Economie dans l'Incertain

Université Paris-Dauphine
Licence MIDO
Année 2017-2018

Chapitre 1

Quelques critères simples

I Critère d'Espérance

I.1 Définition

On calcule simplement l'espérance de la loterie L : $U(L) = \mathbb{E}(L)$. L'agent choisit la loterie dont l'espérance est la plus élevée.

I.2 Le paradoxe de Saint-Petersbourg

On considère la loterie qui correspond aux gains suivants :

F	1€
PF	2€
PPF	4€
$PPPF$	2€
$\vdots$	$\vdots$
$P^{\mathrm{n}}F$	2^n€

Calculons l'espérance de cette loterie : $\mathbb{E}[L] = 1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+\ldots+2^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2} = +\infty$

L'espérance n'est pas un critère suffisant, car elle dirait que tout individu devrait vouloir participer à cette loterie et serait même prêt à payer n'importe quel montant pour acheter un billet ! En fait, le niveau de satisfaction d'un agent n'est pas doublée quand le montant gagné passe (par exemple) de 1 million d'euros à 2 millions. Il ne faut donc pas prendre l'espérance du gain x mais l'espérance de l'utilité $u(x)$ associée au gain x.

En prenant par exemple $u(x) = ln(x)$, on peut calculer $\mathbb{E}[L]$:

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\ln(2^{k-1})}{2^k} = \ln 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k-1}{2^k}.$$

On définit, pour tout entier $k \geq 1$, la fonction $g_k(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_k(x) = -x^{k-1}$ et la fonction $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$. On obtient alors : $\mathbb{E}[L] = \ln 2(g'(2))$.

Or $g(x)$ correspond à la somme d'une suite géométrique. On peut donc la réécrire : $g(x) = -\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{1-x}$. En dérivant on obtient $g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, d'où $g'(2) = 1$. Par conséquent, $\mathbb{E}[L] = \ln 2$.

II Critère Espérance-Variance

II.1 Définition

En utilisant le critère Espérance-Variance, l'utilité associée à une loterie L est donnée par l'égalité suivante :

$$U(L) = f(\mathbb{E}(L), \sigma^2(L))$$

,

Hypothèses :
$f_1 > 0$
$f_2 > 0$: "goût pour le risque"
$f_2 < 0$: "aversion pour le risque"
$f_2 = 0$: "neutralité au risque", (on revient alors au critère d'espérance défini plus haut).

II.2 Spécification linéaire

Dans ce cas, on a :

$$U(L) = \mathbb{E}(L) - k\sigma^2(L).$$

Ainsi :
$k < 0$: "goût pour le risque"
$k > 0$: "aversion pour le risque"
$k = 0$: "neutralité au risque"
Notons que ce critère aboutit parfois à des choix paradoxaux. Considérons par exemple la loterie A qui de façon sûre rapporte un gain de zéro et la loterie B qui rapporte un gain de 100 avec une probabilité de 0,5 et 0 sinon. Pour k suffisamment élevé, l'agent préférera la loterie A ! !

III Critère safety-first

III.1 Définition

Dans le critère Safety-first, on utilise une variance doublement modifiée :

1. Le seuil t remplace l'espérance
2. On intègre sur $]-\infty, t[$ (on se focalise sur "le mauvais risque")

Cela signifie :

$$\sigma^2(t) = \int_{-\infty}^{t} (x-t)^2 f(x)dx,$$

où x est le gain de la loterie.

On utilise ensuite une représentation linéaire :

$$U(L) = \mathbb{E}(L) - k\sigma^2(t)(L)$$

III.2 Exemple

On suppose $k = 1, t = -3$

$\tilde{x_A}$	$p(\tilde{x_A})$	$\tilde{x_B}$	$p(\tilde{x_B})$	$\mathbb{E}[A] = 6$	$U(B) > U(A)$	$U(A) = -13$
-1	0,2	-20	0,01	$\mathbb{E}[B] = 7,23$	$\tilde{U}(A) > \tilde{U}(B)$	$\tilde{U}(A) = 6$
4	0,3	7	0,49	$\sigma^2(-3)(A) = 0$	$\sigma^2(A) = 19$	$U(B) = -0,51$
10	0,5	8	0,5	$\sigma^2(-3)(B) = 2,99$	$\sigma^2(B) = 7,74$	$\tilde{U}(B) = 4,24$

Chapitre 2

La Théorie d'Espérance d'Utilité

I Description du formalisme choisi

Ensemble des issues : $C = \{c_1, \dots, c_N\}$. On suppose donc dans ce chapitre, afin de simplifier les raisonnements, que le nombre d'issues est fini.

Définition 1. Une loterie simple $L = (p_1, \dots, p_N)$ est une liste avec : $\forall n, p^n \geq 0$ et $\sum_{n=1}^{N} p_n = 1$
p_n s'interprète comme la probabilité de la réalisation de l'issue c_n.

Définition 2. Soient K loteries simples $L_k = (p_1^k, \dots, p_N^k), k = 1, \dots, K$ et K réels $\alpha_k \geq 0$ avec $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$. La loterie composée $(L_1, \dots, L_K, \alpha_1, \dots, \alpha_K)$ est l'alternative risquée qui aboutit à la loterie simple L_k avec une probabilité de α_k pour tout k.

Remarque 2.1. On peut écrire une loterie simple comme une loterie composée en prenant des loteries simples dégénérées. Plus précisément, on procède comme suit : $K = N, \alpha_1 = p_1, \dots, \alpha_K = p_N$ et $L_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, L_K = (0, \dots, 0, 1)$. A l'inverse, à partir de toute loterie composée on peut construire une loterie réduite qui est simple, en écrivant : $\forall n \in \{1, \dots, n\}, p_n = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k p_n^k$. On suppose que pour l'agent chaque loterie composée est équivalente à la loterie réduite qui lui correspond.

II Les préférences sur les loteries

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des loteries simples sur l'ensemble des issues C et considère un décideur dont la relation de préférence sur $\mathcal{L}$ ($\succeq$) satisfait les axiomes suivants :

- Axiome 1. Complétude.

$$\forall L, L' \in \mathcal{L}, L \not\succeq L' \Rightarrow L' \succ L \tag{2.1}$$

  Traduit le fait que deux loteries pourront toujours être comparées.
- Axiome 2. Transitivité

$$\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}, (L \succeq L' \textit{ et } L' \succeq L'') \Rightarrow L \succeq L'' \tag{2.2}$$

Traduit une certaine cohérence, rationalité entre les classements.

- Axiome 3. Continuité
  Pour toutes loteries $L, L', L'' \in \mathcal{L}$, les ensembles

$$\{\alpha \in [0,1], \alpha L + (1-\alpha)L' \succeq L''\}$$
$$\{\alpha \in [0,1], \alpha L + (1-\alpha)L' \preceq L''\}$$

  sont fermées
  Remarque 2.2. Cet axiome est assez naturel. Il traduit le fait que le décideur gardent les mêmes préférences pour des changements de probabilité extrêmement faibles. Cependant, on peut voir qu'il n'est pas toujours vérifié. Considérons ainsi l'exemple suivant : L = bonne soirée, L' = mourir, L'' = rester chez soi. Si un individu ne veut prendre aucun risque alors $\{\alpha \in [0,1], L'' \succeq \alpha L + (1-\alpha)L'\} = [0,1[$.

  Remarque 2.3. Les trois premiers axiomes suffisent pour conclure à l'existence d'une fonction d'utilité représentant les préférences. Autrement dit, $\exists U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}, L \succeq L' \Leftrightarrow U(L) \geq U(L')$. La fonction U est nommée fonction d'utilité globale. On a l'importante propriété suivante :
  Proposition 1. Soit la fonction d'utilité V définie par $V = g \circ U$ avec g strictement croissante, alors V représente les mêmes préférences que U.
- Axiome 4. Indépendance.

$$\forall L, L', L'' \in \mathcal{L}, \alpha \in]0,1[, L \succeq L' \Leftrightarrow \alpha L + (1-\alpha)L'' \succeq \alpha L' + (1-\alpha)L'' \qquad (2.3)$$

C'est l'axiome le plus criticable. On peut le traduire en utilisant des loteries composées de la manière suivante. Pour tout $L, L', L'' \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in]0,1[$, on définit les loteries composées L_c et L'_c par $L_c = (L, L'', \alpha, 1-\alpha)$ et $L'_c = (L', L'', \alpha, 1-\alpha)$. L'axiome d'indépendance dit que l'agent s'il préfère L à L' doit également préférer L_c à L'_c. Il est en quelque sorte capable de "voir" L et L' dans les loteries L_c et L'_c (même si ces dernières sont présentées sous une forme réduite dans laquelle L et L' n'apparaissent pas...). Il réalise ensuite le raisonnement suivant : "Dans la loterie L_c comme dans la loterie L'_c, j'ai une probabilité $(1-\alpha)$ de jouer la loterie L''. A ce niveau donc, pas de différence entre L_c et L'_c. En revanche, dans la loterie L_c avec une probabilité α, je joue la loterie L tandis que dans la loterie L'_c avec une probabilité α, je joue la loterie L' ; comme je préfère L à L', je dois préférer L_c à L'_c.

