Microéconomie : théorie de l'équilibre général

Responsable du cours : Miquel Oliu Barton *

Licence grade MIE 2ème année, 2017–2018

— **Bibliographie**

1. Pierre Picard : *Eléments de microéconomie*, tome I, 7e Edition. Montchrestien, 2007
2. Bruno Jullien, Pierre Picard : *Microéconomie*, tome 2, Exercices et Corrigés, 3e Edition. Montchrestien, 2002.
3. Jean-Marc Tallon : *Equilibre général : une introduction*. Vuibert, 1997 (disponible en ligne)
4. Hal Varian : *Analyse microéconomique*, 2e Edition. De Boeck Université, 2008.
5. Gregory Mankiw et Mark Taylor : *Microeconomics*, Eds. Thompson Learning, 2006.
6. Mas-Colell, Whinston, et Green : *Microeconomic Theory*; Oxford University Press, 1995.

— **Chargés de TD**

Joachim Jarreau, Diomidès Mavroyannis, Morgan Patty et Miquel Oliu Barton

— **Evaluation de l'UE**

Calcul de la note finale : $\frac{1}{2}(P+E)$, où P représente le partiel et E l'examen

— **Document supplémentaire**

Brochure d'exercices pour les travaux dirigés distribuée en début d'année

* Contact : Université Paris-Dauphine, Bureau B518, *miquel.oliu.barton@normalesup.org*

Ces notes reprennent le cours de Françoise Forges (2008), mises à jour par Vincent Iehlé (2015).

Tous les documents sont disponibles sur ma page web https ://sites.google.com/site/oliubarton

Table des matières

Introduction, notations

Equilibre *partiel* :

— 1 marché, 1 consommateur (agrégé) et 1 producteur (agrégé)

— Le consommateur cherche à maximiser son utilité, le producteur à maximiser son profit.

Equilibre *général* :

— *Tous* les biens $\ell = 1, \ldots, L$

— *Tous* les agents $i = 1, \ldots, N$

— Dans un premier temps : économie d'échange pur

> Les biens, initialement détenus par les agents (ou consommateurs) sont échangés entre ceux-ci, de manière à maximiser leur satisfaction individuelle, compte tenu des ressources disponibles.

Données :

— $e^i \in \mathbb{R}^L_+$ dotation initiale de i, pour $i = 1, \ldots, N$

— $\succsim^i$ préférences de i sur les paniers de biens, $i = 1, \ldots, N$

Equilibre concurrentiel $(p, z^1, \ldots, z^N)$

— $p = (p_1, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L_+$, avec $p \gg 0$, vecteur de prix

— $(z^1, \ldots, z^N) \in (\mathbb{R}^L_+)^N$ allocation de biens tels que

1. z^i maximise les préférences $\succsim^i$ pour tout $i = 1, \ldots, N$ de i sous sa contrainte budgétaire
2. Les marchés $(\ell = 1, \ldots, L)$ s'apurent

- Conditions garantissant l'existence (et, éventuellement, l'unicité) d'un tel équilibre ?
- Propriétés d'un tel équilibre ?
- Conditions d'application ?
- Quels résultats si les marchés fonctionnent imparfaitement ?

Equilibre partiel. L'approche dite d'*équilibre partiel* consiste à considérer un marché comme étant isolé. La fonction de demande (quantité demandée en fonction du prix p du bien) décrit le comportement des consommateurs en fonction du prix du bien. De même, la fonction d'offre décrit le comportement des producteurs en fonction du prix. On s'intéresse aux équilibres, c'est–à–dire, aux prix pour lesquels l'offre est égale à la demande, à leur existence, stabilité et efficacité. On s'intéresse aussi à ce qui advient lorsqu'il y a de petits chocs (comparative statique). On établit l'existence d'un équilibre, ainsi que les deux théorèmes du bien-être : le premier dit que tout équilibre est efficace ; le second, que toute allocation efficace peut être obtenue comme équilibre.

Equilibre général. L'approche dite d'*équilibre général* consiste à considérer $L > 1$ marchés en même temps. Dans ce marché, les agents échangent des biens (absence de monnaie) à l'aide d'un commissaire priseur. Les fonctions d'offre et de demande sont alors à valeurs dans $\mathbb{R}_+^L$. On s'intéresse aux équilibres, c'est–à–dire, aux vecteurs de prix pour lesquels tous les marchés s'apurent, à leur existence, stabilité, efficacité et à ce qui advient lorsqu'il y a de petits chocs (comparative statique). Comme en équilibre partiel, on établira l'existence d'un équilibre, ainsi que les deux théorèmes du bien-être : que tout équilibre est efficace et que, réciproquement, toute allocation efficace peut être obtenue comme équilibre. Pour ce dernier, on fera appel à des transferts forfaitaires. On commencera en étudiant le cas d'une économie composée uniquement de consommateurs, pour y intégrer ensuite les producteurs.

Défaillances du marché. L'équilibre général repose sur trois hypothèses fondamentales : 1) les agents sont preneurs des prix et ceux-ci sont publics, 2) le marché est complet, c'est–à–dire qu'il existe un marché pour chaque bien et 3) les préférences des agents sont convexes. La première hypothèse fera défaut dès lors que les agents ont du pouvoir de marché (monopole, oligopole) ou quand il y a des asymétries d'information (les agents ne sont pas également informés sur les prix). La deuxième, dans le cas de marchés inexistants (externalités telles que la pollution ou la recherche) ou pour des bien publics.

1 Préférences et fonction de choix

Un agent (un individu, une entreprise, un gouvernement) doit faire un choix. On représente l'ensemble des choix possibles par un ensemble X. L'agent voudrait choisir la "meilleure alternative", c'est–à–dire, celle(s) qu'il préfère. Comment modéliser cela ?

On distingue deux approches : les préférences et la fonction de choix. La première est basée sur l'introspection, la seconde sur le comportement.

1.1 Préférences

Pour tout couple d'alternatives x et y dans X, l'agent se demande (introspection) laquelle des deux il préfère. Il est capable de répondre, par un Oui ou par un Non à la question $Q(x, y)$: "*est-ce que x est au moins autant bien que y ?*". On utilisera les notations suivantes :

— $x \succsim y \;\Leftrightarrow\;$ l'agent préfère (faiblement) x à $y \;\Leftrightarrow\; Q(x, y) = Oui$ et $Q(y, x) =$?

— $x \sim y \;\Leftrightarrow\;$ l'agent est indifférent entre x et $y \;\Leftrightarrow\; Q(x, y) = Oui$ et $Q(y, x) = Oui$

— $x \succ y \;\Leftrightarrow\;$ l'agent préfère strictement x à $y \;\Leftrightarrow\; Q(x, y) = Oui$ et $Q(y, x) = Non$

Remarque 1.1. On pourrait imaginer des réponses plus subtiles, ou plus détaillées, à la question $Q(x, y)$, comme "je préfère *souvent* x à y" ou "je préfère x à y *de beaucoup*". On ne tiendra pas compte de ces éléments pour l'instant. De même, on n'autorise pas la réponse, souvent légitime, "x et y ne sont pas comparables". La transitivité peut parfois poser problème, notamment lorsque les alternatives varient continument (penser à une échelle de gris) ou lorsque les préférences proviennent d'une agrégation (d'individus, ou de critères). Par exemple : on compare trois offres de travail sur 3 critères : liberté, confort et salaire et on pose $a \succ b$ lorsque a est mieux que b en au moins deux critères. Dans ce cas, on peut facilement contredire la transitivité (effet Condorcet).

