). Dès lors si $k = 1$ (ou tout autre nombre positif), $V(x_A) < V(x_B)$.

Que va-t-il se passer si on adopte maintenant une approche du type "safety-first" ? Considérons par exemple que le décideur fixe le «seuil de richesse» en $t = 0$, ce qui indique qu'il est très concerné par le fait que sa fortune finale puisse être négative et plus particulièrement par la variabilité au-dessous de ce seuil. Dans ces conditions, l'individu considère que la loterie A n'est pas risquée puisqu'en tout état de cause elle ne le fera pas passer au-dessous du seuil de sécurité (ici $t = 0$). En effet, même lorsque le plus mauvais résultat de x se matérialise ($x = -1$), la richesse finale reste supérieure au seuil. En revanche, avec la loterie B le décideur perçoit du risque et il le mesure par :

$$\sigma^{2-}(t = 0) = 0,01(-17 - 0)^2 = 2,89$$

-17 correspond à la richesse finale lorsque $x = -20$ se matérialise. Pour $k = 1$, on obtient : $V(w_{f;A}) = 9 - 1(0) = 9$ et $V(w_{f;B}) = 10,23 - 1(2,89) =$

$7,34$.

De sorte que, pour un même taux de substitution entre risque et rendement (k = 1) le passage du critère moyenne-variance à celui de safety-first bouleverse le classement des loteries. Cet exemple met en relief la différence de philosophie entre les deux critères. En utilisant la variance pour mesurer le risque, le critère, on fait plutôt appel à une notion de variabilité globale dans les résultats de la loterie. Elle met d'ailleurs sur le même plan des écarts positifs ou négatifs de x vis-à-vis de la moyenne. Le critère de safety-first prend comme pivot t. Il y a de « bonnes» déviations ($x > t$) et de «mauvaises» ($x < t$). En « safety-first » les seules à entrer dans la définition du risque sont ces dernières.

2.4 Brèves remarques sur d'autres critères

Le critère maximin (pessimisme).

Le critère maximax (optimiste, loto) Pondérations de ces deux attitudes extrêmes (critère de Hurwicz). Nous n'approfondissons pas ce type de critères car ils ne respectent pas deux hypothèses de base (axiomes) du critère que nous privilégions (celui d'espérance d'utilité) à savoir la prise en compte de tous les résultats possibles et la non-déformation de leurs probabilités.

Chapitre 3

La théorie d'espérance d'utilité

Nous allons changer d'approche sur la question du risque. Plutôt que de proposer des modes d'appréciation du risque et d'en apprécier les qualités et les limites, nous partirons des préférences des individus par rapport au risque, en faisant des hypothèses sur celles-ci et tenterons de voir comment nous pouvons représenter des préférences satisfaisant ces hypothèses. **Approche axiomatique**

3.1 Description du formalisme choisi

Un décideur doit choisir entre différentes alternatives risquées. Chaque alternative aboutira, *in fine*, à une *issue* mais au moment de choisir l'alternative, l'issue n'est pas connue.

On dénotera 'ensemble des issues, C (ces issues peuvent prendre une grande variété de forme, pas uniquement des transferts d'argent même si on considère principalement ce cas). Pour simplifier la représentation, on supposera que l'ensemble des issues possibles est fini. On les indexera $n = 1; ...; N$.

On supposera que les probabilités associées à la réalisation de chacune des issues suite au choix de chacune des alternatives sont connues de *façon objective*. Tirage d'une roulette ou d'un dé non biaisé.

On définit une *loterie* de la façon suivante.

Définition 1. *Une loterie simple L est une liste $L = (p_1; p_2; ...; p_N)$ avec $p_n \geq 0$ pour tout n et $\sum p_n = 1$. p_n s'interprète comme la probabilité de la réalisation de l'issue n.*

Dans une loterie simple, les issues réalisables sont certaines. On peut aussi représenter un objet encore plus général, la *loterie composée* où les issues sont elles mêmes des loteries (simples).

Définition 2. *Soient K loteries simples, $L_k = (p_1^k; ...; p_n^k)$ avec $k = 1; ...; K$ et les probabilités $\alpha_k \geq 0$ avec $\sum \alpha_k = 1$, la* loterie composée *$(L_1; ...; L_K; \alpha_1; ...; \alpha_K)$ est l'alternative risquée qui aboutit à la loterie simple L_k avec probabilité α_k pour tout k.*

Remarque : toute loterie simple peut s'écrire comme une loterie composée (quitte à utiliser des loteries simples dégénérées).

Pour toute loterie composée $(L_1; ...; L_K; \alpha_1; ...; \alpha_K)$, on peut construire une *loterie réduite* correspondante représentée par la loterie simple suivante $L = (p_1; ...; p_N)$ qui génère la même distribution sur les issues. La valeur de chaque p_n s'obtient en multipliant la probabilité que chaque loterie L_k advienne, α_k, par la probabilité p_n^k que l'issue n se réalise dans la loterie L_k puis de sommer par rapport à k. La probabilité de l'issue n dans la loterie réduite est $p_n = \sum \alpha_k p_n^k$.

Ceci se conçoit dans une approche conséquentialiste des loteries. Seule la probabilité de distribution sur les issues compte et non le cheminement.

Exemples

3.2 Les préférences sur les loteries, approche axiomatique

Nous envisageons une nouvelle approche des préférences face à l'incertain des décideurs en demeurant dans la version conséquentialiste. Cela signifie qu'un décideur est indifférent entre une loterie composée et une loterie simple qui associe la même probabilité de distribution sur les issues. Un décideur est aussi indifférent entre deux loteries composées qui ont même loterie réduite.

Soit $\mathcal{L}$, l'ensemble des loteries simples sur l'ensemble des issues C. Supposons que le décideur a une **relation de préférence**, $\succcurlyeq$, sur $\mathcal{L}$.

Nous ferons un certains nombres d'hypothèses (axiomes) sur ces préférences :

Axiome 1. ***Complétude***. *Pour toutes 2 loteries, L et L', au moins l'une des deux relations suivantes est vraie : $L \succcurlyeq L'$ et $L' \succcurlyeq L$.*

Axiome 2. ***Transitivité***. *Si $L'' \succcurlyeq L'$ et $L' \succcurlyeq L$ alors $L'' \succcurlyeq L$.*

Axiome 3. ***Continuité***. *Pour toutes $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, les ensembles :*

$$\{\alpha \in [0;1] : \alpha L + (1-\alpha)L' \succcurlyeq L''\} \subset [0,1]$$

et

$$\{\alpha \in [0;1] : L'' \succcurlyeq \alpha L + (1-\alpha)L'\} \subset [0,1]$$

sont fermés.

Autrement dit, de très petits changement de probabilités ne changent pas la nature des préférences entre deux loteries. Par exemple, si vous préférez "une très agréable soirée entre amis" à "rester tout seul chez soi" alors un mix de "une très agréable soirée entre amis" avec "une jambe cassée sur le trottoir" avec une probabilité suffisamment faible est aussi préféré à "rester à la maison". Cela écarte alors toute préférence du type lexicographique.

Comme dans le cas de l'évaluation de paniers de biens certains, le fait que les préférences satisfont ces 3 axiomes suffit à conclure à l'existence d'une fonction d'utilité représentant ces préférences. Il existe une fonction $U : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ tel que $L \succcurlyeq L'$ si et seulement si $U(L) \geq U(L')$.

L'axiome suivant, l'axiome d'indépendance, nous permettra d'imposer bien plus d'éléments sur la structure de U.

Axiome 4. ***Axiome d'indépendance****. La relation de préférence $\succcurlyeq$ sur l'ensemble des loteries simples $\mathcal{L}$ satisfait l'axiome d'indépendance si pour tout $L; L'; L'' \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in]0,1[$: $L \succcurlyeq L'$ ssi $\alpha L + (1-\alpha)L'' \succcurlyeq \alpha L' + (1-\alpha)L''$.*

Autrement dit, si on mélange deux loteries avec une troisième de la même façon, alors les préférences entre les deux loteries composées résultant ne dépendent pas de la loterie avec laquelle le mélange à lieu. Les mêmes préférences (que sans le mélange) sont conservées.

Supposons, par exemple, que $L \succcurlyeq L'$ et $\alpha = 1/2$. Alors $1/2L + 1/2L''$ peut être perçue comme la loterie composée émergeant de la façon suivante : On tire à pile ou face, si c'est pile, on obtient L et si c'est face on obtient L''. De la même façon, $1/2L' + 1/2L''$ peut être perçue comme la loterie composée émergeant de la façon suivante : On tire à pile ou face, si c'est pile, on obtient L' et si c'est face on obtient L''. Dans le cas pile, la loterie $1/2L + 1/2L''$ est préférée à $1/2L' + 1/2L''$ et dans le cas face, les deux loteries donnent le même résultat. L'axiome d'indépendance signifie que la loterie $1/2L + 1/2L''$ est préférée à $1/2L' + 1/2L''$.

L'axiome d'indépendance est au centre de la théorie du choix en univers risqué. Il n'a pas d'équivalent dans la théorie du choix lorsque celui-ci porte sur des paniers de bien. L'axiome d'indépendance se justifie ici par les spécificités des loteries par rapport aux paniers de biens. Lorsqu'on compare des paniers des biens, il n'y a pas de raison de penser que les préférences entre deux paniers de biens ne peuvent pas dépendre des biens avec lesquels ils sont associés (exemple : café, thé sucre). En revanche, lorsqu'il s'agit de loteries, il semble naturel de considérer que si une loterie est préférée à une autre, le fait qu'avec une probabilité non nulle on obtienne ni l'une ni l'autre de ces loteries mais une troisième n'affecte pas les préférences. (Contrairement aux paniers de biens, il n'y a jamais concomitance entre des issues provenant de l'une ou l'autre des loteries).

Remarque : On peut introduire $\sim$ et $\succ$ définis de la façon suivante. Pour tout $L, L' \in \mathcal{L}$, $L \sim L'$ ssi $L \succcurlyeq L'$ et $L' \succcurlyeq L$. $L \succ L'$ ssi $L \succcurlyeq L'$ et $L' \succcurlyeq L$ faux.

Exercice (voir fiche de TD) : Montrer que si l'axiome d'indépendance est vérifié pour $\succcurlyeq$, il l'est aussi nécessairement pour $\sim$ et $\succ$.

Nous montrerons bientôt que l'axiome d'indépendance est intimement lié à la représentation des préférences sur les loteries par une fonction d'utilité qui ont une *forme d'espérance d'utilité*. Mais avant d'obtenir ce résultat, il convient de définir cette propriété et d'étudier ses spécificités.

Définition 3. *La fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ a une forme d'espérance d'utilité s'il existe un vecteur $(u_1; ...; u_N)$ tel que pour toute loterie simple $L = (p_1; ...; p_N) \in \mathcal{L}$: $U(L) = p_1u_1 + ... + p_Nu_N$. Une fonction d'utilité respectant* *cette propriété est dite fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern (vNM).*

On pourra observer que si on définit L^n la loterie dégénérée qui donne l'issue n avec probabilité 1, l'utilité associée à cette loterie est u_n. Par conséquent, l'expression utilité espérée est appropriée puisque avec une fonction d'utilité de type vNM, l'utilité d'une loterie peut être interprétée comme la valeur espérée des utilités u_n des N issues. D'où la proposition suivante sur la linéarité.

Proposition 1. *Une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ a une forme d'espérance d'utilité si et seulement si elle est linéaire, c-à-d ssi elle satisfait la propriété de linéarité :*

$$U(\sum \alpha_k L_k) = \sum \alpha_k U(L_k)$$

Pour toute K loteries $L_k \in \mathcal{L}$, $k = 1; ...; K$ et probabilités $(\alpha_1; ...; \alpha_K) \geq 0$, $\sum \alpha_k = 1$.

Preuve : Supposons que U satisfasse la propriété de linéarité. On peut écrire toute loterie $L = (p_1; ...; p_N)$ sous la forme d'une combinaison convexe de loteries dégénérées $(L^1; ...; L^N)$, c-à-d $L = \sum p_n L^n$. On peut alors écrire $U(L) = U(\sum p_n L^n) = \sum p_n U(L^n) = \sum p_n u_n$ (en définissant u_n de façon adéquate). Par conséquent, U a une forme d'espérance d'utilité.

Dans l'autre sens. Supposons que U ait une forme d'espérance d'utilité et considérons une loterie composée quelconque $(L_1; ...; L_K; \alpha_1; ...; \alpha_K)$ où $L_k = (p_1^k; ...; p_N^k)$. La loterie réduite qui lui est associée est $L' = \sum \alpha_k L_k$. D'où

$$U(\sum \alpha_k L_k) = \sum u_n(\sum \alpha_k p_n^k) = \sum \alpha_k(\sum u_n p_n^k) = \sum \alpha_k U(L_k)$$

Par la conséquent, la propriété de linéarité est vérifiée.

Proposition 2. *Supposons que la fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ soit une fonction d'espérance d'utilité vNM représentant les préférences $\succcurlyeq$ sur $\mathcal{R}$. Alors $\tilde{U} : \mathcal{L} \to \mathcal{R}$ est une autre fonction d'utilité vNM représentant les préférences $\succcurlyeq$ ssi il existe des scalaires $\beta > 0$ et γ tels que $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$ pour tout $L \in \mathcal{L}$.*

Preuve : Nous commencerons par choisir $\underline{L}$ et $\overline{L}$ tels que $\overline{L} \succcurlyeq L \succcurlyeq \underline{L}$ pour tout $L \in \mathcal{L}$. Si $\underline{L} \sim \overline{L}$, toute fonction d'utilité est une constante et le résultat suit immédiatement. Nous nous intéresserons donc au cas $\overline{L} \succ \underline{L}$.

Si U est une fonction d'utilité espérée vNM et $\tilde{U}(L)\beta = U(L) + \gamma$ alors :

$$
\begin{aligned}
\tilde{U}(\sum \alpha_k L_k) &= \beta U(\sum \alpha_k L_k) + \gamma \\
&= \beta \sum \alpha_k U(L_k) + \gamma \\
&= \beta \sum \alpha_k (\beta U(L_k) + \gamma) \\
&= \beta \sum \alpha_k \tilde{U}(L_k)
\end{aligned}
$$

Ainsi puisque $\tilde{U}$ satisfait la propriété de linéarité, elle est bien du type espérance d'utilité.

Considérons maintenant l'autre sens de la démonstration (U et $\tilde{U}$ ont la forme d'espérance d'utilité implique $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma$). Soit une loterie quelconque $L \in \mathcal{L}$ et définissons $\lambda_L \in [0;1]$ par : $U(L) = \lambda_L U(\overline{L}) + (1 - \lambda_L) U(\underline{L})$. L'existence de λ_L est assurée par la propriété de continuité. On a alors :

$$
\lambda_L \frac{U(L) - U(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}
$$

La linéarite implique : $\lambda_L U(\overline{L}) + (1 - \lambda_L) U(\underline{L}) = U(\lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L})$ donc puisque U représente les préférences $\succcurlyeq$, $L \sim \lambda_L \overline{L} + (1 - \lambda_L)\underline{L}$. Mais puisque $\tilde{U}$ représente ces mêmes préférences de façon tout aussi linéaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\tilde{U}(L) &= \tilde{U}(\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}) \\ &= \alpha_L \tilde{U}(\overline{L}) + (1-\alpha_L)\tilde{U}(\underline{L}) \\ &= \alpha_L(\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})) + \tilde{U}(\underline{L})\end{aligned}$$

Avec un peu de réécriture, on obtient $\beta = \dfrac{\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$ et $\gamma = \tilde{U}(\underline{L}) - U(\underline{L})\dfrac{\tilde{U}(\overline{L}) - \tilde{U}(\underline{L})}{U(\overline{L}) - U(\underline{L})}$.

CQFD.

La cardinalité. La conséquente de cette proposition est que lorsqu'on traite des fonctions d'utilité de type utilité espérée, les différences d'utilité ont un sens (ce qui n'est en rien vérifié dans le cas général des fonctions d'utilité portant sur les paniers de bien). On peut maintenant donner un sens bien précis au fait que la différence d'utilité entre l'issue 1 et l'issue 2 est plus importante que la différence d'utilité entre l'issue 3 et et l'issue 4.