Maurice Allais a mis en évidence la faiblesse de l'axiome d'indépendance dans une conférence de l'American Economic Society qui s'est tenue en 1953. Voici l'argument de son paradoxe. Considérons les loteries suivantes :

x_1	$p(x_1)$	x_2	$p(x_2)$	x_3	$p(x_3)$	x_4	$p(x_4)$
0	0,9	0	0,91	0	0	0	0,1
10000	0,1	10000	0	10000	1	10000	0
15000	0	15000	0,09	15000	0	15000	0,9

Notons $\tilde{x}_0$ la loterie (dégénérée) qui rapporte le gain zéro avec probabilité 1. La loterie $\tilde{x}_1$ peut s'écrire comme une loterie composée de la manière suivante : $\tilde{x}_1 = 0,9\tilde{x}_0 + 0,1\tilde{x}_3$. De même, la loterie $\tilde{x}_2$ peut s'écrire : $\tilde{x}_2 = 0,9\tilde{x}_0 + 0,1\tilde{x}_4$. Un individu qui préfère $\tilde{x}_3$ à $\tilde{x}_4$ doit donc également préférer (d'après l'axiome d'indépendance) $\tilde{x}_1$ à $\tilde{x}_2$. Or, on peut constater que ce n'est pas toujours le cas ! (En particulier ici, en des termes "psychologiques", $\tilde{x}_3$ est attirante par rapport à $\tilde{x}_4$ car elle permet d'accéder à un gain sûr. Cet effet de "certitude" disparaît quand on considère $\tilde{x}_1$...)

Une autre critique de l'axiome d'indépendance est due à Mark Machina. L'ensemble C des issues dans cet exemple est donné par :

$$C = \{\text{faire un voyage à Venise, voir un beau film sur Venise, rien}\}.$$

On considère les loteries suivantes : $L_1 = (0.999, 0.001, 0)$, $L_2 = (0.999, 0, 0.001)$, $L_3 = (0, 1, 0)$ et $L_4 = (0, 0, 1)$. Notons L_v la loterie (dégénérée) qui fait gagner un voyage à Venise avec probabilité 1. On peut écrire la loterie L_1 comme une loterie composée de la manière suivante : $L_1 = 0,999L_v + 0,001L_3$. De même, on a : $L_2 = 0,999L_v + 0,001L_4$. Si un agent préfère l'issue "voir un beau film sur Venise" à l'issue "rien" (c'est-à-dire la loterie L_3 à la loterie L_4), il doit également préférer (d'après l'axiome d'indépendance) L_1 à L_2. Or ce n'est pas nécessairement le cas, si on prend en compte l'effet "psychologique" de la déception du décideur s'il ne gagne pas le voyage à Venise : il peut préférer ne plus entendre parler de Venise et donc ne pas voir un film qui, dans un autre contexte, lui aurait plu...

III La forme d'espérance d'utilité

Définition 3. La fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ a une forme d'espérance d'utilité s'il existe un vecteur $(u_1, \ldots, u_N)$ tel que pour toute loterie simple $L = (p_1, \ldots, p_N) \in \mathcal{L}$, on a : $U(L) = \sum_{i=1}^{N} p_i u_i$. Une fonction d'utilité respectant cette propriété est dite fonction d'utilité von Neumann-Morgenstern (vNM).

Théorème 1. Une fonction d'utilité U a une forme d'espérance d'utilité si et seulement si elle est linéaire c'est à dire si et seulement si elle satisfait la propriété de linéarité : $U(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k), \forall K$ loteries $L_k \in \mathcal{L}, k = (1, \ldots, K)$ et $\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_K) > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$.

Démonstration. Linéarité $\Leftrightarrow$ vNM.
$\Rightarrow$
Soit $L \in \mathcal{L}, L = (p_1, \ldots, p_N)$. On choisit alors $K = N$ et $\forall k = 1, \ldots, N, L_k$ est la loterie dégénérée qui attribue à l'issue k la probabilité 1. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_N) = (p_1, \ldots, p_N), U$ satisfait la propriété de linéarité, par conséquent $U(L) = U(\sum_{k=1}^{N} p_k L_k) = \sum_{k=1}^{N} p_k U(L_k)$. Il suffit à présent de choisir $(u_1, \ldots, u_N) = (U(L_1), \ldots, U(L_N))$.
$\Leftarrow$
On établit tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 1. Une fonction d'utilité $U : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si

$$U(\alpha L + (1-\alpha)L') = \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L'),$$

pour tout $\alpha \in [0,1]$ et pour toutes loteries $L, L' \in \mathcal{L}$.

Démonstration. Un sens de cette équivalence est immédiat, l'autre s'établit par récurrence. Notons H_n l'hypothèse (de récurrence) au rang n suivante :

$$U(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k U(L_k),$$

pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$ tel que $\sum_{k=1}^{K} \alpha_n = 1$.

1. Par hypothèse, H_2 vraie.
2. Il faut à présent montrer : $H_n \Rightarrow H_{n+1}$

$$\begin{aligned}
U(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k L_k) &= U((1-\alpha_{n+1})(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} L_k) + \alpha_{n+1} L_{n+1}) \\
&\underbrace{=}_{H_2} (1-\alpha_{n+1}) U(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} L_k) + \alpha_{n+1} U(L_{n+1}) \\
&\underbrace{=}_{H_n} (1-\alpha_{n+1})(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} U(L_k)) + \alpha_{n+1} U(L_{n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k U(L_k)
\end{aligned}$$

□

A présent, concluons la preuve du théorème. Soit U une fonction d'utilité vNM. Pour toutes loteries $L = (p_1, \ldots, p_N)$, $L' = (p'_1, \ldots, p'_N) \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in [0,1]$, on a :

$$U(\alpha L + (1-\alpha)L') = \sum_{n=1}^{N} (\alpha p_n + (1-\alpha)p'_n) u_n$$

car la probabilité que l'issue n soit réalisée dans la loterie $\alpha L + (1-\alpha)L'$ est $\alpha p_n + (1-\alpha)p'_n$.

Donc :

$$U(\alpha L + (1-\alpha)L') = \alpha(\sum_{n=1}^{N} u_n p_n) + (1-\alpha)(\sum_{n=1}^{N} u_n p'_n) = \alpha U(L) + (1-\alpha)U(L').$$

□

Proposition 2. Supposons que la fonction d'utilité U soit une fonction d'utilité vNM représentant les préférences $\succeq$ sur $\mathcal{L}$. Soit $\tilde{U} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ une autre fonction d'utilité vNM, elle représente $\succeq$ si et seulement si il existe des scalaires $\beta > 0, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\tilde{U}(L) = \beta U(L) + \gamma, \forall L \in \mathcal{L}$.

Démonstration. On a tout d'abord besoin du lemme très simple suivant :
Lemme 2. $\exists \overline{L}, \underline{L}$ tels que $\overline{L} \succeq L \succeq \underline{L}, \forall L \in \mathcal{L}$.

