Diplôme de L2 MI2E — Université Paris-Dauphine
Microéconomie : théorie de l'équilibre général — Année 2015-2016
Cours de Vincent Iehlé

Enseignants chargés des travaux dirigés :
— Laurent Brembilla
— Diomides Mavroyiannis
— Julien Trouillet

FEUILLES D'EXERCICES [1]

Table des matières

1. Les exercices sont à préparer d'une semaine à l'autre en suivant une liste établie par l'enseignant chargé des travaux dirigés. Les examens (partiel, final, rattrapage) des trois dernières années se trouvent à la fin de la brochure.

1 Le consommateur

1.1 Fonction d'utilité Cobb-Douglas

Les préférences d'un consommateur sur des paniers de 2 biens sont représentées par une fonction d'utilité

$$u : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ (x, y) \longrightarrow u(x, y)$$

avec

$$u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$$

où $0 < \alpha < 1$

1. Déterminer les propriétés de la fonction u : continuité (justifier rapidement), différentiabilité (sur $\mathbb{R}^2_{++}$), (strictement) monotone, (strictement) (quasi)-concave.
2. Représenter graphiquement les courbes d'indifférence du consommateur.
3. Déterminer la demande du consommateur $d(p, w)$, en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et d'un revenu $w \in \mathbb{R}_+$, en calculant le cas échéant le taux marginal de substitution $TMS_{y\to x}$. Analyser les propriétés de cette demande et l'exprimer en fonction d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y) \in \mathbb{R}^2_+$ du consommateur.
4. Montrer que la fonction suivante représente les mêmes préférences : $u(x, y) = \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$. Refaire les calculs de la question 3 en utilisant cette spécification.

1.2 Fonction d'utilité linéaire

$$u(x, y) = ax + y$$

où $a > 0$

Mêmes questions que précédemment (sauf 4.).

1.3 Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante

$$u(x, y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$$

où $a, b > 0$ et $0 \neq \rho \leq 1$

Mêmes questions que précédemment (sauf 4.).

1.4 Fonction d'utilité Leontief

Dans une économie à 2 biens (x et y), on considère un consommateur qui dispose d'une dotation intiale $e^1 = (1, 2)$; sa fonction d'utilité est $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R} : u(x, y) = \min(3x, y)$.

1. Représentez graphiquement quelques courbes d'indifférence du consommateur.
2. A partir de la représentation graphique, étudiez les propriétés de la fonction d'utilité u du consommateur.
3. Déterminez la demande du consommateur en fonction de sa dotation initiale et du prix $p = (p_x, p_y)$ pour $p_x > 0$ et $p_y > 0$. Une représentation graphique est souhaitable.
4. Même question qu'en 3. pour un prix $p = (p_x, p_y)$ tel que $p_x = 0$ et $p_y > 0$, c'est-à-dire déterminez toutes les solutions du problème d'optimisation du consommateur dans ce cas. Une représentation graphique est souhaitable.

1.5 Exercice supplémentaire : Unicité

On considère une économie avec L biens . On rappelle qu'une fonction $u : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement quasi-concave si et seulement si pour tout $z, z' \in \mathbb{R}_+^L$, on a $u(\lambda z + (1-\lambda)z') > \min\{u(z), u(z')\}$ pour tout $0 < \lambda < 1$. La fonction d'utilité u de l'agent est continue, différentiable, croissante et strictement quasi-concave. La richesse de l'agent est $R > 0$. Les prix sont strictement positifs, $p \in \mathbb{R}_{++}^L$.

1. Ecrire le programme de l'agent, montrer que le programme admet une solution et que cette solution sature la contrainte budgétaire de l'agent.
2. Montrer que cette solution est unique.
3. On suppose le panier de biens $z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_L^*) \in \mathbb{R}_{++}^L$ vérifie $TMS_{z_2 \to z_1}(z^*) > \frac{p_1}{p_2}$. Expliquer pourquoi le panier ne peut pas être solution du programme et comment l'agent veut modifier ses consommations en bien 1 et 2, toutes choses égales par ailleurs.

1.6 Exercice supplémentaire : Fonction d'utilité particulière (difficile)

On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(x, y) = x + \sqrt{y}$$

Déterminer la demande du consommateur $d(p, w)$ (Il est impératif de tracer précisément les courbes d'indifférences pour se donner une idée des solutions (plusieurs cas à traiter)).

2 Economies d'échange

2.1 Fonction d'utilité Cobb-Douglas

On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2$.

$$u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}},\; u^2(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

$$e^1 = (1, 1),\; e^2 = (1, 2)$$

1. Vérifier si l'économie possède un équilibre concurrentiel.
2. Si oui, déterminer **les prix** et **les allocations** correspondantes.
3. Représenter les différentes quantités dans une boîte d'Edgeworth.

2.2 Fonction d'utilité de Leontief

$$u^1(x, y) = u^2(x, y) = \min(x, y)$$

$$e^1 = (2, 6),\; e^2 = (1, 2)$$

Mêmes questions que précédemment

2.3 Fonction d'utilité linéaire

On considère une économie avec 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les fonctions d'utilité sont $u^1(x, y) = x + y$ et $u^2(x, y) = x$; les dotations initiales sont $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (1, 1)$.

1. Peut-on appliquer le théorème d'existence ? Pourquoi ?
2. Dans la boîte d'Edgeworth, dessiner précisément les courbes d'indifférence passant par les dotations initiales.
3. En raisonnant dans la boîte d'Edgeworth, déterminer explicitement, mais sans calculs, l'équilibre concurrentiel (prix et allocation d'équilibre).

2.4 Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante

On considère une économie d'échange comprenant deux consommateurs (1 et 2) et deux biens (x et y). Les dotations initiales sont $e^1 = (e^1_x, e^1_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et $e^2 = (e^2_x, e^2_y) \in \mathbb{R}^2_+$. Les fonctions d'utilité des deux consommateurs sont données par $u^1(x, y) = u^2(x, y) = \frac{xy}{x+4y}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.

1. Ecrire la fonction d'utilité des consommateurs de manière à montrer qu'elle est à élasticité de substitution constante ; indiquer la valeur des paramètres.
2. Représenter **précisément** au moins 3 courbes d'indifférence.

3. Vérifier par le calcul que les courbes d'indifférence sont strictement décroissantes et strictement convexes. Que peut-on en déduire sur la fonction d'utilité des consommateurs ?
4. Peut-on dire, *sans faire aucun calcul*, que cette économie possède un équilibre concurrentiel ?
5. Déterminer la demande de chacun des agents en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$, pour $p_x > 0$ et $p_y > 0$, et de sa dotation initiale, en donnant les étapes du calcul.
6. Ecrire les équations d'équilibre sur les marchés des biens en fonctions du prix (p_x, p_y). Montrer que le prix $(p^*, 1)$ (on normalise du prix du bien y) est un prix d'équilibre si et seulement si $p^* = 4\frac{(e_y^1+e_y^2)^2}{(e_x^1+e_x^2)^2}$.
7. Pour les dotations $e^1 = (3, 1)$ et $e^2 = (5, 1)$ déterminer l'équilibre concurrentiel et représenter **précisément** l'économie et l'équilibre dans la boîte d'Edgeworth (boîte, dotations initiales, courbes d'indifférence, contraintes budgétaires, allocations).