3.3 Le Théorème d'Espérance d'Utilité

Le théorème d'espérance d'utilité, au coeur de l'approche économique de l'incertain, établit que si les préférences d'un agent sur les loteries respectent les 4 axiomes que nous avons mentionnés alors il existe une fonction d'utilité ayant la forme d'espérance d'utilité qui représente ces préférences.

Comme nous le verrons par la suite, ce théorème est central pour l'analyse économique du risque.

Theorème 1. *Supposons que les préférences, $\succcurlyeq$, sur les loteries satisfassent* *les 4 axiomes (complétude, transitivité, continuité, indépendance), alors* $\succcurlyeq$ *peut être représentée par une fonction d'utilité de type espérance d'utilité. Ce qui signifie qu'on peut associer un scalaire* u_n *à chaque issue* n *de façon à ce que pour tout couple de loteries* $(L; L')$ *avec* $L = (p_1; ...; p_N)$ *et* $L' = (p'_1; ...; p'_N)$ *:* $L \succcurlyeq L'$ *ssi* $\sum u_n p_n \geq \sum u'_n p'_n$.

Preuve :

On va développer la preuve autour de plusieurs étapes. Pour simplifier la démonstration, nous supposerons que nous pouvons identifier deux loteries $\underline{L}$ et $\overline{L}$ avec $\overline{L} \succcurlyeq L \succcurlyeq \underline{L}$ pour tout $L \in \mathcal{L}$. Encore une fois si $\underline{L} \sim \overline{L}$, la démonstration n'a pas d'intérêt. Nous supposerons donc que $\overline{L} \succ \underline{L}$.

Etape 1 : Si $L \succ L'$ et $\alpha \in]0; 1[$, alors $L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ L'$

Sens de cette affirmation : un mix non dégénéré de deux loteries se tiendra du point de vue des préférences entre les deux loteries. Formellement, cette affirmation découle de l'axiome d'indépendance. En particulier, puisque $L \succ L'$, l'axiome d'indépendance implique que :

$$L = \alpha L + (1 - \alpha)L \succ \alpha L + (1 - \alpha)L' \succ \alpha L' + (1 - \alpha)L' = L'$$

Etape 2 : Soient $\alpha, \beta \in [0; 1]$, alors $\beta\overline{L} + (1 - \beta)\underline{L} \succ \alpha\overline{L} + (1 - \alpha)\underline{L}$ ssi $\beta > \alpha$.

Supposons que $\beta > \alpha$. Observons, tout d'abord, que :

$$\beta\overline{L} + (1 - \beta)\underline{L} = \gamma\overline{L} + (1 - \gamma)(\alpha\overline{L} + (1 - \alpha)\underline{L})$$

où $\gamma = ((\beta-\alpha)/(1-\alpha)) \in]0; 1]$. L'étape 1 nous apprend que $\overline{L} \succ \alpha\overline{L}+(1-\alpha)\underline{L}$. En appliquant une seconde fois l'étape 1, on obtient $\gamma\overline{L} + (1 - \gamma)(\alpha\overline{L} +$

$(1-\alpha)\underline{L}) \succ \alpha\overline{L}+(1-\alpha)\underline{L}$ d'où on conclut : $\beta\overline{L}+(1-\beta)\underline{L} \succ \alpha\overline{L}+(1-\alpha)\underline{L}$.

Pour le raisonnement en sens inverse, passons par la contraposée. Supposons que $\beta \leq \alpha$. Si $\beta = \alpha$, nous devons avoir $\beta\overline{L}+(1-\beta)\underline{L} \sim \alpha\overline{L}+(1-\alpha)\underline{L}$. Supposons alors que $\beta < \alpha$, en employant les mêmes arguments que précédemment (en inversant juste le rôle des α et des β), on obtient $\alpha\overline{L}+(1-\alpha)\underline{L} \succ \beta\overline{L}+(1-\beta)\underline{L}$.

Etape 3 : Pour tout $L \in \mathcal{L}$, il existe un unique α_L tel que $(\alpha_l\overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L}) \sim L$.

L'existence d'un tel α_L résulte de la continuité de $\succcurlyeq$ et du fait que $\underline{L}$ et $\overline{L}$ sont la pire et la meilleure loterie. L'unicité résulte de l'étape 2.

Etape 4 : La fonction $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{R}$ qui associe α_L à L représente la relation de préférence $\succcurlyeq$.

De l'étape 3, nous tenons que que pour toutes loteries $L, L' \in \mathcal{L}$, $L \succcurlyeq L'$ ssi $\alpha_L\overline{L}+(1-\alpha_L)\underline{L} \succcurlyeq \alpha_{L'}\overline{L}+(1-\alpha_{L'})\underline{L}$.

Par conséquent, en utilisant l'étape 2, nous obtenons que $L \succcurlyeq L'$ ssi $\alpha_L \geq \alpha_{L'}$

Etape 5 : La fonction d'utilité U qui associe α_L à L est linéaire et, par conséquent, a une forme d'espérance d'utilité.

Nous voulons montrer que pour toutes loteries L, L' et $\beta \in [0;1]$, $U(\beta L+(1-\beta)L') = \beta U(L)+(1-\beta)U(L')$. Par définition de U, nous savons que :

$$L \sim U(L)\overline{L}+(1-U(L))\underline{L}$$

et

$$L' \sim U(L')\overline{L}+(1-U(L'))\underline{L}$$

Dès lors, si on applique deux fois l'axiome d'indépendance, on obtient :

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \beta[U(L)\overline{L} + (1-U(L))\underline{L}] + (1-\beta)L'$$
$$\sim \beta[U(L)\overline{L} + (1-U(L))\underline{L}] + (1-\beta)[U(L')\overline{L} + (1-U(L'))\underline{L}]$$

En réarrangeant les termes, on obtient une équivalence algébrique entre cette dernière loterie et :

$$[\beta U(L) + (1-\beta)U(L')]\overline{L} + [1-\beta U(L) - (1-\beta)U(L')]\underline{L}$$

En d'autres termes, la loterie composée qui donne la loterie $U(L)\overline{L} + (1-U(L))\underline{L}$ avec probabilité β et la loterie $U(L')\overline{L} + (1-U(L'))\underline{L}$ avec probabilité $1-\beta$ a même loterie réduite que la loterie composée qui donne la loterie $\overline{L}$ avec probabilité $\beta U(L) + (1-\beta)U(L')$ et $\underline{L}$ avec probabilité $1-\beta U(L) - (1-\beta)U(L')$. Ainsi :

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim (\beta U(L) + (1-\beta)U(L'))\overline{L} + (1-\beta U(L) - (1-\beta)U(L'))\underline{L}$$

Par conséquent, étant donnés la définition de U, nous obtenons :

$$U(\beta L + (1-\beta)L') = \beta U(L) + (1-\beta)U(L')$$

CQFD.

3.4 Discussion de la Théorie d'Espérance d'Utilité

3.4.1 Un bond en avant pour l'analyse

Le premier et principal avantage de l'espérance d'utilité est son extrême simplicité d'usage du point de vue analytique. C'est sans doute l'explication principale de son énorme succès chez les économistes et son important usage. Il est très facile de faire avec et beaucoup plus difficile de faire sans.

Le deuxième avantage de l'espérance d'utilité repose sur une interprétation normative du concept. L'espérance d'utilité peut fournir un guide puissant pour l'aide à la prise de décision pour des situations où des décideurs auront des difficultés pratiques fortes à choisir. Si on estime que des choix "rationnels" doivent respecter les 4 axiomes mentionnés alors on doit accepter de se laisser "guider" par une fonction d'utilité espérée.

En pratique, lorsque les issues sont des montants financiers, on utilisera le théorème d'espérance d'utilité de la façon suivante. Si on suppose que les préférences d'un décideur respecte les 4 axiomes susmentionnés, alors on pourra représenter ses préférences face au risque grâce à une fonction, u dite de "Bernoulli" portant sur la richesse finale après la réalisation de l'aléa.

Dans le cas continu, on aura :

$$U(w_0 + \tilde{x}) = \int_a^b u(w_0 + x) f(x) dx$$

On reconnaît une formulation proche de celle de l'espérance mathématique sauf que l'espérance n'est plus celle de la valeur de la richesse finale mais bien plutôt celle de la satisfaction obtenue en fonction de la richesse finale (on retrouve ici l'interprétation de Bernoulli). Il faudra faire attention à bien distinguer U qui porte sur des loteries et u sur des issues.

Dans le cas discret, on aura :

$$U(w_0 + \tilde{x}) = \sum u(w_0 + x)$$

On remplace ici les u_n que nous avons utilisé dans la démonstration par la fonction de Bernoulli. Analytiquement c'est identique mais cela permet, à nouveau d'avoir une interprétation plus précise de la notion d'espérance d'utilité.

Exemples :

3 issues possibles : $L^1 = (1/8; 3/4; 1/8)$; $L^2 = (1/4; 1/2; 1/4)$ et $L^3 = (1/2; 0; 1/2)$ (classement indépendant de u).

Exemple où classement change en fonction de u

Exemple ou classement change en fonction de w_f

3.4.2 Limites

Le Paradoxe d'Allais et les réponses apportées (erreur, regret, problème sur l'axiome d'indépendance)

Le Paradoxe de Machina

Et l'incertain ? (Savage et l'axiome de la chose sûre mais ...)

L'ambigüité (Paradoxe Ellsberg)

Les effets de présentation

Les théories du risque alternatives.

Chapitre 4

Equivalent certain et notions afférentes

4.1 La notion d'équivalent certain

Dans le cadre conséquentialiste (seule la richesse finale importe) et en accord avec l'axiomatique d'espérance d'utilité, nous allons supposer que chaque individu dispose d'une fonction d'utilité u qui lui permet d'évaluer toute loterie. Si la loterie relative à la richesse finale est évaluée par son espérance d'utilité, on trouve, via la définition même de l'espérance mathématique, que :

$$U(w_f) = \int_a^b u(w_0 + x) f(x) dx$$

Dans le cas discret,

$$U(w_f) = \sum p_i u(w_0 + x_i)$$

On voit que U est une fonction linéaire des p_i mais pas des valeurs de la richesse finale représentée par w_0+x_i. Quand le critère d'évaluation est défini, on peut se poser la question : quelle est la richesse sûre (sans la loterie) qui apporterait au décideur caractérisé par u le même bien-être que sa dotation initiale composée d'une somme sûre (w_0) augmentée de la loterie $\tilde{x}$? Si on dénote la richesse sûre équivalente par w^*, la définition que nous venons de proposer se formalise par :

$$u(w^*) = \int_a^b u(w_0 + x) f(x) dx$$

En utilisant la notion de fonction inverse appliquée à u qui est strictement croissante nous pouvons également écrire :

$$w^* = u^{-1}(u(w^*)) = u^{-1}(\int_a^b u(w_0 + x) f(x) dx)$$

L'interprétation de cette expression est simple. Nous allons la mettre en évidence au moyen de deux exemples. Soit un individu dont la fonction d'utilité est linéaire par morceaux de sorte que globalement elle est non linéaire. Nous lui donnons la forme algébrique suivante : si $w_f \leq 100$, $u(w_f) = 2w_f$; $100 \leq w_f \leq 200$, $u(w_f) = 100 + w_f$ et $w_f > 200$, $u(w_f) = 200 + w_f/2$.

Cette fonction d'utilité est croissante, continue, mais non différentiable en tout point. Si cet individu est confronté à la loterie :

x	$p(x)$
-80	$0,3$
40	$0,4$
120	$0,3$

Et si sa richesse initiale est 100, quel est son équivalent certain ?

Partant de $w_0 = 100$, les caractéristiques de $\tilde{x}$ impliquent que l'aléa $\tilde{w}_f$ a la distribution suivante :

w_f	$p(w_f)$
20	$0,3$
140	$0,4$
220	$0,3$

Cet individu peut alors évaluer la loterie par le critère d'espérance d'utilité et il trouve :

$$\begin{aligned} E[u(w_f)] = U(w_f) &= (0,3)u(20) + (0,4)u(140) + (0,3)u(220) \\ &= (0,3)(40) + (0,4)(240) + (0,3)(310) = 201 \end{aligned}$$

On s'interroge alors sur le niveau certain de w_f (w_f^*) qui est capable de fournir la même satisfaction. On obtient aisément w_f^*= 101. Notre décideur. apparaît donc indifférent entre une richesse de 101 obtenue avec certitude et une situation risquée composée de $w_0 = 100$ accompagnée de la loterie $\tilde{x}$.

Considérons maintenant un autre décideur caractérisé par la fonction d'utilité : $u(w_f) = (w_f)^2$, mais qui - à part cette différence de nature psychologique - se trouve exactement dans la même situation que le décideur précédent. Avec cette fonction d'utilité on obtient :

$$E[u(w_f)] = U(w_f) = (0,3)400 + (0,4)19600 + (0,3)48400 = 22480$$

Pour trouver l'équivalent certain, il faut rechercher la valeur de w_f^* qui, incorporée dans la fonction d'utilité, apporte un indice de satisfaction de 22480. En appliquant la notion de fonction inverse, on obtient $w_f^* = \sqrt{22480} = 149,93$.

Que constatons-nous ? A partir de deux situations initiales identiques tant pour la richesse initiale que pour la loterie, une modification de la fonction d'utilité entraîne un niveau différent d'équivalent certain. En d'autres termes, alors que l'espérance mathématique de la loterie est restée la même (et plus généralement toute sa distribution) sa perception par l'individu a changé et ceci nous fait comprendre qu'une modification de la fonction d'utilité reflète une attitude différente face au risque. Cette constatation va servir de point de départ à la quantification du « degré d'aversion au risque» que nous étudierons ensuite.

Avant d'aborder ce sujet, il importe d'énoncer un résultat, plus important qu'il n'y paraît, sur les transformations qu'on peut faire subir à la fonction d'utilité et qui sont susceptibles (ou non) de modifier l'équivalent certain, c-à-d ce qui caractérise l'appréciation de la situation par le décideur. Bien évidemment, la transformation qui s'est produite lors du passage du premier exemple au second était fortement non linéaire et elle a engendré, comme nous l'avons vu, une modification de l'équivalent certain. Cependant, nous devons attirer l'attention du lecteur sur le résultat suivant.

Proposition 3. *Si une fonction d'utilité de Bernoulli (v) est une transformation linéaire croissante d'une autre (u), c-à-d si* $v(w_f) = \alpha + \beta u(w_f)$ *avec* $\beta > 0$*, alors l'équivalent certain n'est pas modifié.*

Alors que les transformations linéaires croissantes ne modifient jamais l'équivalent certain, il n'en va pas de même pour les transformations non linéaires. La constance de l'équivalent certain, suite aux seules transformations linéaires croissantes, fait dire qu'en théorie du risque, la mesure de l'utilité est cardinale et qu'elle s'apparente ainsi à une mesure de distance, temps ou température. Ce résultat est, bien entendu, à rapprocher du résultat obtenu dans le chapitre précédent sur les relations entre différentes fonctions d'utilité représentant les mêmes préférences.

4.2 Prix de vente, prix d'achat, prime de risque

Après avoir défini l'équivalent certain nous allons le comparer à deux autres valeurs déjà rencontrées, w_0 d'une part et $E(\tilde{w}_f)$ d'autre part. Cette comparaison va nous conduire à une définition respectivement du prix de vente et de la prime de risque associés à une loterie. En évoquant le prix de vente, nous définirons rapidement le prix d'achat.