Démonstration. Soient $(u_1, \ldots, u_N) = (U(c_1), \ldots, u(c_N))$. On note $\underline{n}$ l'issue la plus défavorable, c'est-à-dire, telle que $u_{\underline{n}} \leq u_n, \forall n = 1, \ldots, N$. De même, on note $\overline{n}$ l'issue la plus favorable, c'est à dire, telle que $u_{\overline{n}} \geq u_n, \forall n = 1, \ldots, N$. Comme la fonction U est vNM, on peut facilement vérifier que : $u_{\overline{n}} \geq U(L) \geq u_{\underline{n}}$, pour tout $L \in \mathcal{L}$. Il suffit donc de choisir pour $\overline{L}$ (resp. $\underline{L}$), la loterie dégénérée qui donne l'issue $\overline{n}$ (resp. $\underline{n}$) avec proba 1. □

Considérons tout d'abord le cas (évident) où $\overline{L} \sim \underline{L}$. Dans ce cas $u_1 = \ldots = u_N$ et la fonction d'utilité U est constante. Donc si $\tilde{U}$ représente les mêmes préférences que la fonction U, elle doit également être constante. Posons $\tilde{u} = \tilde{U}(c_1) = \ldots = \tilde{U}(c_N)$. Il suffit alors de choisir $\gamma = \tilde{u} - u_1$ et $\beta = 0$ pour obtenir $\tilde{U} = \beta U + \gamma$. Supposons à présent que la fonction $\tilde{U}$ satisfait $\tilde{U} = \beta U + \gamma$ pour un certain réel $\beta > 0$ et un certain réel γ. Alors $\tilde{U}$ est aussi constante. On en déduit immédiatement qu'elle est vNm et représente les mêmes préférences que U.

Considérons à présent le cas où $\overline{L} \succ \underline{L}$.

$\Leftarrow$: Supposons que la fonction $\tilde{U}$ satisfait $\tilde{U} = \beta U + \gamma$ pour un certain réel $\beta > 0$ et un certain réel γ. Pour passer de U à U', on réalise une transformation strictement croissante donc (en utilisant la Proposition 1) $\tilde{U}$ représente les mêmes préférences que U. Il faut maintenant montrer que $\tilde{U}$ est vNM, ou, ce qui est équivalent (d'après la Proposition 2) linéaire. Soient K loteries $(L_1, \ldots, L_K)$ et K réels $(\alpha_1, \ldots, \alpha_K)$ avec $\alpha_k \geq 0, \sum_{k=1}^{K} \alpha_k = 1$. On a successivement :

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) &= \beta U(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k L_k) + \gamma \\
&= \beta \sum_{k=1}^{K} \alpha_k U(L_k) + \sum_{k=1}^{K} \gamma \\
&= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k (\beta U(L_k) + \gamma) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \tilde{U}(L_k).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Supposons que la fonction $\tilde{U}$ est vNM et représente les mêmes préférences que U. Soit $L \in \mathcal{L}$. On définit

$$\lambda_L = \frac{U(L) - u_{\underline{n}}}{u_{\overline{n}} - u_{\underline{n}}}.$$

(On peut le faire car $u_{\overline{n}} > u_{\underline{n}}$.)

Par linéarité, on a :

$$U(\lambda_L \overline{L} + (1-\lambda_L)\underline{L}) = \lambda_L u_{\overline{n}} + (1-\lambda_L)u_{\underline{n}}$$

D'autre part, λ_L peut se réécrire : $\lambda_L(u_{\overline{n}} - u_{\underline{n}}) = U(L) - u_{\underline{n}}$, ou encore $\lambda_L u_{\overline{n}} + (1-\lambda_L)u_{\underline{n}} = U(L)$. On en déduit :

$$U(\lambda_L \overline{L} + (1-\lambda_L)\underline{L}) = U(L).$$

C'est-à-dire :

$$\lambda_L \overline{L} + (1-\lambda_L)\underline{L} \sim L$$

$\tilde{U}$ représente les mêmes préférences que U. Par conséquent :

$$\tilde{U}(\lambda_L \overline{L} + (1-\lambda_L)\underline{L}) = \tilde{U}(L)$$

$\tilde{U}$ est linéaire, et donc :

$$\tilde{U}(L) = \lambda_L \tilde{u}_{\overline{n}} + (1-\lambda_L)\tilde{u}_{\underline{n}} = \lambda_L(\tilde{u}_{\overline{n}} - \tilde{u}_{\underline{n}}) + \tilde{u}_{\underline{n}}$$

On en déduit, en remplaçant λ_L par sa valeur que :

$$\tilde{U}(L) = \frac{U(L) - u_{\underline{n}}}{u_{\overline{n}} - u_{\underline{n}}}(\tilde{u}_{\overline{n}} - \tilde{u}_{\underline{n}}) + \tilde{u}_{\underline{n}}$$

Finalement,

$$\beta = \frac{\tilde{u}_{\overline{n}} - \tilde{u}_{\underline{n}}}{u_{\overline{n}} - u_{\underline{n}}} > 0 \quad \gamma = \tilde{u}_{\underline{n}} - u_{\underline{n}} \cdot \frac{\tilde{u}_{\overline{n}} - \tilde{u}_{\underline{n}}}{u_{\overline{n}} - u_{\underline{n}}}.$$

□

IV Théorème d'espérance d'utilité

On peut à présent démontrer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2 (Von Neumann et Morgenstern). Supposons qu'une relation de préférence sur les loteries satisfassent les 4 axiomes de rationalité, alors $\succeq$ peut être représentée par une fonction d'utilité de type espérance d'utilité. Ce qui signifie qu'on peut associer un scalaire u_n à chaque issue n de façon à ce que pour tout couple de loteries $L, L' \in \mathcal{L}$ avec $L = (p_1, \cdots, p_N), L' = (p'_1, \cdots, p'_N)$:

$$L \succeq L' \Leftrightarrow U(L) \geq U(L') \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} u_n p_n \geq \sum_{n=1}^{N} u_n p'_n$$

<u>étape 1</u>

Proposition 3. Soit $L, L' \in \mathcal{L}$ et $\alpha, \beta \in]0,1[$. Si $L \succ L'$ alors,

$$\beta L + (1-\beta)L' \succeq \alpha L + (1-\alpha)L' \Leftrightarrow \beta \geq \alpha$$

Démonstration. On établit tout d'abord le lemme (très simple) suivant :
Lemme 3. Soit $L, L' \in \mathcal{L}$ et $\alpha \in]0,1[$. Si $L \succ L'$, alors

$$L \succ \alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'$$

Démonstration. On a : $L = \alpha L + (1-\alpha)L$. Par l'axiome d'indépendance, on obtient donc $L \succ \alpha L + (1-\alpha)L'$. De même, on a $L' = \alpha L' + (1-\alpha)L'$, et donc, toujours par l'axiome d'indépendance, $\alpha L + (1-\alpha)L' \succ L'$ □

On peut à présent prouver la Proposition 3.
$\Leftarrow$: Remarquons tout d'abord que $\beta = \alpha$ implique

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \alpha L + (1-\alpha)L'.$$

Supposons à présent $\beta > \alpha$. Dans ce cas, on peut réécrire $\beta L + (1-\beta)L'$ comme suit :

$$\beta L + (1-\beta)L' = \gamma L + (1-\gamma)(\alpha L + (1-\alpha)L')$$

pour un certain $\gamma \in [0,1]$. (Plus précisément : en identifiant par rapport à L', on a :

$$1-\beta = (1-\gamma)(1-\alpha) \Leftrightarrow 1 - \frac{1-\beta}{1-\alpha} = \gamma \Leftrightarrow \gamma = \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha}$$

bien défini car $\alpha \neq 1$. γ est positif car $\beta > \alpha, \gamma < 1$ car $\beta < 1$.)

Par le lemme précédent, on a :

$$L \succ \alpha L + (1-\alpha)L'$$

En appliquant de nouveau le lemme précédent, on a donc

$$\beta L + (1-\beta)L' = \gamma L + (1-\gamma)(\alpha L + (1-\alpha)L') \succ \alpha L + (1-\alpha)L'$$

$\Rightarrow$: Procédons par contraposée. Si $\beta < \alpha$ par un raisonnement symétrique au raisonnement précédent :

$$\beta L + (1-\beta)L' \prec \alpha L + (1-\alpha)L'$$

□

<u>étape 2</u>

Proposition 4. $\exists \overline{L}$ et $\underline{L} \in \mathcal{L}$ tq $\forall L \in \mathcal{L}$, $\exists! \alpha_L \in [0,1]$ vérifiant :

$$\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \sim L$$

La preuve du lemme suivant est différente de celle du Lemme 1.