3 Optimalité de Pareto

3.1 Fonction d'utilité Cobb-Douglas :

On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2$. Une allocation est désignée par $z = [(x^1, y^1), (x^2, y^2)]$.

$$u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}},\ u^2(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$
$$e^1 = (1, 1),\ e^2 = (1, 2)$$

$$z = [(1, \frac{12}{5}), (1, \frac{3}{5})]$$

1. Déterminer la courbe des contrats et la représenter dans une boîte d'Edgeworth.
2. Vérifier si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.
3. Le cas échéant, montrer que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminer ce transfert.

3.2 Fonction d'utilité linéaire :

On considère une économie d'échange à deux agents (1 et 2) et deux biens (1 et 2). On note x^i la consommation de bien 1 de l'agent i et y^i, la consommation de bien 2 de l'agent i ($i = 1, 2$). Les dotations initiales des agents sont $e^1 = (e^1_x, e^1_y) = (0, 3)$ et $e^2 = (e^2_x, e^2_y) = (2, 1)$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ sont

$$u^1(x^1, y^1) = x^1 + 5y^1,\ u^2(x^2, y^2) = 5x^2 + y^2$$

Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth, dans laquelle vous indiquerez aussi les dotations initiales.

3.3 Décentralisation

On considère une économie à deux consommateurs et deux biens. Les dotations initiales sont données par $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (1, 1)$. Les fonctions d'utilité sont données par : $u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ et $u^2(a, b) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$.

1. Déterminer la courbe des contrats et la représenter dans la boîte d'Edgeworth.
2. Pour des raisons d'équité, l'Etat souhaiterait privilégier l'optimum de Pareto qui garantit une quantité égale de bien x aux deux consommateurs. De quel optimum s'agit-il ?
3. Pour décentraliser cet optimum, l'Etat a la possibilité d'effectuer un transfert dans les dotations initiales en bien x. Déterminer ce transfert et l'équilibre concurrentiel correspondant.

4 Economies avec production

4.1 Rendements

Soit la fonction de production Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$, avec $\alpha, \beta > 0$.

1. Décrire l'ensemble de production, en fonction des paramètres α, β.
2. A quelles conditions sur les paramètres les rendements sont-ils décroissants ? constants ? croissants ?

4.2 Rendements (II)

Soit la fonction de production à élasticité de substitution constante $g : \mathbb{R}_+^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$. Montrer que les rendements sont constants.

4.3 Maximisation du profit

1. Dans le cas de fonctions de production linéaires, déterminer graphiquement et analytiquement les solutions du problème de maximisation du profit en dessinant les courbes d'iso-profit (dans $\mathbb{R}^2$).
2. Soit la fonction de production Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Déterminer l'offre de l'entreprise et le profit associé en fonction des prix.

4.4 Equilibre avec un producteur

On considère une économie avec production, comprenant un consommateur, une entreprise et deux biens. Le consommateur a une dotation initiale $e = (e_x, e_y) = (10, 0)$ et une fonction d'utilité $u(x,y) = \frac{xy}{x+4y}$. L'entreprise produit une quantité $y = g(x)$ du second bien à partir de x unités du premier. On normalise le prix du premier bien p_x à 1 et on note $p_y = p$ le prix du second bien.

1. Définissez la notion d'"élasticité de substitution" et écrivez la fonction d'utilité du consommateur de manière à montrer qu'elle est à élasticité de substitution constante ; indiquez la valeur des paramètres.
2. Déterminez la fonction de demande $(d_x(p,\pi), d_y(p,\pi))$ du consommateur en fonction du prix p et du profit π de l'entreprise.
3. On suppose que $g(x) = 9x$. Représentez graphiquement l'ensemble de production et les droites d'isoprofit de l'entreprise. Déterminez, en fonction du prix p, l'offre (ou les offres) $(x^*(p), y^*(p))$ et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise (pour autant que ces quantités existent).
4. Calculez l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuel(s), en supposant toujours que $g(x) = 9x$.

5. Calculez l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuel(s), en supposant à présent que $g(x) = e^x - 1$.

4.5 Equilibre avec deux producteurs

On considère une économie à deux consommateurs , deux biens de consommation, un facteur de production (le travail) et deux entreprises. On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i, $(i = 1; 2)$. La dotation initiale du consommateur 1 est d'une unité de travail ; celle du consommateur 2, de 2 unités de travail. Leurs fonctions d'utilité sont $u^i(x^i; y^i) = \sqrt{x^i y^i}$, $i = 1; 2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = z_1$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = \frac{1}{2} z_2$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de travail, $k = 1; 2$). On suppose enfin que le consommateur 1 possède les entreprises.

1. (1 pt) Ecrire les conditions que doit satisfaire une allocation $(x^1; y^1; x^2; y^2; q_1; z_1; q_2; z_2)$ pour être réalisable dans cette économie. En déduire qu'une allocation $(x^1; y^1; x^2; y^2)$ en biens de consom- mation est réalisable si et seulement si, $x^1 + x^2 + 2(y^1 + y^2) = 3$.
2. (3 pts) Montrer que l'économie possède un équilibre concurrentiel, en fixant le prix du travail à 1 et en notant p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1; 2$. Calculer l'utilité de chaque consommateur à l'équilibre.
3. (1 pt) Sans faire de calcul, peut-on affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto-optimal ?
4. (3 pts) En utilisant le point 1., écrire le programme d'optimisation sociale qui permet de déduire les optima de Pareto. Déterminer les allocations Pareto optimales intérieures et montrer qu'une paire de niveaux d'utilités $(v^1; v^2)$ pour les consommateurs est Pareto-optimale si et seulement si $v^1 + v^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $v^1, v^2 \geq 0$. Représenter graphiquement l'ensemble des niveaux d'utilités réalisables dans l'économie et les niveaux d'utilités de l'équilibre concurrentiel. Vérifier que l'équilibre est Pareto optimal.

5 Défaillances du marché : effets externes et biens publics

5.1 Externalité

On considère une économie consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (1 et 2). Les dotation initiales des consommateurs sont $e^1 = (10, 20)$ et $e^2 = (10, 32)$, respectivement. Le consommateur 1 possède l'entreprise, qui produit du bien 1 à partir du bien 2 suivant la technologie $q = g(z) = 2\sqrt{z}$ (pour éviter toute confusion, on désigne par z l'input en bien 2 et par q l'output en bien 1). La fonction d'utilité du consommateur 1 est $u^1(x, y) = \sqrt{xy}$; le consommateur 2 subit maintenant une externalité de la part de l'entreprise : sa fonction d'utilité devient $u^2(x, y, z) = \sqrt{xy} - 2z$, où z est la quantité de bien 2 utilisée par l'entreprise (et comme précédemment, x et y, les quantités de bien 1 et bien 2 respectivement consommées par le consommateur 2).