Définition 1.1. $\succsim$ est une *préférence rationnelle* sur X si pour tout $x, y, z \in X$:

— **Complétude** : $x \succsim y$ ou $y \succsim x$ (ou les deux)

— **Transitivité** : $x \succsim y$ et $y \succsim z \implies x \succsim z$

1.2 Préférences et utilité

Définition 1.2. Une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ représente $\succsim$ si pour tout $x, y \in X$:

$$x \succsim y \;\Leftrightarrow\; u(x) \geq u(y)$$

Une fonction d'utilité ne peut représenter que des préférences rationnelles, car on peut toujours comparer les réels $u(x)$ et $u(y)$, la relation $\geq$ est transitive.

Question 1. Soit u une fonction d'utilité représentant les préférences $\succsim$ sur X.

1. Montrer que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante, $f \circ u$ représente $\succsim$ aussi

2. Montrer que pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seulement croissante, $f \circ u$ ne représente pas nécessairement $\succsim$
3. Soit $X = \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $f(x) = -x(x-2)$. Est-ce que $f \circ u$ représente $\succsim$?

Définition 1.3. Une préférence $\succsim$ est *continue* si pour tout couple de suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans X convergeant [1] respectivement vers x et y, et telles que $x_n \succsim y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \succsim y$.

Théorème 1.4 (Debreu)**.** *Une préférence $\succsim$ sur X est continue si, et seulement si, il existe une fonction d'utilité continue $u : X \to \mathbb{R}$ représentant cette préférence.*

Ce résultat général est admis. On peut cependant montrer le cas suivant, qui fait appel à la notion de monotonie.

Définition 1.5. Une préférence $\succsim$ sur (un sous-ensemble de) $\mathbb{R}^L_+$ est *monotone* si $x \gg y$ (c'est-à-dire $x^\ell > y^\ell$ pour tout $\ell = 1, \ldots, L$) implique $x \succ y$.

Question 2. Montrer que si $\succsim$ est monotone et continue sur $\mathbb{R}^L$ alors $x \geq y$ implique $x \succsim y$.

Lemme 1.6. *Si $\succsim$ est rationnelle, continue et monotone sur $X = \mathbb{R}^L_+$, alors il existe une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ continue et croissante représentant cette préférence.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et $e = (1, \ldots, 1)$ le vecteur de 1's dans $\mathbb{R}^L$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a que $\lambda e = (\lambda, \ldots, \lambda)$. Par monotonie, on a $Me \succsim x \succsim 0$, avec $M = \max(x_1, \ldots, x_L)$. Par continuité (voir TD 1) il existe $\lambda \in [0, M]$ tel que $\lambda e \sim x$. Par monotonie, ce λ est unique car $\lambda e \sim \lambda' e \sim x$ est impossible pour $\lambda \neq \lambda'$. On définit ainsi une fonction $x \mapsto \lambda(x)$, de X dans $\mathbb{R}$. Il ne reste plus qu'à vérifier qu'elle est continue, croissante et qu'elle représente $\succsim$ $\square$

Exemple 1.7. Les préférences lexicographiques sur $\mathbb{R}^2$ ne sont pas continues. Par conséquent, il n'existe pas une fonction d'utilité continue les représentant (voir TD 1).

Question 3. Peut-on représenter une préférence lexicographique sur $[0, 1]^2$ par une fonction d'utilité quelconque (c'est–à–dire, pas nécessairement continue) ?

1.3 Fonction de choix

On s'intéresse aux choix que l'agent a fait (i.e. à son comportement). On se donne un ensemble de tests, ou expériences $\mathcal{A} \subset 2^X$ et on observe la fonction de choix $C : \mathcal{A} \rightrightarrows X$ qui, à chaque expérience $A \in \mathcal{A}$, associe un ensemble $C(A) \subset A$, représentant les alternatives choisies par l'agent. Bien qu'il ne soit pas toujours possible de choisir plusieurs alternatives à la fois (aller à deux endroits différents au même temps, par exemple), il arrive que l'on observe un agent faire plusieurs fois des choix sur le même ensemble test. C'est ainsi que $C(A)$ peut contenir plusieurs éléments.

1. On suppose ici que X est un espace topologique, où la convergence a un sens.

Exemple 1.8. Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble contenant 3 alternatives, et soit $\mathcal{A} = \{\{x, y\}\{x, y, z\}\}$ un ensemble de tests. On considère deux fonctions de choix, C_1 et C_2 définies comme suit :

$$C_1(\{x, y\}) = C_1(\{x, y, z\}) = \{x\}, \quad \text{et} \quad C_2(\{x, y\}) = \{x\},\ C_2(\{x, y, z\}) = \{x, y\}$$

De C_1 on déduit que, lorsque x et y étaient disponibles, l'agent a choisi x, et lorsque x, y et z étaient disponibles, il a choisi x. De C_2, qu'un deuxième agent a fait le même choix sur le premier test, mais a choisi $\{x, y\}$ sur le deuxième.

Définition 1.9 (WA)**.** La fonction de choix C vérifie l'*axiome faible des préférences révélées* si pour tout $A, B \in A$ et $x, y \in A \cap B$ tels que $x \in C(A)$ et $y \in C(B)$, on a aussi $x \in C(B)$.

Cet axiome dit que, si x a été choisi alors que y était disponible, alors il n'est pas possible d'avoir un ensemble où y est choisi et x ne l'est pas.

Remarque 1.10. Sen (prix Nobel 1998) propose de décomposer (WA) en deux sous-axiomes :

($wa1$) si $x \in A \subset B$ et $x \in C(B)$, alors $x \in C(A)$

($wa2$) si $x, y \in C(A)$, $A \subset B$ et $y \in C(B)$, alors $x \in C(B)$

Il propose aussi une explication informelle pour ces axiomes : ($wa1$) "si le meilleur du monde (en une compétition donnée) est espagnol, alors il est aussi le meilleur d'Espagne", et ($wa2$) "si le meilleur du monde est espagnol, alors les meilleurs d'Espagne sont tous les meilleurs du monde" [2]

1.4 Liens entre les deux approches

Dans cette section nous allons établir des liens entre les deux approches : en partant d'une fonction de choix C on définira une préférence $\succsim_C$ et en partant d'une préférence $\succsim$ on définira une fonction de choix $C_{\succsim}$.

Définition 1.11. Soit $(X, \mathcal{A}, C)$ une structure de choix. Les *préférences révélées par C*, notées $\succsim_C$, sont définies en posant pour tout $x, y \in X$

$$x \succsim_C y \;\Leftrightarrow\; \text{il existe } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } x, y \in A \text{ et } x \in C(A)$$

La fonction de choix "révèle" une relation de préférence sur les alternatives. On dit que "x s'est révélé être au moins aussi bien que y" lorsque $x \succsim_C y$. De même, "x s'est révélé être strictement préféré à y" lorsque $x \succ_C y$, c'est–à-dire, s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $x, y \in A$, $x \in C(A)$ et $y \notin C(A)$. La préférence révélée $\succsim_C$ n'est pas nécessairement complète ni transitive, comme le montrera l'exemple suivant.

Exemple 1.12. Soient $\succsim_1$ et $\succsim_2$ les préférences révélées induites par C_1 et C_2 respectivement. La première fonction de choix donne $x \succsim_1 y$ et $x \succsim_1 z$, mais ne donne aucune information sur comment comparer y et z. L'axiome (WA) est vérifié. En revanche, la seconde donne $x \succ_2 y$ (au premier choix) et $y \succsim_2 x$ au second, ce qui est incompatible avec (WA).

2. En vérité, Sen a formulé ces axiomes avec le Pakistan à la place de l'Espagne...

Notons que l'axiome (WA) peut être reformulé à l'aide des préférence révélées. En effet, C vérifie (WA) si lorsque x s'est révélé être au moins aussi bien que y, alors y ne peut pas se révéler être strictement préféré à x (**exercice**).