Lemme 4. $\exists \overline{L}$ et $\underline{L} \in \mathcal{L}$ tq $\forall L \in \mathcal{L}$, $\underline{L} \preceq L \preceq \overline{L}$

Démonstration. Comme dans le Lemme 1, on note $\overline{n}$ (resp. $\underline{n}$) l'issue la plus favorable (resp. la plus défavorable) et $\underline{L}$ (resp. $\overline{L}$) la loterie dégénérée associée à $\underline{n}$ (resp. $\overline{n}$).
Par récurrence sur le cardinal du support de L :

- Par construction, pour toute loterie dégénérée L,

$$\underline{L} \preceq L \preceq \overline{L}$$

- On suppose que pour toute loterie L attribuant une proba non nulle à au plus n issues, on a

$$\underline{L} \preceq L \preceq \overline{L}$$

- Prouvons que la propriété est alors vérifiée au rang n+1. Soit

$$L = \sum_{1}^{n+1} \alpha_k c_k(L) \quad c_k(L) = \text{issue numéro k du support de L}$$

On peut écrire

$$L = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} c_k(L) + \alpha_{n+1} c_{n+1}(L)$$

Or

$$\sum_{1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} = 1$$

- Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} c_k(L) \preceq \overline{L}$$

- Par l'axiome d'indépendance, on peut donc écrire :

$$L \preceq (1 - \alpha_{n+1})\overline{L} + \alpha_{n+1} c_{n+1}(L) \tag{2.4}$$

- D'autre part

$$c_{n+1}(L) \preceq \overline{L}$$

- Par transitivité, on obtient finalement :

$$L \preceq \overline{L}$$

On procède de la même manière pour le côté gauche.

□

Lemme 5.

$$\exists \alpha_L \in [0,1] \text{ tq } \quad \begin{aligned} A &= \{\alpha \in [0,1], \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L} \succeq L\} = [\alpha_L; 1] \\ B &= \{\alpha \in [0,1], \alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L} \preceq L\} = [0; \alpha_L] \end{aligned}$$

Démonstration. – Par l'axiome de continuité, les ensembles A et B sont des fermés.

– Ces deux ensembles sont convexes. En effet : soit α' et α'' appartenant au premier ensemble telles que $\alpha' \leq \alpha''$.

$$\forall t \in [0,1], t\alpha' + (1-t)\alpha'' \text{ est tel que } \alpha' \leq t\alpha' + (1-t)\alpha'' \leq \alpha''$$

Par conséquent, en appliquant l'étape 1,

$$\alpha'\overline{L} + (1-\alpha')\underline{L} \preceq (t\alpha' + (1-t)\alpha'')\overline{L} + (1 - (t\alpha' + (1-t)\alpha''))\underline{L}$$

Par transitivité, on a donc :

$$(t\alpha' + (1-t)\alpha'')\overline{L} + (1 - (t\alpha' + (1-t)\alpha''))\underline{L} \succeq L$$

Donc $t\alpha' + (1-t)\alpha''$ appartient au premier ensemble. Raisonnement symétrique pour le second ensemble.

On a donc prouvé l'existence et l'unicité de $\overline{\alpha}_L$ et $\underline{\alpha}_L$ telles que $A = [\underline{\alpha_L}; 1]$ et $B = [0; \overline{\alpha_L}]$

Il suffit à présent, pour conclure la preuve, d'établir que $\overline{\alpha}_L = \underline{\alpha}_L$. Pour cela procédons par l'absurde. Supposons tout d'abord : $\overline{\alpha}_L > \underline{\alpha}_L$. Alors,

$$[0, \underline{\alpha_L}] \cup [\overline{\alpha}_L, 1] \neq [0,1],$$

qui contredit l'axiome de complétude. Supposons à present $\underline{\alpha}_L > \overline{\alpha}_L$. Pour tout $\alpha \in [\overline{\alpha}_L, \underline{\alpha_L}]$ on a :

$$\alpha\overline{L} + (1-\alpha)\underline{L} \sim L$$

D'où, par transitivité,

$$\overline{\alpha}_L\overline{L} + (1-\overline{\alpha}_L)\underline{L} \sim \underline{\alpha}_L\overline{L} + (1-\underline{\alpha}_L)\underline{L},$$

ce qui contredit la Proposition 3.

L'intersection des deux ensembles est donc un élément unique, que l'on note α_L.

□

étape 3

Proposition 5. La fonction $U : \mathcal{L} \mapsto \mathbb{R}$ qui associe $\alpha_L \in [0,1]$ à tout $L \in \mathcal{L}$, représente les préférences $\succeq$ et a une forme vNM.

Démonstration. Montrons tout d'abord que U représente les préférences de l'agent. D'après l'étape précédente (et la transitivité des préférences), $L \succeq L'$ est équivalent à :

$$\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \succeq \alpha'_L \overline{L} + (1-\alpha'_L)\underline{L}$$

Par la Proposition **??**, cela signifie : $\alpha_L \geq \alpha'_L$.

Montrons à présent que U est linéaire. Soient $L, L' \in \mathcal{L}, \beta \in [0,1]$. Etablissons que

$$U(\beta L + (1-\beta)L') = \beta U(L) + (1-\beta)U(L')$$

Par construction

$$L \sim \alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L} \ (1)$$
$$L' \sim \alpha'_L \overline{L} + (1-\alpha'_L)\underline{L} \ (2)$$

Par axiome d'indépendance et (1)

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \beta[\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}] + (1-\beta)L'$$

Par axiome d'indépendance et (2)

$$\beta L + (1-\beta)L' \sim \beta[\alpha_L \overline{L} + (1-\alpha_L)\underline{L}] + (1-\beta)[\alpha'_L \overline{L} + (1-\alpha'_L)\underline{L}]$$

$$\begin{aligned} \beta L + (1-\beta)L' &\sim [\beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha'_L]\overline{L} + [\beta(1-\alpha_L) + (1-\beta)(1-\alpha'_L)]\underline{L} \\ &\sim [\beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha'_L]\overline{L} + [1-(\beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha'_L)]\underline{L} \end{aligned}$$

On a donc prouvé que :

$$U(\beta L + (1-\beta)L') = \beta\alpha_L + (1-\beta)\alpha'_L = \beta U(L) + (1-\beta)U(L')$$

□

V Le paradoxe d'Ellsberg

Ce paradoxe célèbre montre une autre limite de la théorie de l'espérance d'utilité. On imagine une urne contenant 1/3 de boules jaunes et 2/3 de boules rouges ou noires.
A/ On gagne 100 euros si boule jaune
B/ On gagne 100 euros si boule noire
C/ On gagne 100 euros si boule rouge ou noire
D/ On gagne 100 euros si boule rouge ou jaune
Deux choix à faire entre A et B, d'une part et entre C et D, d'autre part.

Si le décideur raisonne en s'appuyant sur la probabilité (qui n'est pas donnée) p_N de tirer une boule noire, il doit choisir AD (s'il juge $p_N < \frac{1}{3}$) ou BC (s'il juge $p_N > \frac{1}{3}$). Or, quand cette expérience est réalisée (par exemple en classe !), beaucoup choisissent AC... Lorsque des gens ont à choisir entre deux options, la majorité se décide pour celle dont la loi de probabilité est connue. On parle d'aversion à l'ambiguité.

Chapitre 3

Les notions dérivées du critère d'espérance d'utilité

On suppose maintenant que l'agent satisfait les 4 axiomes et a une fonction d'utilité vNM. De plus, toutes les loteries considérées dans ce chapitre (comme dans les suivants) portent sur des montants monétaires.