1. Déterminer l'équilibre de cette économie avec externalité (on pourra simplifier les calculs en considérant la version sans externalité, après justification).
2. Vérifier que l'allocation suivante : $q = 2$, $z = 1$, $(x^1, y^1) = (12, 22)$, $(x^2, y^2) = (10, 29)$ est réalisable et Pareto-domine l'équilibre trouvé à la question précédente.

5.2 Externalité

On considère une économie, consistant en deux entreprises (1 et 2), un consommateur, un facteur de production et deux biens de consommation (1 et 2). Le consommateur détient initialement k unités du facteur de production (où $k > 0$ est un paramètre fixé) ; l'entreprise h, $h = 1, 2$. La fonction de production de l'entreprise 1 est $y_1 = g_1(z_1) = z_1$ tandis que celle de l'entreprise 2 est $y_2 = g_2(z_2) = az_2$ où $a > 0$ est perçu comme un paramètre fixé par l'entreprise 2. En fait, $a = y_1$ où y_1 est la quantité de bien 1 produite par l'entreprise 1 et représente donc une externalité de production. Le consommateur ne tire d'utilité que des biens de consommation ; sa fonction d'utilité est $u(x_1, x_2) = x_1x_2$.

1. Déterminer (en fonction de k) l'équilibre concurrentiel de l'économie en normalisant à 1 le prix de facteur de production. (Indication : ne tenir compte de l'externalité qu'après avoir déterminé l'équilibre en traitant a comme un paramètre).
2. Déterminer (en fonction de k) et représenter graphiquement l'ensemble des productions (y_1, y_2) réalisables (y_h désignant la quantité de bien de consommation h produit par l'entreprise h, $h = 1, 2$).
3. En identifiant la quantité de bien h consommée par le consommateur avec la quantité de bien h produite, déterminer (en fonction de k) la ou les productions réalisables (y_1^*, y_2^*) qui maximisent l'utilité du consommateur.
4. Comparer les solutions obtenues en 1. et 4.
5. On modifie l'économie en taxant le bien 2. Pour ce bien, on distingue le prix à la production p_2 et le prix à la consommation $p_2 + t$, où t désigne une taxe unitaire. Les recettes fiscales sont

redistribuées au consommateur sous forme de transfert forfaitaire. Déterminer (en fonction de k et t) l'équilibre avec taxe.

6. Montrer qu'on peut choisir la taxe t pour que l'équilibre avec taxe calculé en 5. coïncide avec l'optimum calculé en 3.

5.3 Bien public

On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2) dont les fonctions d'utilité sont respectivement :

$$u^1(x^1, y) = \ln x^1 + 2\ln y$$

$$u^2(x^2, y) = 2\ln x^2 + \ln y$$

où $x^i > 0$ désigne la quantité de bien privé consommé par l'agent i et $y > 0$ la quantité de bien public produit dans l'économie. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = z$. La dotation initiale de chaue consommateur est de 15 unités de bien privé.

1. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) réalisables dans l'économie.
2. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) Pareto-optimales.
3. Déterminer l'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques pour les deux consommateurs.
4. Déterminer l'équilibre de Lindahl et montrer que c'est un optimum de Pareto.
5. Déterminer l'équilibre avec souscription (en déterminant au préalable les fonctions de réaction $z^1(z^2)$ et $z^2(z^1)$) et montrer que ce n'est pas un optimum de Pareto.

5.4 Bien public

On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2), un bien privé et un bien public. Les fonctions d'utilité des consommateurs, $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont $u^1(x_1, y) = x_1^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ et $u^2(x_2, y) = x_2^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ où x_i désigne la quantité de bien privé consommée par l'agent i et $y > 0$, la quantité du bien public. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = \sqrt{z}$. La dotation initiale globale des deux consommateurs est de 10 unités de bien privé. Vérifiez si chacune des cinq allocations (x_1, x_2, y) suivantes est réalisable et/ou Pareto-optimale : $(3, 3, 2)$; $(5, 5, 0)$; $(2, 8, 2)$; $(2, 4, 2)$; $(3, 3.2, \sqrt{3.8})$. Justifiez brièvement.

6 Annales d'examens

Novembre 2012 (2 heures)

Exercice 1 (5 points) On considère une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\ldots,N}\}$, avec $L = 2$ et $N = 10$ où la fonction d'utilité de chaque agent i est donnée par :

$$u^i(x^i) = (x_1^i)^{\alpha_i}(x_2^i)^{1-\alpha_i},\ \ 0 < \alpha_i < 1$$

1. (2pts) Pour chaque agent $i = 1, \ldots, 10$, déterminer la fonction de demande en fonction des prix (p_1, p_2), de la dotations initiale (e_1^i, e_2^i) et de α_i, en justifiant rapidement. (on ne fera les calculs que pour un seul agent quelconque i)
2. On suppose que pour chaque agent i, $\alpha_i = \frac{i}{11}$ et $e^i = (1, 1)$.
   (a) (1pt) Ecrire les conditions d'équilibre sur les marchés seulement en fonction des prix (p_1, p_2).
   (b) (2pts) Déterminer les prix d'équilibre (on pourra normaliser le prix du bien 2 à 1) et en déduire les allocations d'équillibre.

Exercice 2 (5 points) On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(x, y) = x + \sqrt{y}$$

1. (1pt) Montrer que la fonction d'utilité est strictement croissante et strictement quasi-concave.
2. (2pts) Tracer précisément les 2 courbes d'indifférence du consommateur qui donnent les utilités $\bar{u} = 1$ et $\bar{u} = 2$. On précisera notamment en quels points ces courbes intersectent les axes des abscisses et des ordonnées et on donnera les pentes des courbes en ces points.
3. (2pts) On suppose que le revenu w est égal à 1, déterminer la demande du consommateur $D(p, w)$ dans les 2 cas de figure suivants $p = (1, 1)$ et $p = (3, 1)$. On pourra s'aider du dessin précédent.

Exercice 3 (10 points) On considère une économie avec L biens.

Partie A. (questions de cours)

On suppose qu'il existe un consommateur dont la fonction d'utilité est croissante et strictement quasi-concave.

1. (1pt) Montrer que la solution du programme du consommateur sature la contrainte budgétaire.
2. (2pts) Montrer que la solution du programme du consommateur est unique.

Partie B.

On suppose qu'un économiste observe les prix et les choix du consommateur sur 2 périodes $t = 1, 2$. Il observe le panier $x(1)$ et les prix $p(1)$ en $t = 1$, et le panier $x(2)$ et les prix $p(2)$ en $t = 2$.

3. (2pts) Considérons l'exemple suivant avec $L = 2$, $p(1) = (2,1)$ et $p(2) = (1,2)$, et, $x(1) = (2,1)$ et $x(2) = (1,2)$. Représenter sur un même dessin les deux contraintes budgétaires et les choix de l'agent en $t = 1$ et $t = 2$. Expliquer pourquoi ces choix ne sont pas compatibles avec l'hypothèse d'un consommateur rationnel, c'est-à-dire qui maximise son utilité sous contrainte budgétaire. (on utilisera les questions précédentes).

