Microéconomie : théorie de l'équilibre général

Responsable du cours : Miquel Oliu Barton *

Diplôme L2 MI2E, Année 2016–2017

version provisoire (3 mars 2017)

— **Bibliographie :**

1. Pierre Picard : *Eléments de microéconomie*, tome I, 7e Edition. Montchrestien, 2007
2. Bruno Jullien, Pierre Picard : *Microéconomie* , tome 2 Exercices et Corrigés, 3e Edition. Montchrestien, 2002.
3. Jean-Marc Tallon : *équilibre général : une introduction*. Vuibert, 1997.
4. Hal Varian : *Analyse microéconomique*, 2e Edition. De Boeck Université, 2008.
5. Gregory Mankiw et Mark Taylor : *Microeconomics*, Eds .Thompson Learning, 2006.
6. Mas-Colell, Whinston, et Green : *Microeconomic Theory*; Oxford University Press, 1995.

— **Evaluation de l'UE :**
Calcul de la note finale : $\max\{0.4P + 0.6E, E\}$

— **Document supplémentaires :**

1. Brochure d'exercices pour les travaux dirigés
2. Annexe calcul différentiel, concavité

* Contact : Université Paris-Dauphine, Bureau B518, *miquel.oliu.barton@normalesup.org*

Ces notes reprennent le cours de Françoise Forges (2008), mises à jour par Vincent Iehlé (2015).
Elles sont disponibles sur ma page web https ://sites.google.com/site/oliubarton

Table des matières

Introduction, notations

Equilibre *partiel* :

— 1 marché, 1 consommateur (agrégé) et 1 producteur (agrégé)

— Le consommateur cherche à maximiser son utilité, le producteur cherche à maximiser son profit.

Equilibre *général* :

— *Tous* les biens $\ell = 1, \dots, L$

— *Tous* les agents $i = 1, \dots, N$

— Dans un premier temps : économie d'échange pur

> Les biens, initialement détenus par les agents (ou consommateurs) sont échangés entre ceux-ci, de manière à maximiser leur satisfaction individuelle, compte tenu des ressources disponibles.

Données :

— $e^i \in \mathbb{R}^L_+$ dotation initiale de i, pour $i = 1, \dots, N$

— $\succsim^i$ préférences de i sur les paniers de biens, $i = 1, \dots, N$

Equilibre concurrentiel $(p, z^1, \dots, z^N)$

— $p = (p_1, \dots, p_L) \in \mathbb{R}^L_+$, avec $p \gg 0$, vecteur de prix

— $(z^1, \dots, z^N) \in (\mathbb{R}^L_+)^N$ allocation de biens tels que

1. z^i maximise les préférences $\succsim^i$ pour tout $i = 1, \dots, N$ de i sous sa contrainte budgétaire
2. Les marchés $(\ell = 1, \dots, L)$ s'apurent

- Conditions garantissant l'existence (et, éventuellement, l'unicité) d'un tel équilibre ?
- Propriétés d'un tel équilibre ?
- Conditions d'application ?
- Quels résultats si les marchés fonctionnent imparfaitement ?

Equilibre partiel. L'approche dite d'*équilibre partiel* consiste à considérer un marché comme étant isolé. La fonction de demande (quantité demandée en fonction du prix p du bien) décrit le comportement des consommateurs en fonction du prix du bien. De même, la fonction d'offre décrit le comportement des producteurs en fonction du prix. On s'intéresse aux équilibres, c'est–à–dire, aux prix pour lesquels l'offre est égale à la demande, à leur existence, stabilité et efficacité. On s'intéresse aussi à ce qui advient lorsqu'il y a de petits chocs (comparative statique). On établit l'existence d'un équilibre, ainsi que les deux théorèmes du bien-être : le premier dit que tout équilibre est efficace ; le second, que toute allocation efficace peut être obtenue comme équilibre.

Equilibre général. L'approche dite d'*équilibre général* consiste à considérer $L > 1$ marchés en même temps. Les fonctions d'offre et de demande sont alors à valeurs dans $\mathbb{R}_+^L$. On s'intéresse aux équilibres, c'est–à–dire, aux vecteurs de prix pour lesquels tous les marchés s'apurent, à leur existence, stabilité, efficacité et à ce qui advient lorsqu'il y a de petits chocs (comparative statique). Comme en équilibre partiel, on établira l'existence d'un équilibre, ainsi que les deux théorèmes du bien-être : que tout équilibre est efficace et que, réciproquement, toute allocation efficace peut être obtenue comme équilibre.

1 Préférences et fonction de choix

Un agent (un individu, une entreprise, un gouvernement) doit faire un choix. On représente l'ensemble des choix possibles par un ensemble X. L'agent voudrait choisir la "meilleure alternative", c'est–à–dire, celle(s) qu'il préfère. Comment modéliser cela ?

On distingue deux approches : les préférences et la fonction de choix. La première est basée sur l'introspection, la seconde sur le comportement.

1.1 Préférences

Pour tout couple d'alternatives x et y dans X, l'agent se demande (introspection) laquelle des deux il préfère. Il est capable de répondre, par un Oui ou par un Non à la question $Q(x, y)$: "*est-ce que x est au moins autant bien que y ?*". On utilisera les notations suivantes :

— $x \succsim y \;\Leftrightarrow\;$ l'agent préfère (faiblement) x à $y \;\Leftrightarrow\; Q(x, y) = Oui$ et $Q(y, x) =\;?$

— $x \sim y \;\Leftrightarrow\;$ l'agent est indifférent entre x et $y \;\Leftrightarrow\; Q(x, y) = Oui$ et $Q(y, x) = Oui$

— $x \succ y \;\Leftrightarrow\;$ l'agent préfère strictement x à $y \;\Leftrightarrow\; Q(x, y) = Oui$ et $Q(y, x) = Non$

Remarque 1.1 *On pourrait imaginer des réponses plus subtiles, ou plus détaillées, à la question $Q(x, y)$, comme "je préfère souvent x à y" ou "je préfère x à y de beaucoup". On ne tiendra pas compte de ces éléments pour l'instant. De même, on n'autorise pas la réponse, souvent légitime, "x et y ne sont pas comparables". La transitivité peut parfois poser problème, notamment lorsque les alternatives varient continument (penser à une échelle de gris) ou lorsque les préférences proviennent d'une agrégation (d'individus, ou de critères).*

Définition 1.1 $\succsim$ *est une* préférence rationnelle *sur X si pour tout $x, y, z \in X$:*

— ***Complétude*** *: $x \succsim y$ ou $y \succsim x$ (ou les deux)*

— ***Transitivité*** *: $x \succsim y$ et $y \succsim z \implies x \succsim z$*

1.2 Préférences et utilité

Définition 1.2 *Une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ représente $\succsim$ si pour tout $x, y, z \in X$:*

$$x \succsim y \;\Leftrightarrow\; u(x) \geq u(y)$$

Une fonction d'utilité ne peut représenter que des préférences rationnelles, car on peut toujours comparer les réels $u(x)$ et $u(y)$, la relation $\geq$ est transitive.

Exercice 1.3 *Soit u une fonction d'utilité représentant les préférences $\succsim$ sur X.*

1. *Montrer que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, $f \circ u$ représente $\succsim$ aussi*
2. *Montrer que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seulement croissante, $f \circ u$ ne représente pas nécessairement $\succsim$*

3. *Soit* $X = \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *et* $f(x) = -x(x-2)$. *Est-ce que* $f \circ u$ *représente* $\succsim$ *?*

Définition 1.4 *Une préférence* $\succsim$ *est continue si pour tout couple de suites* $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *dans* X *convergeant*[1] *respectivement vers* x *et* y, *et telles que* $x_n \succsim y_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $x \succsim y$.

Théorème 1.5 (Debreu) *Une préférence* $\succsim$ *sur* X *est continue si, et seulement si, il existe une fonction d'utilité continue* $u : X \to \mathbb{R}$ *représentant cette préférence.*

Ce résultat général est admis. On peut cependant montrer le cas suivant.

Lemme 1.6 *Si* $\succsim$ *est rationnelle, continue et monotone sur* $X = \mathbb{R}^L_+$, *alors il existe une fonction d'utilité* $u : X \to \mathbb{R}$ *continue et croissante représentant cette préférence.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et $e = (1, \ldots, 1)$ le vecteur de 1's dans $\mathbb{R}^L$, de sorte que $\lambda e = (\lambda, \ldots, \lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Par monotonie, on a $Me \succsim x \succsim 0$, avec $M = \max(x_1, \ldots, x_L)$. Par continuité (voir TD 1) il existe $\lambda \in [0, M]$ tel que $\lambda e \sim x$. Par monotonie, ce λ est unique car $\lambda e \sim \lambda' e \sim x$ est impossible pour $\lambda \neq \lambda'$. On définit ainsi une fonction $x \mapsto \lambda(x)$, de X dans $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'elle est continue, croissante et qu'elle représente $\succsim$ ∎

Exemple 1.7 *Les préférences lexicographiques sur* $\mathbb{R}^2$ *ne sont pas continues. Par conséquent, il n'existe pas une fonction d'utilité continue les représentant (voir TD 1).*

1.3 Fonction de choix

On s'intéresse aux choix que l'agent a fait (i.e. à son comportement). On se donne un ensemble de tests, ou expériences $\mathcal{A} \subset 2^X$ et on observe la fonction de choix $C : \mathcal{A} \rightrightarrows X$ qui, à chaque expérience $A \in \mathcal{A}$, associe un ensemble $C(A) \subset A$, représentant les alternatives choisies par l'agent. Bien qu'il ne soit pas toujours possible de choisir plusieurs alternatives à la fois (aller à deux endroits différents au même temps, par exemple), il arrive que l'on observe un agent faire plusieurs fois des choix sur le même ensemble test. C'est ainsi que $C(A)$ peut contenir plusieurs éléments.

Exemple 1.8 *Soit* $X = \{x, y, z\}$ *un ensemble contenant* 3 *d'alternatives, et soit* $\mathcal{A} = \{\{x, y\}\{x, y, z\}\}$ *un ensemble de tests. On considère deux fonctions de choix,* C_1 *et* C_2 *définies comme suit :*

$$C_1(\{x, y\}) = C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}, \quad \text{et} \quad C_2(\{x, y\}) = \{x\},\ C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$$

De C_1 *on déduit que, lorsque* x *et* y *étaient disponibles, l'agent a choisi* x, *et lorsque* x, y *et* z *étaient disponibles, il a choisi* x. *De* C_2, *qu'un deuxième agent a fait le même choix sur le premier test, mais a choisi* $\{x, y\}$ *sur le deuxième.*

Définition 1.9 (WA) *La fonction de choix* C *vérifie l'axiome faible des préférences révélées si pour tout* $A, B \in A$ *et* $x, y \in A \cap B$ *tels que* $x \in C(A)$ *et* $y \in C(B)$, *on a aussi* $x \in C(B)$.