I Goût, neutralité et aversion au risque

I.1 Définitions et représentations : Neutralité et aversion au risque

A Neutralité au risque

$\tilde{\omega} = \text{richesse aléatoire}, u(x) = ax + b$

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) = u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))$$

B Aversion au risque

u concave

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) < u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))$$

C Goût pour le risque

u convexe

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) > u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))$$

I.2 Inégalité de Jensen

Montrons que
- u strictement concave $\Rightarrow \mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) < u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))$

- $T(\omega) = u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) + u'(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))(\omega - \mathbb{E}(\tilde{\omega}))$
- $T(\omega) > u(\omega), \forall \omega \neq \mathbb{E}(\tilde{\omega})$
- $u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) + u'(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))(\omega - \mathbb{E}(\tilde{\omega})) > u(\omega) \quad \forall \omega \neq \mathbb{E}(\tilde{\omega})$
- Par passage à l'espérance $\mathbb{E}(u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) + u'(\mathbb{E}(\tilde{\omega}))\underbrace{(\mathbb{E}(\omega) - \mathbb{E}(\tilde{\omega}))}_{0} > \mathbb{E}(u(\tilde{\omega}))$

II Equivalent certain et prime de risque

II.1 Equivalent certain

Définition 4. L'équivalent certain $\omega^\star$ d'une richesse aléatoire $\tilde{\omega}$ est la richesse certaine que l'agent lui considère comme équivalente, autrement dit, l'équivalent certain procure à l'agent la même utilité que la richesse aléatoire.

$$u(\omega^\star) = \mathbb{E}(u(\tilde{\omega}))$$

Neutralité au risque $\omega^\star = \mathbb{E}(\tilde{\omega})$
$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) = u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) \Rightarrow u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) = u(\omega^\star)$

Aversion au risque $\omega^\star < \mathbb{E}(\tilde{\omega})$
$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) < u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) \Rightarrow u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) > u(\omega^\star) \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{\omega}) > \omega^\star$

Goût pour le risque $\omega^\star > \mathbb{E}(\tilde{\omega})$
$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) > u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) \Rightarrow u(\mathbb{E}(\tilde{\omega})) < u(\omega^\star) \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{\omega}) < \omega^\star$

II.2 Prime de risque

Définition 5. La prime de risque Π d'une richesse aléatoire est la somme que l'agent est prêt à payer pour accéder à l'espérance de la loterie $\mathbb{E}(\tilde{\omega})$ plutôt qu'à la loterie elle-même

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) = u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}) - \Pi)$$

$$u(\omega^\star) = u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}) - \Pi)$$

$$\omega^\star = \mathbb{E}(\tilde{\omega}) - \Pi$$

$$(p_v(\omega_0) = \mathbb{E}(\tilde{x}) - \Pi)$$

Neutralité au risque $\Pi = 0$

Aversion au risque $\Pi > 0$

Goût au risque $\Pi < 0$

III Prix de vente et prix d'achat

III.1 Prix de vente

Définition 6. Soit un individu disposant de ω_0 et d'un billet de loterie $\tilde{x}$ ($\tilde{\omega} = \omega_0 + \tilde{x}$), le prix de vente de $\tilde{x}$ est le prix minimum pour le quel l'agent est prêt à céder son billet de loterie. On écrit $p_v(\omega_0)$

$$\mathbb{E}(u(\omega_0 + \tilde{x})) = u(\omega_0 + p_v(\omega_0))$$

$$u(\omega^\star) = u(\omega_0 + p_v(\omega_0)) \to \omega^\star = \omega_0 + p_v(\omega_0)$$

$$\mathbb{E}(\tilde{\omega}) = \omega_0 + \mathbb{E}(\tilde{x})$$

Neutralité au risque $\omega^* = \mathbb{E}(\tilde{\omega})$

$$\omega_0 + p_v(\omega_0) = \omega_0 + \mathbb{E}(\tilde{x}) \Rightarrow p_v(\omega_0) = \mathbb{E}(\tilde{x})$$

Aversion au risque $\omega^* < \mathbb{E}(\omega)$

$$\omega_0 + p_v(\omega_0) < \omega_0 + \mathbb{E}(\tilde{x}) \Rightarrow p_v(\omega_0) < \mathbb{E}(\tilde{x})$$

Goût pour le risque $\omega^* > \mathbb{E}(\omega)$

$$\omega_0 + p_v(\omega_0) > \omega_0 + \mathbb{E}(\tilde{x}) \Rightarrow p_v(\omega_0) > \mathbb{E}(\tilde{x})$$

III.2 Prix d'achat

Définition 7. Soit un individu disposant de la richesse certaine ω_0 (ne disposant pas du billet de loterie $\tilde{x}$), le prix d'achat du billet de loterie associé à $\tilde{x}$ est le prix maximum auquel l'agent est prêt à acheter le billet de loterie $\tilde{x}$

$$u(\omega_0) = \mathbb{E}(u(\omega_0 + \tilde{x} - p_a(\omega_0)))$$

III.3 Relation entre prix de vente et prix d'achat

A 1ère relation

$$\omega_0 + \tilde{x} \underbrace{\sim}_{VENTE} \omega_0 + p_v(\omega_0) \underbrace{\sim}_{ACHAT} \omega_0 + p_v(\omega_0) + \tilde{x} - p_a(\omega_0 + p_v(\omega_0))$$

Par transitivité : $\omega_0 + \tilde{x} \sim \omega_0 + \tilde{x} + \underbrace{p_v(\omega_0) - p_a(\omega_0 + p_v(\omega_0))}_{0}$

$p_v(\omega_0) = p_a(\omega_0 + p_v(\omega_0))$

B 2ème relation

$$\omega_0 \underbrace{\sim}_{ACHAT} \omega_0 + \tilde{x} - p_a(\omega_0) \underbrace{\sim}_{VENTE} \omega_0 - p_a(\omega_0) + p_v(\omega_0 - p_a(\omega_0))$$

Par transitivité : $\omega_0 \sim \omega_0 - p_a(\omega_0) + p_v(\omega_0 - p_a(\omega_0))$
$p_a(\omega_0) = p_v(\omega_0 - p_a(\omega_0))$

Chapitre 4

Les mesures de l'aversion au risque

I Aversion absolue, relative et partielle

I.1 Aversion absolue, l'approximation d'Arrow-Pratt

Soit une richesse initiale w_0 et un billet de loterie $\tilde{y}$ respectant $\mathbb{E}(\tilde{y}) = 0$ et chaque réalisation y de $\tilde{y}$ est très petite en valeur absolue. $\tilde{\omega} = \omega_0 + \tilde{y} \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{\omega}) = \omega_0$

Par définition de la prime de risque Π on a :

$$u(\mathbb{E}(\tilde{\omega}) - \Pi) = \mathbb{E}(u(\tilde{\omega}))$$

$$u(\omega_0 - \Pi) = \mathbb{E}(u(\tilde{\omega}))$$

$$u(\omega_0 - \Pi) = u(\omega_0) - \Pi u'(\omega_0) + o(\Pi) \tag{4.1}$$

$$u(\omega) = u(\omega_0 + y) = u(\omega_0) + yu'(\omega_0) + u''(\omega_0)\frac{y^2}{2} + o(y^2)$$

Par passage à l'espérance :

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) = \mathbb{E}(u(\omega_0 + \tilde{y})) \approx u(\omega_0) + \underbrace{u'(\omega_0)\mathbb{E}(\tilde{y})}_{0 \ car \ \mathbb{E}(\tilde{y})=0} + u''(\omega_0)\frac{Var(\tilde{y})}{2} \tag{4.2}$$

On a donc en égalisant (**??**) et (**??**) :

$$-\Pi u'(\omega_0) \approx u''(\omega_0)\frac{Var(\tilde{y})}{2}$$

$$\Pi \approx -\frac{Var(\tilde{y})}{2}\frac{u''(\omega_0)}{u'(\omega_0)}$$

On pose :

$$A_a(\omega_0) = -\frac{u''(\omega_0)}{u'(\omega_0)}$$

$$\Pi \approx \underbrace{\frac{Var(\tilde{y})}{2}}_{\text{mesure objective du risque}} \cdot \overbrace{A_a(\omega_0)}^{\text{mesure subjective, façon dont l'agent en } \omega_0 \text{ appréhende le risque}}$$

I.2 Aversion relative

$\tilde{\omega} = \omega_0(1+\tilde{y})$, $\tilde{y}$ est tel que $\mathbb{E}(\tilde{y}) = 0$, chaque réalisation y de $\tilde{y}$ est proche de 0 en valeur absolue. La prime de risque relative Π_r est définie par :

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) = u(\omega_0(1 + \mathbb{E}(\tilde{y}) - \Pi_r)) = u(\omega_0(1 - \Pi_r))$$

$$u(\omega_0(1 - \Pi_r)) \approx u(\omega_0) - \omega_0 \Pi_r u'(\omega_0)$$

$$u(\omega) = u(\omega_0(1 + y)) \approx u(\omega_0) - \omega_0 y u'(\omega_0) + \omega_0^2 \frac{y^2}{2} u''(\omega_0)$$