4. (1pt) Plus généralement, avec L biens, montrer que les choix $x(1)$ et $x(2)$ observés doivent nécessairement vérifier :

$$p(1) \cdot x(2) \leq p(1) \cdot x(1) \text{ avec } x(1) \neq x(2) \Rightarrow p(2) \cdot x(1) > p(2) \cdot x(2) \tag{1}$$

   Remarque. La propriété (1), appelée axiome faible des préférences révélées, est très importante en pratique. Elle permet à l'économiste de savoir si le consommateur est bien rationnel dans ses choix à partir des seules données observées (sans connaître explicitement la fonction d'utilité).

Partie C.

On considère maintenant une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\ldots,N}\}$ où les fonctions d'utilité sont croissantes. On appelle fonction de demande agrégée excédentaire la fonction $Z : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}_+^L$ qui à tout prix $p \in \mathbb{R}_+^L$ associe les quantités :

$$Z(p) = \sum_{i=1}^{N} \left(D^i(p) - e^i\right)$$

où D^i est la fonction de demande de l'agent i que l'on suppose bien définie.

5. (1pt) Montrer que $p \cdot Z(p) = 0$ pour tout prix $p \in \mathbb{R}_+^L$ (on utilisera la question 1 de la partie A).

6. (1pt) Montrer que $Z(p^*) = 0$ pour tout prix d'équilibre concurrentiel p^*.

7. (2pts) En déduire que le prix d'équilibre est unique si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall p, p' \in \mathbb{R}_+^L,\ p \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p') \leq p \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p) \Rightarrow p = p' \text{ ou } p' \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p) > p' \cdot \sum_{i=1}^{N} D^i(p')$$

   Remarque. Cette propriété est une version *agrégée* de l'équation (1).

Janvier 2013 (2 heures)

Questions de cours (4 points)

1. (1pt) Rappeler le théorème d'existence d'un équilibre concurrentiel dans économie d'échange $\mathcal{E}$.
2. (1pt) Rappeler le premier théorème du bien-être dans une économie de production $\mathcal{E}$.
3. Soit une économie de production avec 1 agent et 1 entreprise et 2 biens. L'utilité du consommateur est donnée par $u(x, y) = \min\{x, y\}$, la fonction de production de l'entreprise qui produit du bien y à partir du bien x est donnée par $g(x) = 3x$. La dotation de l'agent est $e = (3, 1)$.
   (a) (1pt) Rappeler la définition d'un optimum de Pareto dans cette économie.
   (b) (1pt) L'allocation initiale dans l'économie, c'est-à-dire la dotation initiale $e = (3, 1)$ avec le plan de production $(0, 0)$, est-elle Pareto optimale ? Si ce n'est pas le cas trouver une allocation réalisable qui la Pareto-domine.

Exercice 1 (Economie de Production) (11 points) On considère une économie avec 2 consommateurs, 3 entreprises et 2 biens (x et y).

La fonction d'utilité du consommateur 1 est donnée par $u^1(x^1, y^1) = (x^1)^{\frac{1}{2}}(y^1)^{\frac{1}{2}}$. Celle du consommateur 2 par $u^2(x^2, y^2) = (x^2)^{\frac{1}{3}}(y^2)^{\frac{2}{3}}$. La dotation initiale de chaque consommateur est $(1, 1)$. La part de l'entreprise $j = 1; 2; 3$ détenue par le consommateur $i = 1; 2$ est notée θ^{ij}.

Chaque entreprise $j = 1; 2; 3$ produit du bien y à partir du bien x suivant la technologie g^j ; on notera respectivement x_e^j et y_e^j les quantités de bien x et de bien y choisies. Les fonctions de production sont données par : $g^1(x_e^1) = \sqrt{x_e^1}$; $g^2(x_e^2) = 2\sqrt{x_e^2}$; et $g^3(x_e^3) = 3\sqrt{x_e^3}$.

1. (3pts) Pour chaque entreprise $j = 1; 2; 3$, déterminer la fonction d'offre et le profit maximal en fonction d'un prix donné (p_x, p_y) (1 point par entreprise). On notera $\pi^j(p_x, p_y)$ le profit maximal de l'entreprise j.
2. (2pts) Pour chaque consommateur $i = 1; 2$, déterminer la fonction de demande en fonction d'un prix donné (p_x, p_y) et des θ^{ij} et $\pi^j(p_x, p_y)$ pour $j = 1; 2; 3$ (1 point par consommateur).
3. On suppose que $\theta^{ij} = 0.5$ pour tout $i = 1; 2$ et tout $j = 1; 2; 3$.
   (a) (2pt) Ecrire les conditions d'équilibre sur les marchés seulement en fonction des prix (p_x, p_y).
   (b) (2pts) Ecrire, sans la résoudre, l'équation du second degré qui sert à déterminer le prix d'équilibre du bien x (le prix du bien y est normalisé à 1).
4. (2pts) On suppose maintenant que les 3 entreprises sont entièrement détenues par le consommateur 2. A l'équilibre, produit-on ici plus ou moins de bien y que dans la situation précédente ? Justifier précisément (sans calculs).

Exercice 2 (Externalités) (5 points) Soit une économie d'échange avec 2 agents et 2 biens (x et y). La consommation de bien y par l'agent 1 affecte l'agent 2. Le programme d'optimisation social peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \max_{x,y} & \rho^1 u^1(x^1, y^1) + \rho^2 u^2(x^2, y^2; y^1) \\ s.c. & x^1 + x^2 = e_x \\ & y^1 + y^2 = e_y \end{cases}$$

où $\rho^1, \rho^2 > 0$ et e_x, e_y désignent les dotations globales en biens.

1. (3pts) En suivant la méthode vue en cours, déterminer les condition nécessaire d'optimalité, en termes de TMS, satisfaites par tout optimum de Pareto (intérieur) (pour des fonctions d'utilités différentiables).
2. (2pts) On suppose que l'externalité produite par l'agent 1 sur l'agent 2 est positive. En utilisant l'équation trouvée à la question 1, comment les consommations varient-elles à l'optimum, en tendance, par rapport au cas sans externalité ? Illustrer votre propos en représentant les courbes des contrats dans la même boîte d'Edgeworth pour les cas "avec" et "sans" externalités.

Septembre 2013 (2 heures)

Questions de cours (3 points)

1. (1pt) Rappeler la définition d'une fonction quasi-concave $f : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$.
2. (1 pt) Sous quelle condition, le problème du consommateur admet-il une solution unique ? Quelles sont alors les propriétés principales de la fonction de demande ?
3. (1pt) Rappeler le second théorème du bien-être dans une économie de production $\mathcal{E}$.