1. On suppose ici que X est un espace topologique, où la convergence a un sens.

Cet axiome dit que, si x a été choisi alors que y était disponible, alors il n'est pas possible d'avoir un ensemble où y est choisi et x ne l'est pas.

Définition 1.10 *Soit* $(X, \mathcal{A}, C)$ *une structure de choix. Les* préférences révélées par C, *notées* $\succsim_C$, *sont définies en posant pour tout* $x, y \in X$

$$x \succsim_C y \;\Leftrightarrow\; \textit{il existe } A \in \mathcal{A} \textit{ tel que } x, y \in A \textit{ et } x \in C(A)$$

La fonction de choix "révèle" une relation de préférence sur les alternatives. On dit que "x s'est révélé être au moins aussi bien que y" lorsque $x \succsim_C y$. De même, "x s'est révélé être strictement préféré à y" lorsque $x \succ_C y$, c'est–à-dire, s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x, y \in A$, $x \in C(A)$ et $y \notin C(A)$. La préférence révélée $\succsim_C$ n'est pas nécessairement complète ni transitive, comme le montrera l'exemple suivant.

Exemple 1.11 *Soient* $\succsim_1$ *et* $\succsim_2$ *les préférences révélées induites par* C_1 *et* C_2 *respectivement. La première fonction de choix donne* $x \succsim_1 y$ *et* $x \succsim_1 z$, *mais ne donne aucune information sur comment comparer* y *et* z. *L'axiome* (WA) *est vérifié. En revanche, la seconde donne* $x \succ_2 y$ *(au premier choix) et* $y \succsim_2 x$ *au second, ce qui est incompatible avec* (WA).

Notons que l'axiome (WA) peut être reformulé à l'aide des préférence révélées. En effet, C vérifie (WA) si lorsqu x s'est révélé être au moins aussi bien que y, y ne peut pas se révéler être strictement préféré à x (**exercice**).

2 Théorie du consommateur

On veut modéliser la prise de décision d'un consommateur. L'ensemble des alternatives est l'ensemble des paniers possibles (combien est-il possible de consommer de chaque bien). L'ensemble des expériences, l'ensemble des contraintes budgétaires (combien consomme-t-il pour un revenu et des prix fixés). La fonction de choix, la demande du consommateur.

2.1 Modèle et notations

On se donne

— $L \in \mathbb{N}^*$ biens désirables, parfaitement divisibles

— $X = \mathbb{R}_+^L$ est l'ensemble des paniers possibles

— $x = (x_1, \ldots, x_L) \in \mathbb{R}_+^L$ est le panier composé d'une quantité x_ℓ du bien ℓ, pour tout $1 \leq \ell \leq L$

— $p = (p_1, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L$, $p \gg 0$ est un vecteur de prix

— $w > 0$ est le revenu de l'agent

— $e \in \mathbb{R}_+^L$ est une dotation initiale. Dans ce cas $w = \langle p, e \rangle$

N.B. Lorsque $L = 2$ on notera les biens (x, y) à la place de (x_1, x_2).

Commentaires

— Avant de toute chose il faut de demander ce qu'est un bien. Un bien est quelque chose de concret et d'abstrait en même temps, que l'on peut "consommer". Une bière, par exemple. On peut la prendre ici ou ailleurs, d'une marque ou d'une autre, aujourd'hui ou demain : ni la bière, ni le plaisir, ni son prix, ne seront les mêmes. Théoriquement, il y a autant de bières différentes qu'il y a de lieux, de marques et de moments. Cependant, lorsqu'on se réfère à la de quantité de bière consommée, ou au prix de la bière, on fera abstraction de tout cela. Un bien est donc un "bien idéalisé" regroupant des biens qui, par leur nature, espace et temporalité, sont très proches. Son prix doit se comprendre comme une sorte de "prix moyen".

— Certaines contraintes physiques, légales et géographiques ont été mises de côté. Des biens qui ne sont pas divisibles (un frigo), ou qui ne peuvent pas se consommer de manière illimitée (le temps de loisir ou de travail).

— On ne permet pas au consommateur d'acheter une quantité négative, bien que cela soit possible pour certains biens.

— Tous les bien sont supposés désirables. Lorsqu'un bien n'est pas désirable (la pollution) il suffit de considérer son opposé (l'absence de pollution).

Définition 2.1 *Pour tout vecteur de prix $p \gg 0$ et revenu $w > 0$ on définit la* contrainte budgétaire *(ou budget de Walras) comme étant l'ensemble des paniers de biens que l'agent peut s'acheter :*

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ \,|\, \langle p, x\rangle \leq w\}$$

Le produit scalaire $\langle p, x\rangle = p_1x_1 + \cdots + p_Lx_L$ représente le *coût du panier* x.

Dessin. Pour $L = 2$, $B(p_x, p_y, w)$ est un triangle rectangle de sommets $(0, 0)$, $(0, \frac{w}{p_y})$ et $(\frac{w}{p_x}, 0)$. Le vecteur (p_x, p_y) est orthogonal à l'hypothénuse, qui est de "pente" $-\frac{p_x}{p_y}$

Exercice 2.2 *Montrer que $B(p, w)$ est non-vide, convexe et compact pour tout $p \gg 0$ et $w > 0$.*

Comme ensemble des expériences, on prend l'ensemble de tous les budgets, i.e.

$$\mathcal{A} = \{B(p, w) \,|\, p \gg 0 \text{ et } w > 0\}$$

La fonction de choix, notée D, est la *demande du consommateur*

$$D(p, w) := \{x \in B(p, w) \,|\, x \succsim x', \ \forall x' \in B(p, w)\}$$

$D(p, w)$ est l'ensemble des paniers qui sont optimaux parmi les paniers abordables. Sous certaines hypothèses $D(p, w)$ contient un unique élément pour tout (p, w). On parle alors de *fonction de demande*.

Notation. Pour différencier les deux cas, multivoque et univoque, on les notera par $D(p, w)$ et $d(p, w)$ respectivement.

2.2 Préférences et utilité du consommateur

On considère un consommateur typique, ayant des préférences $\succsim$ sur $\mathbb{R}_+^L$ rationnelles et continues. Rationalité et continuité sont des hypothèses minimales. Les préférences du consommateur ont davantage de propriétés.

Propriétés des préférences

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}_+^L$:

- Monotonie : $x \gg y \Rightarrow x \succ y$
- Stricte monotonie : $x > y \Rightarrow x \succ y$
- Convexité : $y \succsim x$ et $z \succsim x \Rightarrow \lambda y + (1 - \lambda z) \succsim x$ for all $\lambda \in [0, 1]$
- Stricte convexité : $y \succsim x$ et $z \succsim x \Rightarrow \lambda y + (1 - \lambda z) \succ x$ for all $\lambda \in (0, 1)$

Commentaires. La monotonie traduit le fait que les biens sont désirables, et les agents ne s'en lassent jamais : "plus de tout, c'est mieux". La monotonie stricte va un peu plus loin : "plus de quelque chose, c'est mieux". La convexité exprime l'appétit pour la diversité : "si deux paniers me plaisent autant, alors un mélange des deux me plaira au moins tout autant". La convexité stricte va plus loin : "si deux paniers me plaisent autant, alors le mélange de deux me plaira plus".

Courbes d'indifférence. Pour tout $x \in X$, on définit les ensembles suivants

$$U(x) := \{x' \,|\, x' \succsim x\} \quad \text{et} \quad L(x) := \{x' \,|\, x \succsim x'\}$$

Ils représentent, respectivement, les paniers qui sont au moins autant bien que x, et les paniers qui ne sont pas mieux que x. Exprimons les propriétés des préférences à l'aide de ces ensembles :

— $\succsim$ continue $\Leftrightarrow$ $U(x)$ et $L(x)$ sont fermés.

— $\succsim$ convexe $\Leftrightarrow$ $U(x)$ est convexe

— $\succsim$ strictement convexe $\Leftrightarrow$ $U(x)$ est strictement convexe.

Exercice 2.3 *Pour $\succsim$ rationnelle et continue, montrer que $I(x) := U(x) \cap L(x)$ est fermé et non-vide pour tout $x \in X$. Ces ensembles sont-ils nécessairement bornés ?*

Fonction d'utilité du consommateur

D'après le Théorème de Debreu, les préférences rationnelles et continues peuvent se représenter par une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ continue (celle-ci n'est pas unique). Les propriétés des préférences donnent lieu à des propriétés sur les fonctions d'utilité. On distingue deux types de propriétés : ordinales et cardinales. Les premières dépendent seulement de l'ordre, et sont donc indépendantes du choix de la fonction d'utilité. En particulier, de telles propriétés sont conservées par composition avec une fonction strictement croissante. Le secondes, en revanche, sont des propriétés spécifiques à une représentation particulière. Lorsque plusieurs fonctions d'utilité représentent les mêmes préférences, il est convenable de choisir une fonction qui possède de bonnes propriétés.

Propriétés ordinales (indépendantes du choix de u)

- $\succsim$ monotone $\Leftrightarrow x \gg y \;\Rightarrow\; u(x) > u(y)$
- $\succsim$ strictement monotone $\Leftrightarrow x > y \;\Rightarrow\; u(x) > u(y)$ (u strictement croissante en chaque entrée)
- $\succsim$ convexe $\Leftrightarrow u$ quasi-concave, i.e. $\{x \,|\, u(x) \geq c\}$ convexe $\forall c \in \mathbb{R}$
  De façon équivalente, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$, pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in [0,1]$
- $\succsim$ strictement convexe $\Leftrightarrow u$ strictement quasi-concave, i.e. $\{u \geq c\}$ strictement convexe $\forall c \in \mathbb{R}$
  De façon équivalente, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{u(x), u(y)\}$, pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in (0,1)$

Propriétés cardinales (moins universelles, mais très pratiques)

- u continue et différentiable (de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$)
- u concave : $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y),\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$
- u strictement concave : $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y),\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in (0,1)$

Pour tout niveau d'utilité $c \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\{u = c\}$ la *courbe d'indifférence* du consommateur.