Définition 1.13. Soit $\succsim$ une préférence sur X. On note $C_{\succsim}$ la fonction de choix suivante sur $(X, \mathcal{A})$:

$$C(A) = \{x \in A \,|\, x \succsim y, \ \forall y \in A\}$$

Elle peut s'interpréter comme "prendre les éléments préférés de A".[3]

Proposition 1.1. *Si la préférence $\succsim$ est rationnelle, alors $C_{\succsim}$ satisfait (WA).*

Démonstration. Soit $A \subset X$ et $x, y \in A \cap B$ tels que $x \in C_{\succsim}(A)$. Par définition de $C_{\succsim}$ cela implique que $x \succsim y$. Soit $B \subset X$ tel que $x, y \in B$ et $y \in C_{\succsim}(B)$. Encore par définition, cela signifie que $y \succsim z$ pour tout $z \in B$. Par transitivité, $x \succsim y \succsim z$ implique $x \succsim z$ pour tout $z \in B$, d'où $x \in C_{\succsim}(B)$ aussi. □

Définition 1.14. On dit que $\succsim$ *rationalise* C lorsque $C_{\succsim}(A) = C(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.15. Soit $(X, \mathcal{A}, C)$ définit par $X = \{x, y, z\}$, $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{y, z\}, \{x, z\}\}$ et $C(\{x, y\}) = \{x\}$, $C(\{x, z\}) = \{z\}$ et $C(\{y, z\}) = \{z\}$. Alors C n'est pas rationnalisable par une préférence rationnelle.

Théorème 1.1 (*Equivalence des deux approches*)**.** *Soit $(X, \mathcal{A}, C)$ un règle de décision telle que $\mathcal{A}$ contient tous les sous-ensembles de 2 et 3 éléments et C satisfait (WA). Alors il existe une préférence $\succsim$ rationnelle telle que $C_{\succsim} = C$.*

Question 4. Pourquoi faut-il que $\mathcal{A}$ contienne tous les sous-ensembles à 2 et 3 éléments ? Que se passe-t-il sans cette hypothèse ?

3. On n'a pas spécifié qui est $\mathcal{A}$ volontairement, car il s'agit des sous-ensembles admettant précisément des éléments maximales : pour $X = \mathbb{N}$, par exemple, muni de la préférence $\geq$, on pourra considérer les ensembles bornés supérieurement.

1.5 Exercices

Exercice 1.1 (*Préférences rationnelles*)**.** Soit $\succsim$ une préférence rationnelle sur X (i.e. complète et transitive). Montrer que :

1. $\succ$ est irréflexive et transitive
2. $\sim$ est réflexive, transitive et symétrique
3. si $x \succ y \succsim z$, alors $x \succ z$

Exercice 1.2 (*Représentation des préférences*)**.** Soit $u : X \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité représentant les préférences $\succsim$ sur X, i.e. telle que

$$u(x) \geq u(y) \Longleftrightarrow x \succsim y, \quad \forall x, y \in X$$

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissante, $f \circ u$ représente aussi $\succsim$. Que se passe-t-il lorsque f est croissante mais non strictement ?

Exercice 1.3 (*Préférences sur un ensemble fini*)**.** Soit X un ensemble fini, muni d'une préférence rationnelles $\succsim$. Montrer qu'il existe une fonction d'utilité $u : X \to \mathbb{R}$ représentant les préférences.

Exercice 1.4 (*Axiome faible des préférences révélées.*)**.** Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble d'alternatives, $\mathcal{A} = \{\{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ un sous-ensemble de parties de X et C une fonction de choix définie sur $\mathcal{A}$ telle que $C(\{x, y\}) = \{x\}$. Montrer que si C satisfait l'axiome faible des préférences révélées, alors $C(\{x, y, z\})$ est égal à $\{x\}$, ou $\{z\}$ ou $\{x, z\}$.

Rappelons que C vérifie l'axiome faible des préférences révélées si, lorsque x s'est révélé être aussi bon que y, y ne peut pas se révéler être strictement mieux que x. Autrement dit, il n'existe pas $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $x, y \in A \cap B$, $x \in C(A)$, $y \in C(B)$ et $x \notin C(B)$.

Exercice 1.5 (*Continuité des préférences.*)**.** Soit $\succsim$ une préférence rationnelle et continue sur un ensemble d'alternatives $X \subset \mathbb{R}^L$ contenant $[x, z]$ (l'intervalle connectant les points x et z). Montrer que si $y \in X$ est tel que $x \succsim y \succsim z$ alors il existe un $m \in [x, z]$ tel que $y \sim m$.

Exercice 1.6 (*Utilité et continuité des préférences*)**.**

1. Montrer que si $u : X \to \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité continue représentant les préférences $\succsim$ alors $\succsim$ est rationnelle et continue.
2. Une préférence continue peut-elle être représentée par une fonction d'utilité discontinue ?
3. Montrer que dans le cas où l'ensemble des alternatives est $\mathbb{R}$, la préférence représentée par la fonction d'utilité $u(x) = \lfloor x \rfloor$ (la partie entière de x) n'est pas une préférence continue.

Exercice 1.7 (*Ordre lexicographique.*)**.** L'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$ est tel que $(x_1, x_2) \succsim (y_1, y_2)$ si $x_1 > y_1$ ou si $x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2$.

1. Montrer que $\succsim$ est une préférence rationnelle.

2. Montrer que $\succsim$ ne peut pas être représenté par une fonction d'utilité.

Exercice 1.8 (*Formulation de Kreps*)**.** Soit P une relation binaire sur un ensemble d'alternatives X, inteprétée comme "strictement préféré". Supposons que P satisfait les propriétés suivantes :

1. (*Asymétrie*). Il n'existe pas un couple $x, y \in X$ tels que $x\ P\ y$ et $y\ P\ x$.
2. (*Transitivité Négative*). Pour tout couple $x, y \in X$ satisfaisant $x\ P\ y$, pour tout $z \in Z$ on a soit $x\ P\ z$, ou $z\ P\ y$, ou les deux.

Montrer que cette formalisation est équivalente à la définition classique de préférence rationnelle.

Exercice 1.9 (*Préférences additives, monotones et continues*)**.** Soit $X = \mathbb{R}^2_+$ un ensemble d'alternatives, et soit $\succsim$ une préférence rationnelle vérifiant :

— (*Additivité*). Si $(x, y) \succsim (x', y')$, alors $(x + s, y + t) \succsim (x' + s, y' + t)$ pour tout $s, t \in X$.

— (*Monotonie stricte*). Si $x \geq x'$ et $y \geq y'$, alors $(x, y) \succsim (x', y')$. Si, en plus, $x > x'$ ou $y > y'$, alors $(x, y) \succ (x', y')$.

— (*Continuité*). Si $x_n \succsim y_n$ pour tout n et $(x_n, y_n) \to (x, y)$, alors $x \succsim y$.

1. Montrer que si $\succsim$ possède une représentation linéaire (i.e. $\succsim$ est repésentée par une fonction d'utilité $u(x, y) = ax + by$ avec $a, b > 0$) alors $\succsim$ satisfait les trois propriétés ci-dessus.
2. Montrer que pour tout paire de propriétés (parmi les trois ci-dessus) il existe une préférence qui ne satisfait pas la troisième propriété.
3. ($*$) Montrer que si $\succsim$ est une préférence satisfaisant les trois propriétés ci-dessus, alors elle admet une représentation linéaire.
4. ($*$) Caractériser les préférences satisfaisant l'additivité, la stricte monotonie et la propriété suivante : $(x, y) \succsim (x', y') \implies (\lambda x, \lambda y) \succsim (\lambda x, \lambda y')$ pour tout $\lambda > 0$.

2 Théorie du consommateur

On veut modéliser la prise de décision d'un consommateur. L'ensemble des alternatives est l'ensemble des paniers possibles (combien est-il possible de consommer de chaque bien ?). L'ensemble des expériences, l'ensemble des contraintes budgétaires (combien consomme-t-il pour un revenu et des prix fixés ?). La fonction de choix, la demande du consommateur.