Exercice 1 (12 pts) On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents, notées $e^i = (e_x^i, e_y^i) \in \mathbb{R}_+^2$, sont

$$e^1 = (1, 0) \qquad e^2 = (0, 1)$$

Les fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont

$$u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad u^2(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

1. (2 pts) Vérifier **explicitement** si la fonction d'utilité du premier agent est : croissante, strictement croissante, quasi-concave, strictement quasi-concave.
2. (2 pts) Déterminer la demande de chacun des agents en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et de sa dotation initiale, en donnant les étapes du calcul.
3. (1 pt) Peut-on dire, *sans faire aucun calcul*, que cette économie possède un équilibre concurrentiel ? Pourquoi ?
4. (2 pts) Le cas échéant, déterminer l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) de cette économie.
5. (2 pts) Déterminer l'équation de la courbe des contrats, en donnant les étapes du calcul.
6. (1 pt) Quelles sont les propriétés de l'allocation $\left[(\frac{1}{4}, \frac{3}{5}), (\frac{3}{4}, \frac{2}{5})\right]$?
7. (2 pts) Représenter dans une boîte d'Edgeworth : les dotations initiales, quelques courbes d'indifférence des agents, l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuels (droite budgétaire et allocations), la courbe des contrats.

Exercice 2 (2 pts) Soit une économie de production avec 1 agent et 1 entreprise et 2 biens. L'utilité du consommateur est donnée par $u(x, y) = \min\{x, y\}$, la fonction de production de l'entreprise qui produit du bien y à partir du bien x est donnée par $g(x) = 3x$. La dotation de l'agent est $e = (3, 1)$.

1. (1pt) Rappeler la définition d'une allocation réalisable et d'un optimum de Pareto **dans cette économie**.

2. (1pt) L'allocation initiale dans l'économie, c'est-à-dire la dotation initiale $e = (3, 1)$ avec le plan de production $(0, 0)$, est-elle Pareto optimale ? Si ce n'est pas le cas trouver une allocation réalisable qui la Pareto-domine.

Exercice 3 (3 pts) Rappeler brièvement les ingrédients du modèle d'économie avec externalités vu en cours. Expliquer pourquoi l'équilibre concurrentiel n'est pas toujours Pareto optimal dans ce cadre (sans utiliser d'équations mais en donnant plutôt l'intuition générale).

Novembre 2013 (2 heures)

Exercice 1 (4 points) On considère un consommateur doté d'une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ strictement quasi-concave. On fixe les prix des biens $p_\ell > 0$, pour tout $\ell = 1, \ldots, L$, et le revenu $R > 0$.

1. (1pt) Ecrire le programme du consommateur.
2. (1pt) Rappeler la caractérisation d'une fonction strictement quasi-concave donnée en cours.
3. (2pts) Montrer que la solution du programme du consommateur (si elle existe) est unique.

Exercice 2 (6 points) On considère une économie avec deux biens (x et y) et un consommateur doté d'une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante. On suppose que $p_x = 0$, $p_y = 3$ et $R = 4$.

1. (1pt) Représenter l'ensemble de budget.
2. (1pt) Rappeler la définition de la stricte croissance de la fonction d'utilité.
3. (2pts) Montrer que le problème du consommateur n'admet jamais de solution.
4. (2pts) Montrer que le résultat précédent n'est pas toujours vérifié si l'on suppose seulement que la fonction d'utilité est continue et croissante. (donner un exemple de fonction d'utilité et déterminer la (les) solution(s), éventuellement en vous aidant d'un dessin)

Exercice 3 (10 points) On considère une économie d'échange avec 2 agents (1 et 2) et 3 biens (x, y et z). La fonction d'utilité de l'agent 1 est donnée par

$$u^1(x, y, z) = x^{\frac{4}{5}} y^{\frac{8}{5}} z^{\frac{12}{5}}$$

La fonction d'utilité de l'agent 2 est donnée par

$$u^2(x, y, z) = \frac{1}{5}\ln(x) + \frac{2}{5}\ln(y) + \frac{3}{5}\ln(z)$$

Les dotations initiales sont données par $e^1 = (0, 150, 150)$ et $e^2 = (100, 150, 50)$

1. (2pts) Montrer que les deux agents ont les mêmes préférences, c'est-à-dire que la fonction u^2 représente les mêmes préférences que la fonction d'utilité u^1.

   Dans la suite, on considérera u^2 comme étant la fonction d'utilité de l'agent 1.
2. (1pt) Quelles sont les conditions qui garantissent l'existence d'un équilibre concurrentiel dans une économie d'échange ? Sont-elles vérifiées ici (sans détailler) ?
3. (1pt) Sans calculs et en raisonnant seulement sur les fonctions d'utilité et les dotations initiales, peut-on dire que les agents ont intérêt à échanger ?
4. (1pt) Sans calculs et en raisonnant seulement sur les fonctions d'utilité et les dotations initiales, montrer que les fonctions de demande des deux agents sont nécessairement strictement positives en tout bien, c'est-à-dire $D^1(p, e^1) \gg 0$ et $D^2(p, e^2) \gg 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}_{++}^3$.

5. (3pts) Déterminer la fonction de demande de l'agent 1, $D^1(p, e^1)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3_{++}$, en détaillant la méthode et les calculs. En déduire sans calculs la fonction de demande de l'agent 2.

6. (2pts) Poser les conditions d'équilibre sur les marchés, déterminer les prix d'équilibre, puis les allocations d'équilibre. (on normalisera le prix du bien x : $p^*_x = 1$)

Février 2014 (2 heures)

Exercice 1 (6 points) On observe un consommateur durant 2 périodes $t = 1, 2$. Ses préférences ne sont pas connues mais on suppose qu'elles sont **monotones** et qu'elles restent inchangées durant les 2 périodes. Le consommateur peut choisir 2 biens (x et y). On connaît les prix $p_x(t)$ et $p_y(t)$ et le revenu $R(t)$ à chaque date t : $p_x(1) = 2$; $p_y(1) = 1$; $R(1) = 4$; $p_x(2) = 1$; $p_y(2) = 2$; $R(2) = 3$.

1. (1pt) Représenter précisément sur un même dessin les ensembles de budget pour les 2 périodes.
2. (1pt) Déterminer le panier de biens qui sature simultanément la contrainte de budget du consommateur aux 2 périodes. On notera ce panier (x^*, y^*).

On suppose que le consommateur a choisi de consommer exactement $\frac{11}{6}$ unités de bien x à la période 1.

3. (1pt) Quelle est sa consommation en bien y en $t = 1$? Justifier sans démontrer.
4. (2pts) Expliquer pourquoi sa consommation en bien x à la période 2 ne pourra excéder y^*. Justifier précisément, éventuellement en vous aidant du dessin.
5. (1pt) En déduire l'ensemble des paniers de biens possibles choisis à la date 2 (les représenter sur le dessin).

Exercice 2 (14 points)

On considére une économie de production avec 2 consommateurs (1 et 2), 1 entreprise (e), et 2 biens (x et y). Chaque consommateur $i = 1, 2$ est doté d'une fonction d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ croissante, un panier de biens sera noté (x^i, y^i). L'ensemble de production de l'entreprise est Q, un plan de production sera noté (x^e, y^e). Chaque consommateur possède la moitié de l'entreprise. Les dotations initiales du consommateur i, $i = 1, 2$, sont $e^i = (e^i_x, e^i_y)$.