Lemme 2.4 *Lorsque u est continue, convexe et monotone*

— *les courbes d'indifférence ne s'entrecoupent pas*

— *l'utilité croît en allant vers le "nord-est" et décroît vers le "sud-ouest"*

2.3 L'optimisation du consommateur

Proposition 2.1 (Existence et unicité de la solution) *Soit $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité.*

(i) *u continue $\Rightarrow D(p,w) \neq \emptyset$*

(ii) *u continue, monotone, quasi-concave $\Rightarrow D(p,w)$ est convexe*

(iii) *u continue, monotone, strictement quasi-concave $\Rightarrow D(p,w) = \{d(p,w)\}$*

Démonstration. (i) Une fonction continue atteint son minimum et son maximum sur un compact.
(ii) Soit $x, y \in D(p,w)$ et $\lambda \in [0,1]$. Montrons que $\lambda x + (1-\lambda)y \in D(p,w)$. Tout d'abord, comme $\langle p, x\rangle \leq w$ et $\langle p, y\rangle \leq w$ on a aussi (par linéarité du produit scalaire) :

$$\langle p, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle = \lambda\langle p, x\rangle + (1-\lambda)\langle p, y\rangle \leq w$$

Donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in B(p,w)$. La quasi-concavité implique $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\} = u(x)$. Or $u(x)$ est maximal et donc $u(\lambda x + (1-\lambda)y)$ aussi, ce qui termine la preuve.
(iii) La début de la preuve est identique à celle de 2. Mais pour $x \neq y$ et $\lambda \in (0,1)$ la stricte quasi-concavité implique $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{u(x), u(y)\} = u(x)$, contredisant l'optimalité de $u(x)$. ∎

Proposition 2.2 (Propriétés de la demande) *Soit $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité.*

(i) *Absence d'illusion monétaire : $D(p,w) = D(\alpha p, \alpha w),\ \forall \alpha > 0,\ \forall (p,w)$*

(ii) *u continue, monotone $\Rightarrow$ Loi de Walras : $\langle x, p\rangle = w,\ \forall x \in D(p,w),\ \forall (p,w)$*

(iii) u continue, monotone, strictement quasi-concave $\Rightarrow$ *d est une fonction continue*[2]

Démonstration. (*i*) Cela découle de l'égalité $B(\alpha p, \alpha w) = B(p, w)$, vérifiée pour tout $\alpha > 0$ et (p, w). (*ii*) Soit $x \in D(p, w)$ tel que $\langle x, p \rangle < w$. Par continuité (du produit scalaire) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\langle x_\varepsilon, p \rangle < w$, où $x_\varepsilon := (x_1 + \varepsilon, \ldots, x_L + \varepsilon) \gg x$. Par monotonie, $u(x_\varepsilon) > u(x)$. Mais cela contredit l'optimalité de $u(x)$. (*iii*) Ce résultat est admis. ∎

Remarque 2.1 La fonction demande $(p, w) \mapsto d(p, w)$ est continue partout, sauf aux points où un prix est nul. En effet, si $w > 0$ et $p_n \to \bar{p}$ avec $p_n \gg 0$ mais $\bar{p}_\ell = 0$ pour certain bien ℓ, alors la demande pour ce bien explose, puisque l'utilité est croissante et que de bien est gratuit ! Autrement dit, $d_\ell(p_n, w) \to +\infty$.

2.4 Le cas $L = 2$ pour fixer les idées

On note les paniers de biens $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, à la place de (x_1, x_2). On dira que la fonction d'utilité $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ est *régulière* si elle est continue, croissante, strictement quasi-concave et différentiable.

Taux marginal de substitution

Définition 2.5 *Le* taux marginal de substitution *du bien y pour le bien x, en un point (x_0, y_0), est la quantité de bien y qu'il faut donner au consommateur pour compenser la perte marginale d'une unité de bien x en ce point. Lorsque u est différentiable :*

$$TMS_{y\to x}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}}$$

- La monotonie des préférences implique $TMS_{y\to x}(x_0, y_0) > 0$, pour tout (x_0, y_0).
- La convexité implique que $x_0 \mapsto TMS_{y\to x}(x_0, y_0)$ est une fonction décroissante.
- Soit u différentiable et posons $\alpha := TMS_{y\to x}(x_0, y_0)$. Alors

$$u(x_0, y_0) = u(x_0 + h, y_0 - \alpha h) + o(h), \quad \text{quand } h \to 0$$

- Lorsque u est régulière, pour toute constante c, la courbe d'iso-utilité $\{u = c\}$ est le graph d'une fonction f (ou plutôt f_c) continue, décroissante, convexe et dérivable. On a alors que $u(x, f(x)) = c$ pour tout x. Fixons x_0 et posons $y_0 := f(x_0)$ et $c := u(x_0, y_0)$. En dérivant $x \mapsto u(x, f(x))$ en x_0 on obtient alors :

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} f'(x_0) = 0$$

  Ce qui donne $TMS_{y\to x}(x_0, y_0) = -f'(x_0)$. Autrement dit, le taux marginal de substitution est égal à la (valeur absolue de la) pente de la courbe $\{u = u(x_0, y_0)\}$ au point (x_0, y_0).

2. La continuité a lieu partout sauf sur le bord $\{(p, w) \,|\, \exists \ell,\ p_\ell = 0\}$. (Voir Remarque 2.1).

Deux cas extrêmes

Nous l'avons déjà vu, la continuité, monotonie et quasi-concavité de la fonction d'utilité implique que les courbes d'indifférence sont continues, décroissantes et convexes. La stricte quasi-concavité implique, à son tour, la stricte convexité de ces courbes. Il existe deux cas importants où la quasi-concavité n'est pas stricte. C'est le cas lorsque les deux biens sont des *parfaits substituts* (des pièces de monnaie de différentes valeur, deux marques de lait, etc) ou des *parfaits compléments* (une chaussure droite et une chaussure gauche, un balais et une balayette, etc). Dans le premier cas la fonction d'utilité sera *linéaire*, i.e. de la forme $u(x, y) = ax+by$ et les courbes d'indifférences $\{u = c\}$ des droites $y = -\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$. Dans le second, la fonction d'utilité ne sera pas différentiable et les courbes d'indifférences auront des coudes : $\{u = c\}$ ne peut pas s'écrire comme $y = f(x)$. (Faire dessin).

Le problème d'optimisation

Dans ce cadre, le problème du consommateur qui dispose d'un revenu w s'écrit :

$$\begin{cases} \max u(x,y) \\ x, y \geq 0 \\ p_x x + p_y y \leq w \end{cases}$$

- Ce problème a une solution dès lors que u est continue et $p_x > 0$, $p_y > 0$
- On suppose u croissante, de sorte que la C.B. sera saturée : $p_x x + p_y y = w$
- On suppose u strictement quasi-concave, de sorte que la solution sera unique.

Supposons, de plus, que u est différentiable. On dispose alors de conditions *nécessaires* pour un optimum "*intérieur*" $x^* > 0$, $y^* > 0$. En effet, la tangence de la courbe $\{u = c\}$ à l'ensemble $B(p, w)$ signifie que le gradient de u et le vecteur des prix sont colinéaires. Autrement dit, il existe d'un réel $\lambda^* > 0$ tel que

$$\nabla u(x,y) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right) = \lambda^*(p_x, p_y)$$

On remarquera que cela est équivalent à l'égalité $TMS_{y\to x}(x^*, y^*) = \frac{p_x}{p_y}$. Le problème d'optimisation sous contrainte peut se transformer en un problème d'optimisation sans contrainte à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$, défini par

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := u(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - w)$$

En effet, notre problème d'optimisation est équivalent à trouver (x^*, y^*, λ^*) maximisant $\mathcal{L}$. Les conditions nécessaires d'optimalité de premier ordre (C.P.O) s'écrivent : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$.
C'est-à-dire, que si (x^*, y^*, λ^*) est un optimum alors *nécessairement* :

- $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \lambda p_x = 0$ (*)
- $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \lambda p_y = 0$ (**)
- $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial \lambda} = w - p_x x - p_y y = 0$ (C.B.)

(*) et (**) $\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial x}}{p_x} = \frac{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial y}}{p_y}$, ou encore $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial y}} = TMS_{y\to x}(x^*,y^*)$
Les deux égalités ainsi obtenues

$$TMS_{y\to x}(x^*,y^*) = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{et} \quad xp_x + yp_y = w$$

permettent de déduire la *fonction de demande* $d(p,w) = (d_x(p,w), d_y(p,w)) = (x^*,y^*)$.

Intuition de $\frac{p_x}{p_y} = TMS_{y\to x}\ (x^*,y^*)$. Supposons, au contraire, que $TMS_{y\to x}\ (x^*,y^*) < \frac{p_x}{p_y}$. En vendant une petite quantité h du bien x, le consommateur obtiendrait un revenu hp_x qui lui permettrait d'acheter $h\frac{p_x}{p_y}$ unités du bien y. Son utilité serait alors :

$$u(x^*-h, y^*+h\frac{p_x}{p_y}) = u(x^*,y^*) - \frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial x}h + \frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial y}h\frac{p_x}{p_y} + o(h)$$

qui est strictement plus grand que $u(x^*,y^*) + o(h)$ dès lors que $TMS_{y\to x}\ (x^*,y^*) < \frac{p_x}{p_y}$. Donc (x^*,y^*) n'est pas optimal.

Remarque 2.2 *Le problème d'optimisation est soluble dès que u est continue, même si u n'est pas différentiable, mais alors, on ne peut pas recourir aux conditions du premier ordre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou "min" en TD).*

Remarque 2.3 *Les conditions de premier ordre sont nécessaires pour une solution $x^* > 0$, $y^* > 0$ mais pas suffisantes. En effet, $x^* = 0$ ou $y^* = 0$ est tout à fait possible, notamment pour des fonctions d'utilité linéaires (voir TD).*

2.5 Utilités à élasticité de substitution constante

Pour tout $r \neq \mathbb{R}$, on définit la r-moyenne de deux réels **positifs** $x, y > 0$ en posant :

$$m_r(x,y) = \left(\frac{1}{2}x^r + \frac{1}{2}y^r\right)^{1/r}$$

On définit également $m_0(x,y) := \lim_{r\to 0} m_r(x,y) = \sqrt{xy}$, moyenne géométrique de x et y. On remarquera également que $r = 1$ correspond à la moyenne arithmétique $\frac{x+y}{2}$, de même que m_{-1} correspond à la moyenne harmonique $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. En prenant des limites, on peut définir également

$$m_{-\infty}(x,y) := \lim_{r\to-\infty} m_r(x,y) = \min\{x,y\} \quad \text{et} \quad m_{+\infty}(x,y) := \lim_{r\to+\infty} m_r(x,y) = \max\{x,y\}$$

Ainsi, les r-moyennes sont une famille de fonctions comprenant toutes les moyennes usuelles. On peut même aller un peu plus loi, en remplaçant les termes $\frac{1}{2}$ par des poids $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. On obtient ainsi les *moyennes généralisées* $(\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r}$. Ces fonctions interviennent souvent en économie, aussi bien en théorie du consommateur que du producteur, parce qu'elles ont une propriété remarquable : elles sont à *élasticité de substitution constante*. Le lemme suivant (exercice d'analyse) résume quelques propriétés utiles pour cette famille de fonctions.