Une façon d'interpréter la formule de l'équivalent certain consiste à dire que la dotation initiale de l'individu est constituée de w_0 et d'une loterie $\tilde{x}$. L'individu se demande alors quelle richesse certaine (débarrassée de la loterie) lui procurerait le même bien-être. Il se demande en fait quel est le terme d'échange juste (pour lui) entre l'incertitude $(w_0 + \tilde{x})$ et la certitude (w^*). On comprend alors qu'il est très naturel de définir le prix de vente d'une loterie (p_v) par :

$$p_v = w^* - w_0$$

En effet, pour tout bien physique ou tout service (livre, billet de cinéma) le prix de vente est égal à l'encaisse du vendeur après la transaction moins son encaisse initiale. Ici le bien dont l'individu se débarrasse est une loterie et ses encaisses initiales et finales sont respectivement w_0 et w^*. La formule applique donc bien à la loterie la définition tout à fait naturelle d'un prix de vente. Le prix de vente tel qu'il est défini est en réalité le prix minimal exigé par l'individu pour se "débarrasser" de la loterie. S'il trouvait un cocontractant prêt à payer plus que p_v, le propriétaire de $\tilde{x}$ se précipiterait pour réaliser la transaction. A l'inverse si sur le marché aucun acheteur de risque n'est prêt à payer p_v, le propriétaire conserve $\tilde{x}$. Le prix de vente peut aussi être défini de la manière suivante :

$$u(w_0 + p_v) = \int_a^b u(w_0 + x) f(x) dx$$

Dès lors, si le prix p auquel un individu peut vendre sa loterie est inférieur à p_v, $u(w_0 + p)$ est inférieur à son espérance d'utilité en conservant la loterie $\tilde{x}$. Donc en utilisant le critère d'espérance d'utilité, cet individu refuse de se séparer de cette loterie si le prix qu'on lui en offre n'est que de $p < p_v$. Au contraire, et par un raisonnement identique, si $p > p_v$, cet individu accroît son bien-être en vendant sa loterie au prix p. En conclusion, le prix de vente p_v représente bien le prix minimal auquel l'individu est prêt à vendre une loterie. On imagine aisément les applications que l'on peut faire d'un tel concept en finance et en assurance par exemple.

Dans les deux exemples que nous avons traités à la section précédente, les prix de vente sont respectivement égaux à 1 (101-100) et 49,93 (149,93-100). Les deux individus concernés apprécient donc positivement la loterie ($p_v > 0$) qui exerce un effet positif sur le bien-être du détenteur : l'individu évalue positivement la loterie $\tilde{x}$. Il peut se faire cependant que pour certaines loteries et fonctions d'utilité, le prix de vente soit négatif. En voici un exemple :

Soient $u(x) = \sqrt{x}$ et $w_0 = 100$

x	$p(x)$
-50	$0,5$
50	$0,5$

$U(\tilde{w}_f) = \frac{1}{2}(7,071) + \frac{1}{2}(12,247) = 9,659$. Cela donne $w_f^* = 93,301$ et $p_v = -6,699$.

Le prix de vente négatif signifie que l'individu concerné est prêt à donner de l'argent à (subventionner) celui qui le débarrasserait de la loterie. La notion de prix de vente d'une loterie correspond à l'idée d'assurance (pour l'acheteur de ce produit) puisqu'il se débarrasse d'un risque initialement détenu contre une somme d'argent. Dans d'autres sphères de l'activité économique, comme en finance, on pensera d'avantage à la situation inverse au départ : le décideur est en certitude et il envisage l'acquisition d'une loterie (par exemple un titre risqué). Le prix d'achat est aussi une notion qui s'applique au cas d'une compagnie d'assurance (c-à-d un vendeur d'assurance) lorsque, par exemple, après avoir levé un capital de départ (certain) elle se met à acheter du risque, c-à-d à souscrire des polices. On peut alors légitimement s'interroger sur la somme maximale d'argent que l'individu est prêt à payer pour acquérir la loterie et on définit de la sorte un prix d'achat (p_a). De manière plus formelle p_a est solution de :

$$u(w_f) = \int_a^b u(w_0 + x - p_a) f(x) dx$$

La valeur de p_a qui satisfait cette équation assure l'équilibre dans l'échange. Si le prix à payer pour $\tilde{x}$ excédait p_a la transaction ne serait pas rentable pour l'acheteur et s'il était inférieur, il réaliserait un profit, ce qui indiquerait qu'on n'a pas encore atteint la valeur maximale acceptable pour p_a. Alors que p_v est un prix minimal, la valeur de p_a est une borne supérieure pour le candidat acheteur.

Intuitivement on a tendance à penser que $p_a = p_v$ pour U, w_0 et $\tilde{x}$ donnés. En réalité, ce n'est pas nécessairement vrai. Toutefois pour analyser la relation entre les deux concepts, nous aurons besoin d'une mesure précise de l'aversion au risque et d'une hypothèse sur son comportement. Nous reportons donc cette discussion à plus tard

Nous développerons ici la notion - très connue mais parfois mal comprise - de prime de risque. Celle-ci découle de l'équivalent certain et du prix de vente. Néanmoins pour bien saisir le lien logique entre ces concepts, nous devons au préalable énoncer et démontrer un résultat important.

Proposition 4. *Si la fonction d'utilité de Bernoulli d'un individu est linéaire dans la richesse finale, le prix de vente d'une loterie est égal à son espérance mathématique,* $E(\tilde{x})$.

Preuve :

Puisque u est linéaire

$$u(w_f) = g + dw_f \text{ avec } d > 0$$

Ainsi

$$U(\tilde{w}_f) = E(g + d(w_0 + \tilde{x})) = g + dw_0 + dE(\tilde{x})$$

Et l'équivalent certain :

$$g + dw_f^* = g + dw_0 + dE(\tilde{x})$$

où $w_f^* = w_0 + E(\tilde{x})$ de sorte que, par la définition de p_v, on obtient :

$$p_v = w_f^* - w_0$$

C.Q.F.D.

Ceci signifie que le décideur dont la fonction d'utilité est partout linéaire valorise la loterie exclusivement par ... l'espérance mathématique du résultat. Cette attitude correspond au premier critère d'évaluation que nous avons énoncé au début du chapitre 2. Le critère de l'espérance mathématique est donc un cas particulier de l'espérance d'utilité : il se manifeste lorsque l'utilité prend une forme particulière, celle d'une fonction partout linéaire.

On dit parfois que la linéarité de u implique la neutralité au risque. Cela provient du fait suivant : si u est partout linéaire et si l'individu est confronté à deux loteries de même espérance mais par ailleurs très différentes (dans leur dispersion et/ou tous les autres moments) il y attache néanmoins le même prix de vente. En quelque sorte l'individu ne se sent concerné que par la tendance centrale de la distribution sans prendre en considération ses autres caractéristiques et notamment le risque. Pour refléter la neutralité au risque, on dit que la prime de risque, π, est nulle et on définit celle-ci par

$$\pi = E(\tilde{x}) - p_v$$

Lorsque u est linéaire il y a neutralité au risque car $p_v = E(\tilde{x})$ de sorte que π est nul. Le cas de neutralité au risque sert de seuil qui va permettre de définir précisément les deux autres concepts d'*aversion* et de *goût du risque.*

Il y a aversion au risque si $\pi > 0$. En effet $\pi > 0$ implique que $p_v < E(\tilde{x})$ où $E(\tilde{x})$ serait le prix de vente de la loterie si l'individu était neutre au risque. Comme $\pi > 0$ implique que le p_v demandé est inférieur à celui résultant de la neutralité au risque cela implique que l'individu n'apprécie pas le risque contenu dans la loterie puisqu'il se contente d'un prix plus faible pour la liquider.

A l'inverse $\pi < 0$ est un indicateur sans faille d'un goût pour le risque. En effet, $\pi < 0$ implique que $p_v > E(\tilde{x})$ et donc le prix de vente demandé excède celui qui aurait été exigé en neutralité au risque. L'individu attache en quelque sorte un supplément de valeur à la loterie (vis-à-vis du cas de neutralité au risque) et il révèle ainsi son appréciation positive du risque qu'elle contient.

Revenons à la loterie traitée comme exemple précédemment. Son espérance mathématique est de : $E(\tilde{x}) = (0,3)(-80)+(0,4)(40)+(0,3)(120) = 28.$

Le premier individu (celui dont la fonction d'utilité est linéaire par morceaux) attache à cette loterie un p_v de 1. Sa prime de risque est donc positive $\pi = 28 - 1 = 27$). Pour le second individu ($u(x) = x^2$), le prix de vente s'élève à 49,93 et donc π vaut $28 - 49,93 = -21,93$. Que constatons-nous ? La première fonction d'utilité de la figure est concave et π est positive. A l'inverse, la seconde fonction d'utilité est convexe et π est négative. Il existe en fait une relation entre concavité (convexité) de u et π positive (négative), un peu de la même manière que la linéarité de u implique $\pi = 0$. Cela est attesté par la proposition suivante.

Proposition 5. *Si la fonction d'utilité d'un décideur est strictement croissante et strictement concave (convexe) la prime de risque attachée à toute loterie est strictement positive (négative).*

La démonstration de ce théorème est fondée sur une inégalité fameuse, l'inégalité de Jensen, qui s'énonce comme suit :

Si on applique à un aléa quelconque $\tilde{y}$ une transformation strictement concave dénotée f, alors

$$E[f(\tilde{y})] < f(E[\tilde{y}])$$

Le signe de l'inégalité est renversé si f est convexe. Il est important de saisir l'intuition de ce résultat à partir d'une représentation graphique.

Preuve : Soit donc un décideur dont la fonction d'utilité u est strictement croissante et strictement concave. La dérivée seconde de u étant donc négative. Cet individu apprécie le couple $(w_0; \tilde{x})$ par le critère d'espérance d'utilité c-à-d par :

$$E[u(w_0 + \tilde{x})]$$

En vertu de l'inégalité de Jensen, nous savons par la concavité de u que

$$E[u(w_0 + \tilde{x})] < u(E(w_0 + \tilde{x})) = u(w_0 + E(\tilde{x}))$$

Appliquant la définition de l'équivalent certain au membre de gauche de cette inégalité, nous avons aussi :

$$u(w_f^*) < u(w_0 + E(\tilde{x}))$$

Etant donné que u est croissante, cette dernière égalité ne peut se vérifier que si :

$$w_f^* < w_0 + E(\tilde{x})$$

où $w_f^* - w_0 < E(\tilde{x})$ c-à-d $p_v < E(\tilde{x})$ ou encore $0 < E(\tilde{x}) - p_v = \pi$.
C.Q.F.D.

Combinant ce résultat avec les commentaires qui l'ont précédé, on constate qu'il y a bien une association parfaite entre concavité de u, aversion au risque et prime de risque positive. Par un raisonnement en tout point parallèle, il est possible de montrer qu'une association tout aussi parfaite s'établit entre convexité de u, goût du risque et prime de risque négative.

Il convient d'insister sur un point qui prête bien souvent à confusion. L'aversion au risque qui entraîne une prime de risque positive n'implique pas (contrairement à une idée répandue) le rejet de toutes les loteries. En d'autres termes des individus riscophobes peuvent très bien exiger un prix de vente strictement positif pour se débarrasser d'une loterie qu'ils détiennent. En fait leur prime de risque positive implique seulement que ce prix de vente est inférieur à l'espérance mathématique de la loterie, c-à-d en réalité le prix de vente qui serait exigé par un voisin neutre au risque.

Evidemment, p_v inférieur à $E(\tilde{x})$ pour le riscophobe entraîne $\pi > 0$ mais pas nécessairement $p_v < 0$, surtout, bien entendu, si $E(\tilde{x})$ est important. L'aversion au risque n'implique pas un comportement frénétique de rejet de tous les risques : il s'agit en fait de reconnaître que le risque n'est certes pas apprécié mais qu'il faut contrebalancer ses inconvénients avec l'avantage du rendement représenté par $E(\tilde{x})$. Il existe donc des loteries suffisamment avantageuses en termes de $E(\tilde{x})$ pour que le décideur riscophobe les apprécie positivement malgré l'élément de risque qu'elles contiennent. Les actifs boursiers sont de beaux exemples de loterie qui accroissent le bien-être de leur détenteur.

Ces quelques réflexions nous font saisir tout l'intérêt de la notion de prime de risque. Si un individu a une utilité concave il peut attacher un prix de vente positif à certaines loteries et un prix de vente négatif à d'autres. En revanche, sa prime de risque sera toujours positive. Il y a donc bien une corrélation parfaite entre le signe (positif) de π et la concavité de u (mais pas entre le signe de p_v et cette concavité). C'est cette équivalence parfaite qui fait l'intérêt du concept de prime de risque.

Considérons un exemple. Nous le construisons de façon à faire paraître de manière concrète les remarques que nous venons de formuler. Considérons la nouveau la fonction d'utilité de Cramer, $u(x) = \sqrt{x}$ et une richesse initiale de 5 couplée à une loterie définie par :

x	$p(x)$
-4	$0,2$
4	$0,8$

Cette loterie est «actuariellement favorable» car $E(\tilde{x})$ est strictement positif et égal à $2,4$. Quant à la fonction d'utilité, elle est concave de sorte que le décideur manifeste de l'aversion au risque.

L'espérance d'utilité attachée par l'individu à sa situation s'élève à :

$$E[u(\tilde{w}_f] = 0,2(\sqrt{1}) + 0,8(\sqrt{9}) = 2,6$$

Son équivalent certain w_f^* est tel que $\sqrt{w_f^*} = 2,6$ et donc $w_f^* = 6,76$, $p_v = 6,76 - 5 = 1,76$ et $\pi = 2,4 - 1,76 = 0,64$.

Graphique.

4.3 Approximation d'Arrow-Pratt et aversion absolue au risque

Nous avons commenté au paragraphe précédent la notion de prime de risque. Grâce à quelques outils mathématiques simples, Arrow et Pratt ont pu montrer dans deux articles célèbres que la prime de risque était constituée par le produit de deux éléments aisément interprétables. Ils y sont arrivés en utilisant astucieusement les formules d'approximation d'une fonction continue et dérivable en tout point de son domaine de définition. Nous donnons ici un aperçu de leur raisonnement.

Partons de la définition de l'équivalent certain et joignons lui celle du prix de vente pour pouvoir écrire :

$$u(w_0 + p_v) = \int_a^b u(w_0 + x) f(x) dx$$

Quand on connaît u, w_0 et l'aléa $\tilde{x}$ caractérisé par $f(x)$, la formule représente une équation (non linéaire) à une inconnue : p_v. Cette équation définit implicitement p_v. L'objectif poursuivi ici est de rendre p_v explicite. A cette fin, nous prenons pour débuter une approximation au premier degré de

$u(w_0 + p_v)$ autour de $(w_0 + \mu)$ où $\mu = E(\tilde{x})$ et nous trouvons en vertu d'un résultat mathématique bien connu :

$$\begin{aligned} u(w_0 + p_v) &\cong u(w_0 + \mu) + (w_0 + p_v - (w_0 + \mu))u'(w_0 + \mu) \\ &\cong u(w_0 + \mu) + (p_v - \mu)u'(w_0 + \mu) \end{aligned}$$

De la même manière, nous allons approximer jusqu'au second degré $u(w_0 + x)$ qui figure sous le signe d'intégration également autour de $(w_0 + \mu)$. On peut se demander quelle est la raison de cette différence de traitement entre le membre de gauche et celui de droite en ce qui concerne le degré d'approximation. La raison est que $w_0 + \mu$ $(= 7,4)$ et $w_0 + p_v$ $(= 6,76)$ sont relativement proches l'un de autre tandis que $w_0 + \tilde{x}$, qui prend dans un cas la valeur de 1, est nettement plus distant de $w_0 + \mu$. Etant donné que la qualité d'une approximation se détériore avec la distance entre les points, il faut compenser en développant jusqu'à un degré plus élevé, le second terme. Ceci nous amène à :

$$u(w_0 + x) \cong u(w_0 + \mu) + (x - \mu)u'(w_0 + \mu) + \frac{(x - \mu)^2}{2!}u''(w_0 + \mu)$$

En injectant ce résultat dans le membre de droite et en se souvenant que $\int_a^b (x - \mu)f(x)dx = 0$ et que $\int_a^b (x - \mu)^2 f(x)dx = \sigma^2(\tilde{x})$, le membre de droite s'écrit de façon approchée :

$$u(w_0 + \mu) + \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2}u''(w_0 + \mu)$$

Nous obtenons alors après quelques simplifications :

$$p_v - \mu \cong \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2} \frac{u''(w_0+\mu)}{u'(w_0+\mu)}$$

ou en utilisant la définition de π :

$$\pi \cong \frac{\sigma^2(\tilde{x})}{2} (-\frac{u''(w_0+\mu)}{u'(w_0+\mu)})$$

Ce résultat indique bien la nature des éléments constitutifs de π :

(1) π dépend de la variance de $\tilde{x}$ qui peut être interprétée à première vue comme un indicateur de la quantité de risque véhiculée par la loterie ;

(2) π dépend également d'une expression $(-u''/u')$ qui reflète en quelque sorte l'allure de la fonction d'utilité c-à-d un élément subjectif spécifique à l'individu. Cette expression porte le nom de *degré d'aversion absolue au risque* et nous la dénotons en abrégé par A_a. Comme A_a est une mesure d'aversion au risque locale, elle est une fonction de la richesse : $A_a(w) = -u''(w)/u'(w)$.