1. (1pt) Rappeler la définition d'un équilibre concurrentiel $\big((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^e, y^e), (p_x, p_y)\big)$ pour cette économie.
2. (1pt) Rappeler la définition d'une allocation réalisable $\big((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^e, y^e)\big)$ pour cette économie.
3. (1pt) Rappeler la définition d'une allocation Pareto optimale $\big((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^e, y^e)\big)$ pour cette économie.
4. (2pts) Soit $\big((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^e, y^e), (p_x, p_y)\big)$ un équilibre concurrentiel de cette économie. Montrer que l'allocation $\big((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^e, y^e)\big)$ est Pareto optimale.

On suppose que, pour tout $i = 1, 2$, $u^i(x^i, y^i) = \sqrt{x^i y^i}$, $e^i = (1, 1)$, et que la technologie de production peut être représentée par une fonction de production g : $g(x^e) = 3\sqrt{x^e}$ (le bien x^e est un input utilisé pour produire du bien : $y^e = g(x^e)$).

5. (2pts) Déterminer la fonction d'offre et le profit de l'entreprise en fonction des prix, en détaillant les calculs.

6. (1pt) Déterminer les fonctions de demandes en fonction des prix (on détaillera le calcul à partir de la relation TMS égal rapport des prix pour un seul consommateur).
7. (1pt) En déduire l'équilibre concurrentiel de cette économie.
8. (1pt) (sans calculs) Expliquer pourquoi les consommateurs ont toujours intérêt à utiliser l'entreprise pour produire du bien y en tout optimum de Pareto.
9. (3pts) On admet que les allocations Pareto optimales (avec $x^1, y^1, x^2, y^2 > 0$) sont données par les solutions du problème d'optimisation sociale suivant, avec $\gamma^1, \gamma^2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \max_{x^1,y^1,x^2,y^2;x^e,y^e>0} \gamma^1 u^1(x^1, y^1) + \gamma^2 u^2(x^2, y^2) \\ y^e = g(x^e) \\ x^1 + x^2 = e_x^1 + e_x^2 - x^e \\ y^1 + y^2 = e_y^1 + e_y^2 + y^e \end{cases}$$

   Déterminer l'ensemble des allocations Pareto optimales (telles que $x^1, y^1, x^2, y^2 > 0$) de cette économie en suivant la méthode de calcul habituelle du cours.
10. (1pt) Vérifier que l'allocation d'équilibre trouvée à la question 7 est bien Pareto optimale.

Septembre 2014 (2 heures)

Questions de cours (9 points)

1. (1pt) Rappeler la définition d'une fonction quasi-concave et d'une fonction strictement quasi-concave $f : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$.
2. (1pt) Rappeler la définition d'une fonction croissante et d'une fonction strictement croissante $f : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$.
3. (1pt) Donner un exemple d'une fonction d'utilité croissante mais non strictement croissante (avec au moins deux biens).
4. (1pt) Rappeler la définition d'une équilibre concurrentiel dans une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$.
5. (1pt) Expliquer en trois lignes (max) ce que signifie *être à l'équilibre* dans une économie d'échange.
6. (1pt) Rappeler la définition d'une allocation réalisable et d'une allocation Pareto optimale dans une économie d'échange.
7. (1pt) Rappeler le premier théorème du bien-être dans une économie d'échange.
8. (1pt) Rappeler le second théorème du bien-être dans une économie d'échange.
9. (1pt) Dans quel cas de figure, vu en cours, l'allocation d'équilibre n'est-elle pas nécessairement Pareto optimale ? Expliquer pourquoi brièvement.

Exercice 1 (3 pts)

On considère une économie d'échange à 2 consommateurs (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des consommateurs sont $e^i = (e_x^i, e_y^i) \in \mathbb{R}_+^2$, $i = 1, 2$, et vérifient $e_y^2 = 0$. Les fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont

$$u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad u^2(x, y) = x^{\frac{1}{2}}$$

On dit qu'un équilibre est autarcique si l'allocation d'équilibre correspond à (e^1, e^2). Montrer que l'équilibre est autarcique dans cette économie d'échange et donner le ou les prix d'équilibre.

Exercice 2 (8 pts) On considère une économie d'échange à 2 consommateurs (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les préférences du premier consommateur sont représentées par la fonction d'utilité $u^1(x, y) = xy$ et celles du deuxième par la fonction $u^2(x, y) = \min\{x, y\}$. On suppose que $e^1 + e^2 = (2, 4)$ et $e_x^i, e_y^i > 0$, $i = 1, 2$.

1. (1pt) Tracer la boite d'Edgeworth et tracer dans cette boite la courbe d'indifférence des deux consommateurs pour le niveau d'utilité 1.
2. (2pts) Soit $((p_x, p_y), (x^1, y^1), (x^2, y^2))$, un équilibre concurrentiel. Montrer qu'il existe un réel $t \in]0, 2[$ tel que $(x^2, y^2) = (t, t)$ et donc tel que $(x^1, y^1) = (2 - t, 4 - t)$.

3. (1pt) En utilisant la condition du premier ordre qui donne l'égalité entre TMS du premier consommateur et rapport des prix, montrer que le prix d'équilibre (p_x, p_y) est colinéaire au vecteur $(4-t, 2-t)$.
4. (1pt) Justifier pourquoi $(p_x, p_y) \cdot (x^1, y^1) = (p_x, p_y) \cdot (e_x^1, e_y^1)$. En déduire que t vérifie l'équation suivante : $(4-t)e_x^1 + (2-t)e_y^1 - 2(2-t)(4-t) = 0$
5. (1pt) Montrer que cette équation a toujours une unique solution appartenant à $]0, 2[$ (on ne cherchera pas à calculer cette solution). En déduire que l'économie a toujours un unique équilibre.
6. (2pts) Calculer les allocations d'équilibre et le prix d'équilibre lorsque $e^1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Représenter l'équilibre dans la boîte d'Edgeworth.

Novembre 2014 (2 heures)

Exercice 1

Soit une économie d'échange $E = \{L, N, (u^i, e^i)_{i=1,\ldots,N}\}$. Rappeler le premier théorème du bien-être et le démontrer.

Exercice 2

On considère une économie d'échange avec 3 agents (1, 2 et 3) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales sont telles que $e^1 = (2, 2)$, $e^2 = (2 + t, 2)$ et $e^3 = (2 - t, 2)$ oô $0 \leq t \leq 1$; leurs fonctions d'utilité sont données par $u^1(x, y) = xy^2$, $u^2(x, y) = xy^3$ et $u^3(x, y) = x^3y$.