2.1 Modèle et notations

On se donne

— $L \in \mathbb{N}^*$ biens désirables, parfaitement divisibles

— $X = \mathbb{R}^L_+$ est l'ensemble des paniers possibles

— $x = (x_1, \ldots, x_L) \in \mathbb{R}^L_+$ est le panier composé d'une quantité x_ℓ du bien ℓ, pour tout $1 \leq \ell \leq L$

— $p = (p_1, \ldots, p_L) \in \mathbb{R}^L$, $p \gg 0$ est un vecteur de prix

— $w > 0$ est le revenu de l'agent

— $e \in \mathbb{R}^L_+$ est une dotation initiale. Dans ce cas $w = \langle p, e \rangle$

N.B. Lorsque $L = 2$ on notera les biens (x, y) à la place de (x_1, x_2).

Commentaires

— Avant toute chose il faut se demander ce qu'est un bien. Un bien est quelque chose de concret et d'abstrait en même temps, que l'on peut "consommer". Une bière, par exemple. On peut la prendre ici ou ailleurs, d'une marque ou d'une autre, aujourd'hui ou demain : ni la bière, ni le plaisir, ni son prix, ne seront les mêmes. Théoriquement, il y a autant de bières différentes qu'il y a de lieux, de marques et de moments. Cependant, lorsqu'on se réfère à la quantité de bière consommée, ou au prix de la bière, on fera abstraction de tout cela. Un bien est donc un "bien idéalisé" regroupant des biens qui, par leur nature, espace et temporalité, sont très proches. Son prix doit se comprendre comme une sorte de "prix moyen".

— Certaines contraintes physiques, légales et géographiques ont été mises de côté. Des biens qui ne sont pas divisibles (un frigo), ou qui ne peuvent pas se consommer de manière illimitée (le temps de loisir ou de travail). **Dessin**

— On ne permet pas au consommateur d'acheter une quantité négative, bien que cela soit possible pour certains biens.

— Tous les biens sont supposés désirables (d'où l'hypothèse que les prix sont positifs). Lorsqu'un bien n'est pas désirable (la pollution ou le travail, par exemple) il suffit de considérer son opposé (l'absence de pollution ou le loisir, respectivement).

Définition 2.1. Pour tout vecteur de prix $p \gg 0$ et revenu $w > 0$ on définit la *contrainte budgétaire* (ou budget de Walras) comme étant l'ensemble des paniers de biens que l'agent peut s'acheter :

$$B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L_+ \mid \langle p, x \rangle \leq w\}$$

Le produit scalaire $\langle p, x\rangle = p_1 x_1 + \cdots + p_L x_L$ représente le *coût du panier* x.

Dessin. Pour $L = 2$, $B(p_x, p_y, w)$ est un triangle rectangle de sommets $(0,0)$, $(0, \frac{w}{p_y})$ et $(\frac{w}{p_x}, 0)$. Le vecteur (p_x, p_y) est orthogonal à l'hypothénuse, qui est de "pente" $-\frac{p_x}{p_y}$

Question 5. Montrer que $B(p, w)$ est non-vide, convexe et compact pour tout $p \gg 0$ et $w > 0$. Que changerait si $p^\ell = 0$ pour un certain $\ell \in \{1, \dots, L\}$?

Le choix du consommateur est décrit par $X = \mathbb{R}^L_+$, l'ensemble de tous les paniers à L biens (divisibles, positifs, désirables), $\mathcal{A}$ est l'ensemble de tous les budgets possibles, i.e.

$$\mathcal{A} = \{B(p, w) \,|\, p \gg 0 \text{ et } w > 0\}$$

et la fonction de choix (notée D, comme *demande*) qui à chaque budget $B(p, w) \in \mathcal{A}$ fait correspondre l'ensemble des paniers qu'il préfère :

$$D(p, w) := \{x \in B(p, w) \,|\, x \succsim x', \ \forall x' \in B(p, w)\}$$

L'ensemble $D(p, w)$ contient donc tous les paniers qui sont optimaux parmi les paniers abordables aux prix $p = (p^1, \dots, p^L)$ et avec un revenu w. Sous des hypothèses convenables, $D(p, w)$ sera non-vide, convexe, ou contiendra un unique élément.

Question 6. Montrer que :

1. Pour tout $x, y \in D(p, w)$ on a $x \sim y$
2. Si $D(p, w) = \{x\}$, alors on a $x \succ y$ pour tout $y \in B(p, w)$.

Notation. Pour différencier les deux cas, multivoque et univoque, lorsqu'il n'y aura qu'un unique panier optimal, celui-ci sera noté $d(p, w)$ (i.e. $D(p, w) = \{x\}$ alors on pose $d(p, w) := x$).

Définition 2.2. La correspondance $(p, w) \rightrightarrows D(p, w)$ est la *correspondance de la demande*. Lorsque $D(p, w)$ contient un unique panier pour tout (p, w), on peut définir la *fonction de demande* $d(p, w)$.

2.2 Préférences et utilité du consommateur

On considère un consommateur typique, ayant des préférences $\succsim$ sur $\mathbb{R}^L_+$ rationnelles et continues. Rationalité et continuité sont des hypothèses minimales. Les préférences du consommateur ont davantage de propriétés.

Propriétés des préférences

Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^L_+$:

- Monotonie : $x \gg y \Rightarrow x \succ y$
- Stricte monotonie : $x > y \Rightarrow x \succ y$
- Convexité : $y \succsim x$ et $z \succsim x \Rightarrow \lambda y + (1-\lambda) z \succsim x$ for all $\lambda \in [0, 1]$
- Stricte convexité : $y \succsim x$ et $z \succsim x \Rightarrow \lambda y + (1-\lambda) z \succ x$ for all $\lambda \in (0, 1)$

Commentaires. La monotonie traduit le fait que les biens sont désirables, et les agents ne s'en lassent jamais : "plus de tout, c'est mieux". La monotonie stricte va un peu plus loin : "plus de quelque chose, c'est mieux". La convexité exprime l'appétit pour la diversité : "si deux paniers me plaisent autant, alors un mélange des deux me plaira au moins tout autant". La convexité stricte va plus loin : "si deux paniers me plaisent autant, alors le mélange de deux me plaira plus".

Courbes d'indifférence. Pour tout $x \in X$, on définit les ensembles suivants

$$U(x) := \{x' \,|\, x' \succsim x\} \quad \text{et} \quad L(x) := \{x' \,|\, x \succsim x'\}$$

Ils représentent, respectivement, les paniers qui sont au moins autant bien que x, et les paniers qui ne sont pas mieux que x. Exprimons les propriétés des préférences à l'aide de ces ensembles :

— $\succsim$ continue $\Leftrightarrow$ $U(x)$ et $L(x)$ sont fermés.

— $\succsim$ convexe $\Leftrightarrow$ $U(x)$ est convexe

— $\succsim$ strictement convexe $\Leftrightarrow$ $U(x)$ est strictement convexe.

Question 7. Pour $\succsim$ rationnelle et continue, montrer que $I(x) := U(x) \cap L(x)$ est fermé et non-vide pour tout $x \in X$. Ces ensembles sont-ils nécessairement bornés ?

Fonction d'utilité du consommateur

D'après le Théorème de Debreu, les préférences rationnelles et continues peuvent se représenter par une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ continue (celle-ci n'est pas unique). Les propriétés des préférences donnent lieu à des propriétés sur les fonctions d'utilité. On distingue deux types de propriétés : ordinales et cardinales. Les premières dépendent seulement de l'ordre, et sont donc indépendantes du choix de la fonction d'utilité. En particulier, de telles propriétés sont conservées par composition avec une fonction strictement croissante. Les secondes, en revanche, sont des propriétés spécifiques à une représentation particulière. Lorsque plusieurs fonctions d'utilité représentent les mêmes préférences, il est convenable de choisir une fonction qui possède de bonnes propriétés.