La formule obtenue permet de comprendre pourquoi des individus dans des situations objectives identiques ont des primes de risque différentes. En effet si deux individus ont la même richesse et possèdent la même loterie (de sorte que, notamment que μ et σ^2 sont identiques) ils peuvent très bien avoir une valeur de π différente parce que l'allure de leur fonction d' utilité, mesurée par A_a, est différente.

Les deux chapitres suivants seront consacrés à l'étude des éléments constitutifs de π : les mesures d'aversion au risque d'une part et les mesures de risque d'autre part. Avant de nous engager sur ce sentier, faisons quelques remarques sur la formule de Arrow-Pratt.

L'expression que nous avons trouvé n'est pas la vraie valeur de la prime mais une "bonne" approximation de celle-ci. Pour s'en rendre compte retournons à l'exemple précédent pour lequel nous avions obtenu la valeur exacte de la prime ($\pi = 0,64$). Quel montant nous est fourni par l'approximation ? Nous savons déjà que $\mu = 2,4$. Un calcul simple montre que $\sigma^2 = 10,24$. Comme $u(x) = x^{1/2}$, on trouve que $u'(x) = (1/2)x^{-1/2}$ et $u''(x) = (-1/4)x^{-3/2}$.

On obtient ainsi que $A_a = 1/(2w_f)$. Si on évalue l'aversion absolue au risque en $w_f = w_0 + \mu = 7,4$, la formule de Arrow-Pratt donne pour π une valeur approchée de $0,5(10,24)(1/14,8)$, c-à-d $0,35$.

$0,35$ est assez éloigné de $0,64$ et, dans ce cas précis, l'approximation n'est pas excellente. Cela provient du fait que la loterie porte sur des montants importants par rapport à la richesse initiale. Il ne faut pas oublier en effet qu'une formule d'approximation est d'autant meilleure qu'elle concerne des valeurs assez approchées. Comme dans l'exemple, les valeurs de la richesse finale peuvent être assez différentes de celle de la richesse initiale, la formule de Arrow-Pratt ne peut pas donner de très bons résultats. Il suffit de considérer une loterie moins risquée, par exemple :

x	$p(x)$
-1	$0,2$
1	$0,8$

Pour cette loterie, dont la variance est seulement de $0,64$, la vraie valeur de π s'élève $0,0323$ tandis que la formule de Arrow-Pratt l'estime à $0,0286$. Alors que dans le premier exemple, l'erreur relative était de $(0,64 - 0,35)/0,64 = 0,4531$ elle n'est plus ici que de $(0,0323 - 0,0286)/0,0323 = 0,1146$. Comme prévu, la qualité de la formule de Arrow-Pratt s'améliore quand la loterie devient petite par rapport à la composante certaine de la dotation initiale.

Remarques

Si l'individu est neutre au risque, la formule de Arrow-Pratt fournit la réponse exacte. En vertu de la proposition démontrée précédemment, u linéaire implique que la vraie valeur de π soit 0. Tel est bien aussi le résultat contenu dans la formule d'approximation. En effet, si u est linéaire, u' est une constante et u'' est nulle.

Même si la formule de Arrow-Pratt peut entraîner des erreurs d'approximation, elle ne fait jamais commettre une erreur de signe. Si u est concave, u'' est négative et la valeur approchée de π est positive comme l'est sa vraie valeur. A l'inverse si u est convexe, u'' est positive et la prime approchée, ainsi que sa vraie valeur, sont négatives.

Arrêtons nous un instant sur une autre notion : la *tolérance au risque*. Tandis que, pour un individu riscophobe, l'aversion au risque mesure l'intensité de rejet du risque, il est naturel de définir la tolérance au risque par l'aisance avec laquelle le risque est supporté. Il y a donc une relation inverse entre l'aversion et la tolérance au risque : plus la première est importante, plus la seconde est faible. Pour illustrer cette idée on définit la tolérance (T_a) par : $T_a = 1/T_a$

Remarquons que conformément à l'intuition la neutralité au risque implique une tolérance infinie à son égard.

Chapitre 5

Compléments sur l'aversion au risque et sa mesure

Nous commençons ce chapitre par le développement de deux concepts proches de l'aversion absolue au risque : l'aversion relative et l'aversion partielle au risque. Une fois que ces concepts auront été présentés, nous discuterons quelques hypothèses qui peuvent être faites à leur sujet. Nous étudierons ensuite des fonctions d'utilité spécifiques.

5.1 Aversion relative et aversion partielle au risque

Tous les développements proposés au chapitre précédent l'ont été dans le cadre des loteries additives par rapport à la richesse. Or, comme nous l'avons signalé précédemment, on rencontre également des loteries multiplicatives. Le concept d'aversion relative et sa généralisation (l'aversion partielle) ont été conçus pour ce type de situation.

5.1.1 L'aversion relative

Si un décideur, a placé sa fortune w_0 dans un actif dont le taux de rendement est aléatoire et si ce risque va se matérialiser dans quelques instants, sa richesse finale est définie par : $\tilde{w}_f = w_0(1 + \tilde{y})$.

En conséquence, si ce décideur adopte le critère d'espérance d'utilité il apprécie sa situation avant matérialisation du risque par $E[u(w_0(1 + \tilde{y}))]$.

Imaginons maintenant qu'un tiers lui propose de le débarrasser du risque (multiplicatif) moyennant l'abandon d'une fraction de w_0. Pour savoir si la proposition qui lui est faite est intéressante, il doit la comparer à la valeur limite π' définie par :

$$u(w_0(1 - \pi')) = E[u(w_0(1 + \tilde{y}))]$$

En d'autres termes, si le décideur doit abandonner exactement $\pi' w_0$ (en valeur monétaire) il est indifférent entre cette solution ou laisser jouer la loterie $\tilde{y}$. Bien entendu s'il trouve sur le marché un organisme (par exemple une compagnie d'assurance) qui lui propose l'échange pour une fraction inférieure à π', le décideur acceptera avec empressement car il réalisera un surplus de bien-être (ex ante) dans l'opération.

Pour définir l'aversion relative au risque, on applique la méthode d'approximation de Arrow-Pratt à chaque membre de l'équation. Afin d'alléger la notation (et aussi d'éviter quelques problèmes techniques mineurs sans intérêt fondamental), nous supposons que la loterie est «actuariellement neutre» c-à-d que $E(\tilde{y}) = 0$. Si nous procédons à l'approximation jusqu'au premier ordre du membre de gauche autour de w_0, nous trouvons :

$$u(w_0(1 - \pi')) \cong u(w_0) - \pi' w_0 u'(w_0)$$

Procédant de la même façon mais jusqu'au second ordre pour $u(w_0(1+\tilde{y}))$, nous obtenons :

$$u(w_0(1+\tilde{y})) \cong u(w_0) + yw_0u'(w_0) + \frac{\tilde{y}^2 w_0^2}{2} u''(w_0)$$

Si on prend l'espérance mathématique à gauche et à droite de cette expression on aboutit finalement à :

$$E[u(w_0(1+\tilde{y}))] \cong u(w_0) + \frac{\tilde{\sigma}^2 w_0^2}{2} u''(w_0)$$

En regroupant les deux approximations, on peut écrire :

$$u(w_0) - \pi' w_0 u'(w_0) \cong u(w_0) + \frac{\tilde{\sigma}^2 w_0^2}{2} u''(w_0)$$

qui implique :

$$\pi' \cong \frac{1}{2}\sigma^2(-w_0\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)})$$

La fraction de sa fortune que l'individu est prêt à abandonner pour se débarrasser du risque de taux est fonction de deux éléments : 1) la quantité de risque mesurée ici par σ^2 ; 2) un élément psychologique reflétant l'allure de la fonction d'utilité et mesuré dans le cas présent par $A_r(w_0) = -wo\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)}$, un coefficient qui s'appelle le degré d'aversion relative au risque.

Les expressions *aversion absolue* et *aversion relative* sont liées à la nature de la loterie puisque dans le premier cas elle est additive et exprimée en unités monétaires tandis que dans le second elle est multiplicative et exprimée en taux ou en fraction. Il est intéressant de noter un lien évident entre l'aversion relative (A_r) et l'aversion absolue (A_a). Si nous retournons à la définition de A_a et si nous considérons que la loterie additive est actuariellement neutre,

$A_a = \frac{-u"(wo)}{u'(wo)}$. Il est dès lors évident que nous pouvons écrire :

$$A_r = w_0 A_a$$

La cohérence entre les deux approches développées jusqu'ici apparaît clairement si on observe ce qui suit. Partons de la loterie multiplicative $\tilde{y}$ et remarquons que $\tilde{w}_f$ peut s'écrire :

$$\tilde{w}_f = w_0(1 + \tilde{y}) = w_0 + \tilde{y}w_0$$

Si nous convenons d'écrire que $\tilde{x} = \tilde{y}w_0$, nous avons aussi :

$$\tilde{w}_f = w_0 + \tilde{x}$$

Les deux loteries sont actuariellement neutres. En outre, $Var(\tilde{x}) = w_0^2 Var(\tilde{y})$.Les variances sont très différentes (sauf pour $w_0 = 1$).

Nous avons ainsi montré qu'il y avait bien cohérence entre les différents résultats. En outre nous rappelons un résultat précédemment mentionné : à toute loterie multiplicative correspond une loterie additive ce qui explique le lien très serré entre l'aversion absolue et l'aversion relative d'une part et entre π et π' d'autre part. Dès lors, comme nous l'indiquerons encore, faire des hypothèses sur le comportement d'un des deux concepts en implique automatiquement sur le comportement de l'autre.

5.1.2 L'aversion partielle

En théorie financière, le concept d'aversion relative est très connu et c'est assez normal étant donné qu'on s'y trouve confronté souvent à des taux de rendement aléatoires. De façons surprenante, une généralisation intéressante de l'aversion relative. l'aversion partielle, y est pratiquement inconnue. L'idée de base est très simple. Soit une fortune totale donnée w_0 composée de deux éléments. Le premier, w'_o. est totalement sûr, tandis que le second, w''_0, est soumis à un risque multiplicatif supposé actuariellement neutre et bien entendu $w_0 = w'_0 + w''_0$.

La situation initiale de l'individu se caractérise par $E[u(w'_0 + w''_0(1+\tilde{y}))]$ et il se demande quelle fraction de la richesse soumise à risque il pourrait abandonner afin d'éviter le risque et de conserver le même bien-être. On s'intéresse donc à la détermination d'une fraction, π'', telle que :

$$u(w'_0 + w''_0(1-\pi'')- = E[u(w'_0 + w''_0(1+\tilde{y}))]$$

On voit immédiatement que π" inclut π' comme cas particulier. En effet, si $w'_0 = 0$ de sorte que $w''_0 = w_0$ (toute la richesse est soumise à risque) ...

Afin de rendre π" explicite. on va prendre une approximation à gauche et à droite autour de w_0. Suivant la technique maintenant bien rodée, on trouve :

$$\pi'' \cong \frac{1}{2}\sigma^2(-w''_0 \frac{u''(w_0)}{u'(w_0)})$$

Où l'expression entre parenthèses est appelée aversion partielle et dénotée A_p. Il est intéressant (et réconfortant) de constater à nouveau que si $w''_0 = w_0$, A_p devient égal à A_r. En outre une simple manipulation algébrique permet d'établir un lien simple et intuitif entre A_p et A_r. Partons de la définition de A_p et multiplions-la par w_0 avant de la diviser par w_0 de sorte qu'on puisse écrire :

$$A_p = -\frac{w''_0}{w_0} w_0 \frac{u''(w_0)}{u'(w_0)} = \frac{w''_0}{w_0} A_r(w_0)$$

L'aversion partielle est donc proportionnelle à l'aversion relative et de façon intéressante on remarque que le facteur de proportionnalité est égal à la fraction de la richesse totale qui est soumise au risque.

5.1.3 Une illustration

Retournons à la fonction d'utilité de Cramer $u = w_f^{1/2}$ et supposons qu'une richesse initiale de 10 est partagée comme suit : 2 est *placé* dans un actif sûr et le solde est *placé* dans un actif risqué dont le taux de rendement aléatoire y est représenté par une loi uniforme sur $[-1, 1]$ de sorte que $f(t) = 1/2$ tandis que $E(\tilde{y}) = 0$ et $\sigma^2(\tilde{y}) = 1/3$.

Cette loterie a des résultats extrêmes spectaculaires puisque, si $y = -1$ se matérialise, tout le capital soumis à risque est perdu tandis que, si $y = 1$, ce même capital voit sa valeur doubler. La richesse finale de l'individu va donc fluctuer entre un minimum de 2 et un maximum de 18 s'il conserve cette loterie qui va être jouée dans quelques instants. Son espérance d'utilité avec la loterie s'évalue par :

$$E[u(\tilde{w}_f)] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(2 + 8(1 + y))^{1/2} dy$$

Si on procède à un changement de variable tout à fait conforme à l'intuition économique puisqu'il pose

$$x = 2 + 8(1 + y)$$

$$dx = 8dy$$

Et donc

$$E[u(\tilde{w}_f)] = \frac{1}{2}\int_2^{18} \frac{1}{8}(x)^{1/2}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{8}\frac{2}{3}[t^{3/2}]_2^{18} = 3,0641$$

En vertu de la définition de π'', $u(2 + 8(1 - \pi'')) = 3,0641$ ce qui donne : $\pi'' = 0,0764$.

Cela signifie que l'individu est indifférent entre abandonner de façon irrémédiable $7,64\%$ de son capital soumis à risque pour échapper à la loterie ou au contraire conserver la loterie $\tilde{y}$ et attendre son issue.

Confrontons maintenant ce résultat exact avec sa formule d'approximation. Nous savons déjà que, pour l'utilité de Cramer, $-\frac{u''}{u'} = \frac{1}{2w}$ et donc avec $w_0 = 10$:

$$-\frac{u''(w_0)}{u'(w_0)} = \frac{1}{20}$$

De sorte que la formule approchée donne comme résultat :

$$\pi'' \cong \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{8}{20} = 0,0666$$

Ce résultat est une bonne approximation de la vraie valeur.

Afin de poursuivre l'exemple considérons maintenant le voisin de M. Cramer, M. Darcis. Imaginons que celui-ci a la même fonction d'utilité, qu'il anticipe la même distribution de $\tilde{y}$ mais que sa fortune totale $w_0 = 10$ est investie de façon différente à savoir $w_0' = 6$ et $w_0'' = 4$. Un peu de calcul fournit les résultats suivants : $\pi'' = 0,0343$ (valeur exacte) et $\pi'' = 0,0333$ (valeur approchée).

Remarquons que l'approximation est encore meilleure que précédemment. Certes le risque n'a pas changé mais comme il s'applique à une fraction moindre de la richesse, il y a une plus faible dispersion dans les valeurs possibles de $\tilde{w}_f$ ce qui améliore la qualité de l'approximation.

Signalons aussi que pour arriver à ces résultats on est passé par une étape intermédiaire indiquant que, pour M. Darcis, $E[u(\tilde{w}_f)] = 3,1405$ c-à-d un niveau plus élevé que la même expression pour M. Cramer. Cette relation est tout à fait logique. Etant donné que la fonction d'utilité commune aux deux, manifeste de l'aversion au risque il est normal que M. Darcis se sente *plus à l'aise*, car en réalité il supporte moins de risque que M. Cramer tout en ayant la même espérance de richesse finale.

Puisque $E(\tilde{w}_f)$ n'est pas altérée, le décideur riscophobe préfère cette situation. Cette constatation toute simple sera formalisée au chapitre 6 lorsque nous étudierons la notion de *plus grand risque*.