1. Expliquez pourquoi les préférences des 3 agents pourraient aussi être représentées par les fonctions d'utilité $u^1(x, y) = \ln(x) + 2\ln(y)$, $u^2(x, y) = \ln(x) + 3\ln(y)$ et $u^3(x, y) = 3\ln(x) + \ln(y)$.
2. Montrer que les fonctions sont strictement croissantes et strictement quasi-concaves (le montrer précisément pour l'une d'elles seulement). Peut-on en déduire sans calcul que l'économie possède un équilibre concurrentiel ?
3. Après en avoir rappelé l'interprétation économique, calculer les taux marginaux de substitution du bien y pour le bien x pour chacun des agents.
4. Déterminer les fonctions de demande des agents en fonction des prix (et de t).
5. Déterminer le prix d'équilibre en fonction de t. (on normalise le prix du bien y, $p_y = 1$)
6. Dessiner dans le plan la fonction du prix d'équilibre du bien x en fonction de t.
7. Déterminer l'allocation d'équilibre en fonction de t. Comment évolue l'utilité d'équilibre de l'agent 2 avec t ?

Exercice 3

1. Rappeler **précisément** la définition d'une allocation réalisable, d'une allocation qui Pareto-domine une autre allocation, d'une allocation Pareto optimale dans une économie d'échange.

   On considère une économie d'échange avec 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les préférences sont données par
   $$u^1(x, y) = u^2(x, y) = \min\{x, y\}$$
   et la dotation globale par $e = (4, 4)$.
2. Représenter l'économie dans la boîte d'Edgeworth (boîte, courbes d'indifférence).
3. En utilisant la définition de Pareto optimalité, trouver une allocation qui est Pareto optimale, et une qui ne l'est pas (**expliquer précisément**).
4. Soient les dotations initiales suivantes : $e^1 = (4; 0)$ et $e^2 = (0; 4)$. Trouver un équilibre concurrentiel de l'économie (prix et allocations) en vous aidant de la représentation graphique.

5. Supposons que l'agent 1 reçoive une unité de plus du bien 1 si bien que les dotations initiales deviennent $e^1 = (5; 0)$ et $e^2 = (0; 4)$, trouver un équilibre concurrentiel de l'économie (prix et allocations). Vous pouvez vous aider d'une représentation graphique.

Janvier 2015 (2 heures)

Exercice 1 (Cours)

Pour cet exercice, aucune justification ne vous est demandée. Vous indiquerez clairement des nombres de 1 à 16, sur deux colonnes séparées d'environ 10 cm avec dans la première colonne, les nombres de 1 à 8 et dans la seconde ceux de 9 à 16. A côté de chacun de ces nombres, vous écrirez, au choix : vrai, faux ou rien (sachant qu'une réponse erronée vous fait perdre autant points qu'une réponse exacte vous en fait gagner).

Sauf s'ils sont mentionnés, on supposera qu'externalités et biens publics sont absents.

1. Soit une économie d'échange avec $n \geq 2$ consommateurs ayant des préférences strictement croissantes et un nombre fini de biens disponibles en quantités finies et strictement positives. Cette économie a nécessairement plusieurs optima de Pareto.
2. Si un ensemble de production est convexe alors il est à rendements d'échelle décroissants.
3. Soit un ensemble de production avec des rendements d'échelle constants. En concurrence pure et parfaite, si l'entreprise disposant de cette ensemble de production a un optimum de production strictement positif et fini, elle obtiendra en produisant cette quantité un profit strictement positif.
4. En présence d'externalités strictement positives avec des individus ayant des préférences qui peuvent être représentées par une fonction d'utilité strictement quasi-concave, l'équilibre général d'une économie n'est pas nécessairement un optimum de Pareto.
5. La loi de Walras implique que, dans une économie d'échange, avec des prix strictement positifs pour tous les biens, si les marchés de tous les biens sauf un sont équilibrés (c-à-d : offre = demande pour les marchés des biens en question), alors le marché du dernier bien est aussi équilibré.
6. L'hypothèse de substituabilité brute est une condition nécessaire pour l'unicité de l'équilibre d'une économie d'échange.
7. Soit une vecteur $a = (a_1; ...; a_H)$ avec $a_h > 0$ $\forall h$. Si x^* est une solution au probléme de maximisation de $\max_x \Sigma_{h=1}^H a_h u_h(x_h)$ sous les contraintes que $\Sigma_{h=1}^H x_h \leq \Sigma_{h=1}^H e_h$ et $x_h \geq 0$ $\forall h = 1; ...; H$, alors c'est un optimum de Pareto.
8. En présence d'externalités, la notion d'optimum de Pareto n'a pas de sens.
9. En concurrence pure et parfaite, lorsque le prix d'un bien (output) augmente, sa production augmente.
10. En concurrence pure et parfaite, lorsque le prix d'un bien augmente, sa demande augmente.
11. Si on considère un optimum intérieur (chaque consommateur est doté d'une quantité strictement positive de chacun des biens disponibles dans l'économie), les TMS des consommateurs, s'ils sont définis, sont nécessairement égaux.

12. Un consommateur ne peut consommer d'un bien public qu'en proportion de la quantité d'argent qu'il a versé pour le financer.
13. En présence d'externalités strictement positives, l'équilibre général d'une économie (avec au moins 2 consommateurs et au moins 2 biens) ne peut pas être un optimum de Pareto.
14. La condition BLS dit que, à un optimum de Pareto, la somme des TMS entre le bien public et le bien privé, s'ils sont définis, est égale à l'inverse de la productivité marginale du bien public.
15. Si un individu a des préférences qui peuvent être représentées par une fonction d'utilité strictement quasi-concave, son programme d'optimisation a une solution unique.
16. Le concept Pareto dominance ne permet pas toujours de comparer deux allocations de richesses distinctes.

Exercice 2 (Production)

On considère une économie à deux consommateurs ($i = 1; 2$), deux biens de consommation ($k = 1; 2$), un facteur de production (le travail) et deux entreprises ($j = 1; 2$). On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i ($i = 1; 2$). La dotation initiale de chaque consommateur est de une unité de travail et de la propriété de la moitié des deux entreprises. Leurs fonctions d'utilité (qui portent exclusivement sur les biens de consommation) sont respectivement $u^1(x^1; y^1) = \ln(x^1) + 2\ln(y^1)$ et $u^2(x^2; y^2) = 2\ln(x^2) + \ln(y^2)$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = 3\sqrt{z_1}$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = 6\sqrt{z_2}$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k l'input de travail pour l'entreprise k, $k = 1; 2$). On fixe le prix du travail à 1 (en l'absence de loisirs, on supposera que l'ensemble de la dotation de l'économie en travail est consommé par les entreprises) et on note p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1; 2$.

1. Résoudre le programme de maximisation du profit de chaque entreprise, de manière à déduire les offres $(\hat{z}_k, \hat{q}_k)$, $k = 1; 2$, en fonction des prix.
2. Résoudre les programmes d'optimisation des consommateurs de manière à déduire leurs demandes ($\hat{x}^i$, $\hat{y}^i$) pour $i = 1; 2$, en fonction de leurs revenus R^i (que vous ne détaillerez pas pour le moment) et des prix.
3. Exprimer le revenu R^i du consommateur $i = 1; 2$, en fonction des prix.
4. Ecrire les conditions d'apurement des marchés en fonction des prix.