Propriétés ordinales (indépendantes du choix de u)

- $\succsim$ monotone $\Leftrightarrow x \gg y \;\Rightarrow\; u(x) > u(y)$
- $\succsim$ strictement monotone $\Leftrightarrow x > y \;\Rightarrow\; u(x) > u(y)$ (u strictement croissante en chaque entrée)
- $\succsim$ convexe $\Leftrightarrow u$ quasi-concave, i.e. $\{x \,|\, u(x) \geq c\}$ convexe $\forall c \in \mathbb{R}$
  De façon équivalente, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$, pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in [0,1]$
- $\succsim$ strictement convexe $\Leftrightarrow u$ strictement quasi-concave, i.e. $\{u \geq c\}$ strictement convexe $\forall c \in \mathbb{R}$
  De façon équivalente, $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{u(x), u(y)\}$, pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in (0,1)$

Propriétés cardinales (moins universelles, mais très pratiques)

- u continue et différentiable (de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$)
- u concave : $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y),\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1]$

- u strictement concave : $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y),\ \forall x, y \in X, \forall \lambda \in (0,1)$

Pour tout niveau d'utilité $c \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\{u = c\}$ l'*ensemble d'iso-utilité* du consommateur (ou courbe d'indifférence).

Lemme 2.3. *Lorsque u est continue, quasi-concave et croissante*

— *Les ensembles d'iso-utilité sont des surfaces de dimension $L-1$ (une courbe donc pour $L=2$). Autrement dit, ce sont des ensembles "fins".*

— *Les ensembles d'iso-utilité sont disjoints (les courbes ne s'entrecoupent pas)*

— *L'utilité croît en allant vers le "nord-est" et décroît vers le "sud-ouest"*

2.3 L'optimisation du consommateur

Proposition 2.1 (Existence et unicité de la solution)**.** *Soit $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité. Alors :*

(i) *u continue $\Rightarrow D(p,w) \neq \emptyset$*

(ii) *u continue, croissante, quasi-concave $\Rightarrow D(p,w)$ est convexe*

(iii) *u continue, croissante, strictement quasi-concave $\Rightarrow D(p,w) = \{d(p,w)\}$*

Démonstration. (i) Une fonction continue atteint son minimum et son maximum sur un compact.
(ii) Soit $x, y \in D(p,w)$ et $\lambda \in [0,1]$. On a donc $u(x) = u(y) = \max_{z \in B(p,w)} u(z)$. Montrons que le panier $\lambda x + (1-\lambda)y$ est aussi optimal, i.e. $\lambda x + (1-\lambda)y \in D(p,w)$. Tout d'abord, comme $\langle p, x\rangle \leq w$ et $\langle p, y\rangle \leq w$ on a aussi (par linéarité du produit scalaire) :

$$\langle p, \lambda x + (1-\lambda)y\rangle = \lambda\langle p, x\rangle + (1-\lambda)\langle p, y\rangle \leq w$$

Donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in B(p,w)$. La quasi-concavité implique $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$, or $\min\{u(x), u(y)\} = \max_{z \in B(p,w)} u(z)$, ce qui termine la preuve.
(iii) Soient $x \neq y$ deux paniers optimaux différents et soit $\lambda x + (1-\lambda)y$ un mélange non trivial des deux (i.e. $\lambda \in (0,1)$). Comme précédemment, $\lambda x + (1-\lambda)y \in B(p,w)$. La stricte quasi-concavité et optimalité de x impliquent $u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \min\{u(x), u(y)\} = u(x)$, contredisant précisément l'optimalité de $u(x)$. Il ne peut donc pas y avoir deux paniers optimaux différents. □

Proposition 2.2 (Propriétés de la demande)**.** *Soit $u : \mathbb{R}_+^L \to \mathbb{R}$ une fonction d'utilité.*

(i) *Absence d'illusion monétaire : $D(p,w) = D(\alpha p, \alpha w),\ \forall \alpha > 0,\ \forall (p,w)$*

(ii) *u continue, croissante $\Rightarrow$ Loi de Walras : $\langle x, p\rangle = w,\ \forall x \in D(p,w),\ \forall (p,w)$*

(iii) *u continue, croissante, strictement quasi-concave $\Rightarrow d$ est une fonction continue*[4]

Démonstration. (i) Cela découle de l'égalité $B(\alpha p, \alpha w) = B(p,w)$, vérifiée pour tout $\alpha > 0$ et (p,w).
(ii) Soit $x \in D(p,w)$ tel que $\langle x, p\rangle < w$. Par continuité (du produit scalaire) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\langle x_\varepsilon, p\rangle < w$, où $x_\varepsilon := (x_1 + \varepsilon, \ldots, x_L + \varepsilon) \gg x$. Par monotonie, $u(x_\varepsilon) > u(x)$. Mais cela contredit l'optimalité de $u(x)$. (iii) Ce résultat est admis. □

4. La continuité a lieu partout sauf sur le bord $\{(p,w) \mid \exists \ell,\ p_\ell = 0\}$. (Voir Remarque 2.1).

Remarque 2.1. La fonction demande $(p, w) \mapsto d(p, w)$ est continue partout, sauf aux points où un prix est nul. En effet, si $w > 0$ et $p_n \to \bar{p}$ avec $p_n \gg 0$ mais $\bar{p}_\ell = 0$ pour certain bien ℓ, alors la demande pour ce bien explose, puisque l'utilité est croissante et que de bien est gratuit ! Autrement dit, $d_\ell(p_n, w) \to +\infty$.

2.4 Le cas $L = 2$ pour fixer les idées

On note les paniers de biens $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$, à la place de (x_1, x_2). On dira que la fonction d'utilité $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ est *régulière* si elle est continue, croissante, strictement quasi-concave et différentiable.

Taux marginal de substitution

Définition 2.4. Le *taux marginal de substitution* du bien y pour le bien x, en un point (x_0, y_0), est la quantité de bien y qu'il faut donner au consommateur pour compenser la perte marginale d'une unité de bien x en ce point. Lorsque u est différentiable :

$$TMS_{y \to x}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

— La monotonie des préférences implique $TMS_{y \to x}(x_0, y_0) > 0$, pour tout (x_0, y_0).

— La convexité implique que $x_0 \mapsto TMS_{y \to x}(x_0, y_0)$ est une fonction décroissante.

— Soit u différentiable et posons $\alpha := TMS_{y \to x}(x_0, y_0)$. Alors

$$u(x_0, y_0) = u(x_0 + h, y_0 - \alpha h) + o(h), \quad \text{quand } h \to 0$$

— Lorsque u est régulière, pour toute constante c, la courbe d'iso-utilité $\{u = c\}$ est le graphe d'une fonction f (ou plutôt f_c) continue, décroissante, convexe et dérivable. On a alors que $u(x, f(x)) = c$ pour tout x. Fixons x_0 et posons $y_0 := f(x_0)$ et $c := u(x_0, y_0)$. En dérivant $x \mapsto u(x, f(x))$ en x_0 on obtient alors :

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} f'(x_0) = 0$$

Ce qui donne $TMS_{y \to x}(x_0, y_0) = -f'(x_0)$. Autrement dit, le taux marginal de substitution est égal à la (valeur absolue de la) pente de la courbe $\{u = u(x_0, y_0)\}$ au point (x_0, y_0).

Deux cas extrêmes

Nous l'avons déjà vu, la continuité, monotonie et quasi-concavité de la fonction d'utilité implique que les courbes d'indifférence sont continues, décroissantes et convexes. La stricte quasi-concavité implique, à son tour, la stricte convexité de ces courbes. Il existe deux cas importants où la quasi-concavité n'est pas stricte. C'est le cas lorsque les deux biens sont des *parfaits substituts* (des pièces de monnaie de différentes valeur, deux marques de lait, etc) ou des *parfaits compléments* (une chaussure droite et une chaussure gauche, un balais et une balayette, etc). Dans le premier cas la fonction d'utilité sera *linéaire*, i.e. de la forme $u(x,y) = ax+by$ et les courbes d'indifférence $\{u = c\}$ des droites $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (si $b \neq 0$) ou $x = \frac{c}{a}$ (si $b = 0$). Dans le second, la fonction d'utilité ne sera pas différentiable et les courbes d'indifférences auront des coudes : $\{u = c\}$ ne peut pas s'écrire comme $y = f(x)$. (Faire dessin).