Lemme 2.6 *Soit $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ fixés. Pour tout $r \neq 0$, soit $u_r(x,y) = (\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r}$ et définissons également u_0, $u_{-\infty}$ et $u_{+\infty}$ par passage à la limite. Alors*

1. *Pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, la fonction u_r est strictement croissante et continue.*
2. *Pour tout $r \in [-\infty, 1]$, la fonction u_r est concave (et donc quasi-concave). De plus, la concavité (et donc, la quasi-concavité) est stricte pour $r \in (-\infty, 1)$.*
3. *Pour tout $r \in [1, +\infty]$, la fonction u_r est convexe. Ainsi, pour $r \in (1, +\infty]$ la fonction u_r n'apparaîtra pas en théorie du consommateur. En revanche, u_r peut représenter une fonction de coût de production.*
4. *On remarquera les cas particuliers suivant :*
   - $u_{-\infty}(x,y) = \min\{x,y\}$, *utilité de Leontieff correspondant à deux parfaits compléments*
   - $u_{-1}(x,y) = (\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y})^{-1}$
   - $u_0(x,y) = x^\alpha y^\beta$, *utilité Cobb-Douglass*
   - $u_1(x,y) = \alpha x + \beta y$, *utilité linéaire correspondant à deux parfaits substituts*
   - $u_{+\infty}(x,y) = \max\{x,y\}$
5. *Pour tout couple $x \neq y$ positifs, la fonction $r \mapsto u_r(x,y)$ est strictement croissante et continue. En particulier $\min\{x,y\} \leq u_r(x,y) \leq \max\{x,y\}$ pour tout $x, y > 0$ et $r \in [-\infty, +\infty]$.*
6. ***Tout ceci se généralise à L biens**, en définissant $u_r : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}$ comme $u_r(x) := (\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell x_\ell^r)^{1/r}$ pour certains poids fixés $\alpha_1, \dots, \alpha_L > 0$ tels que $\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell = 1$.*

2.6 Généralisation à L biens

- $p \in \mathbb{R}^L$, $p \gg 0$ et $w > 0$ sont fixés.
- Contrainte budgétaire : $B(p,w) = \{x \in \mathbb{R}^L \mid \langle x, p\rangle \leq w\}$
- Demande du consommateur : $D(p,w) = \{x \in B(p,w) \mid u(x) \geq u(y),\ \forall y \in B(p,w)\}$
- $D(p,w)$ est non-vide dès lors que u est continue.
- $D(p,w) = \{d(p,w)\}$ dès lors que u est continue, monotone et strictement quasi-concave. Dans ce cas $(p,w) \mapsto d(p,w)$ définit la *fonction de demande.*
- Supposons u différentiable. Si les conditions du premier ordre
  - (C.P.O.) $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell} = \lambda^* p_\ell$, pour tout $\ell = 1, \dots, L$
  - (C.B.) $\langle p, x^*\rangle = w$

  sont satisfaites en $x^* \gg 0$, pour un certain $\lambda^* > 0$, alors $x^* \in D(p,w)$ et $\Rightarrow$

$$TMS_{k\to\ell}(x^*) = \frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k}} = \frac{p_\ell}{p_k}, \quad \forall k, \ell$$

  Si, en plus, u est monotone et quasi-concave et $\nabla u(x) \neq 0$ pour tout x, alors ces conditions sont suffisantes. La stricte-concavité assure, en plus, l'unicité du panier optimal.

Interprétation du multiplicateur de Lagrange. On suppose u différentiable et la fonction de demande bien définie. Montrons que λ^* correspond l'*utilité marginale* du revenu, c'est–à–dire à la dérivée de u en $x^* = d(p, w)$ par rapport au revenu w. En effet, d'après les C.P.O., $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell} = \lambda^* p_\ell$, pour tout ℓ. De plus, d'après la loi de Walras, $\langle p, d(p, w)\rangle = w$ et donc $\langle p, \frac{\partial d(p,w)}{\partial w}\rangle = 1$. En dérivant (on applique les règles de dérivation en $\mathbb{R}^L$) on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(d(p,w))}{\partial w} &= \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\partial u(d(p,w))}{\partial x_\ell} \frac{\partial d_\ell(p,w)}{\partial w} \\
&= \sum_\ell \lambda^* p_\ell \frac{\partial d_\ell(p,w)}{\partial w} \\
&= \lambda^* \langle p, \frac{\partial d(p,w)}{\partial w}\rangle \\
&= \lambda^*
\end{aligned}$$

Conditions d'optimalité. Les C.P.O. sont des conditions suffisantes d'optimalité en $x^* \gg 0$ lorsque u est différentiable, croissante, quasi-concave et que $\nabla u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^L_+$. Dans ce cas, x^* est l'unique optimum.

2.7 Loi de la demande

Si le prix d'un bien augmente, la demande décroît-elle toujours ? Lorsque c'est le cas, on parle de *loi de la demande*. Bien que cela puisse paraître étonnant, la loi de la demande n'est pas toujours vérifiée alors que, côté producteur, la *loi de l'offre* existe toujours (voir Chapitre 5). Cela est dû au fait qu'une augmentation de prix du bien x provoque chez le consommateur deux effets :

— Un effet substitution : tendance à remplacer la consommation du bien x par d'autres biens

— Un effet revenu : appauvrissement, et donc un changement dans les préférences ou les priorités

2.7.1 Effet revenu et effet substitution

Bien que l'effet substitution aille toujours dans le sens de la loi de la demande, l'effet revenu peut très bien aller dans le sens contraire. Il en résulte qu'une augmentation des prix ne mène pas nécessairement à une diminution de la demande. On distingue plusieurs types de biens.

— Les *bien normaux* sont ceux pour lesquels : "plus on est riche, plus on en veut" (le chocolat)

— Les *bien inférieurs*, au contraire, "plus on est riche, moins on en veut" (le transport en RER)

— Les *bien de Giffen* sont, parmi les bien inférieurs, ceux pour lesquels l'effet revenu renverse l'effet substitution, de sorte qu'une augmentation des prix peut donner lieu à une augmentation de sa consommation (les pommes de terres)

Exemple 2.7 *Considérer, dans les situations suivantes, les effets (revenu et substitution) du changement proposé.*

1. *Café et Chocolat ; augmentation du revenu(2 biens normaux)*

2. *Café et Chocolat ; augmentation du prix du chocolat (2 biens normaux)*

3. *Uber et RER ; augmentation du prix du RER (le second est un bien inférieur)*

4. *Patates et viande ; augmentation du prix des patates (le second est un bien Giffen)*
5. *Consommation et Loisir ; augmentation du salaire*
6. *Consommation présente ou future ; augmentation du taux d'intérêt*

2.7.2 Loi de la demande hicksienne

Le consommateur peut aussi considérer le problème suivant : se fixer un niveau d'utilité, et chercher le panier le moins coûteux qui le satisfasse. Autrement dit, minimiser $\langle p, x\rangle$ sous la contrainte $u(x) \geq c$ et $x \geq 0$. Ce problème est appelé le *problème dual* du consommateur. L'ensemble des paniers optimaux $H(p, c)$ est la demande hicksienne. Lorsque u est continue, monotone et strictement quasi-concave, on a $H(p, c) = \{h(p, c)\}$. On définit ainsi la *fonction de demande hicksienne*[3], qui possède des propriétés très similaires mais qui vérifie la loi de la demande. Mais surtout, elle vérifie la loi de la demande.

Proposition 2.8 (Loi de la demande hicksienne) *Soit u une fonction d'utilité continue, monotone et strictement quai-concave. Alors pour tout $p, p' \gg 0$ et tout niveau d'utilité c, on a :*

$$\langle p' - p, h(p', c) - h(p, c)\rangle \leq 0$$

Démonstration. Pour tout $p \gg 0$, $h(p, c)$ est optimal dans le problème de minimisation du consommateur. Par conséquent, pour tout $p' \gg 0$, $\langle p, h(p, c)\rangle \leq \langle p, h(p', c)\rangle$. De même, $\langle p', h(p', c)\rangle \leq \langle p', h(p, c)\rangle$. En additionnant ces deux relations on obtient le résultat :

$$\langle p', h(p', c)\rangle + \langle p, h(p, c)\rangle \leq \langle p, h(p', c)\rangle + \langle p', h(p, c)$$

∎

Le résultat précédent établit, en particulier, que si on augmente seulement le prix du bien k (i.e. $p'_k > p_k$ et $p'_\ell = p_\ell$ pour tout $\ell \neq k$) alors demande pour le bien k diminue (i.e. $h_k(p', c) \leq h_k(p, c)$, pour un niveau d'utilité c fixé).

Conclusion. Bien que la demande d'un bien ne décroisse pas toujours avec le prix de ce bien, la *demande hicksienne* d'un bien décroit avec le prix de ce bien (voir dessin).

2.7.3 $*$ Loi de la demande compensée

Une autre manière plus directe de faire apparaître une loi de la demande, est de considérer non pas la fonction de demande, mais la *demande compensée*. Celle-ci "compense" le consommateur en lui attribuant un revenu fictif additionnel en cas de hausse des prix. Cette opération a pour effet d'isoler l'effet substitution lequel, comme on a déjà vu, est toujours en accord avec la loi de la demande. De surcroît, il y équivalence entre la loi de la demande compensée et la vérification de l'axion faible des préférences révélées (WA).

3. La fonction de demande $(p, w) \mapsto d(p, w)$ est appelée parfois la fonction de demande walrassienne.

Exercice 2.9 *Vérifier que la fonction de demande* d *satisfait* (WA) *ssi pour tout* (p, w) *et* (p', w) *vérifiant* $\langle p, d(p', w') \rangle \leq w$ *et* $d(p', w') \neq d(p, w)$ *on a* $\langle p', d(p, w) \rangle > w'$.

Proposition 2.10 *Soit* u *une fonction d'utilité continue, monotone et strictement quai-concave. Alors* $d(p, w)$ *vérifié l'axiome faible* (WA) *si, et seulement si, pour tout* $p, p' \gg 0$ *et* $w \in \mathbb{R}$

$$\langle p' - p, d(p', w') - d(p, w) \rangle \leq 0$$

avec $w' := \langle p', d(p', w) \rangle$*. De plus, l'inégalité est stricte lorsque* $d(p', w') \neq d(p, w)$.

On interprète w' comme étant le revenu fictif qu'il faudrait au consommateur pour qu'ill puisse continuer à s'offrir le panier $d(p, w)$ avec les nouveaux prix p'. Comme précédemment, lorsqu'on augmente seulement le prix du bien k (i.e. $p'_k - p_k > 0$), la *demande compensée* du bien k diminue. Dans ce cas, le consommateur est compensée de l'augmentation du prix p_k par un revenu supplémentaire $(p'_k - p_k)d_k(p, w)$, lui permettant toujours de consommer la même quantitité du bien k.