5.2 Hypothèses sur les mesures d'aversion au risque

Les trois mesures d'aversion au risque (A_a, A_r, A_p) que nous avons définies sont, ainsi que nous l'avons montré, imbriquées les unes dans les autres. II ne pourrait en être autrement car la différence entre les concepts ne porte pas sur la nature du risque mais sur la manière dont il se présente à l'individu (additive ou multiplicative). Dans ces conditions, il n'est pas étonnant qu'une hypothèse faite sur le comportement d'une des mesures réduise le choix d'hypothèses plausibles pour le comportement d'une autre mesure. Nous serons attentifs en tout cas à cet aspect des choses. Les hypothèses à formuler vont tourner autour de la question suivante : que deviennent les mesures d'aversion au risque lorsque, *ceteris paribus*, la richesse augmente ? Ce genre de question est soulevé pour des individus qui sont au départ riscophobes ou qui à la limite sont neutres au risque.

5.2.1 Degré d'aversion absolue au risque et changement de richesse

Bien avant que la version moderne de la théorie du risque ait eu l'occasion de se répandre, il existait dans le monde des affaires une idée établie suivant laquelle plus une firme avait de fonds propres mieux elle pouvait affronter un risque donné. De façon un peu plus précise, on disait que l'accroissement de leur richesse permettait à des entreprises de devenir «leur propre assureur». Ceci signifie que la prime de risque de tout risque additif devrait être une fonction décroissante de la richesse, si on souhaite qu'un individu plus riche augmente sa propension à conserver ce risque. En termes techniques, cette idée intuitive se traduit par l'hypothèse 1 ($H1$).

H1. *Si sa richesse augmente, un décideur redoute moins (ou en tout cas pas davantage) une loterie additive inchangée c-à-d :* $\frac{dA_a}{dw_0} \leq 0$.

Cette hypothèse nous indique bien que A_a - et, donc, la prime de risque de tout risque additif donné - est une fonction décroissante de la richesse. Si on se réfère à la notion de tolérance au risque, T_a, on dira que plus un décideur est riche, mieux il peut supporter un risque additif donné.

5.2.2 Degré d'aversion relative au risque et changement de richesse

Posons-nous maintenant la même question mais en remplaçant le risque additif par le risque multiplicatif : étant donné un risque multiplicatif $\tilde{y}$, un accroissement de la richesse initiale va-t-il réduire la propension d'un individu à vendre ce risque ? Ceci revient à examiner comment A_r réagit à une variation de w_0, comme il ressort de la formule de Arrow-Pratt liant π''

et A_r. Avant tout, il est intéressant de se rappeler la relation unissant les aversions absolue et relative au risque

$$A_r(w_0) = w_0 A_a(w_0)$$

Où nous faisons apparaître la dépendance de chacun des des coefficients vis-à-vis de w_0. En dérivant cette expression par rapport à w_0, on trouve :

$$\frac{A_r(w_0)}{dw_0} = A_a + w_0 \frac{dA_a(w_0)}{dw_0}$$

Comme A_a est non négatif, il apparaît immédiatement que si jamais A_a était croissante en w_0, A_r le serait automatiquement. Une aversion absolue qui serait croissante n'est pas compatible avec une aversion relative décroissante.

A_r décroissant n'est pas plus compatible avec A_a constante. Le cas le plus intéressant et sans doute le plus vraisemblable (en accord avec $H1$) est celui où A_a décroît avec la richesse. A ce moment là, nous ne pouvons pas inférer de façon triviale le signe de dA_r/dw_0.

Une tradition en théorie du risque nous pousse à opter pour une dérivée non négative, ce que recouvre l'hypothèse (**H2**).

H2. *Si sa richesse augmente, l'aversion au risque ne décroît pas c-à-d* : $\frac{dA_r}{dw_0} \geq 0$.

Puisque π'' et A_r sont proportionnels pour de petits risques, l'hypothèse **H2** est équivalente à $d\pi''/dw_0 \geq 0$ pour toute loterie $\tilde{y}$.

Il s'agit de bien comprendre la nature de cette hypothèse. Lorsque dans une loterie multiplicative, w_o augmente, deux effets sont mis en action :

1) Parce que w_0 augmente l'individu se sent plus riche et si le risque restait constant son aversion au risque devrait diminuer en vertu de **H1**. C'est le

premier effet.

2) Toutefois, comme la loterie est multiplicative, l'accroissement de w_0 entraîne un plus grand risque dans la richesse finale car $\sigma^2(\tilde{w}_f) = \sigma^2(\tilde{y})w_0^2$ et ceci tend à développer l'aversion vis-à-vis du risque $\tilde{y}$.

En faisant l'hypothèse **H2**, nous supposons en réalité que le second effet (l'effet «risque») n'est jamais dominé par le premier (l'effet «richesse »). On peut admettre plus aisément l'hypothèse d'une aversion relative croissante en w_0 en considérant que lorsque w_0 croît dans une loterie multiplicative, $\sigma^2(\tilde{w}_f)$ augmente beaucoup plus vite (au carré, comme on l'a vu plus haut) et donc l'effet risque devient rapidement très important. Par ailleurs, en vertu de l'interprétation fondée sur les deux effets que nous venons de décrire, supposer que A_r est constant en w_0 revient à admettre que l'effet risque contrebalance exactement l'effet richesse.

5.3 Fonctions d'utilité usuelles

Toute fonction d'utilité croissante et concave indique un comportement d'aversion au risque. Cependant on aimerait bien qu'en outre une fonction d'utilité respecte dans son comportement des hypothèses à priori raisonnables telles que celles évoquées précédemment. C'est pourquoi nous passons en revue différentes fonctions d'utilité couramment employées en théorie du risque et nous les soumettons à différents critères d'évaluation.

5.3.1 La fonction d'utilité quadratique

Il s'agit d'une fonction d'utilité très populaire car tout en étant de manipulation simple elle fournit une bonne intuition de certains résultats spécifiques en théorie financière. Malheureusement elle est caractérisée par une propriété peu désirable comme nous allons le voir. La fonction d'utilité quadratique s'écrit :

$$u = w_f - \beta w_f^2$$

De sorte que $u' = 1 - \beta w_f$ et $u'' = -2\beta$

Pour que u soit concave il faut et il suffit que le coefficient β soit strictement positif. Remarquons que pour rendre la fonction u partout croissante en w_f il faut que β ne soit pas trop grand. Compte tenu de la plus grande valeur possible de w_f (soit w_M) il faut que $1-2\beta w_M$ soit positif si on souhaite que u' soit positif dans tout son domaine de définition. Cela implique en fait que le coefficient β soit inférieur à $1/(2w_M)$.

Si c'est le cas, on obtient : $A_a(w_f) = \frac{2\beta}{1-2\beta w_f} > 0$.

On voit alors que l'aversion absolue augmente avec le niveau de richesse. Ce résultat est en totale contradiction avec l'hypothèse **H1** qui semble pourtant si raisonnable. En fait, accepter la fonction d'utilité quadratique revient à supposer que plus l'individu est riche plus il redoute une loterie additive donnée. Puisque A_a est croissante avec l'utilité quadratique, A_r l'est également et ceci est en parfaite conformité avec **H2**.

Le bilan est donc assez négatif pour cette fonction d'utilité et ceci est d'autant plus regrettable qu'elle peut servir à justifier le critère si intuitif *d'espérance-variance*. En effet, si U est quadratique l'individu apprécie sa situation uniquement sur la base de l'espérance et de la variance de sa richesse finale.

Les performances très moyennes de la fonction d'utilité quadratique vis-à-vis de **H1** d'une part et son association naturelle avec le critère espérance-variance d'autre part ont souvent servi d'argument contre ce dernier. Pour être complet, signalons que ce critère l'évaluation peut trouver des justifications en dehors de l'utilité quadratique.

En conclusion, nous émettons des réserves sur la capacité de l' utilité quadratique à représenter valablement les préférences d'un individu riscophobe. Cependant ceci n'est pas suffisant pour rejeter le modèle espérance-variance en dépit de l'association entre ce dernier et l'utilité quadratique car il peut être validé par d'autres voies.

5.3.2 La fonction d'utilité logarithmique

Nous nous tournons maintenant vers une fonction d'utilité célèbre puisque proposée par Bernoulli lui-même pour résoudre le paradoxe de Saint-Petersbourg, en fait essentiellement pour montrer l'inadéquation du critère d'espérance mathématique de la richesse. On va postuler que la fonction d'utilité s'écrit : $\ln w_f$

Cela implique immédiatement que $w_f > 0$ afin que la fonction soit définie. Ceci signifie que, pour des loteries additives, le plus mauvais résultat possible, x_m doit être tel que $w_0 + x_m > 0$. On suppose donc implicitement que la loterie ne peut jamais faire perdre plus que la richesse initiale. Cette hypothèse est tout à fait raisonnable dans de très nombreux cas mais elle peut néanmoins remise en défaut (de façon de plus en plus fréquente d'ailleurs) dans certains risques industriels lorsqu'on introduit la notion de responsabilité du fait des produits.

Pour cette fonction d'utilité on a : $u' = 1/w_f$ et $u'' = -1/w_f^2$ d'où $A_a = 1/w_f$ qui est bien une fonction décroissante de la richesse ce qui met l'utilité logarithmique en accord avec **H1**. En outre $A_r = 1$ de sorte qu'on est en présence d'une fonction non décroissante dont la dérivée est partout nulle. **H2** est donc aussi satisfaite avec la fonction d'utilité logarithmique.

5.3.3 La fonction puissance

Nous avons déjà utilisé cette fonction sous une forme particulière $u = w_f^{1/2}$. Nous allons la généraliser et écrire :

$$u = sign(\beta)w_f^{\beta}$$

De sorte que $u' = sign(\beta)\beta w_f^{\beta-1}$ et $u'' = sign(\beta)\beta(\beta-1)w_f^{\beta-2}$. On voit que cette fonction d'utilité est croissante mais l'aversion au risque combinée avec la puissance de u limite β au domaine $]-\infty; 1]$. Bien entendu le cas particulier attribué à Cramer est celui où $\beta = 0,5$ et remarquons que $\beta = 1$ entraîne la neutralité au risque.

Les résultats indiqués ci-dessus impliquent que $A_a(w) = (1-\beta)/w$ et $A_r = 1-\beta$. Il est aisé de montrer que la fonction puissance satisfait les hypothèses **H1** et **H2**.

5.3.4 La fonction exponentielle négative

Elle s'écrit :

$$u = -e^{-\beta w_f}$$

Le signe de u n'a aucune signification particulière.

$u' = \beta e^{-\beta w_f}$ et $u'' = \beta^2 e^{-\beta w_f}$ et donc $A_a = \beta$. Nous sommes dès lors, pour la première fois, en présence d'une fonction d'utilité dont le degré d'aversion absolue au risque est constant, **H1** et **H2** sont alors respectées.

Néanmoins, comme l'aversion relative au risque croît sans limite avec w, il peut se faire que pour des niveaux élevés de w_f, π' excède l'unité ce qui signifie que. l'individu est prêt à abandonner avec certitude plus de 100 % de sa richesse plutôt que de faire face a une loterie multiplicative actuariellement neutre. Comme, une telle situation est difficilement imaginable en pratique, on perçoit la une faiblesse de la fonction exponentielle puisque dans certains cas elle peut générer cet état de choses anormal.

? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

5.4 Extension - Prix d'achat et prix de vente d'une loterie

Nous avons évoqué rapidement la différence entre ces deux notions et abordons ce thème plus en détail.

Lorsqu'on évoque le prix de vente d'une loterie (p_v) pour un individu cela suppose qu'initialement le décideur possède la loterie et qu'il envisage de s'en débarrasser. On fait donc un passage de l'incertitude vers la certitude lorsqu'on calcule un prix de vente. Si, par exemple, $u = w_f^{1/2}$ avec $w_0 = 5$ et une loterie $\tilde{x}$ caractérisée par :

x	$p(x)$
-4	$1/4$
4	$3/4$

Le prix de vente est solution de :

$$(5 + p_v)^{1/2} = \frac{1}{4}(1) + \frac{3}{4}(3) = 2,5$$

De sorte que $p_v = 1,25$, entraînant une prime de risque égale à $0,75$ car $E(\tilde{x}) = 2$.

Si on veut parler de prix d'achat, il faut se mettre dans une situation où au départ on ne possède pas la loterie (certitude). On envisage d'acquérir la loterie et de payer à cet effet un prix, p_a, qui sera déboursé en tout état de cause indépendamment de la réalisation de $\tilde{x}$. Le prix d'achat implique le cheminement de la certitude vers l'incertitude et ici, il est solution de :

$$\sqrt{5} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - p_a} + \frac{3}{4}\sqrt{9 - p_a}$$

Le membre de gauche représente l'appréciation par le décideur de sa situation initiale certaine. Le membre de droite est une espérance d'utilité pour une richesse finale comprenant en *recette* w_0 et $\tilde{x}$ et en *dépense* la charge de p_a qui doit être supportée indépendamment du résultat de $\tilde{x}$.

Montrons pour débuter qu'en général le prix de vente n'est pas égal au prix d'achat. S'il l'était on devrait pouvoir injecter $p_a = p_v = 1,25$ dans la formule et vérifier l'égalité. Or cela est tout à fait impossible puisqu'on serait amené à prendre le radical d'un nombre négatif $(-0,25)$ et il est évident que p_a ne peut excéder la valeur de 1.

Si on opte pour $p_a = 1$, on se trouve devant la formule : $\sqrt{5} = 2,23607 > \frac{1}{4}\sqrt{0} + \frac{3}{4}\sqrt{8} = 2,12132$.

Une procédure de tâtonnement permet de trouver que $p_a = 0,8541$. On constate ainsi qu'avec la fonction d'utilité puissance, dont l'aversion absolue au risque est décroissante, on a - pour la loterie considérée - la relation suivante :

$$0 < p_a < p_v$$

Etudions maintenant, vis-à-vis de la même loterie l'attitude d'un décideur caractérisé par une fonction d'utilité exponentielle négative. On trouve respectivement :

$$-e^{-\gamma(5+p_v)} = -\frac{1}{4}e^{-\gamma} - \frac{3}{4}e^{-\gamma(9)}$$

Pour définir p_v et :

$$-e^{-\gamma(5)} = -\frac{1}{4}e^{-\gamma(1-p_a)} - \frac{3}{4}e^{-\gamma(9-p_a)}$$

Pour déterminer p_a.

En utilisant la propriété bien connue $e^{a+b} = e^a e^b$, et en procédant à quelques simplifications évidentes, on peut réécrire ces deux équations comme suit :

$$e^{-5\gamma}e^{-\gamma p_v} = -\frac{1}{4}e^{-\gamma} - \frac{3}{4}e^{-9\gamma}$$

$$-e^{-5\gamma} = e^{\gamma p_a}[\frac{1}{4}e^{-\gamma} + \frac{3}{4}e^{-9\gamma}]$$

Et il résulte, en multipliant la première d'entre elles à gauche et à droite par $e^{\gamma - p_v}$ et en comparant ensuite avec la seconde, que nécessairement $e^{\gamma p_a} = e^{\gamma p_v}$ ce qui entraîne $p_a = p_v$. On a bien avec une utilité exponentielle, caractérisée par une aversion absolue au risque constante : $p_a = p_v$.

Les deux exemples que nous venons de traiter suggèrent que la relation entre le prix d'achat et le prix de vente d'une même loterie est guidée par le comportement de l'aversion absolue au risque. Cette conclusion résultant des exemples peut être généralisée dans la proposition suivante.

Proposition 6. *Si l'aversion absolue au risque est strictement décroissante, on a :*

$$0 < p_a < p_v \ ou \ 0 > p_a > p_v$$

Si l'aversion absolue est strictement croissante, on a alors :

$$0 < p_v < p_a \ ou \ 0 > p_v > p_a$$

Si l'aversion au risque est constante, $p_a = p_v$.

Après une démonstration de la première partie du théorème, nous en donnons une justification intuitive.

Nous situant dans le cas où A_a est décroissante, nous prouvons le résultat relatif à $p_v > 0$, c-à-d une situation où la loterie est perçue de façon favorable par le décideur riscophobe. Après la démonstration formelle, nous donnons l'intuition du résultat.