Le problème d'optimisation

Dans ce cadre, le problème du consommateur qui dispose d'un revenu w s'écrit :

$$\begin{cases} \max u(x,y) \\ x, y \geq 0 \\ p_x x + p_y y \leq w \end{cases}$$

- Ce problème a une solution dès lors que u est continue et $p_x > 0$, $p_y > 0$
- On suppose u croissante, de sorte que la C.B. sera saturée : $p_x x + p_y y = w$
- On suppose u strictement quasi-concave, de sorte que la solution sera unique.

Supposons, de plus, que u est différentiable. On dispose alors de conditions *nécessaires* pour un optimum "*intérieur*" $x^* > 0$, $y^* > 0$. En effet, la tangence de la courbe $\{u = c\}$ à l'ensemble $B(p,w)$ signifie que le gradient de u et le vecteur des prix sont colinéaires. Autrement dit, il existe d'un réel $\lambda^* > 0$ tel que

$$\nabla u(x,y) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right) = \lambda^*(p_x, p_y)$$

On remarquera que cela est équivalent à l'égalité $TMS_{y \to x}(x^*, y^*) = \frac{p_x}{p_y}$. Le problème d'optimisation sous contrainte peut se transformer en un problème d'optimisation sans contrainte à l'aide du Lagrangien $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$, défini par

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := u(x,y) - \lambda(p_x x + p_y y - w)$$

En effet, notre problème d'optimisation est équivalent à trouver (x^*, y^*, λ^*) maximisant $\mathcal{L}$. Les conditions nécessaires d'optimalité de premier ordre (C.P.O) s'écrivent : $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$.
C'est-à-dire, que si (x^*, y^*, λ^*) est un optimum alors *nécessairement* :

- $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \lambda p_x = 0$ (*)
- $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \lambda p_y = 0$ (**)
- $\frac{\partial \mathcal{L}(x^*,y^*,\lambda^*)}{\partial \lambda} = w - p_x x - p_y y = 0$ (C.B.)

En supposant $p_x > 0$ et $p_y > 0$ on a alors :

(*) et (**) $\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial x}}{p_x} = \frac{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial y}}{p_y}$, ou encore $\frac{p_x}{p_y} = \frac{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x^*,y^*)}{\partial y}} = TMS_{y \to x}(x^*, y^*)$

Les deux égalités ainsi obtenues

$$TMS_{y \to x}(x^*, y^*) = \frac{p_x}{p_y} \quad \text{et} \quad xp_x + yp_y = w$$

permettent de déduire la *fonction de demande* $d(p,w) = (d_x(p,w), d_y(p,w)) = (x^*, y^*)$.

Intuition de $\frac{p_x}{p_y} = TMS_{y\to x}\ (x^*, y^*)$. Supposons, au contraire, que $TMS_{y\to x}\ (x^*, y^*) < \frac{p_x}{p_y}$. En vendant une petite quantité h du bien x, le consommateur obtiendrait un revenu hp_x qui lui permettrait d'acheter $h\frac{p_x}{p_y}$ unités du bien y. Son utilité serait alors :

$$u(x^* - h, y^* + h\frac{p_x}{p_y}) = u(x^*, y^*) - \frac{\partial u(x^*, y^*)}{\partial x} h + \frac{\partial u(x^*, y^*)}{\partial y} h \frac{p_x}{p_y} + o(h)$$

qui est strictement plus grand que $u(x^*, y^*) + o(h)$ dès lors que $TMS_{y\to x}\ (x^*, y^*) < \frac{p_x}{p_y}$. Donc (x^*, y^*) n'est pas optimal.

Remarque 2.2. Le problème d'optimisation est soluble dès que u est *continue*, même si u n'est pas différentiable, mais alors, on ne peut pas recourir aux conditions du premier ordre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou "min" en TD).

Remarque 2.3. Les conditions de premier ordre sont *nécessaires* pour une solution $x^* > 0$, $y^* > 0$ mais pas *suffisantes*. En effet, $x^* = 0$ ou $y^* = 0$ est tout à fait possible, notamment pour des fonctions d'utilité linéaires (voir TD).

2.5 Utilités à élasticité de substitution constante

Cette section est purement techinque, mais sa lecture (et travail) peut se révéler utile.
Pour tout $r \neq 0$, on définit la r-moyenne de deux réels **positifs** $x, y > 0$ en posant :

$$m_r(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^r + \frac{1}{2}y^r\right)^{1/r}$$

On définit également $m_0(x, y) := \lim_{r\to 0} m_r(x, y) = \sqrt{xy}$, moyenne géométrique de x et y. On remarquera également que $r = 1$ correspond à la moyenne arithmétique $\frac{x+y}{2}$, de même que m_{-1} correspond à la moyenne harmonique $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$. En prenant des limites, on peut définir également

$$m_{-\infty}(x, y) := \lim_{r\to-\infty} m_r(x, y) = \min\{x, y\} \quad \text{et} \quad m_{+\infty}(x, y) := \lim_{r\to+\infty} m_r(x, y) = \max\{x, y\}$$

Ainsi, les r-moyennes sont une famille de fonctions comprenant toutes les moyennes usuelles. On peut même aller un peu plus loin, en remplaçant les termes $\frac{1}{2}$ par des poids $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$. On obtient ainsi les *moyennes généralisées* $(\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r}$. Ces fonctions interviennent souvent en économie, aussi bien en théorie du consommateur que du producteur, parce qu'elles ont une propriété remarquable : elles sont à *élasticité de substitution constante*. Le lemme suivant (exercice d'analyse) résume quelques propriétés utiles pour cette famille de fonctions.

Lemme 2.5. *Soit $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ fixés. Pour tout $r \neq 0$, soit $u_r(x, y) = (\alpha x^r + \beta y^r)^{1/r}$ et définissons également u_0, $u_{-\infty}$ et $u_{+\infty}$ par passage à la limite. Alors*

1. *Pour tout $r \in [-\infty, +\infty]$, la fonction u_r est strictement croissante et continue.*
2. *Pour tout $r \in [-\infty, 1]$, la fonction u_r est concave (et donc quasi-concave). De plus, la concavité (et donc, la quasi-concavité) est stricte pour $r \in (-\infty, 1)$.*

3. *Pour tout* $r \in [1, +\infty]$, *la fonction* u_r *est convexe. Ainsi, pour* $r \in (1, +\infty]$ *la fonction* u_r *n'apparaîtra pas en théorie du consommateur. En revanche,* u_r *peut représenter une fonction de coût de production.*
4. *On remarquera les cas particuliers suivants :*
   - $u_{-\infty}(x, y) = \min\{x, y\}$, *utilité de Leontieff correspondant à deux parfaits compléments*
   - $u_{-1}(x, y) = (\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y})^{-1}$
   - $u_0(x, y) = x^\alpha y^\beta$, *utilité Cobb-Douglass*
   - $u_1(x, y) = \alpha x + \beta y$, *utilité linéaire correspondant à deux parfaits substituts*
   - $u_{+\infty}(x, y) = \max\{x, y\}$
5. *Pour tout* $r \in [-\infty, +\infty]$, u_r *est* 1*-homogène, i.e.* $u_r(\lambda x, \lambda y) = \lambda u_r(x, y)$ *pour tout* $x, y, \lambda > 0$.
6. *Pour tout couple* $x \neq y$ *positifs, la fonction* $r \mapsto u_r(x, y)$ *est strictement croissante et continue. En particulier* $\min\{x, y\} \leq u_r(x, y) \leq \max\{x, y\}$ *pour tout* $x, y > 0$ *et* $r \in [-\infty, +\infty]$.
7. ***Tout ceci se généralise à*** L ***biens***, *en définissant* $u_r : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}$ *comme* $u_r(x) := (\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell x_\ell^r)^{1/r}$ *pour certains poids fixés* $\alpha_1, \ldots, \alpha_L > 0$ *tels que* $\sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell = 1$.