Exercice 2.11 *Vérifier que lorsqu'on augmente seulement le prix du bien* k*,* $w' = w + (p'_k - p_k)d_k(p, w)$.

Conclusion : Bien que la demande d'un bien ne décroisse pas toujours avec le prix de ce bien, du fait de la combinaison d'un effet substitution et un effet revenu, en compensant l'effet revenu on obtient que la *demande compensée* d'un bien décroit avec le prix de ce bien.

3 Economies d'échange

Une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ consiste en

— L biens, $\ell = 1, \ldots, L$

— N agents (ou consommateurs), $i = 1, \ldots, N$

— Chaque agent i est caractérisé par sa dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}^L_+$ et sa fonction d'utilité u^i

— Les dotations initiales donnent lieu à un revenu $w^i = \langle p, e^i \rangle$, pour tout $i = 1, \ldots N$.

3.1 Equilibre concurrentiel

Définition 3.1 *Un équilibre concurrentiel pour* $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ *est un couple prix-allocation,* $p = (p_1, \ldots, p_L) \gg 0$ *et* $z = (z^1, \ldots, z^N) \in (\mathbb{R}^L_+)^N$ *tels que*

1. z^i *maximise l'utilité* u^i *de* i *sous sa contrainte budgétaire* $B(p, w^i)$*, pout tout* $i = 1, \ldots, N$
2. *Les marchés s'apurent :* $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$ *(absence de gaspillage)*

L'apurement des marchés peut se comprendre bien par bien, car 2. est équivalent à dire que le marché du bien ℓ s'apure $\sum_{i=1}^N z^i_\ell = \sum_{i=1}^N e^i_\ell$, pour tout $\ell = 1, \ldots, L$

Interprétation : "main invisible"

— Le système de prix suffit à équilibrer les demandes des agents, qui n'agissent que pour maximiser leurs préférences individuelles.

— Les agents sont négligeables et n'ont donc pas d'influence sur les prix (*price takers*). Cette hypothèse est plausible lorsqu'il sont très nombreux, par exemple.

Théorème 3.1 (Existence) *Si l'économie* $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ *satisfait :*

— $\sum_{i=1}^N e^i \gg 0$*, c'est–à–dire si tous les biens sont présents dans l'économie*

— u^i *est continue, strictement croissante et strictement quasi-concave, pour tout* $i = 1, \ldots, N$

Alors $\mathcal{E}$ *possède (au moins) un équilibre concurrentiel.*

Remarque 3.1 Le théorème donne simplement des conditions *suffisantes* pour l'*existence* d'un équilibre. Une démonstration standard du résultat fait appel à un théorème de point fixe ; nous y reviendrons. Une économie qui ne satisfait pas les conditions ci-dessus peut néanmoins avoir un équilibre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou linéaires en TD). L'unicité, question délicate, fait l'objet d'énoncés de nature tout à fait différente.

On introduit maintenant une fonction qui jouera un rôle important dans la démonstration du théorème ci-dessus.

Définition 3.2 *On définit la fonction* de demande excédentaire *(agrégée)* $f : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$ *par*

$$f(p) := \sum_{i=1}^N d^i(p) - e^i$$

On notera que, pour tout $\ell = 1, \ldots, L$ et $p \gg 0$, $f_\ell(p)$ correspond à l'excès de demande global (possiblement négatif) pour le bien ℓ dans l'économie $\mathcal{E}$.

Remarque 3.2 $p^* \gg 0$ *est un prix d'équilibre si et seulement si* $f(p^*) = 0$.

Exercice 3.3 *Montrer que si* $f_\ell(p^*) = 0$ *pour tout* $\ell = 1, \ldots, L-1$ *alors* $f_L(p^*) = 0$ *aussi.*

Proposition 3.1 *Soit* $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ *une économie vérifiant les mêmes hypothèses que dans le Théorème 3.1. Alors la fonction de demande excédentaire vérifie les propriétés suivantes :*

(*i*) f *est continue*

(*ii*) f *est homogène de degré* 0

(*iii*) *Loi de Walras :* $\langle f(p), p\rangle = 0$ *pour tout* $p \gg 0$

(*iv*) *Il existe* $m > 0$ *tel que* $f_\ell(p) > -m$*, pour tout* $\ell = 1, \ldots, L$ *et tout* p.

(*v*) *Si* $p^n \to p$*, avec* $p \neq 0$ *et* $\prod_{\ell=1}^L p_\ell = 0$*, alors il existe* ℓ *tel que* $p_\ell = 0$ *et* $f_\ell(p^n) \to +\infty$.

Démonstration. (*i*), (*ii*) et (*iii*) découlent de Proposition 2.2. (*iv*) découle de la positivité de la demande. (*v*) est laissé en **exercice**. *Indication* : il existe au moins un consommateur i tel que $\langle p, e^i\rangle > 0$, puisque $\langle p, \sum_{i=1}^N e^i\rangle > 0$. La stricte monotonie des préférences fera que $d_\ell(p) \to +\infty$ pour un des biens dont le prix tend vers 0. ■

3.2 Calcul pratique d'équilibres et boîte d'Edgeworth

Considérons le cas $N = 2$ et $L = 2$. Notons les agents 1 et 2 et les biens x et y. Ainsi $e^1 = (e^1_x, e^1_y)$ est la dotation initiale du premier agent et $e^2 = (e^2_x, e^2_y)$ celle du second. Les utilités respectives sont u^1 et u^2, définies sur $\mathbb{R}^2_+$ et à valeurs dans réelles. Elle sont supposées régulières, c'est–à–dire, continues, strictement croissantes, strictement quasi-concaves et, de plus, continûment différentiables. La fonction de demande est donc bien définie, et elle est continue. Un équilibre consiste en une paire prix-allocation, $p = (p_x, p_y)$ et $z = (z^1, z^2) = ((x^1, y^1), (x^2, y^2))$.

3.3 Représentation graphique

Boîte d'Edgeworth (voir dessin). Notons $e_x = e^1_x + e^2_x$ et $e_y = e^1_y + e^2_y$ la quantité du bien x et y, respectivement, présents dans l'économie. L'idée est de placer l'agent 1 sur le point $(0, 0)$ et l'agent 2 sur le point (e_x, e_y), de sorte que les deux problèmes d'optimisation se représentent sur le même dessin (avec les coordonnées inversées). L'ensemble des allocations où la totalité des deux biens sont alloués est le suivant :

$$\{((x^1, y^1), (x^2, y^2)) \in \mathbb{R}^4_+ \mid x^1 + x^2 = e_x,\ y^1 + y^2 = e_y\}$$

Il correspond à la "boîte" $[0, e_x] \times [0, e_y]$. En effet, à chaque point $a = (a_x, a_y)$ tel que $0 \leq a_x \leq e_x$ et $0 \leq a_y \leq e_y$ lui correspond une, et une seule, allocation $((a_x, a_y), (e_x - a_x, e_y - a_y))$.

Contraintes budgétaires et fonctions de demande (voir dessin). Soit p un prix fixé et soient u^1 et u^2 des fonctions régulières. Les contraintes budgétaires $B(p, w^1)$ et $B(p, w^2)$ divisent la boîte en deux (voir dessin) et partagent la même frontière $\langle p, z^1\rangle = w^1$ et $\langle p, z^2\rangle = w^2$. C'est donc sur celle-ci que se placeront les demandes $d^1(p)$ et $d^2(p)$ des deux agents.

Quelques dessins :

- Allocation incompatible : excès de demande et/ou excès d'offre
- Allocation dominée : il existe une allocation réalisable qui améliore l'utilité à tous les agents
- Allocation d'équilibre

3.4 Résolution analytique

Etape 1. La résolution des problèmes d'optimisation individuels fournit les demandes $d^1(p)$ et $d^2(p)$ chaque consommateur, en fonction de p. En supposant une solution régulière (c'est–à–dire $x^i > 0$, $y^i > 0$ pour $i = 1, 2$) on résout les problèmes d'optimisation des deux agents en utilisant leurs TMS.

<u>Agent 1</u>

- (CPO) $TMS^1_{y \to x}\ (x^1, y^1) = \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x}(x^1,y^1)}{\frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1,y^1)} = \frac{p_x}{p_y}$

  (CB) $p_x x^1 + p_y y^1 = p_x e^1_x + p_y e^1_y$

<u>Agent 2</u>

— (CPO) $TMS^2_{y\to x}\ (x^2,y^2) = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x}(x^2,y^2)}{\frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2,y^2)} = \frac{p_x}{p_y}$

(CB) $\quad p_x x^2 + p_y y^2 = p_x e^2_x + p_y e^2_y$

On a déterminé ainsi $d^1(p) = (d^1_x(p), d^1_y(p))$ et $d^2(p) = (d^2_x(p), d^2_y(p))$, les fonctions de demande. On remarquera, en particulier, l'égalité à l'optimum $TMS^1_{y\to x}\ (x^1,y^1) = TMS^2_{y\to x}\ (x^2,y^2) = \frac{p_x}{p_y}$

Etape 2. Les conditions d'apurement des marchés :

— (bien x) $d^1_x(p) + d^2_x(p) = e^1_x + e^2_x$

— (bien y) $d^1_y(p) + d^2_y(p) = e^1_y + e^2_y$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes, grâce à loi de Walras (voir exercice 3.5). . On garde donc un degré de liberté pour le vecteur de prix, qu'on peut normaliser. Cela veut dire que le prix d'équilibre n'est déterminer qu'à un facteur multiplicatif près : c'est le rapport des prix p_x/p_y que l'on déterminera en fait, et non pas les prix eux-mêmes. Les normalisations les plus courantes sont $p_x + p_y = 1$ ou $p_x = 1$ (on dit que le bien x est le *numéraire*).

Etape 3. Ayant déterminé p, on trouve l'allocation d'équilibre $((x^1,y^1),(x^2,y^2))$ en remplaçant p dans l'expression des demandes des consommateurs.

Remarque 3.3 Si les fonctions d'utilité ne sont pas différentiables, ou si la solution du problème d'optimisation d'un des deux consommateurs n'est pas strictement positive (solution au bord), on peut suivre la même démarche, c.à.d.

Etape 1 : déterminer la (fonction de) demande de chacun des consommateurs.

Etape 2 : vérifier pour quel(s) prix ces demandes sont compatibles, i.e. les marchés s'apurent.

MAIS on ne peut plus égaliser d'emblée les TMS ! ! !