Etape 1 : $p_v > 0$ implique $p_a > 0$. En vertu des définitions habituelles :

$$u(w_0 + p_v(w_0; \tilde{x})) = E[u(w_0 + \tilde{x})]$$

$$u(w_0) = E[u(w_0 + \tilde{x} - p_a(w_0; \tilde{x})]$$

Où les notations $p_v(w_0; \tilde{x})$ et $p_a(w_0; \tilde{x})$ indiquent qu'il s'agit des p_v et p_a obtenus pour un individu disposant de w_0 et d'une loterie $\tilde{x}$ (ou envisageant de l'acheter pour p_a). Si p_v, est positif il résulte de la croissance de u que $u(w_0 + p_v) > u(w_0)$ et donc $E[u(w_0 + \tilde{x})] > E[u(w_0 + \tilde{x} - p_a(w_0; \tilde{x}))]$ et ceci entraine que $p_a(w_a; \tilde{x})$ est aussi positif. Remarquons que pour compléter l'étape l, nous n'avons pas eu recours au comportement de A_a. Celui-ci va jouer un rôle décisif dans l'étape 2.

Etape 2 : Nous allons nous interroger sur le prix de vente de $\tilde{x}$ pour le cas où décideur détiendrait une richesse égale à $w_0 - p_a(w_0; \tilde{x})$. En appliquant à ce cas la définition du prix de vente, nous obtenons :

$$u(w_0 - p_a(w_0; \tilde{x}) + p_v(w_0 - p_a(w_0; \tilde{x}); \tilde{x})) = E[u(w_0 - p_a(w_0; \tilde{x}) + \tilde{x})]$$

En combinant cette formule avec la définition précédente, nous obtenons :

$$p_a(w_0; \tilde{x}) = p_v(w_0 - p_a(w_0; \tilde{x}); \tilde{x}))$$

Comme $p_v > 0$ implique $p_a > 0$, si l'aversion absolue au risque est décroissante, nous avons :

$$p_v(w_0 - p_a(w_0; \tilde{x}); \tilde{x}) < p_v(w_0; \tilde{x})$$

Car plus un individu est riche moins il a peur d'une loterie $\tilde{x}$ donnée et plus il est exigeant pour la vendre. Il en résulte que

$$p_a(w_0; \tilde{x}) < p_v(w_0; \tilde{x})$$

Pour obtenir ce résultat nous avons supposé que p_v était positif et que A_a était décroissante en w.

Tournons-nous maintenant vers l'intuition de cette proposition. En quelque sorte, il permet de mieux saisir la notion d'aversion au risque décroissante. En effet, la proposition nous dit essentiellement ceci : si un individu caractérisé par A_a décroissante et doté de w_0 et de $\tilde{x}$ apprécie favorablement $\tilde{x}$ il exigera plus pour se débarrasser de $\tilde{x}$ qu'il ne serait prêt à investir pour acheter $\tilde{x}$ s'il ne disposait que de w_0. En fait, disposant de $w_0 + \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est apprécié favorablement, l'individu se sent implicitement plus riche que s'il disposait seulement de w_0. Avec A_a décroissante, son aversion au risque, évaluée uniquement en w_0 tout seul, est relativement plus forte qu'en w_0 augmenté d'une loterie favorable et il va donc, partant de w_0, investir moins dans l'achat de loteries favorables ($p_a < p_v$). L'hypothèse d'aversion absolue au risque décroissante revient donc à dire qu'un individu exige une plus grande somme pour vendre une loterie favorable détenue par lui qu'il n'est prêt à investir dans son achat s'il ne la possédait pas.

Chapitre 6

Comparaison de risques (à moyenne constante)

Le chapitre précédent a été orienté vers l'étude d'un ingrédient de la prime de risque : la notion d'aversion au risque. Par souci d'équilibre nous consacrons maintenant un chapitre complet à l'autre élément constitutif de la prime : la quantité de risque.

Pendant très longtemps il a été admis que la variance constituait la mesure du risque. Cette intuition a été en quelque sorte renforcée par la formule d'approximation de Arrow-Pratt d où il résulte que si la variance augmente, toutes choses égales par ailleurs, la prime doit augmenter aussi et - qui plus est - proportionnellement.

Nous devons à M. Rothschild et J. Stiglitz [1970] et [1971], une remise en cause de cette idée bien établie et une proposition de mesure plus solide de la notion de risque.

Il est intéressant de se demander pourquoi on a dû attendre si longtemps avant de remettre en cause la variance comme mesure de risque. Deux raisons principales expliquent cette situation. La première tient au fait que si on part d'une situation certaine et qu'on y introduit le risque, la variance, nulle au départ, devient strictement positive. Inversement si la variance d'un aléa qui est initialement positive devient nulle, l'incertitude initiale est remplacée par la certitude. Dans ce cas particulier, la variance est un bon indicateur de risque car sa présence induit forcément celle du risque et son absence induit aussi celle du risque.

La variance est donc un bon indicateur de la présence de risque. La bonne performance de la variance dans ce cas limite a pu faire croire qu'elle est également un indicateur valable lorsqu'on compare deux situations risquées, c-à-d lorsqu'on analyse des changements «marginaux» de risque. Malheureusement, comme nous allons le voir, ce n'est pas le cas.

Une autre raison de la popularité de la variance comme mesure de risque tient à l'adhésion au modèle espérance-variance comme critère du comportement en incertitude. Dans le cadre particulier de ce modèle, la variance est la mesure de risque puisqu'elle est le seul élément complémentaire à l'espérance dans l'évaluation de la loterie. D'ailleurs le signe de sa dérivée partielle dans la fonction d'évaluation de la loterie indique à lui seul l'attitude face au risque du décideur. De nouveau, comme nous allons le voir, le passage au modèle plus général d'espérance d'utilité fait perdre à la variance une partie de son intérêt. Elle nous ouvre cependant une piste de réflexion que nous allons abondamment exploiter.

Plaçons-nous encore un instant dans le cadre du modèle $E - \sigma^2$ et considérons la comparaison entre deux loteries de même espérance et de variance différente. Il est évident que tous les décideurs riscophobes sont unanimes à préférer la loterie dont la variance est la plus petite. Dans le cadre plus général du modèle d'espérance d'utilité, nous allons rechercher une définition de même nature fondée sur cette unanimité d'appréciation : *entre deux aléas* *qui ont la même espérance l'un est dit "moins risqué" si tous les riscophobes ($u'' < 0$) sont unanimes à le préférer.* Une fois qu'on étend la perspective des critères $E - \sigma^2$ au critère d'espérance d'utilité, il apparaît que la variance n'est plus suffisante pour mesurer le risque.

L'analyse du sujet de ce chapitre est difficile. Aussi allons-nous tenter de concilier un peu de rigueur avec un maximum d'intuition. C'est pourquoi nous fondons notre étude en un premier temps sur un cas particulier, celui d'une variable aléatoire discrète. Ensuite nous indiquons comment les résultats se généralisent à une loi continue.

6.1 Loi discrète, bruit blanc et condition intégrale

Soit donc au départ une loterie $\tilde{x}$ caractérisée comme suit :

x	$p(x)$
-2	$0,09$
4	$0,3$
10	$0,4$
16	$0,21$

Pouvons-nous mettre en évidence des cas de transformation de $\tilde{x}$ qui, tout en maintenant $E(\tilde{x})$ constant, définissent un nouvel aléa plus risqué que $\tilde{x}$?

Une première proposition peut s'énoncer à partir de la notion de bruit blanc qui est familière en statistique. La loterie $\tilde{x}$ contient des résultats potentiels (de -2 à 16) qui si l'un ou l'autre d'entre eux se matérialise deviendra une certitude (un fait accompli) pour le décideur. Imaginons maintenant que, pour au moins un résultat potentiel (éventuellement plusieurs, sinon tous), cette certitude en cas de réalisation d'une valeur de $\tilde{x}$, disparaisse et qu'on y substitue une loterie dont l'espérance mathématique est égale au résultat certain qu'elle remplace. On conçoit alors que la nouvelle distribution obtenue sera plus risquée que celle initialement détenue puisqu'on aura ajouté du bruit à au moins un résultat possible, c-à-d qu'une certitude aura été remplacée par une incertitude.

Si, par exemple dans la distribution de $\tilde{x}$, on remplace la réalisation «4» par l'aléa : "3 avec probabilité 1/2" et "5 avec probabilité 1/2". il est clair qu'on accroît le risque autour du résultat 4 puisque celui-ci est remplacé par un aléa $\tilde{z}$ tel que $E(\tilde{z}) = 4$.

Si on fait de même autour du résultat 16 auquel on substitue une loterie : "12 avec probabilité 1/3" et "18 avec probabilité 2/3". A nouveau, le risque autour de 16 augmente. Ayant accru le risque autour de plusieurs résultats possibles de $\tilde{x}$, une situation globalement plus risquée est créée. Celle-ci se caractérise par une nouvelle loi de probabilité pour un nouvel aléa $\tilde{y}$ qui se présente comme suit :

x	$p(x)$
-2	$0,09$
3	$0,15$
5	$0,15$
10	$0,4$
12	$0,07$
18	$0,14$

Quels liens peut-on établir entre $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$? Remarquons en premier lieu que les deux lois discrètes ont certains résultats communs, de même probabilité. Ce sont les valeurs possibles de $\tilde{x}$ autour desquelles on n'a pas créé de bruit c-à-d $x = -2$ et $x = 10$. En revanche, $x = 4$ dont la probabilité était de

0.3 est remplacé par 3 et 5 qui ont chacun une probabilité égale à $0,15$. De même au résultat $x = 16$ de probabilité $0,21$, on a substitué respectivement 12 et 18 qui reçoivent en tout la probabilité de $0,21$ avec une pondération plus favorable à 18 car si $x = 16$ se produit, l'événement $y = 18$ a deux fois plus de chance de survenir que l'événement $y = 12$ (prob 2/3 au lieu de 1/3). Etant donné qu'en plusieurs points $\tilde{y}$ est plus risqué que $\tilde{x}$ et qu'en aucun autre il est moins risqué, dans son ensemble l'aléa $\tilde{y}$ représente un risque plus grand que l'aléa $\tilde{x}$. Cette intuition est d'ailleurs renforcée si on calcule l'espérance d'utilité attachée à $\tilde{x}$ et celle attachée à $\tilde{y}$ avec une utilité strictement croissante et strictement concave qui manifeste donc de l'aversion au risque. Si $\tilde{y}$, qui a la même espérance que $\tilde{x}$, est plus risqué que $\tilde{x}$ on s'attend à ce que tout décideur riscophobe préfère $\tilde{x}$. Nous montrons que c'est bien le cas. On supposera pour simplifier la notation que la richesse initiale est nulle, de sorte que $\tilde{w}_f = \tilde{x}$ ou $\tilde{y}$

$$E[u(\tilde{x})] = 0,09u(-2) + 0,3u(4) + 0,4u(10) + 0,21u(16)$$

$$E[u(\tilde{y})] = 0,09u(-2)+0,3[0,5u((3)+0,5u(5)]+0,4u(10)+0,21[\frac{1}{3}u(12)+\frac{2}{3}u(18)]$$

Ces deux expressions ont des éléments communs qui ne sont pas susceptibles de créer une différence entre elles. Nous devons donc nous concentrer sur les éléments différents. Dans la première égalité, nous rencontrons $0,3u(4)$ et le terme correspondant dans la seconde est $0,3[0,5u(3)+0,5u(5)]$. Il est facile de montrer que l'expression entre crochets est inférieure à $u(4)$ si u est concave. Plutôt que d'illustrer le résultat on peut le démontrer à l'aide de la célèbre inégalité de Jensen. En effet si u est concave nous savons que$u[E(\tilde{z})] \geq E[u(\tilde{z})]$. Or ici $\tilde{z}$ peut prendre les valeurs 3 et 5 avec probabilité 1/2 et donc $E(\tilde{z}) = 4$ de sorte que $u(4)$ excède bien $E[u(\tilde{z})]$. Nous pouvons dès lors affirmer que pour toute fonction d'utilité concave le deuxième membre constitutif de $E[u(\tilde{x})]$ excède le membre correspondant de $E[u(\tilde{y})]$. De la même manière, on montre, à nouveau grâce à l'inégalité de Jensen, que le quatrième membre de $E[u(\tilde{x})]$ est plus grand que le membre correspondant de $E[u(\tilde{y})]$.

Si nous rassemblons les différents résultats nous remarquons que chaque membre dans $E[u(\tilde{x})]$ est soit égal soit supérieur au terme correspondant dans $E[u(\tilde{y})]$. Donc, pour toute fonction d'utilité concave, $\tilde{x}$ est préféré à $\tilde{y}$ et puisque les deux aléas ont même espérance cela nous confirme que $\tilde{x}$ est moins risqué que $\tilde{y}$ car il y a unanimité de tous les riscophobes en faveur de $\tilde{x}$.

Avant de généraliser ce résultat, cela vaut la peine de montrer que la notion de «plus grand risque», résultant de l'ajout d'un bruit blanc à au moins une des observations de $\tilde{x}$, a une traduction en termes de fonction de répartition.

Si on reporte sur un graphique les fonctions de distribution des deux variables aléatoires, on observe qu'elles ont de nombreuses sections communes la ou elles se recouvrent comme, c'est le cas pour tout t inférieur à 3. Pour $3 < t < 4$, la fonction de répartition de $\tilde{y}$ se trouve au-dessus de celle de $\tilde{x}$ et une fois rendu à $t = 4$, on a « accumulé» au-dessus de la fonction de répartition en gras associée à $\tilde{x}$ une surface égale à celle du rectangle abcd. Entre $t = 4$ et $t = 5$, l'avantage acquis est progressivement reconquis. Ceci se manifeste par l'égalité des rectangle abcd d'une part et defg d'autre part. Notons que si en $t = 5$, les surfaces sous les fonctions de répartition depuis $-\infty$ jusqu'à $t = 5$ sont égales, à aucun moment la surface sous F n'a été plus grande que celle sous G. De $t = 5$ à $t = 12$, l'égalité entre les surfaces sous les courbes de répartition perdure car les deux courbes coïncident à nouveau. Le même phénomène, se reproduit entre 12 et 18.

On peut s'interroger sur le pourquoi de cette comparaison de surfaces sous des lois de répartition. En fait, c'est parce que nous sommes en train d'exposer à l'aide de ces calculs une autre méthode de comparaison de niveau de risque connue sous le nom de *condition intégrale*. Ce terme un peu étrange à première vue s'explique si on se rappelle qu'une intégrale n'est jamais qu'une surface sous une courbe, en l'occurrence ici une fonction de répartition. Puisque la surface sous G accumulée depuis a (c-à-d -2) jusqu'à un certain point - appelons-le s - est toujours au moins égale à la surface sous F de a jusqu'au même point s, la condition intégrale s'écrit :

$$\int_a^s G(t)dt \geq \int_a^s F(t)dt \quad \text{pour tout } s \geq b$$

Lorsque $s = b$, on a nécessairement :

$$\int_a^b G(t)dt = \int_a^b F(t)dt$$

Cette égalité résulte du fait que $E(\tilde{x}) = E(\tilde{y})$ et on le démontre à l'aide de la technique d'intégratlon par parties.

Avant de formaliser les résultats pour une loi continue, nous ferons un exercice dont l'objectif est d'illustrer le fait que la notion de « plus risqué» est transitive. Supposons que l'aléa $\tilde{x}$ se caractérise comme suit :

x	$p(x)$
3	1/3
9	2/3

Ajoutons du bruit à chacun des résultats possibles pour générer $\tilde{y}$, par exemple :

y	$p(y)$
1	1/6
5	1/6
8	1/3
10	1/3

Créons enfin du bruit autour de certains résultats de $\tilde{y}$ pour définir $\tilde{z}$:

y	$p(y)$
1	1/6
4	1/12
6	1/12
7	1/6
9	1/6
10	1/3

Si on trace trois graphiques de lois cumulées avec comparaison dans chacun d'eux d'une paire d'aléas, il sera alors aisé de vérifier que dans chacun de ces graphiques « les conditions intégrales» sont satisfaites et que $\tilde{z}$ est plus risqué que $\tilde{y}$, lui même plus risqué que $\tilde{x}$ et $\tilde{z}$ plus risqué que $\tilde{x}$.

On pourra aussi vérifier ce résultat avec toute fonction de Bernoulli u strictement concave ($\sqrt{}$, ln, $-e^{-\beta w}$ ...).