Passage à l'espérance :

$$\mathbb{E}(u(\tilde{\omega})) = \mathbb{E}(u(\omega_0(1 + \tilde{y}))) \approx u(\omega_0) + \omega_0^2 \frac{Var(\tilde{y})}{2} u''(\omega_0)$$

On obtient donc :

$$-\omega_0 \Pi_r u'(\omega_0) \approx \omega_0^2 \frac{Var(\tilde{y})}{2} u''(\omega_0) \Rightarrow \Pi_r \approx -\frac{Var(\tilde{y})}{2} \omega_0 \frac{u''(\omega_0)}{u'(\omega_0)} = \frac{Var(\tilde{y})}{2} A_r(\omega_0)$$

$$A_r(\omega_0) = -\omega_0 \frac{u''(\omega_0)}{u'(\omega_0)}$$

Donc $A_r(\omega_0) = \omega_0 A_a(\omega_0), \Pi_r = \omega_0 \Pi$

II Hypothèses quant au comportement des mesures d'aversion au risque

II.1 Degré d'aversion absolu au risque et changement de richesse

Hypothèse (H1), hypothèse naturelle, on suppose que l'aversion absolue décroissante avec la richesse, plus on est riche, plus on est prêt à prendre de risques.

$$\frac{dA_a}{d\omega_0} \leq 0 \tag{4.3}$$

II.2 Degré d'aversion relative au risque et changement de richesse

$A_r = A_a \omega_0$

$$\frac{dA_r}{d\omega_0} = A_a + \omega_0 \frac{dA_a}{d\omega_0}$$

On a ici deux facteurs de signes opposés, on ne peut donc pas conclure. D'une part, $A_a \geq 0$ car les agents sont averses au risque, autrement dit u est concave. D'autre part, sous (H1) le deuxième terme est négatif. On fait l'hypothèse (H2) que $\frac{dA_r}{d\omega_0} \geq 0$

II.3 Les fonctions d'utilité usuelles

- Fonction quadratique
  $u(x) = x - \beta x^2$, $\beta > 0$ mais pas trop grand
  $u'(x) = 1 - 2\beta x > 0$
  $u''(x) = -2\beta < 0$

  $$A_a(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = \frac{2\beta}{1 - 2\beta x}$$

  Ne respecte pas (H1) augmente quand x augmente.
  Remarque : Voir exercice 3.6, c'est une fonction globale de type espérance/variance mais sous une forme non linéaire.
- Fonction d'utilité logarithmique
  $u(x) = ln(x) \quad x > 0 \quad u'(x) = x^{-1} > 0 \quad u''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

  $$A_a(x) = x^{-1}$$

  Respecte (H1) et $A_r(x) = xA_a(x) = 1$
- Fonction exponentielle négative
  $u(x) = -e^{-\beta x} \quad \beta > 0 \quad u'(x) = \beta e^{-\beta x} > 0 \quad u''(x) = -\beta^2 e^{-\beta x} < 0$

  $$A_a(x) = \beta$$

  Respecte (H1), $A_r(x) = \beta x$
- Fonction puissance
  $u(x) = sgn(\beta) x^\beta \quad \beta \in]-\infty, 1[$
  $u'(x) = sgn(\beta)\beta x^{\beta-1} > 0$
  $u''(x) = sgn(\beta)\beta(\beta - 1)x^{\beta-2}$

  $$A_a(x) = \frac{1-\beta}{x}$$

  $$A_r(x) = 1 - \beta$$

III Retour sur les notions de prix de vente et prix d'achat

Résultat : Si (H1) est satisfaite on a $0 < p_a < p_v$ ou $p_v < p_a < 0$

- p_a et p_v ont le même signe

$$p_v > 0 \Leftrightarrow u(\omega_0 + p_v) > u(\omega_0) \Leftrightarrow \mathbb{E}(u(\omega_0 + \tilde{x})) > u(\omega_0) = \mathbb{E}(u(\omega_0 + \tilde{x} - p_a)) \Leftrightarrow p_a > 0$$

- Partie non prouvée, sous l'hypothèse (H1), p_v augmente quand ω_0 augmente.
- Conclusion.
  Si p_a et p_v sont positifs, $\omega_0 - p_a(\omega_0) < \omega_0 \Leftrightarrow p_v(\omega_0 - p_a(\omega_0)) < p_v(\omega_0) \Leftrightarrow p_a(\omega_0) < p_v(\omega_0)$
  Si p_a et p_v sont négatifs $\omega_0 - p_a(\omega_0) > \omega_0 \Leftrightarrow p_v(\omega_0 - p_a(\omega_0)) > p_v(\omega_0) \Leftrightarrow p_a(\omega_0) > p_v(\omega_0)$

Chapitre 5

La mesure du risque

I Dominance stochastique d'ordre 1

I.1 Exemple introductif

	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\omega}'$
0	0,2	0,1
10	0,3	0,2
15	0,4	0,3
20	0,1	0,4

Tableau intermédiaire :

$\tilde{\omega_1}$	$\tilde{\omega_2}$
0,1	0,1
0,4	0,2
0,4	0,6
0,1	0,1

On remarque que, $\tilde{\omega_1} \Rightarrow F_{\tilde{\omega}}(0) = 0,2 > 0,1 = F_{\tilde{\omega}'}(0)$
$\tilde{\omega_2} \Rightarrow F_{\tilde{\omega}}(10) = 0,5 > 0,3 = F_{\tilde{\omega}'}(10)$, par construction $F_{\tilde{\omega}}(10) = F_{\tilde{\omega_2}}(10)$
$\tilde{\omega}' \Rightarrow F_{\tilde{\omega}}(15) = 0,9 > 0,6 = F_{\tilde{\omega}'}(15)$, par construction $F_{\tilde{\omega}}(15) = F_{\tilde{\omega_2}}(15)$

I.2 Définition DS1

Définition 8. La richesse aléatoire $\tilde{x}$ domine stochastiquement à l'ordre 1 $\tilde{y}$ si et seulement si tout agent dont les préférences satisfont le critère d'espérance d'utilité avec u strictement croissante préfère strictement $\tilde{x}$,àö,Ä† $\tilde{y}$

Exemple :

	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$
10	1	0,5
20	0	0,5

Remarque :

- Cette définition marche avec le critère d'espérance d'utilité mais ne marche pas avec le critère espérance/variance
- Cette relation est transitive
- comparaison d'espérance : si $\tilde{x}$ DS1 $\tilde{y}$, en prenant $u(x) = x$ on a $\mathbb{E}(\tilde{x}) > \mathbb{E}(\tilde{y})$. Les agents neutres au risque préfèrent strictement $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$.

I.3 Caractérisation

Proposition 6. $\tilde{x}$ DS1 $\tilde{y}$ si et seulement si on a $\forall t\ F_{\tilde{x}}(t) \leq F_{\tilde{y}}(t)$, avec une inégalité stricte pour au moins une valeur de t.

Démonstration. $\Leftarrow \mathbb{E}(u(\tilde{x})) - \mathbb{E}(u(\tilde{y})) = \int_a^b u(t)f_{\tilde{x}}(t)dt - \int_a^b u(t)f_{\tilde{y}}(t)dt = \int_a^b u(t)[f_{\tilde{x}}(t) - f_{\tilde{y}}(t)]dt = [u(t)(F_{\tilde{x}}(t) - F_{\tilde{y}}(t))]_a^b - \int_a^b u'(t)[F_{\tilde{x}}(t) - F_{\tilde{y}}(t)]dt = -\int_a^b u'(t)[F_{\tilde{x}}(t) - F_{\tilde{y}}(t)]dt \geq 0$

$\Rightarrow$ Par contraposée, supposons $\exists t\ F_{\tilde{x}}(t) > F_{\tilde{y}}(t), \exists [c,d] F_{\tilde{x}}(t) > F_{\tilde{y}}(t) \forall t \in [c,d]$. On s'intéresse à un agent tel que $u'(t) > 0$ mais proche de zéro sur $[a,c]$, $u'(t)$ très grand sur $[c,d]$ et $u'(t) > 0$ mais proche de zéro sur $[d,b]$. Découper intégrale de a à b en trois morceau + exemple. □

II Dominance stochastique à l'ordre 2

II.1 Définition et caractérisation DS2

Définition 9. Une richesse aléatoire $\tilde{x}$ domine stochastiquement à l'ordre 2 une richesse aléatoire $\tilde{y}$ si et seulement si tous les agents ayant des préférences caractérisées par le critère d'espérance d'utilité avec $u' > 0$ et $u'' < 0$ préfèrent strictement $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$.