(Voir exemples en TD, lorsque les biens sont des parfaits substituts ou des parfaits compléments)

Exemple 3.4 *Déterminer l'équilibre concurrentiel pour* $u^1(x,y) = \ln x + 2\ln y$, $u^2(x,y) = 3\ln x + \ln y$, $e^1 = (1,1)$ *et* $e^2 = (2,3)$. *On est dans le cadre régulier : les utilités sont continues, croissantes, strictement concaves et différentiables. Après quelques calculs on obtient* $p_x/p_y = 31/14$, $z^1 = (15/31, 15/7)$ *et* $z^2 = (78/31, 13/7)$.

Exercice 3.5 *Dans le cas d'une économie à 2 biens et 2 consommateurs ayant des préférences monotones et des fonctions de demande* $p \mapsto d^i(p)$ *bien définies, montrer que pour tout* $p = (p_x, p_y) \gg 0$

$$p_x\left(d^1_x(p) + d^2_x(p) - e^1_x - e^2_x\right) + p_y\left(d^1_y(p) + d^2_y(p) - e^1_y - e^2_y\right) = 0$$

En déduire que si le marché pour le premier bien s'apure en p^*, *alors il en est de même pour le marché du second. Autrement dit,* p^* *est un prix d'équilibre* $\iff d^1_x(p^*) + d^2_x(p^*) = e^1_x + e^2_x$.

3.5 Démonstration dans le cas $N = L = 2$

Dans cette section, on démontrera le Théorème 3.1, i.e. l'existence d'un équilibre concurrentiel sous certaines hypothèses, pour une économie à deux biens et deux consommateurs. Les dotations initiales e^i resteront fixées et les utilités u^i sont régulières, pour $i = 1, 2$. Comme précédemment, on notera les deux biens x et y, et $p = (p_x, p_y)$.

Démonstration

- Rappelons que $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2$ est la fonction de demande excédentaire.
- D'après la Remarque 3.2, il suffit de montrer qu'il existe $p \gg 0$ tel que $f(p) = 0$.
- D'après l'Exercice 3.3, $f(p) = 0$ si et seulement si $f_x(p) = 0$.
- Par homogénéité, $f(p_x, p_y) = f(p_x/p_y, 1)$ pour tout $p = (p_x, p_y)$.
- Ainsi donc, il suffit de montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $f_x(r_0, 1) = 0$.
- D'après la Proposition 3.1 (v) , $\lim_{r\to 0} f_x(r, 1) = +\infty$. Il existe donc $r' > 0$ tel que $f_x(r', 1) > 0$.
- Par homogénéité, $r \to +\infty$ est équivalent à $p_y \to 0$. En inversant les rôles de x et y on obtient alors l'existence de $r'' > 0$ tel que $f_y(r'', 1) > 0$.
- Or, $\langle p, f(p)\rangle = 0$, pour tout p. En particulier, $r'' f_x(r'', 1) + f_y(r'', 1) = 0$, et donc $f_x(r'', 1) < 0$.
- Le résultat découle alors de la continuité de f_x car, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $r_0 \in [r', r'']$ tel que $f_x(r_0, 1) = 0$

3.6 Démonstration du cas général

Dans cette section, on démontrera le Théorème 3.1 pour une économie d'échange satisfaisant les hypothèses du théorème, pour N et L quelconques. Contrairement au cas précédent ($N = L = 2$) la loi de Walras ne permet plus de se ramener à un problème sur $\mathbb{R}$, puisque $f_1(p^*) = 0$ n'implique pas que p^* soit un prix d'équilibre. Le théorème des valeurs intermédiaires, utilisé plus haut, devra être remplacé par un théorème de point fixe plus général.

Théorème 3.6 (du point fixe de Brouwer) *Soit $S \subseteq \mathbb{R}^L$, $S \neq \emptyset$, compact, convexe non-vide et $g : S \to S$ une fonction continue. Alors, g admet un point fixe, c.à.d. $\exists\, x^* \in S$ tel que $g(x^*) = x^*$.*

Remarque 3.4 *Ce résultat coincide avec le théorème des valeurs intermédiaires pour $S \subset \mathbb{R}$. En effet, un compact, convexe, non-vide de $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle fermé. Sans perte de généralité, on peut prendre $[0, 1]$. On a alors $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 1 \Leftrightarrow h(0) \leq 0$ et $h(1) \geq 0$, où $h(x) := g(x) - x$ est continue. Par Brower, il existe $x^* \in [0, 1]$ tel que $g(x^*) = x^* \Leftrightarrow$ il existe $x^* \in [0, 1]$ tel que $h(x^*) = 0$.*

Démonstration

- On pose $S := \{p \in \mathbb{R}^L_+ \,|\, \sum_{\ell=1}^L p_\ell = 1\}$, l'ensemble (compact) des prix normalisés.
  On note $\mathrm{Int}S := \{p \in S \,|\, p \gg 0\}$ son intérieur.
- Rappelons que $f : S \to \mathbb{R}^L$ est la fonction de demande excédentaire.

- D'après la Proposition 3.1, f est continue sur Int$S$ et $\langle p, f(p)\rangle = 0$ pour tout $p \gg 0$. Nous négligerons ici les difficultés techniques liées au manque de continuité au bord. [4]
- D'après la Remarque 3.2, p^* est un prix d'équilibre ssi $f(p^*) = 0$.
- Contrairement au cas précédent ($N = L = 2$) la loi de Walras ne permet pas de se ramener à un problème sur $\mathbb{R}$. Ici, $f_1(p^*) = 0$ ne suffit plus.
- En revanche $f(p^*) \leq 0$ implique que $f(p^*) = 0$. En effet, d'après la Proposition 3.1 (v), on a nécessairement $p^* \gg 0$ et d'après la loi de Walras $\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^* f_\ell(p^*) = 0$. Donc $f_\ell(p_*) = 0$, $\forall \ell$.
- Le lemme suivant, qui repose sur le théorème de point fixe de Brower, termine la démonstration.

Lemme 3.1 *Soit $h : S \to \mathbb{R}^L$ une fonction continue satisfaisant $\langle p, h(p)\rangle = 0$ pour tout $p \in S$. Alors il existe $p^* \in S$ tel que $h(p^*) \leq 0$.*

Démonstration. On définit une fonction $g : S \to S$ en posant pour tout $\ell = 1, \ldots, L$

$$g_\ell(p) = \frac{p_\ell + \max\{0, h_\ell(p)\}}{1 + \sum_{k=1}^{L} \max\{0, h_k(p)\}}$$

Intuition pour cette définition : Bien sûr, h correspond à la fonction de demande excédentaire et $g(p)$ est un vecteur de prix (normalisé) obtenu par tâtonnement, en ajustant les prix en fonction de la demande. En effet, lorsque $h_\ell(p) \leq 0$ (excès d'offre) on maintient le prix du bien ℓ ; en revanche, lorsque $h_\ell(p) > 0$ (excès de demande) on augmente le prix. Le dénominateur est juste une normalisation assurant que $g(p)$ appartienne bien à S.

La fonction g est continue car h et le max le sont, et que le dénominateur est non nul. sur S, qui est un compact, convexe, non-vide de $\mathbb{R}^L$ (exercice). Par le théorème de Brouwer, il existe $p^* \in S$ tel que $g(p^*) = p^*$. On a donc :

$$p_\ell^* \sum_{k=1}^{L} \max\{0, h_k(p)\} = \max\{0, h_\ell(p^*)\}, \quad \forall \ell = 1, \ldots, L$$

En multipliant par $h_\ell(p^*)$ et en sommant sur $\ell = 1, \ldots, L$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^* h_\ell(p^*) \left(\sum_{k=1}^{L} \max\{0, h_k(p)\} \right) = \sum_{\ell=1}^{L} h_\ell(p^*) \max\{0, h_\ell(p^*)\}$$

Comme $\langle p, h(p)\rangle = 0$ pour tout $p \in S$, on a que $\sum_{\ell=1}^{L} h_\ell(p^*) \max\{0, h_\ell(p^*)\} = 0$ pour tout ℓ. Enfin, puisque $\max\{0, h_\ell(p^*)\} \geq 0$, on a bien $h_\ell(p^*) \leq 0$, pour tout ℓ, ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque 3.5 *Dans le théorème de Brower, la continuité de g est essentielle, y compris "au bord ". Le manque de continuité au bord de la fonction de demande excédentaire, que nous avons négligé, pose problème puisque nous ne pouvons pas appliquer le lemme 3.1. Ces difficultés peuvent être surmonté avec un peu plus de travail technique.*

4. Pour une preuve rigoureuse, voir Mas-Colell et al. (1995), chapitre 17. La fonction de demande excédentaire est remplacé par une correspondance, et on utilise le théorème de point fixe de Kakutani (généralisation du théorème de Brower, pour les correspondances).

3.7 Unicité

L'unicité (globale) de l'équilibre n'est pas garantie par les hypothèses du théorème d'existence. On sait, cependant, que le nombre d'équilibres est *génériquement* fini, c'est–à–dire que c'est le cas pour presque toutes les dotations initiales $(e^1, \dots, e^N)$. Plus précisément, l'ensemble de dotations initiales pour lesquels ce n'est pa le cas est négligeable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^{NL}$. Voici un exemple avec multiplicité de prix d'équilibre.

Exemple 3.7 (Multiplicité d'équilibres) Considérons une économie avec $u^1(x, y) = (64x^{-2} + y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, $u^2(x, y) = (x^{-2} + 64y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ (fonctions à élasticité de substitution constante, voir Section 2.6) et $e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$. Les fonctions d'utilité sont régulières, il existe donc au moins un équilibre. Sans perte de généralité on pose $p_y = 1$. En résolvant $f(p) = 0$, on obtient

$$f(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_x(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; d_x^1(p) + d_x^2(p) = 1 \;\Leftrightarrow\; t^3 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$$

où $t := (p_x)^{1/3}$. Ce polynôme admet 3 solutions, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2.62$, et $t_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.38$, qui sont dont 3 prix (relatifs) d'équilibre.

Quelques détails de la solution

On obtient $d_x^1(p) = \frac{4p_x}{4p_x+t} = \frac{4t^3}{4t^3+t}$ *et* $d_x^2(p) = \frac{1}{p_x+4t} = \frac{1}{t^3+4t}$. *Ainsi donc,* $d_x^1(p)+d_x^2(p) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t^3+4t} = \frac{t}{4t^3+t} \;\Leftrightarrow\; t^4 - 4t^3 + 4t^2 - t = 0 \;\Leftrightarrow\; t(t-1)(t^2 - 3t + 1) = 0$. *La solution* $t = 0$ *est exclue, car* $p \gg 0$.

