Externalités avec rendements constants

Pour déterminer l'optimum de Pareto, il faut maximiser la somme des utilités pondérées des agents. Utiliser un agent représentatif ne fonctionne pas dans tous les cas comme nous allons le voir ci-dessous.

On résoud notamment $\max\limits_{u^1,\ u^2} \rho u^1 + (1-\rho)u^2$ sous contrainte d'apurement des marchés.

Pour être rigoureux, il faudrait employer un lagrangien avec une contrainte d'apurement des marchés ET des contraintes positivité sur les consommations.

Pour être plus rapide, on peut faire comme le professeur, maximiser un programme en intégrant directement les contraintes dans la fonction objectif.

Cela donne :

$$\max_{x_1^A,\ x_2^A,\ x_1^B,\ x_2^B,\ y} \rho u^1 + (1-\rho)u^2$$

avec $x_1^A + x_1^B = 60 - y/2 = 60 - \frac{x_2^A + x_2^B}{2}$.

Ce qui équivaut à :

$$\max_{x_1^A,\ x_2^A,\ x_2^B} \rho x_1^A x_2^A + (1-\rho)(60 - \frac{x_2^A + x_2^B}{2} - x_1^A)x_2^B - (x_2^A + x_2^B)$$

On annule les dérivées par rapport aux trois variables restantes et on obtient :
$x_2^A = x_2^B \times \frac{1-\rho}{\rho},\ x_1^A = \frac{x_2^B}{2} \times \frac{1-\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho}, x_2^B = -\frac{2}{1-\rho} + 2x_1^B$

Finalement, on trouve :

$$x_2^B = -\frac{2}{1-\rho} + 2x_1^B,\ x_2^A = -\frac{2}{\rho} + 2x_1^A \Rightarrow y = -\frac{2}{1-\rho} - \frac{2}{\rho} + 2(x_1^A + x_1^B) \Rightarrow y = 60 - \frac{1}{\rho(1-\rho)}$$

Cependant, le résultat ne tient que si $x_2^A = -4 + 2x_1^A$ est positif par exemple ($\Rightarrow x_1^A, x_2^A \geq 2$). Si une consommation est au-dessous de 2, il est possible qu'augmenter la consommation de l'agent faiblement pourvu diminue en fait l'utilité totale (les dérivées partielles sont négatives). Donc, pour les valeurs de ρ proches de 0 ou 1, il faut faire ce que l'on a fait en td et faire l'hypothèse qu'un seul agent consomme des biens pour maximiser le programme.