Proposition 7. $\tilde{x}$ DS2 $\tilde{y}$ ($\succ_2$) si et seulement si $\int_a^s F_{\tilde{x}}(t)dt \leq \int_a^s F_{\tilde{y}}(t)dt\ \forall s$ avec au moins une inégalité stricte.

II.2 DS2, cas d'égalité des espérances

A La notion de variance

Proposition 8.

$$(\tilde{x} \succ_2 \tilde{y} \text{ et } \mathbb{E}(\tilde{x}) = \mathbb{E}(\tilde{y})) \Rightarrow V(\tilde{x}) < V(\tilde{y})$$

Démonstration. On utilise un agent qui possède des préférences quadratiques $u(x) = x - \beta x^2$ avec β "pas trop grand". $\mathbb{E}(u(\tilde{x})) = \mathbb{E}(\tilde{x}) - \beta[V(\tilde{x}) + \mathbb{E}(\tilde{x})^2]$ si l'agent compare $\tilde{x}$ à $\tilde{y}$, $\mathbb{E}(u(\tilde{x})) - \mathbb{E}(u(\tilde{y})) = -\beta[V(\tilde{x}) - V(\tilde{y})] > 0$ *c.q.f.d* □

Proposition 9. La variance (même à espérance égale) ne constitue pas une condition suffisante.

Démonstration. Contre-exemple

$\tilde{x}$	$p(\tilde{x})$	$\tilde{y}$	$p(\tilde{y})$
0	0,5	1	$\frac{7}{8}$
4	0,5	9	$\frac{1}{8}$

$\mathbb{E}(\tilde{x}) = 2, \mathbb{E}(\tilde{y}) = 2, V(\tilde{x}) < V(\tilde{y})$ mais pour $u(x) = \sqrt{x}$, on a $\mathbb{E}(u(\tilde{x})) < \mathbb{E}(u(\tilde{y}))$ □

B La notion de bruit blanc

$\tilde{x}$	$p(\tilde{x})$	$\tilde{y}$	$p(\tilde{y})$
0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
		4	$\frac{1}{4}$

Bruit blanc : $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{\epsilon}$ o‚àöœÄ $\tilde{\epsilon}$ est défini par $\mathbb{P}(\tilde{\epsilon} = 0|\tilde{x} \neq 3) = 1, \mathbb{P}(\tilde{\epsilon} = 1|\tilde{x} = 3) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(\tilde{\epsilon} = -1|\tilde{x} = 3) = \frac{1}{2}$

$\tilde{\epsilon}$ est un bruit blanc associé à $\tilde{x}$ qui se déclenche quand $\tilde{x}$ est égale à la valeur x_1, est égale à 0 quand $\tilde{x} \neq x_1$, a une espérance nulle et n'est pas une variable aléatoire dégénérée.

Proposition 10. Si $\tilde{y} = \tilde{x} + \tilde{\epsilon}$ alors $\tilde{x} \succ_2 \tilde{y}$.

Démonstration.

$$\mathbb{E}(u(\tilde{x})) = \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{2}u(3)$$

$$\mathbb{E}(u(\tilde{y})) = \frac{1}{2}u(0) + \frac{1}{4}u(2) + \frac{1}{4}u(4)$$

Par Jensen on a : $u(3) > \frac{1}{2}u(2) + \frac{1}{2}u(4)$ □

Autre exemple :

$\tilde{x}$	$p(\tilde{x})$	$\tilde{y}$	$p(\tilde{y})$
-5	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{2}$	10	$\frac{2}{3}$
15	$\frac{1}{3}$		

$\tilde{\epsilon_1}$ le bruit blanc qui se déclenche en zéro.
$\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = 0|\tilde{y} \neq 0) = 1$
$\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = 5|\tilde{y} = 0) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = -5|\tilde{y} = 0) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{E}(\tilde{\epsilon_1}) = 0$
$\tilde{\epsilon_2}$ le bruit blanc qui se déclenche en dix.
$\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_2} = 0|\tilde{y} \neq 10) = 1$
$\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_2} = 5|\tilde{y} = 10) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_2} = -5|\tilde{y} = 10) = \frac{1}{2}$
$\tilde{x} = \tilde{y} + \tilde{\epsilon_1} + \tilde{\epsilon_2}$
Vérification : $\mathbb{P}(\tilde{x} = -5) = \mathbb{P}(\tilde{y} = 0)\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = -5, \tilde{\epsilon_2} = 0|\tilde{y} = 0) = \frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(\tilde{x} = 5) = \mathbb{P}(\tilde{y} = 0)\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = 5, \tilde{\epsilon_2} = 0|\tilde{y} = 0) + \mathbb{P}(\tilde{y} = 10)\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = 0, \tilde{\epsilon_2} = -5|\tilde{y} = 10) = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(\tilde{x} = 15) = P(\tilde{y} = 10)\mathbb{P}(\tilde{\epsilon_1} = 0, \tilde{\epsilon_2} = 5|\tilde{y} = 10) = \frac{1}{3}$

Si on prend deux variables aléatoires d'espérance égale ($\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ - attention donc on ne parle pas de DS1) telles que $\tilde{x}$ DS2 $\tilde{y}$ alors $\tilde{y}$ est la transformée de $\tilde{x}$ en ajoutant une série de bruit blanc.

Si $\tilde{y}$ est la transformée par l'ajout d'un bruit blanc alors la variance de $\tilde{y}$ est plus grande que la variance de $\tilde{x}$. A voir : $\mathbb{V}(\tilde{y}) = \mathbb{V}(\tilde{x}) + \mathbb{V}(\tilde{\epsilon}) + (2cov(\tilde{x}, \tilde{\epsilon}) = 0)$

Chapitre 6

Décision d'investissement en univers risqué

I L'environnement du décideur

I.1 Définition du problème

Si un agent a a une richesse aléatoire ω_0, il la décompose en $\omega_0 = m + a$. m est l'argent investi dans l'actif non risqué, a argent investi dans l'actif risqué, i taux de rendement de l'actif sans risque, $\tilde{x}$ taux de rendement de l'actif risqué. $\mathbb{E}(\tilde{x}) = \mu$

$$\tilde{\omega_f} = m(1+i) + a(1+\tilde{x}) = \omega_0(1+i) + a(\tilde{x} - i)$$

I.2 Cas d'un agent neutre au risque

$$\max_a \mathbb{E}(\tilde{\omega_f}) = \max_a \omega_0(1+i) + a(\mu - i)$$

- $\mu > i$, a aussi grand que possible
- $\mu < i$, a aussi petit que possible. a peut être négatif si on peut vendre à découvert, il est égal à zéro sinon
- $\mu = i$, agent indifférent

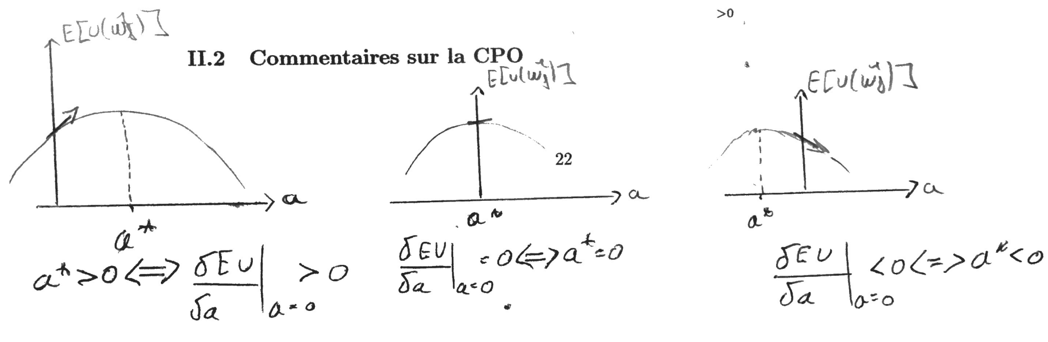
II Le critère d'espérance d'utilité

II.1 Le signe de a^*

$$a^* = \max_a \mathbb{E}(u(\tilde{\omega_f})) = \max_a \mathbb{E}(u(\omega_0(1+i) + a(\tilde{x} - i))$$