Exemple 3.8 Soient $u^1(x, y) = u^2(x, y) = ax + by$ deux utilités identiques et linéaires. Le prix d'équilibre est unique (i.e. p^* tel que $p_x^*/p_y^* = a/b$) mais il y a une infinité d'allocations d'équilibre compatibles *(voir dessin).*

Exercice 3.9 *Etudier l'existence d'un équilibre concurrentiel dans le cas de deux agents ayant des utilités linéaires (pas nécessairement égales) sur deux biens* x *et* y. *On pourra prendre, sans perte de généralité et en expliquant pourquoi,* $u^1(x, y) = ax + y$ *et* $u^2(x, y) = bx + y$, *avec* $a, b > 0$.

4 Optimalité de Pareto

On considère une économie d'échange : $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$.

Définition 4.1 *Une allocation* $z = (z^1, \dots, z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ *est* réalisable *si* $\sum_{i=1}^N z^i \le \sum_{i=1}^N e^i$
Autrement dit, z *est réalisable si on n'alloue pas plus que ce qui est disponible.*

NB. Certains auteurs définissent une allocation réalisable par une égalité $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$. On a préféré l'inégalité pour exprimer le fait qu'il est tout à fait possible de ne pas allouer toutes les ressources, bien que cela n'arrive pas à l'équilibre (apurement des marchés).

Exemple 4.2 Prenons $N = L = 2$ et des dotations initiales $e^1 = (2, 0)$ et $e^2 = (0, 2)$. L'allocation $((2, 2), (1, 0))$ n'est pas réalisable, car on ne peut pas allouer 3 unités du premier bien, alors qu'il n'y en a que 2 dans l'économie. En revanche, les allocations $((1, 1), (1, 1))$, $((0, 1), (1, 1))$ et $((0, 0), (0, 0))$ sont toutes réalisables.

Définition 4.3 *Soient z et $\widetilde{z}$ deux allocations réalisables. On dit que $\widetilde{z}$ domine z au sens de Pareto si $u^i(\widetilde{z}^i) \geq u^i(z^i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$, et il existe $1 \leq j \leq N$ tel que $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$.*
Autrement dit, $\widetilde{z}$ est aussi bien que z pour tout le monde, et strictement mieux pour quelqu'un.

Définition 4.4 *Une allocation réalisable z est Pareto-optimale (ou efficace, ou efficiente) si elle n'est pas dominée au sens de Pareto par aucune allocation réalisable.*
Autrement dit, en z on ne peut pas améliorer l'utilité d'un agent sans pénaliser quelqu'un d'autre.

NB. La dotation initiale est toujours réalisable, mais pas nécessairement Pareto-optimale.
Question. Que se passe-t-il si $e = (e^i)_{i=1}^N$ est une allocation Pareto-optimale ?

Commentaires

- La Pareto-dominance ne permet pas nécessairement de comparer deux allocations données, i.e. c'est un ordre partiel.
- Le concept d'optimum de Pareto ne fait pas appel à la notion de prix.
- A un optimum de Pareto, il n'existe plus d'échange mutuellement avantageux.
- L'ensemble des optima de Pareto (attention au pluriel...) dépend de la dotation initiale totale des agents $e := \sum_{i=1}^N e^i$, et non pas de la répartition $(e^1/e, \dots, e^N/e)$ aux seins des agents.
- Un optimum de Pareto n'est pas nécessairement souhaitable (un agent qui a tout, par exemple).
- En revanche, l'optimalité de Pareto est une condition minimale d'équilibre : une allocation dominée au sens de Pareto ne peut pas être un équilibre, car on pourrait améliorer l'utilité de tous les agents !

4.1 Les deux théorèmes du bien-être

Cette section porte sur deux résultats fondamentaux. Le premier théorème du bien-être affirme que l'équilibre concurrentiel est toujours efficient (i.e. Pareto-optimal). Le second, qui en est une sorte de réciproque, que toute allocation efficiente peut être obtenue comme équilibre d'une économie, lorsqu'une redistribution initiale des richesses est possible. Ces résultats ont peut-être été déjà vus sous l'angle de l'équilibre partiel, avec des consommateurs seulement, ou avec des consommateurs et des producteurs. Dans ce cours, nous allons les aborder dans une optique d'équilibre général. Nous commencerons par une économie composée uniquement de consommateurs (le cas d'une économie mêlant consommateurs et producteurs sera traité au Chapitre 5). Il est important de noter les hypothèses sur lesquelles reposent ces théorèmes, afin de comprendre quand et pourquoi ils ne s'appliquent pas ; on parle alors de défaillance du marché (sujet abordé au Chapitre 6). Le premier théorème repose sur 2 hypothèses :

— la complétude de l'économie

— les agents sont preneurs de prix

La complétude signifie qu'il existe un marché pour tout, et que toute les informations importantes concernant les biens sont publiquement connues. On aura une défaillance, par exemple, dans le cas d'externalités ou bien public (un marché inexistant), ou dans un cadre d'information asymétrique. La deuxième hypothèse repose sur le fait qu'il y a une multitude de firmes qui produisent exactement le même bien (parfaits substituts) et que chacune, de même que chaque agent, a une influence infinitésimal sur le marché. Lorsqu'un agent a du *pouvoir de marché* (monopole, oligopole) cette hypothèse fera défaut. Le second théorème nécessite d'une troisième hypothèse importante :

— la convexité

Sans convexité des préférences des consommateurs (et des ensembles de production dans une économie avec production) le résultat ne sera plus valable.

Théorème 4.1 (Premier théorème du bien-être) *Soit* $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ *une économie dans laquelle les fonctions d'utilité* u^i *,* $i = 1, \ldots, N$*, sont croissantes. Si* $(p, \widetilde{z})$ *est un équilibre concurrentiel, alors* $\widetilde{z}$ *est une allocation Pareto-optimale.*

Démonstration. Comme $(p, \widetilde{z})$ est un équilibre et que u^i est croissante, $\forall \zeta^i \in \mathbb{R}^L_+$ et $i = 1, \ldots, N$:

— $\langle p, \zeta^i\rangle \leq \langle p, e^i\rangle \Rightarrow u^i(\zeta^i) \leq u^i(\widetilde{z}^i)$

— $\langle p, \zeta^i\rangle < \langle p, e^i\rangle \Rightarrow u^i(\zeta^i) < u^i(\widetilde{z}^i)$

Par l'absurde, supposons que $\widetilde{z}$ soit Pareto-dominée par une allocation réalisable z. Dans ce cas, on a $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$, $u^i(z^i) \geq u^i(\widetilde{z}^i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et il existe $1 \leq j \leq N$, tel que $u^j(z^j) > u^j(\widetilde{z}^j)$.

— On doit donc avoir pour tout $1 \leq i \leq N$, $\langle p, z^i\rangle \geq \langle p, e^i\rangle$ et pour un $1 \leq j \leq N$, $\langle p, z^j\rangle > \langle p, e^j\rangle$

— En sommant, $\sum_{i=1}^N\langle p, z^i\rangle > \sum_{i=1}^N\langle p, e^i\rangle$, c'est–à–dire $\langle p, \sum_{i=1}^N z^i\rangle > \langle p, \sum_{i=1}^N e^i\rangle$

— Mais ceci contredit $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$, puisque $p \gg 0$

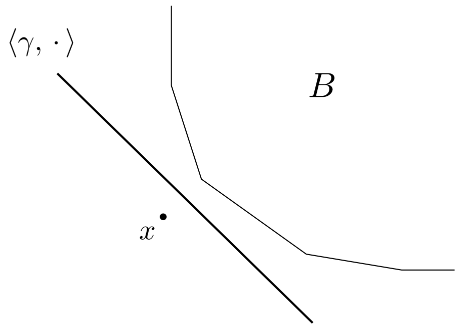
■

Afin d'établir le second théorème du bien-être, on aura besoin du théorème de séparation.

Théorème 4.2 (de séparation) *Soit* $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ *deux ensembles convexes disjoints. Alors, il existe* $\gamma \in \mathbb{R}^N$*,* $\gamma \neq 0$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $\langle\gamma, y\rangle < c < \langle\gamma, x\rangle$*, pour tout* $x \in A$ *et* $y \in B$*.*

Corollaire 4.1 *Soit* $B \subseteq \mathbb{R}^N$ *un ensemble convexe et* $x \notin int(B)$*. Il existe* $\gamma \in \mathbb{R}^N$*,* $\gamma \neq 0$*, tel que* $\langle\gamma, y\rangle \leq \langle\gamma, x\rangle$*, pour tout* $y \in B$*.*

Remarque 4.1 *Dans les deux résultats ci-dessus,* γ *représente un hyperplan (plus exactement, son vecteur orthogonal) séparant les deux convexes. La figure suivante illustre le Corollaire 4.1 dans* $\mathbb{R}^2$*, auquel cas* γ *est une droite séparant* x *et* B*.*



Théorème 4.3 (Second théorème du bien-être) *Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i sont strictement croissantes et quasi-concaves. Si $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^1, \ldots, \widetilde{z}^N)$ est une allocation Pareto-optimale telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$ pour tout $i = 1, \ldots, N$, alors $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre concurrentiel de $\mathcal{E}' = \{L, N, (\widetilde{z}^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$. Autrement dit, il existe p tel que $\widetilde{z}^i$ maximise $u^i(z^i)$ sous $\langle p, z^i \rangle \le \langle p, \widetilde{z}^i \rangle$, pour tout $i = 1, \ldots, N$.*

Démonstration.

— On pose $P^i := \{z^i \in \mathbb{R}^\ell_+ \mid u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i)\}$, pour tout $i = 1, \ldots, N$

— La quasi-concavité de u^i implique que P^i est convexe

— $P := \sum_{i=1}^N P^i = \{z \in \mathbb{R}^L_+ \mid z = \sum_{i=1}^N z^i,$ avec $z^i \in P^i,\ \forall i = 1, \ldots, N\}$ est également convexe

— Soit $\zeta = \sum_{i=1}^N \widetilde{z}^i$. Comme $\widetilde{z}$ est Pareto-optimale, on a $\zeta \notin P$

— Par le théorème de séparation, il existe $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$, tel que $\langle p, \zeta \rangle \le \langle p, z \rangle$, pour tout $z \in P$

— On vérifie ensuite (*exercice*) que $p > 0$ et la condition d'optimalité de chaque consommateur, (i.e. $u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i) \Rightarrow \langle p, x \rangle^i > \langle p, \widetilde{z}^i \rangle$) pour tout $i = 1, \ldots, N$

■

Remarque 4.2 *Le second théorème du bien-être n'est pas nécessairement vrai dans une économie où les préférences ne sont pas convexes (voir exemple graphique).*

Remarque 4.3 *Pour faire de $\widetilde{z}$ une allocation d'équilibre, on a modifié les dotations initiales de e^i à $\widetilde{z}^i$, $i = 1, \ldots, N$, ce qui peut être lourd à réaliser. En réalité, il suffit d'effectuer des transferts forfaitaires (i.e. indépendants des choix des agents) de richesse, compte tenu des prix p qui permettent la décentralisation de $\widetilde{z}$.*

To be continued...