NB. Il faut bien comprendre (et, de préférence, savoir démontrer) les points 1,2,4 et 5 du Lemme 2.5.

2.6 Généralisation à L biens

— $p \in \mathbb{R}^L$, $p \gg 0$ et $w > 0$ sont fixés.

— Contrainte budgétaire : $B(p, w) = \{x \in \mathbb{R}^L \,|\, \langle x, p\rangle \leq w\}$

— Demande du consommateur : $D(p, w) = \{x \in B(p, w) \,|\, u(x) \geq u(y),\ \forall y \in B(p, w)\}$

— $D(p, w)$ est non-vide dès lors que u est continue.

— $D(p, w) = \{d(p, w)\}$ dès lors que u est continue, croissante et strictement quasi-concave. Dans ce cas $(p, w) \mapsto d(p, w)$ définit la *fonction de demande.*

— Supposons u différentiable. Si les conditions du premier ordre

  — (C.P.O.) $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell} = \lambda^* p_\ell$, pour tout $\ell = 1, \ldots, L$

  — (C.B.) $\langle p, x^*\rangle = w$

  sont satisfaites en $x^* \gg 0$, pour un certain $\lambda^* > 0$, alors $x^* \in D(p, w)$ et $\Rightarrow$

$$TMS_{k \to \ell}(x^*) = \frac{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell}}{\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_k}} = \frac{p_\ell}{p_k}, \quad \forall k, \ell$$

  Si, en plus, u est croissante et quasi-concave et $\nabla u(x) \neq 0$ pour tout x, alors ces conditions sont suffisantes. La stricte-concavité assure, en plus, l'unicité du panier optimal.

$*$ **Interprétation du multiplicateur de Lagrange.** On suppose u différentiable et la fonction de demande bien définie. Montrons que λ^* correspond l'*utilité marginale* du revenu, c'est–à–dire à la dérivée de u au point $d(p, w)$, par rapport au revenu w. En effet, d'après les C.P.O., $\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_\ell} = \lambda^* p_\ell$, pour tout ℓ. De plus, d'après la loi de Walras, $\langle p, d(p,w)\rangle = w$ et donc $\langle p, \frac{\partial d(p,w)}{\partial w}\rangle = 1$. En dérivant (on applique les règles de dérivation en $\mathbb{R}^L$) on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(d(p,w))}{\partial w} &= \sum_{\ell=1}^L \frac{\partial u(d(p,w))}{\partial x_\ell}\frac{\partial d_\ell(p,w)}{\partial w} \\
&= \sum_\ell \lambda^* p_\ell \frac{\partial d_\ell(p,w)}{\partial w} \\
&= \lambda^* \langle p, \frac{\partial d(p,w)}{\partial w}\rangle \\
&= \lambda^*
\end{aligned}$$

Conditions d'optimalité. Les C.P.O. sont des conditions suffisantes d'optimalité en $x^* \gg 0$ lorsque u est différentiable, croissante, quasi-concave et que $\nabla u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^L_+$. Dans ce cas, x^* est l'unique optimum.

2.7 Loi de la demande

Si le prix d'un bien augmente, la demande décroît-elle toujours ? Lorsque c'est le cas, on parle de *loi de la demande*. Bien que cela puisse paraître étonnant, la loi de la demande n'est pas toujours vérifiée alors que, côté producteur, la *loi de l'offre* existe toujours (voir Proposition 5.3). Cela est dû au fait qu'une augmentation de prix du bien x provoque chez le consommateur deux effets :

— Un effet substitution : tendance à remplacer la consommation du bien x par d'autres biens

— Un effet revenu : appauvrissement, et donc un changement dans les préférences ou les priorités

2.7.1 Effet revenu et effet substitution

Bien que l'effet substitution aille toujours dans le sens de la loi de la demande, l'effet revenu peut très bien aller dans le sens contraire. Il en résulte qu'une augmentation des prix ne mène pas nécessairement à une diminution de la demande. On distingue plusieurs types de biens.

— Les *bien normaux* sont ceux pour lesquels : "plus on est riche, plus on en veut" (le chocolat)

— Les *bien inférieurs*, au contraire, "plus on est riche, moins on en veut" (le transport en RER)

— Les *bien de Giffen* sont, parmi les bien inférieurs, ceux pour lesquels l'effet revenu renverse l'effet substitution, de sorte qu'une augmentation des prix peut donner lieu à une augmentation de sa consommation (les pommes de terres)

Exemple 2.6. Considérer, dans les situations suivantes, les effets (revenu et substitution) du changement proposé.

1. Café et Chocolat ; augmentation du revenu(2 biens normaux)
2. Café et Chocolat ; augmentation du prix du chocolat (2 biens normaux)
3. Uber et RER ; augmentation du prix du RER (le second est un bien inférieur)
4. Patates et viande ; augmentation du prix des patates (le second est un bien Giffen)
5. Consommation et Loisir ; augmentation du salaire
6. Consommation présente ou future ; augmentation du taux d'intérêt

2.7.2 Loi de la demande hicksienne

Le consommateur peut aussi considérer le problème suivant : se fixer un niveau d'utilité, et chercher le panier le moins coûteux qui le satisfasse. Autrement dit, minimiser $\langle p, x\rangle$ sous la contrainte $u(x) \geq c$ et $x \geq 0$. Ce problème est appelé le *problème dual* du consommateur. L'ensemble des paniers optimaux $H(p, c)$ est la demande hicksienne. Lorsque u est continue, croissante et strictement quasi-concave, on a $H(p, c) = \{h(p, c)\}$. On définit ainsi la *fonction de demande hicksienne* [5], qui possède des propriétés très similaires mais qui vérifie la loi de la demande. Mais surtout, elle vérifie la loi de la demande.

Proposition 2.7 (Loi de la demande hicksienne)**.** *Soit u une fonction d'utilité continue, croissante et strictement quai-concave. Alors pour tout $p, p' \gg 0$ et tout niveau d'utilité c, on a :*

$$\langle p' - p, h(p', c) - h(p, c)\rangle \leq 0$$

Démonstration. Pour tout $p \gg 0$, $h(p, c)$ est optimal dans le problème de minimisation du consommateur. Par conséquent, pour tout $p' \gg 0$, $\langle p, h(p, c)\rangle \leq \langle p, h(p', c)\rangle$. De même, $\langle p', h(p', c)\rangle \leq \langle p', h(p, c)\rangle$. En additionnant ces deux relations on obtient le résultat :

$$\langle p', h(p', c)\rangle + \langle p, h(p, c)\rangle \leq \langle p, h(p', c)\rangle + \langle p', h(p, c)$$

□

Le résultat précédent établit, en particulier, que si on augmente seulement le prix du bien k (i.e. $p'_k > p_k$ et $p'_\ell = p_\ell$ pour tout $\ell \neq k$) alors demande pour le bien k diminue (i.e. $h_k(p', c) \leq h_k(p, c)$, pour un niveau d'utilité c fixé).

Conclusion. Bien que la demande d'un bien ne décroisse pas toujours avec le prix de ce bien, la *demande hicksienne* d'un bien décroit avec le prix de ce bien (voir dessin).