Condition du 1[er] ordre (CPO) : $\mathbb{E}(u'(\tilde{\omega_f})(\tilde{x} - i)) = 0$ (1)

Condition du 2^nd^ ordre (CSO) : $\mathbb{E}(u''(\tilde{\omega_f})(\tilde{x}-i)^2) \leq 0$ car u concave (agent averse au risque)
$\frac{\partial \mathbb{E}u}{\partial a}|_{a=0} = \mathbb{E}(u'(\omega_0(1+i))(\tilde{x}-i)) = u'(\omega_0(1+i))\mathbb{E}(\tilde{x}-i) = \underbrace{u'(\omega_0(1+i))}_{>0}(\mu - i)$



II.2 Commentaires sur la CPO

$$(1) \Leftrightarrow \mathbb{E}(u'(\tilde{\omega_f})\tilde{x}) = \mathbb{E}(u'(\tilde{\omega_f}))i$$
$$\Leftrightarrow \mu\mathbb{E}(u'(\tilde{\omega_f})) + cov(u'(\tilde{\omega_f}), \tilde{x}) = i\mathbb{E}(u'(\tilde{\omega_f}))$$
$$\Leftrightarrow \mu + \frac{cov(u'(\tilde{\omega_f}), \tilde{x})}{\mathbb{E}(u'(\tilde{\omega_f}))} = i$$

i représente le coût d'opportunité d'acquisition d'une unité supplémentaire de a (l'actif risqué). Si on a achète une unité supplémentaire de a, on achète une unité de moins de l'actif sans risque i. μ est le bénéfice marginal à acheter une unité supplémentaire de a.

Analyse du signe de la fraction. Le terme au dénominateur est positif car u croissant. Terme au numérateur : si a est positif, quand $\tilde{x}$ augmente, $\tilde{\omega_f}$ augmente et donc $u'(\tilde{\omega_f})$ diminue, la covariance est négative. Si a est négatif, on fait un raisonnement similaire, la covariance est positive.

La covariance est la traduction monétaire d'un coût psychologique lié au supplément de risque entraîné par l'augmentation de a quand a est positif. Quand a est négatif, l'augmentation de a entraîne un diminution du risque et le coût est négatif (bénéfice).

II.3 Effet d'une variation de l'aversion au risque

A Représentation d'une aversion au risque plus élevée

On veut prouver que si l'aversion au risque est plus élevée la quantité de a demandée diminue.

Démonstration. On définit $u_2 = \Phi(u_1)$ avec Φ strictement croissante et concave.

$$u_2' = \Phi'(u_1)u_1'$$

$$u_2'' = \Phi''(u_1)(u_1')^2 + \Phi'(u_1)u_1''$$

$$A_a^2 = -\frac{u_2''}{u_2'} = A_a^1 - \frac{\Phi''(u_1)u_1'}{\Phi'(u_1)}$$

Le terme de droite est positif donc on a bien l'agent 2 plus averse au risque que l'agent 1 ($A_a^2 > A_a^1$).

On veut maintenant prouver que $|a_1^*| > |a_2^*|$. Attention, le signe de a^* ne dépend que de l',écart entre μ et i. Donc a_1^* et a_2^* ont le même signe. Supposons $a_1^* > 0$, $a_2^* > 0$ (l'autre cas est similaire). On écrit :

$$\tilde{\omega}_f^2 = (1+i)\omega_0 + (\tilde{x} - i)a_2^*$$

$$\tilde{\omega}_f^1 = (1+i)\omega_0 + (\tilde{x} - i)a_1^*$$

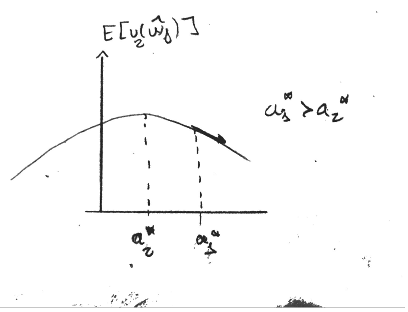
Par construction on a :

$$\mathbb{E}[(\tilde{x} - i)u_2'(\tilde{\omega}_f^2)] = 0$$

$$\mathbb{E}[(\tilde{x} - i)\Phi'(u_1(\tilde{\omega}_f^2))u_1'(\tilde{\omega}_f^2)] = 0$$

(CPO pour l'agent 2)
Etudions le signe de $\mathbb{E}[(\tilde{x} - i)u_2'(\tilde{\omega}_f^1)] = \mathbb{E}[(\tilde{x} - i)\Phi'(u_1(\tilde{\omega}_f^1))u_1'(\tilde{\omega}_f^1)]$
Astuce, on va utiliser le fait que $\mathbb{E}[\Phi'(u_1(\omega_0(1+i)))(\tilde{x}-i)u_1'(\tilde{\omega}_f^1)] = 0$ car $\mathbb{E}[(\tilde{x}-i)u_1'(\tilde{\omega}_f^1)] = 0$ (CPO pour l'agent 1). Donc,
$\mathbb{E}[(\tilde{x} - i)\Phi'(u_1(\tilde{\omega}_f^1))u_1'(\tilde{\omega}_f^1)] - \mathbb{E}[\Phi'(u_1(\omega_0(1+i)))(\tilde{x} - i)u_1'(\tilde{\omega}_f^1)]$
$= \mathbb{E}[(\Phi'(u_1(\tilde{\omega}_f^1)) - \Phi'(u_1(\omega_0(1+i))))(\tilde{x} - i)u_1'(\tilde{\omega}_f^1)]$
Si $\tilde{x} > i$ alors $\omega_0(1+i) < \tilde{\omega}_f^1$ (car $a_1^* > 0$), comme u_1 et croissante et Φ' décroissante l'espérance est négative. Idem si $\tilde{x} < i$, l'espérance est tout le temps négative. Que nous apprends cette information ?

$$\mathbb{E}[(\tilde{x} - i)u_2'(\tilde{\omega}_f^1)] = \frac{\partial \mathbb{E}u_2(\tilde{\omega}_f^1)}{\partial a}|_{a=a_1^*} = \mathbb{E}(u'(\omega_0(1+i))(\tilde{x} - i)) < 0$$



Donc $a_1^* > a_2^*$. Dans tous les cas $|a_1^*| > |a_2^*|$, l'agent 1 est moins averse au risque et prend plus de risque.

□

III Effet d'un changement de richesse

III.1 L'actif risqué : un bien normal ou un bien inférieur ?

Définition 10. Bien normal : quand le revenu de l'agent augmente, sa consommation pour ce bien augmente.

Bien inférieur : quand le revenu augmente, sa consommation pour ce bien diminue. Exemple : Arrêter de cuisiner des pâtes et aller au restaurant (substitution).

Que peut on dire de $\frac{\partial a^*}{\partial \omega_0}$? Est ce que l'agent est prêt à prendre plus de risque quand son revenu augmente ?
Si $a^* > 0$, $\frac{\partial a^*}{\partial \omega_0} > 0$ si (H1) est satisfaite (car si (H1) est vérifiée il est moins averse au risque quand il devient plus riche donc il achète plus d'actif risqué). a est un bien normal.
Si $a^* < 0$, $\frac{\partial a^*}{\partial \omega_0} < 0$ si (H1) est vérifiée.
Si $a^* = 0$, $\mu = i$, donc ne dépend pas du niveau de richesse.

IV Effet d'un changement dans le taux de rendement i

$\frac{\partial a^*}{\partial i}$?
Si a^* positif.
Effet de substitution : il y a une diminution de a quand i augmente. Car si i augmente, le taux d'intérêt de l'actif sans risque augmente, il est plus avantageux d'investir dans l'actif sans risque.

Effet de revenu. Si $m^* > 0$, quand i augmente, la richesse augmente et (H1) implique A_a diminue, donc il est moins averse au risque, a augmente.

Si $a^* < 0$, on vend à découvert si i augmente il est encore plus incité à vendre à découvert, a diminue (effet de substitution). En revanche pour l'effet revenu, si ($m^* > 0$) l'agent est plus riche par (H1) A_a diminue. Il prend plus de risque, a diminue, il vend encore plus à découvert. Deux effets dans le même sens, pas d'ambiguité.