6.2 Généralisation à une loi continue

Si $\tilde{x}$ est continu dans l'intervalle $[a; b]$ et si à certaines réalisations de $\tilde{x}$ on ajoute un bruit blanc $\tilde{\varepsilon}$ tel que $E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{x} = x] = 0$ pour tout $\tilde{x}$ auquel le bruit blanc est ajouté on génère un nouvel aléa $\tilde{y}$. Ce nouvel aléa $\tilde{y}$ a deux propriétés.

$E(\tilde{y}) = E(\tilde{x})$ à cause de la définition du bruit blanc.

$\tilde{y}$ est plus risqué que $\tilde{x}$

Ce résultat, conforme à l'intuition, peut-être confirmé en montrant que tous les décideurs riscophobes sont unanimes à préférer $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$. On démarre avec l'inégalité de Jensen, pour tout x.

$$E_\varepsilon[U(x + \tilde{\varepsilon})] \leq U(x)$$

Puisque $E(\tilde{\varepsilon}) = 0$ et que u est concave. La notation E_ε indique que l'espérance se fait par rapport à l'aléa $\tilde{\varepsilon}$. Cette inégalité étant valable pour tout x, elle vaut aussi pour l'ensemble des x et donc :

$$E_x[E_\varepsilon[U(\tilde{x} + \tilde{\varepsilon}]] \leq E_x[U(\tilde{x})]$$

Appliquant maintenant une propriété des espérances conditionnelles, on obtient :

$$E[U(\tilde{x} + \tilde{\varepsilon}] \leq E[U(\tilde{x})]$$

ou par définition de $\tilde{y}$:

$$E[U(\tilde{y})] \leq E[U(\tilde{x})]$$

Si on résume ce qui a été fait jusqu'ici, on peut considérer que trois définitions d'un plus grand risque - toutes trois conformes à l'intuition - sont compatibles entre elles :

– Si tous les agents riscophobes préfèrent $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$ alors que le rendement attendu des deux loteries est identique ($E(\tilde{x}) = E(\tilde{y})$), une telle situation ne peut se produire que si $\tilde{x}$ est moins risquée que $\tilde{y}$.

– Si traçant les fonctions de répartition de $\tilde{x}$ et de $\tilde{y}$, la surface accumulée sous $\tilde{y}$ n'est jamais inférieure à celle accumulée sous $\tilde{x}$ et si, au point extrême de $\tilde{y}$, les surfaces accumulées sont égales, $\tilde{y}$ est plus risqué que $\tilde{x}$ (alors que les espérances sont identiques).
– Si $\tilde{y}$ est obtenue de $\tilde{x}$ à partir de l'addition d'un bruit blanc à au moins une réalisation de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ est plus risqué que $\tilde{x}$ (alors que les deux aléas ont même espérance).

DS2

6.3 Et la variance ?

Après avoir décrit des approches modernes de la notion de *plus grand risque*, revenons sur celle de la variance qui, historiquement, l'a précédée. On peut en fait résumer la situation par deux énoncés.

1- Un plus grand risque tel que défini précédemment implique nécessairement une plus grande variance. Pour s'en convaincre il suffit d'utiliser l'approche du bruit blanc. Puisque $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$ et que $E(\tilde{\varepsilon}|\tilde{x} = x) = 0$ pour tout x, la covariance entre $\tilde{\varepsilon}$ et $\tilde{x}$ est nulle et donc :

$$Var(\tilde{y}) = Var(\tilde{x}) + Var(\tilde{\varepsilon})$$

Donc $Var(\tilde{y}) > Var(\tilde{x})$

2- Une plus grande variance n'implique pas nécessairement un plus grand risque. Pour qu'un accroissement de variance implique toujours un accroissement de risque, Il faut que la dérivée d'ordre trois de la fonction d'utilité soit nulle (de sorte que toues celles d'ordre supérieur le sont également). On le voit en comparant deux loteries de même espérance (disons nuIle) pour un individu riscophobe doté d'une richesse sûre w_0 et en utilisant pour chaque loterie l'expansion jusqu'au second degré :

$$E[U(w_0 + \tilde{x})] = U(w_0) + \frac{Var(\tilde{x})}{2} U''(w_0)$$

$$E[U(w_0 + \tilde{y})] = U(w_0) + \frac{Var(\tilde{y})}{2} U''(w_0)$$

Puisque les dérivées d'ordre égal ou supérieur à trois sont nulles ces formules sont exactes et on voit immédiatement à cause de la négativité de U'' que : $Var(\tilde{x}) < Var(\tilde{y})$ si et seulement si $E[U(w_0+\tilde{x})] > E[U(w_0+\tilde{y})]$ où le membre de droite correspond à la notion générale de comparaison de risque.

Nous reprenons en fait ici sous une forme un peu plus élégante un résultat énoncé précédemment. La variance est un indicateur parfait de risque lorsqu'on compare des individus caractérisés par des utilités quadratiques. Pour celles-ci, en effet, la dérivée d'ordre 3 et toutes les suivantes sont nulles.

Lorsque la dérivée d'ordre 3 (et/ou les suivantes) ne s'annulent pas, l'expansion des formules contient des moments plus élevés que celui d'ordre 2. Dès lors, une connaissance du signe de $Var(\tilde{x}) - Var(\tilde{y})$ n'est plus suffisante pour déterminer celui de $E[U(w_0 + \tilde{x})] - E[U(w_0 + \tilde{y})]$. L'exemple suivant l'illustre (CF Ingersoll Jr (1987)) :

x	$p(x)$	y	$p(y)$
0	$0,5$	1	$7/8$
4	$0,5$	9	$1/8$

Ces deux loteries ont même espérance et $Var(\tilde{y}) > Var(\tilde{x})$. Néanmoins avec $u = \sqrt{}$, il est très aisé de montrer que $E[U(w_0+\tilde{y})]$ excède $E[U(w_0+\tilde{x})]$ (avec $w_0 = 0$).

Ce simple exemple montre ainsi qu'une variance plus élevée n'est pas une indication de risque supérieur.

6.4 La dominance stochastique d'ordre 1

La dominance stochastique est une notion importante non seulement en théorie du risque mais aussi généralement en analyse économique car elle est en rapport étroit avec les mesures d'efficience relative en théorie de la production. Un peu comme Monsieur Jourdain faisait de la prose, nous avons implicitement abordé des questions de dominance stochastique sans le dire.

La question posée en dominance stochastique d'ordre 1 est la suivante : si on se trouve en présence de deux loteries quelconques n'ayant pas nécessairement la même espérance mathématique, dans quel cas peut-on dire que tous les décideurs caractérisés par $u' > 0$ seront unanimes à préférer une des deux loteries ? Remarquons nous permettons maintenant à u'' d'être positive (individu riscophile).

Pour introduire la notion précise, considérons trois loteries $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ définies comme suit :

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z)$
6	$0,2$	6	$0,1$	7	$0,2$
10	$0,5$	10	$0,4$	13	$0,5$
14	$0,3$	14	$0,5$	16	$0,3$

Si nous comparons $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ qui mettent en jeu les mêmes sommes nous remarquons que $\tilde{y}$ est est obtenue de $\tilde{x}$ en enlevant une part de la probabilité attachée aux résultats relativement moins bons de $\tilde{x}$ (6 et 10) et en la transférant vers le meilleur résultat (14) qui devient ainsi plus probable au sein de la loterie $\tilde{y}$. On devine que tout décideur préférant détenir plus d'argent se sent avantagé par le passage de $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$ et on dit donc que $\tilde{y}$ domine $\tilde{x}$ au sens de la dominance stochastique d'ordre 1.

La comparaison entre $\tilde{x}$ et $\tilde{z}$ conduit à des conclusions du même ordre. En passant de $\tilde{x}$ à $\tilde{z}$, on n'a en rien modifié les probabilités mais à chaque résultat possible de $\tilde{x}$ on a ajouté un nombre positif. A nouveau, toute personne qui préfère plus à moins déclare inévitablement que ce changement améliore son bien-être.

Si on fait un graphique, on remarque que pour tout t, on trouve $F(t) \geq G(t)$ et $F(t) \geq H(t)$ avec F, G et H, fonction de distribution de $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$.

Nous venons d'illustrer la notion tout à fait générale de dominance stochastique d'ordre 1 qui est énoncée dans la proposition suivante.

Proposition 7. *Tous les décideurs qui ont une fonction d'utilité croissante sont unanimes à préférer $\tilde{y}$ à $\tilde{x}$ si pour tout t dans l'intervalle de variation de $\tilde{y}$et $\tilde{x}$, $F(t) \geq G(t)$ avec le signe d'inégalité strict pour au moins un valeur de t et où F et G sont les fonctions de distribution respectivement de $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$.*

Nous allons bientôt démontrer cette proposition. Indiquons encore une fois au préalable tout le bon sens qui la caractérise. si $F(t) \geq G(t)$ est vrai, on peut écrire : $1 - F(t) \leq 1 - G(t)$ ou $P(\tilde{x} > t) \leq P(\tilde{y} > t)$.

Ceci signifie que pour l'aléa $\tilde{y}$, la probabilité de dépasser n'importe quel résultat est meilleure qu'avec l'aléa $\tilde{x}$. On comprend alors que tout individu caractérisé par $u' > 0$ va préférer $\tilde{y}$ qui majore ses chances de bons résultats.

La preuve de la proposition se fait en deux étapes.

Première étape On montre que si $F(t) \geq G(t)$ alors pour toute fonction d'utilité u telle que $u' > 0$ $\tilde{y}$ est préféré à $\tilde{x}$ par le critère d'espérance d'utilité.

Pour que $\tilde{y}$ soit préférée à $\tilde{x}$ par ce critère, il faut que :

$$Eu(\tilde{y}) > Eu(\tilde{y})$$

Ceci est équivalent à

$$\int_a^b u(t)[g(t) - f(t)]dt$$

En intégrant par parties, cela se réécrit :

$$u(t)[G(t) - F(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)[G(t) - F(t)]dt > 0$$

Etant donné que $G(b) = F(b) = 1$ et que $G(a) = F(a) = 0$, il est évident que cette formule est positive si, pour tout t, $F(t)$ est au moins égale à $G(t)$ avec une inégalité stricte pour au moins une valeur de t.

Deuxième étape On montre que si tous les individus qui ont une fonction d'utilité croissante préfèrent $\tilde{y}$ à $\tilde{x}$, on obtient alors que $F(t) - G(t) > 0$ pour tout t.

La démonstration se fait par l'absurde en montrant que, si par moment $F(t) < G(t)$, il est possible de trouver quelques individus dont la fonction d'utilité est croissante et qui préfèrent $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$ rompant ainsi l'unanimité requise pour la dominance stochastique d'ordre 1. Pour créer les contre-exemples il suffit de choisir une fonction d'utilité qui est partout modérément croissante (u' faible) sauf dans l'intervalle où $G(t)$ excède $F(t)$ et où u' prend une très grande valeur. Dans ces conditions, il est clair que $E[U(\tilde{y})]$ peut devenir inférieur à $E[U(\tilde{x})]$.

Il est important de signaler que beaucoup de distributions ne peuvent pas être comparées par le critère de dominance stochastique d'ordre 1. Il en est ainsi pour $\tilde{y}$ et $\tilde{z}$ (on peut aussi tracer la courbe de distribution de ces deux loteries).

On peut ainsi montrer que la dominance stochastique d'ordre 1 d'une loterie par une autre implique que cette seconde ait une espérance plus élevée. La réciproque, en revanche, n'est pas vérifiée (évidemment) ...

Avant de clore cette section consacrée à la dominance stochastique d'ordre 1, signalons qu'on rencontre également dans la littérature les concepts de dominance d'ordre 2 et d'ordre 3. Nous ne les discutons pas car nous n'avons besoin en fait que d'un cas particulier de dominance stochastique d'ordre 2 qui a déjà été évoqué : celui défini par les accroissements de risque à moyenne constante. Ceux-ci sont en réalité des cas de dominance stochastique d'ordre 2 limités à des lois de probabilité de même espérance.

Chapitre 7

Décisions d'investissement en univers risqué

Après avoir considéré différents éléments de représentation de la relation au risque des individus et des outils pour évaluer, comparer et mesurer cette relation au risque, nous allons nous intéresser à deux types de décision face au risque assez proche : le choix entre un actif risqué et un actif sans risque et le choix de la couverture d'assurance face à un risque sur son patrimoine. Après avoir exposé un modèle simplifié de choix d'investissement dans un actif risqué, nous ferons un exercice de statique comparative en examinant comment les variations des différents paramètres du modèle (aversion au risque, rendements ...) affectent le choix d'investissement. Nous montrerons par la suite en quoi le choix du niveau d'assurance peut être identifié à celui de la constitution de portefeuille.

7.1 Un modèle simple de choix d'actif risqué

7.1.1 Le cadre

Nous considérons un décideur disposant d'une somme d'argent disponible, w_0, souhaitant la placer en vue d'une échéance clairement définie. Comme précédemment, nous supposerons que ce décideur a une approche conséquentialiste et ne se soucie que de l'argent dont il disposera à l'échéance.

Cette agent fait face à un choix limité. Il peut investir son argent dans deux investissements mutuellement exclusifs : un placement sûr ayant un taux de rendement certain i (connu de l'investisseur) et un placement risqué (celui-ci peut être constitué de différents élément : pierre, obligation, actions ...). Le taux de rendement de ce placement est caractérisé par une loterie $\tilde{x}$ distribuée suivant une densité f parfaitement connue de l'investisseur (avec $E(\tilde{x}) = \mu$).

On désigne par m le montant investi dans l'actif sans risque et a le montant dans l'actif risqué. On supposera que $i \geq 0$ si bien que nous pouvons imposer que $m + a = w_0$.

De ce fait, on pourra résumer le choix de l'investisseur à celui de a la quantité d'argent investit dans l'actif risqué et en déduire $m = w_0 - a$.

Dès lors, la richesse finale de l'agent peut s'écrire de la façon suivante :

$$\tilde{w}_f = (1 + i)(w_0 - a) + (1 + \tilde{x})a$$

Avec un peu de réécriture, on peut aussi alors l'écrire :

$$\tilde{w}_f = (1 + i)w_0 + (\tilde{x} - i)a$$

Cette expression s'interprète de la façon suivante. Le premier terme est ce qu'on obtient en choisissant uniquement le placement sûr. Le deuxième terme mesure le "surplus" de rendement qui résulte d'un placement risqué, $a > 0$, l'excédent du rendement brut du placement risqué moins le coût d'opportunité des fonds ia. Il apparait ainsi clairement qu'on ne peut parler de gain lié au choix du placement risqué que si la réalisation x est supérieure à i.

On remarque que, dans ce modèle, le risque est une choix endogène du décideur puisqu'il a toujours la possibilité de choisir $a = 0$ et de faire ainsi disparaître le risque. On peut aussi imposer, si on le souhaite, quelques contraintes sur a : $a \geq 0$ signifie qu'il n'est pas possible de vendre de l'actif risqué à découvert ; $a \leq w_0$ signifie que le décideur n'a pas accès au marché du crédit (au taux i) pour acheter de l'actif risqué.

7.1.2 Résolution du modèle dans le cadre d'espérance d'utilité

Le décideur choisit le niveau de a qui maximise son espérance d'utilité (en se situant bien entendu ex ante, avant que l'aléa se réalise et le rendement dévoilé). On suppose que les préférences du décideur face au risque respectent les 4 axiomes (complétude, transitivité, continuité et indépendance) et peuvent être représentées par une fonction d'utilité vNM U avec fonction de Bernoulli associée u. On supposera, a minima, que $u' > 0$.

Le programme du décideur peut alors s'écrire :

$$\max_a E[u((1+i)w_0 + (\tilde{x} - i)a)]$$

La condition de premier ordre s'écrit alors sous la forme :

$$E[(\tilde{x}-i)u'((1+i)w_0+(\tilde{x}-i)a^*)]=0$$

Et la condition de second ordre :

$$E[(\tilde{x}-i)^2u''((1+i)w_0+(\tilde{x}-i)a^*)]<0$$

On observe que dans le cas où l'agent est averse au risque strictement la condition de second ordre est satisfaite puisque u strictement concave et donc $u''<0$. De plus u' étant strictement décroissante la condition du premier ordre ne peut être satisfaite qu'en un point. Ainsi, pour un agent strictement averse au risque, la condition de premier ordre définit l'unique solution. Malheureusement la valeur de a ne peut pas être évaluée explicitement dans le cas général. La condition de premier ordre le définit comme une fonction implicite des variables de notre modèle. a^* est une fonction de w_0, i, u, f.