Exercice 3 (Biens publics)

On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2) dont les fonctions d'utilité sont respectivement : $u^1(x^1; y) = x^1 y$ et $u^2(x^2; y) = x^2 y$ où $x^i > 0$ désigne la quantité de bien privé consommé par l'agent i et $y > 0$ la quantité de bien public produit dans l'économie. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = z$. La dotation initiale de l'ensemble de l'économie est de 40 unités de bien privé.

1. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y) réalisables dans l'économie.
2. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y) Pareto-optimales en spécifiant précisément les valeurs possibles de y.
3. En déduire, sans calculs, l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y) Pareto-optimales pour une dotation initiale de l'ensemble de l'économie en bien privé égale à $K > 0$.

Aout 2015 (2 heures)

Exercice 1 (Cours)

Pour cet exercice, aucune justification ne vous est demandée. Vous indiquerez clairement des nombres de 1 à 12, sur deux colonnes séparées d'environ 10 cm avec dans la première colonne, les nombres de 1 à 6 et dans la seconde ceux de 7 à 12. A côté de chacun de ces nombres, vous écrirez, au choix : vrai, faux ou rien (sachant qu'une réponse erronée vous fait perdre autant points qu'une réponse exacte vous en fait gagner).

Sauf s'ils sont mentionnés, on supposera qu'externalités et biens publics sont absents.

1. Si un ensemble de production est concave alors il est à rendements d'échelle croissants.
2. Soit un ensemble de production avec des rendements d'échelle constants. En concurrence pure et parfaite, si l'entreprise disposant de cette ensemble de production a un optimum de production strictement positif et fini, elle obtiendra en produisant cette quantité un profit strictement positif.
3. Il est possible de définir la notion d'optimum de Pareto sans faire appel à la notion de prix.
4. En présence d'externalités strictement positives avec des individus ayant des préférences qui peuvent être représentées par une fonction d'utilité strictement quasi-concave, l'équilibre général d'une économie ne peut pas être un optimum de Pareto.
5. La loi de Walras implique que, dans une économie d'échange, avec des prix strictement positifs pour tous les biens, si les marchés de tous les biens sauf un sont équilibrés (c-à-d : offre = demande pour les marchés des biens en question), alors le marché du dernier bien est aussi équilibré.
6. L'hypothèse de substituabilité brute est une condition suffisante pour l'unicité de l'équilibre d'une économie d'échange.
7. En concurrence pure et parfaite, lorsque le prix d'un bien augmente strictement, sa demande diminue strictement.
8. Un consommateur ne peut consommer d'un bien public qu'en proportion de la quantité d'argent qu'il a versé pour le financer.
9. La condition BLS dit que, à un optimum de Pareto, la somme des TMS entre le bien public et le bien privé, s'ils sont définis, est strictement supérieur à l'inverse de la productivité marginale du bien public.
10. Si un individu a des préférences qui peuvent être représentées par une fonction d'utilité strictement quasi-concave, son programme d'optimisation a une solution unique.
11. Le concept Pareto dominance permet toujours de comparer deux allocations de richesses distinctes.

12. Soient une économie d'échange et x_i^j, la quantité de bien i consommée par l'agent j, à l'équilibre, si $\frac{x_2^a}{x_1^a} > \frac{x_2^b}{x_1^b}$ alors $TMS_{2;1}^a > TMS_{2;1}^b$

Exercice 2

On considère une économie consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (x et y). Les dotations initiales des consommateurs, notées $e^i = (e_x^i; e_y^i) \in R_+^2$ sont $e^1 = (10; 20)$ et $e^2 = (10; 32)$; leur fonction d'utilité est $u^i(x; y) = x^{1/2}y^{1/2}$ pour $i = 1; 2$. Le consommateur 1 possède une entreprise qui produit du bien 1 à partir du bien 2 suivant la technologie $q = g(z) = 2\sqrt{(}z)$ (z est l'input de bien 2 et q l'output de bien 1).

1. Déterminer la fonction de demande $(d_x^i(p, \pi), d_y^i(p, \pi))$ de chaque consommateur i, en termes des biens x et y, en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$ et du profit π de l'entreprise.
2. Déterminer la fonction d'offre $(x^*(p),\ y^*(p))$ (certains termes peuvent être négatifs) et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise en fonction du vecteur de prix $p = (p_x, p_y)$.
3. Montrer qu'il existe un équilibre concurrentiel et le déterminer (rappel lorsque l'entreprise produit du bien 1, la quantité d'input en bien 2 réduit la quantité totale de bien 2 disponible et la quantité d'output augmente la quantité totale de bien 1 disponible). Vérifier que cet équilibre est Pareto-optimal. (*Vous normaliserez le vecteur de prix en supposant que* $p_y^* = 1$.)

   On introduit une variante. Tous les éléments du modèle sont inchangés sauf la fonction d'utilité du consommateur 2 qui subit maintenant une externalité de la part de l'entreprise : sa fonction d'utilité devient $u^2(x; y; z) = \sqrt{xy} - 2z$ (oô z est la quantité de bien 2 utilisée par l'entreprise x et y, les quantités de bien 1 et bien 2 respectivement consommées par le consommateur 2).

4. Montrer que l'équilibre concurrentiel calculé à la question précédente est encore un équilibre dans l'économie avec externalité.
5. Vérifier que l'allocation suivante : $q = 2$, $z = 1$, $(x^1, y^1) = (12, 22)$, $(x^2, y^2) = (10, 29)$ est réalisable et Pareto-domine l'équilibre trouvé précédemment.

Exercice 3

On considère une économie d'échange avec 2 agents (1 et 2) et 3 biens (x, y et z). La fonction d'utilité de l'agent 1 est donnée par

$$u^1(x, y, z) = x^{\frac{4}{7}}y^{\frac{8}{7}}z^{\frac{12}{7}}$$

La fonction d'utilité de l'agent 2 est donnée par

$$u^2(x, y, z) = \frac{1}{4}\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y) + \frac{3}{4}\ln(z)$$

Les dotations initiales sont données par $e^1 = (0, 150, 150)$ et $e^2 = (100, 150, 50)$

1. Montrer que les deux agents ont les mêmes préférences, c'est-à-dire que la fonction u^2 représente les mêmes préférences que la fonction d'utilité u^1.

   Dans la suite, on considérera u^2 comme étant la fonction d'utilité des deux agents.

2. Sans calculs et en raisonnant seulement sur les fonctions d'utilité et les dotations initiales, peut-on dire que les agents ont intérêt à échanger ?

3. Déterminer la fonction de demande de l'agent 1, $D^1(p, e^1)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3_{++}$, en détaillant la méthode et les calculs. En déduire sans calculs la fonction de demande de l'agent 2.

4. Poser les conditions d'équilibre sur les marchés, déterminer les prix d'équilibre, puis les allocations d'équilibre. (on normalisera le prix du bien x : $p_x^* = 1$)