5 $*$ Annexe

5.1 Rappels topologiques dans $\mathbb{R}^L$

- $x \gg y$ ssi $x^\ell > y^\ell$ pour tout ℓ
- $x \geq y$ ssi $x^\ell \geq y^\ell$ pour tout ℓ
- $x > y$ ssi $x^\ell \geq y^\ell$ pour tout ℓ et $x \neq y$
- Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction et $c \in \mathbb{R}$ une constante. Les notations suivantes sont équivalentes :

  $\{f = c\} = f^{-1}(\{c\}) = \{x \in X \mid f(x) = c\}$ et $\{f \geq c\} = f^{-1}([c, +\infty)) = \{x \in X \mid f(x) \geq c\}$
- L'ensemble $F \subset \mathbb{R}^L$ est *fermé* si pour toute suite $(x_n)_n$ dans F telle que $x_n \to x$, on a $x \in F$. Autrement dit, F est fermé ssi il est égale à son adhérence $\bar{F}$.
  - L'intersection de fermés est un fermé
  - Les demi-espaces (i.e. les ensembles de la forme $\{x \in \mathbb{R}^L \mid \langle a, x \rangle \leq c\}$ pour certains $a \in \mathbb{R}^L$ et $c \in \mathbb{R}$) sont des ensembles fermés.
  - Les hyperplans, la sphère sont des ensembles fermés.
- L'ensemble $B \subset \mathbb{R}^L$ est *borné* s'il existe $M > 0$ tel que $x^\ell \in [-M, M]$, $\forall x \in B$, $\forall \ell$.
- L'ensemble $K \subset \mathbb{R}^L$ est *compact* ssi il est fermé et borné.
- L'ensemble $C \subset \mathbb{R}^L$ est *convexe* si pour tout $x, y \in C$, et $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$. Autrement dit, C est convexes si $x, y \in C \Rightarrow [x, y] \subset C$. L'intersection de convexes est convexe.
- Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^L$ fermé et convexe est *strictement convexe* si pour tout x et y appartenant à la frontière de S, $\lambda x + (1 - \lambda) y$ appartient à l'intérieur de S, pour tout $\lambda \in (0, 1)$.

Exemple 5.1 *Dans $\mathbb{R}^2$, le disque unité $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un ensemble compact, strictement convexe. Le carré, $[0, 1]^2$ est convexe (mais pas strictement), compact. Le cercle $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est compact, mais n'est pas convexe. L'ensemble $(0, 1)^2$ n'est pas fermé.*

Théorème 5.2 *Soit $f : K \subset \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec K un compact. Alors f atteint son maximum et son minimum dans K.*

5.2 Calcul différentiel

Dérivée usuelle. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(x)$, *la dérivée de f en x*, est une application linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(x)(h) = hf'(x)$. La dérivée donne la pente d'une droite (application linéaire dans $\mathbb{R}$) tangente à f en $f(x)$. On a alors $f(x + h) = f(x) + f'(x)(h) + o(h)$. La dérivée $f'(x)$ est l'application linéaire qui approche au mieux la fonction f en x.

Dérivée partielle. Lorsque $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$, on définit *la dérivée partielle de f en x par rapport à la ℓ-ème variable* comme étant la dérivée de la fonction $z \mapsto f(x_1, \ldots, z, \ldots, x_L)$, qui est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en x_ℓ (quand celle-ci est dérivable, bien entendu). Formellement, on pose dans ce cas :

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_\ell} := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(x_1, \ldots, x_\ell + h, \ldots, x_L) - f(x_1, \ldots, x_\ell, \ldots, x_L) \right)$$

Vecteur gradient. Lorsque $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable (ou différnetiable), on définit la *dérivée de f en x* comme étant l'application linéaire $f'(x)$ de $\mathbb{R}^L$ dans $\mathbb{R}$, qui approche au mieux la fonction f en x. Autrement dit $f(x+h) = f(x) + f'(x)(h) + o(h)$, lorsque $h \to 0$. On notera bien que, dans cette égalité, x et h sont dans $\mathbb{R}^L$ et que $o(h)$ est une fonction telle que $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$. La linéarité de $f'(x)$ veut tout simplement dire que, pour tout $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}^L$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, on a $f'(x)(\sum_{k=1}^n \alpha_k h_k) = \sum_{k=1}^n \alpha f'(x)(h_k)$. Or, une application linéaire de $\mathbb{R}^L$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit toujours comme un produit scalaire (Théorème de représentation de Riesz). C'est–à–dire, qu'il existe un vecteur, noté $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^L$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^L$, on a $f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h\rangle$. Ce vecteur est le *gradient de f en x* et on a l'égalité suivante :

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_L}\right) \in \mathbb{R}^L$$

On peut donc écrire $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + o(h)$, quand $h \to 0$, ou encore

$$f(x_1 + h_1, \ldots, x_L + h_\ell) = f(x_1, \ldots, x_L) + \sum_{\ell=1}^{L} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_L)}{\partial x_\ell} h_\ell + o(h), \quad \text{quand } h = (h_1, \ldots, h_L) \to 0$$

Pour $L = 2$, lorsque f est différentiable on a $\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}) \in \mathbb{R}^2$ et on peut écrire :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + k\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + o(h,k), \quad \text{quand } h, k \to 0$$

NB. Dans cette dernière égalité, x, y, h et k sont dans $\mathbb{R}$, (x,y) est un point et (h,k) une petite perturbation.

Interprétation géométrique du gradient. Soit $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $\nabla f(x)$ son gradient en x et $h \in \mathbb{R}^L$ une direction. L'"angle" entre $\nabla f(x)$ et h détermine si la fonction croît ou décroit dans la direction h. Plus précisément, soit $\alpha \in [0, \pi]$ l'angle déterminé par $\nabla f(x)$ et h. Alors :

- Si $\alpha \in [0, \pi/2)$ (angle aigu) alors $\langle \nabla f(x), h\rangle > 0$. Donc, en x, f croît dans la direction de h. En effet, pour h assez petit on a

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + o(h) > f(x)$$

- Si $\alpha \in (\pi/2, \pi]$ (angle obtus), alors $\langle \nabla f(x), h\rangle < 0$. Donc, en x, f décroît dans la direction de h. En effet, pour h assez petit on a $f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + o(h) < f(x)$
- Si $\alpha = \pi/2$ (angle droit), alors $\langle \nabla f(x), h\rangle = 0$. Donc, en x, f est constante dans la direction de h, ou encore, h est tangente à la courbe de niveau passant par $c := f(x)$, $\{z \in \mathbb{R}^L \mid f(z) = c\}$.

La matrice hessienne. Lorsque $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ (i.e. deux fois continument dérivable) la dérivée seconde de f en x est une matrice taille $L \times L$:

$$f''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_L} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_L \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_L \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_L^2} \end{pmatrix}$$

Cette matrice, nommée hessienne de f, est une matrice symétrique car, pour tout $1 \leq k, \ell \leq L$:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_\ell} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_\ell \partial x_k}$$

Pour $L = 2$, la matrice hessienne s'écrit :

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

5.3 Concavité et quasi-concavité

Soit $f : X \subset \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ une fonction, avec X un ensemble convexe.

— f *concave* ssi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \ \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0,1]$

— f *strictement concave* ssi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \ \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in (0,1)$

— f *quasi-concave* ssi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}, \ \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in [0,1]$

— f *quasi-concave* ssi $\{f \geq c\}$ est convexe, pour tout $c \in \mathbb{R}$.

— f *strictement quasi-concave* ssi $f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{f(x), f(y)\}, \ \forall x, y \in X, \ \forall \lambda \in (0,1)$

— f *strictement quasi-concave* ssi $\{f \geq c\}$ est "strictement" convexe, pour tout $c \in \mathbb{R}$

NB 1. On a deux définitions équivalentes pour la quasi-concavité et la stricte quasi-concavité.

NB 2. L'intervalle $(0,1)$ est ouvert pour les inégalités strictes.

Exercice 5.3 *Soit $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer les relations suivantes :*

1. *f concave $\Rightarrow$ f quasi-concave.*
2. *f strictement concave $\Rightarrow$ f strictement quasi-concave.*
3. *Dans les deux cas précédents, l'implication inverse n'est pas vraie (donner des exemple).*
4. *$f_\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ concave pour tout $\ell = 1, \ldots, L \Rightarrow (x_1, \ldots, x_L) \mapsto f_1(x_1) + \cdots + f_L(x_L)$ est une fonction concave de $\mathbb{R}^L$ dans $\mathbb{R}$.*
5. *Même question que 4., mais avec la stricte concavité.*

5.4 Dérivabilité et concavité

Gradient et concavité. Lorsqu'un fonction $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ est dérivable, la concavité peut se définir très simplement à l'aide du gradient. En effet, f est *concave* si et seulement si si elle est *en-dessous* *de ses tangentes*, c'est–à–dire, si

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^L$$

De même, f est *strictement concave* ssi elle est "strictement" en dessous de ses tangentes :

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle > f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^L,\ x \neq y$$

Hessienne et concavité. Une fonction $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$, dérivable deux fois, est *concave* si et seulement si sa hessienne f'' est semi-définie négative. De même, f est *strictement concave* si et seulement si f'' est définie négative.

- Pour $L = 1$, on retrouve des résultats connus, à savoir :
  - f concave ssi $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  - f strictement concave ssi $f''(x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Pour $L = 2$, les conditions sur la hessienne s'écrivent comme suit :
  - $f(x, y)$ est concave si et seulement si $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0$$

  - $f(x, y)$ est strictement concave ssi $\forall x, y \in \mathbb{R}$ les inégalités ci-dessus sont strictes.

NB. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ (i.e. deux fois dérivable) on a donné *3 définitions équivalentes* pour la concavité et la stricte quasi-concavité.

Exercice 5.4 *Montrer la concavité des fonctions suivantes :*

- $(x, y) \mapsto \min(x, y)$
- $(x, y) \mapsto ax^\alpha + by^\beta$, *pour* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *et* $a, b \geq 0$
- $(x, y) \mapsto cx^\alpha y^\beta$, *pour* $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ *et* $c \geq 0$
- $(x, y) \mapsto \alpha \ln(1 + x) + \beta \ln(1 + y)$

Lesquelles sont strictement concaves ? (on raisonnera en fonction des paramètres)
Tracer, pour chacun d'elles, la courbe de niveau en 1, i.e. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f(x, y) = 1\}$ *?*