Avant d'aller plus loin dans l'analyse du cas du décideur averse au risque strictement, considérons le cas de l'individu neutre au risque. Dans son cas, u' est une constante strictement positive. Par conséquent, la condition du premier ordre ne peut être satisfaite que si $E[\tilde{x}-i]=0$ équivalent à $\mu=i$, le rendement espéré de l'actif risqué est égal à celui de l'actif certain. La condition du second ordre n'est jamais satisfaite strictement puisque $u''(t)=0$ pour tout t. Ainsi si $\mu<i$, le rendement espéré de l'actif risqué est strictement inférieur à celui de l'actif sans risque, un décideur neutre au risque choisira le a le plus faible possible, 0 si les ventes découverts sont interdites et si les ventes à découvert sont permises il vendra de l'actif risqué jusqu'au niveau de la limite permise. Symétriquement, si $\mu>i$, le rendement espéré de l'actif risqué est strictement supérieur à celui de l'actif sans risque, un décideur neutre au risque choisira le a le plus élevé possible, w_0 s'il ne peut pas emprunter et s'il peut emprunter au taux du placement sans risque, i, il empruntera pour investir dans l'actif risqué jusqu'au niveau de la limite permise. Si $\mu = i$, le décideur est indifférent entre tous les niveaux de a.

Revenons au cas du décideur averse au risque. Faute de pouvoir trouver la valeur exacte de a^*, nous pouvons établir son signe, nous pouvons ainsi établir si le décideur investit dans l'actif risqué ou le vend à découvert pour acheter de l'actif sans risque (remarquons que ceci constitue aussi un placement risqué). Pour déterminer le signe de a^*, il suffit de déterminer si l'espérance d'utilité du décideur est croissante ou décroissante en $a = 0$. En effet si l'espérance d'utilité y est strictement croissante en a, a^* sera nécessairement strictement positive et réciproquement si l'espérance d'utilité y est strictement décroissante en a, a^* sera nécessairement strictement négative.

Il suffit donc de connaître le signe de $E[(\tilde{x} - i)u'((1 + i)w_0)]$ pour déterminer celui de a^*. On remarquera $u'((1 + i)w_0)$ est une constante. Ceci nous laisse avec le signe de $E[\tilde{x} - i]$ ou $\mu - i$. Ainsi, nous avons établi que si $\mu > i$ c-à-d lorsque l'actif risqué a un rendement espéré supérieur à celui de l'actif certain $a^* > 0$ (et réciproquement si $\mu < i$ c-à-d lorsque l'actif risqué a un rendement espéré inférieur à celui de l'actif certain $a^* < 0$).

Ainsi même si le décideur est extrêmement averse au risque, même si l'actif risqué est *très risqué*, une quantité strictement positive d'actif risqué sera achetée à condition que celui-ci est un rendement espéré strictement supérieur à celui de l'actif sans risque.

Ce résultat peut paraître étonnant. On peut l'éclairer par quelques observations. Premièrement, le choix d'un a négatif n'est pas un choix plus *sûr* que celui d'un a positif. En effet, avec un a négatif le rendement du portefeuille du décideur est aussi aléatoire puisque l'argent ainsi placé lui rapporte $i - \tilde{x}$.

L'absence de risque est donc caractérisée par $a = 0$ et non $a \leq 0$. Penser qu'un décideur averse au risque choisirait nécessairement un a négatif est donc erroné.

De plus, notre étude précédente des questions liées au risque nous indique que l'aversion au risque n'implique pas nécessairement le rejet toute loterie risquée, celle-ci ne sera refusée que si sa prime de risque est supérieure à son espérance. Plus a est faible plus le risque qui lui est associé devient négligeable alors que, dans le cas $\mu > i$, la différence de rendement espéré entre l'actif risqué et l'actif sans risque demeure constante. Dès lors, il existera toujours un a suffisamment faible pour que les deux éléments se *compensent* exactement.

Le résultat est néanmoins saisissant même si $\mu - i$ est très faiblement positif, une quantité strictement positive de l'actif sera achetée.

7.2 Statique comparative de la décision d'investissement

L'exercice de la statique comparative consiste à étudier comment un des paramètres expliqués par le modèle, ici a^*, varie en fonction des paramètres exogènes de celui-ci. Nous étudierons les effets d'un changement de l'aversion au risque, du niveau de la richesse et des rendements des actifs considérés. Nous considérons dans toute cette section que $\mu > i$ et que le décideur est strictement averse au risque.

7.2.1 Effet d'une variation de l'aversion au risque

Nous allons montrer que si on considère un investisseur strictement plus averse, il choisira un a^* strictement plus faible.

Soit les agents 1 et 2 faisant face au choix de portefeuille que nous avons présenté caractérisés par les fonctions de Bernoulli u_1 et u_2 avec $u_2 = \phi(u_1)$, ϕ étant une fonction concave. On dira que l'agent 2 est plus averse au risque que l'agent 1. Ceci peut se vérifier en observant les coefficients d'aversion absolu au risque des deux agents.

On a $u_2' = \phi'(u_1)u_1'$ et $u_2'' = \phi''(u_1)u_1'u_1 + \phi'(u_1)u_1''$ d'où on déduit que

$$A_a^2 = \frac{-u_2''}{u_2'} = \frac{-\phi''(u_1)}{\phi'(u_1)}u_1' - \frac{-u_1''}{u_1'} = \frac{-\phi''(u_1)}{\phi'(u_1)}u_1 + A_a^1$$

D'où on déduit que le coefficient d'aversion absolue au risque de l'agent 2 est toujours supérieur à celui de l'agent 1 quel que soit le niveau de richesse considéré. On peut alors parler d'aversion au risque plus élevée.

Nous pouvons maintenant reprendre la condition du premier ordre qui détermine a_2^* :

$$E[(\tilde{x} - i)u_2'((1 + i)w_0 + (\tilde{x} - i)a_2^*)] = 0$$

On peut la réécrire $\psi_2(a_2^*) = 0$ avec ψ_2 définie comme suit :

$$\psi_2(t) = \int (x - i)u_2'((1 + i)w_0 + (x - i)t)f(x)dx$$

Nous avons de la même façon $\psi_1(a_1^*) = 0$ avec ψ_1 définie comme suit :

$$\psi_1(t) = \int (x - i)u_1'((1 + i)w_0 + (x - i)t)f(x)dx$$

En réintroduisant $u_2 = \phi(u_1)$ dans la première de de ces deux équations et en l'évaluant en a_1^*, on obtient :

$$\psi_2(a_1^*) = \int (x-i)\phi'(u_1((1+i)w_0 + (x-i)a_1^*))u_1'((1+i)w_0 + (x-i)a_1^*)f(x)dx$$

Qu'on peut réécrire :

$$\psi_2(a_1^*) = \int \phi'(u_1((1+i)w_0 + (x-i)a_1^*))(x-i)u_1'((1+i)w_0 + (x-i)a_1^*)f(x)dx$$

En définissant $K(t) = \phi'(u_1((1+i)w_0 + (t-i)a_1^*))$, on obtient :

$$\psi_2(a_1^*) = \int K(x)(x-i)u_1'((1+i)w_0 + (x-i)a_1^*)f(x)dx$$

ϕ étant une fonction concave,ϕ' est une fonction positive décroissante et par conséquence K aussi. Par ailleurs $\int (x-i)u_1'((1+i)w_0+(x-i)a_1^*)f(x)dx$ étant égal à zéro, on en déduit que :

$$\psi_2(a_1^*) = \int \phi'(u_1((1+i)w_0+(x-i)a_1^*))(x-i)u_1'((1+i)w_0+(x-i)a_1^*)f(x)dx < 0$$

D'où il résulte que $a_1^* > a_2^*$ (ψ_2 étant une fonction décroissante, l'utilité marginale de l'actif risqué).

Ce résultat va dans le sens de l'intuition, l'aversion au risque a une effet négatif sur la quantité d'actif risqué achetée.

7.2.2 Effet d'une variation de la richesse

Une personne plus riche compose-t-elle différemment son portefeuille ? Comment la quantité d'actif risqué évolue lorsque la richesse augmente ? Nous étudierons $\frac{\partial a^*}{\partial w_0}$. Si son signe est positif, l'actif est risqué est un bien supérieur sinon c'est un bien inférieur.

Actif risqué bien inférieur ou supérieur ?

On peut démontrer que l'actif risqué est bien supérieur si A_a est une fonction décroissante de la richesse, un bien inférieur si A_a est une fonction décroissante de la richesse et que a^* constant si A_a ne varie pas avec la richesse.

Sachant que les observations standard indiquent que les actifs risqués sont plus détenus par les populations les plus riches, cela conforterait plutôt l'hypothèse de décroissance de l'aversion absolue avec la richesse. Peut-on aller encore au-delà ?

L'actif risqué un bien de luxe ?

Un bien est dit de luxe si sa part dans la consommation augmente lorsque la richesse de l'agent augmente. Cela signifie que l'élasticité richesse de sa demande $\frac{w_0}{a^*}\frac{\partial a^*}{\partial w_0}$ est supérieure à 1.

Dans la mesure où on s'intéresse maintenant à l'évolution de la fraction de la richesse investie dans l'actif risque, le concept qui semble le plus adapté est l'aversion relative.

Effectivement, on peut démontrer que l'actif risqué est un bien de luxe si et seulement si l'aversion relative pour le risque est décroissante avec la richesse (ce qui est une propriété que nous avons supposée satisfaite de façon moins évidente).

On peut alors observer le comportement des individus pour en tirer quelques conclusions sur la validité des hypothèses concernant l'évolution de l'aversion relative avec la richesse (en corrigeant les données observées de plusieurs éléments comme le coûts décroissants à investir dans l'actif risqué et les contraintes de crédit pesant sur les individus).

7.2.3 Variation du rendement de l'actif certain

Que se passe-t-il si i augmente (tout en conservant la propriété $\mu > i$ sinon ...) ? Quel effet cela aura-t-il sur a^* ?

Au premier abord, on pourrait penser que la réponse qu'un accroissement de i ne peut avoir qu'un effet positif sur l'attrait du placement sans risque et par conséquent décroître le montant a^* investi dans l'actif risqué.

Ce raisonnement ne tient pas compte des différents effets d'une variation de i. Cette question s'exprime simplement dans les termes de la décomposition effet revenu/effet substitution des effets de la variation d'un prix.

En effet, si m le montant investi dans l'actif sans risque est strictement positif, le premier effet (sans modification du choix de portefeuille) de l'augmentation de i est un accroissement (au sens de la dominance stochastique d'ordre 1) de la richesse finale de l'agent. Hors, nous avons montré précédemment que, dans le cas raisonnable A_a décroissante avec la richesse, le montant investi dans l'actif risqué augmente. L'effet revenu pourrait donc avoir un effet négatif sur la quantité d'argent investi dans l'actif sans risque. En revanche, l'effet susbstitution est clairement favorable à l'actif sans risque. L'effet global est donc ambigu. Il faut donc faire une hypothèse supplémentaire pour un résultat non ambigu.

On peu ainsi montrer que si l'aversion partielle au risque (A_p) est toujours inférieure à 1, la demande d'actif risqué varie toujours dans le sens inverse de la variation du taux de rendement de l'actif certain.

7.2.4 Effets de modifications de $\tilde{x}$

On pourra considérer deux types de modifications de $\tilde{x}$: un accroissement de rendement au sens de la dominance stochastique d'ordre 1 ou une baisse du risque au sens de la dominance stochastique d'ordre 2 à moyenne constante.

On peut montrer que l'accroissement du rendement au sens de la DS1 accroît nécessairement le montant investi dans l'actif risqué lorsque A_p est inférieure à 1(CF discussion précédente sur effet substitution/effet revenu.) Dans le cas d'une diminution du risque au sens de la DS2 à moyenne constante, il faut ajouter quelques conditions supplémentaires sur u pour s'assurer qu'elle a un effet positif sur le montant investi dans l'actif risqué.

Ainsi, nous avons pu utiliser les concepts d'aversion absolue, relative et partielle pour faire des prédictions sur les choix de portefeuille des individus avec des résultats parfois étonnants sur la non évidence qu'une diminution de risque à rendement espéré constant accroît l'attrait de l'actif risqué. Nos axiomes sur les préférences sont trop peu exigeants pour nous permettre d'obtenir des prédictions tranchées sans l'ajout d'hypothèses supplémentaires. Cela signifie soit qu'il pourrait être utile d'adjoindre des axiomes aux 4 existants (lesquels ?) soit que l'approche en terme d'espérance d'utilité n'est pas suffisamment éclairante pour son niveau de complexité, il vaudrait mieux utiliser des fonctions de type espérance-variance donnant de prédictions plus tranchées dans ce cas comme pour le MEDAF (mais n'oublions cependant pas les faiblesses évoquées de cette approche).

7.3 Décision d'assurance

Après avoir considéré un modèle simplifié de choix de portefeuille, nous montrerons qu'un choix de couverture peut se réinterpréter dans des termes équivalents à ceux que nous avons vu pour le choix de portefeuille.

Soit un décideur ayant une approche conséquentialiste et dont les préférences satisfont les 4 axiomes susmentionnés sur les loteries. Il dispose d'un patrimoine disponible dont la valeur est estimée à w_0.

Une partie R de ce patrimoine est soumise à un risque (non décidé par l'agent mais subi par celui-ci). A l'échéance une partie $\tilde{x}$ peut disparaître. $\tilde{x}$ est une loterie distribuée sur $[0,1]$ avec pour distribution F telle que $E[\tilde{x}] = \mu$.

Cet agent a la possibilité de s'assurer face à ce risque qui pèse sur son patrimoine. Un contrat d'assurance spécifiera le montant payé pour la couverture, la prime d'assurance p et l'indemnité perçue en fonction du dommage I.

Nous considérons tout d'abord un cas simple ou le montant des indemnités est une fraction du montant des dommages, $a \in [0,1]$ (appelé aussi taux de couverture), telle que $I(xR) = axR$ et la prime correspond au montant espéré du paiement auquel on ajoute des frais de gestion λ, $p = (1+\lambda)a\mu R$ (lorsqu'on parle d'assurance au taux actuariel, $\lambda = 0$). On parle dans ce cas de coassurance.

On peut alors résumer le choix de l'assuré à celui de a, la fraction du patrimoine soumise au risque couverte par l'assurance.

Dès lors la richesse finale de l'agent peut s'écrire de la façon suivante :

$$\tilde{w}_f = w_0 - R + (1-\tilde{x})R + a\tilde{x}R - (1+\lambda)a\mu R$$

Avec un peu de réécriture, on peut aussi alors l'écrire :

$$\tilde{w}_f = w_0 - (1+\lambda)\mu R - (1-a)R(\tilde{x} - (1+\lambda)\mu)$$

Cette expression s'interprète de la façon suivante. $w_0 - (1+\lambda)\mu R$ est ce qu'on obtient en choisissant uniquement le placement sûr ce qui correspond à une couverture complète du risque. $(1-a)R$ est la quantité d'actif risqué choisie, la partie du patrimoine non couverte par l'assurance. $(\tilde{x}-(1+\lambda)\mu)$ est le rendement aléatoire net de ce placement. On ne peut parler de gain lié au choix du placement risqué (la non couverture du risque) que si la réalisation x est inférieure à $(1+\lambda)\mu$.

Ici encore, le risque est une choix endogène du décideur. La structure est identique à celle du choix de portefeuille. Le rendement de l'actif risqué est $-\tilde{x}+(1+\lambda)\mu$, le premier terme exprimant le coût de cette non-couverture et le second ce qu'elle me fait économiser en non paiement de prime d'assurance. On observe qu'avec $\lambda > 0$, le rendement espéré de l'actif "non assurance" est strictement positif, sachant que celui de l'actif sans risque est nul. De plus, du fait du contexte, la quantité d'argent investie dans cet actif se situe nécessairement dans l'intervalle $[0; R]$.

On peut appliquer les résultats obtenus précédemment : Si $\lambda > 0$, a^* est nécessairement inférieur à 1 et si $\lambda = 0$, $a^* = 1$ ...

Présentation du contrat avec franchise (d).

$$I(xL) = \max(0; xL - d)$$