2.7.3 $*$ Loi de la demande compensée

Une autre manière plus directe de faire apparaître une loi de la demande, est de considérer non pas la fonction de demande, mais la *demande compensée*. Celle-ci "compense" le consommateur en lui attribuant un revenu fictif additionnel en cas de hausse des prix. Cette opération a pour effet d'isoler l'effet substitution lequel, comme on a déjà vu, est toujours en accord avec la loi de la demande. De surcroît, il y équivalence entre la loi de la demande compensée et la vérification de l'axiome faible des préférences révélées (WA).

Question 8. Vérifier que la fonction de demande d satisfait (WA) ssi pour tout (p, w) et (p', w) vérifiant $\langle p, d(p', w')\rangle \leq w$ et $d(p', w') \neq d(p, w)$ on a $\langle p', d(p, w)\rangle > w'$.

5. La fonction de demande $(p, w) \mapsto d(p, w)$ est appelée parfois la fonction de demande walrassienne.

Proposition 2.8. *Soit u une fonction d'utilité continue, croissante et strictement quai-concave. Alors $d(p, w)$ vérifié l'axiome faible (WA) si, et seulement si, pour tout $p, p' \gg 0$ et $w \in \mathbb{R}$*

$$\langle p' - p, d(p', w') - d(p, w) \rangle \leq 0$$

avec $w' := \langle p', d(p', w) \rangle$. De plus, l'inégalité est stricte lorsque $d(p', w') \neq d(p, w)$.

On interprète w' comme étant le revenu fictif qu'il faudrait au consommateur pour qu'ill puisse continuer à s'offrir le panier $d(p, w)$ avec les nouveaux prix p'. Comme précédemment, lorsqu'on augmente seulement le prix du bien k (i.e. $p'_k - p_k > 0$), la *demande compensée* du bien k diminue. Dans ce cas, le consommateur est compensée de l'augmentation du prix p_k par un revenu supplémentaire $(p'_k - p_k)d_k(p, w)$, lui permettant toujours de consommer la même quantitité du bien k.

Question 9. Vérifier que lorsqu'on augmente seulement le prix du bien k, $w' = w + (p'_k - p_k)d_k(p, w)$.

Conclusion : Bien que la demande d'un bien ne décroisse pas toujours avec le prix de ce bien, du fait de la combinaison d'un effet substitution et un effet revenu, en compensant l'effet revenu on obtient que la *demande compensée* d'un bien décroit avec le prix de ce bien.

2.8 Exercices

Exercice 2.1 (*Fonction de choix du consommateur*)**.** Ecrire le problème du consommateur pour un panier de L biens, sous forme $(X, \mathcal{A}, C)$, où X est l'ensemble des alternatives réalisables, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des expériences, et C la fonction de choix, qui vérifie $C(A) \subset A$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Transposer l'axiome faible des préférences révélées au cadre d'un consommateur de L biens.

Exercice 2.2 (*Fonction d'utilité Cobb-Douglas*)**.** Les préférences d'un consommateur sur des paniers de 2 biens sont représentées par une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $u(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$ pour un certain $0 < \alpha < 1$ fixé.

1. Déterminer les propriétés de la fonction u : continuité (justifier rapidement), différentiabilité (sur $\mathbb{R}^2_{++}$), (strictement) monotone, (strictement) (quasi)-concave.
2. Représenter graphiquement les courbes d'indifférence du consommateur.
3. Déterminer la demande du consommateur $d(p,w)$, en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$ et d'un revenu $w \in \mathbb{R}_+$, en calculant le cas échéant le taux marginal de substitution $TMS_{y \to x}$. Analyser les propriétés de cette demande et l'exprimer en fonction d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y) \in \mathbb{R}^2_+$ du consommateur.
4. Montrer que la fonction suivante représente les mêmes préférences : $u(x,y) = \alpha \ln x + (1-\alpha) \ln y$. Refaire les calculs de la question 3 en utilisant cette spécification.

Exercice 2.3 (*Fonction d'utilité linéaire*)**.** Mêmes questions que précédemment (sauf 4), avec $u(x,y) = ax + y$ où $a > 0$.

Exercice 2.4 (*Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante*)**.** Mêmes questions que précédemment (sauf 4) avec $u(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ où $a, b > 0$ et $0 \neq \rho \leq 1$

Exercice 2.5 (*Fonction d'utilité Cobb-Douglas à trois biens*)**.** Les préférences d'un consommateur sur les paniers de 3 biens sont représentés par la fonction d'utilité suivante $u(x,y,z) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{6}} z^{\frac{1}{3}}$. La dotation initial du consommateur est $e = (2,1,3)$. Déterminer la fonction de demande du consommateur (après avoir justifié que c'est bien une fonction) en fonction du vecteur des prix $p = (p_x, p_y, p_z)$.

Exercice 2.6 (*Fonction d'utilité Leontief*)**.** Dans une économie à 2 biens (x et y), on considère un consommateur qui dispose d'une dotation initiale $e^1 = (1,2)$; sa fonction d'utilité est $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$: $u(x,y) = \min(3x, y)$.

1. Représentez graphiquement quelques courbes d'indifférence du consommateur.
2. A partir de la représentation graphique, étudiez les propriétés de la fonction d'utilité u du consommateur.
3. Déterminez la demande du consommateur en fonction de sa dotation initiale $e = (e_x, e_y)$ et du prix $p = (p_x, p_y)$ pour $p_x > 0$ et $p_y > 0$. Une représentation graphique est souhaitable.

4. Même question qu'en 3. pour un prix $p = (p_x, p_y)$ tel que $p_x = 0$ et $p_y > 0$, c'est-à-dire déterminez toutes les solutions du problème d'optimisation du consommateur dans ce cas. Une représentation graphique est souhaitable.

Exercice 2.7 ($*$ *Unicité de la solution*)**.** On considère une économie avec L biens. On rappelle qu'une fonction $u : \mathbb{R}_+^L \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement quasi-concave si et seulement si pour tout $z, z' \in \mathbb{R}_+^L$, on a $u(\lambda z + (1-\lambda)z') > \min\{u(z), u(z')\}$ pour tout $0 < \lambda < 1$. La fonction d'utilité u de l'agent est continue, différentiable, croissante et strictement quasi-concave. La richesse de l'agent est $R > 0$. Les prix sont strictement positifs, $p \in \mathbb{R}_{++}^L$.

1. Ecrire le programme de l'agent, montrer que le programme admet une solution et que cette solution sature la contrainte budgétaire de l'agent.
2. Montrer que cette solution est unique.
3. On suppose le panier de biens $z^* = (z_1^*, z_2^*, ..., z_L^*) \in \mathbb{R}_{++}^L$ vérifie $TMS_{z_2 \to z_1}(z^*) > \frac{p_1}{p_2}$. Expliquer pourquoi le panier ne peut pas être solution du programme et comment l'agent veut modifier ses consommations en bien 1 et 2, toutes choses égales par ailleurs.

Exercice 2.8 ($*$ *Fonction d'utilité particulière*)**.** On considère la fonction d'utilité suivante $u(x, y) = x + \sqrt{y}$. Déterminer la demande du consommateur $d(p, w)$ (Il est impératif de tracer précisément les courbes d'indifférences pour se donner une idée des solutions (plusieurs cas à traiter)).

3 Economies d'échange

Une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ consiste en

— L biens, $\ell = 1, \ldots, L$

— N agents (ou consommateurs), $i = 1, \ldots, N$

— Chaque agent i est caractérisé par sa dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}_+^L$ et sa fonction d'utilité u^i

— Les dotations initiales donnent lieu à un revenu $w^i = \langle p, e^i\rangle$, pour tout $i = 1, \ldots N$.

3.1 Equilibre concurrentiel

Définition 3.1. Un *équilibre concurrentiel* pour $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ est un couple prix-allocation, $p^* = (p_1^*, \ldots, p_L^*) \in \mathbb{R}_+^L$ et $z = (z^1, \ldots, z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ tels que

- z^i maximise l'utilité u^i de i sous sa contrainte budgétaire $B(p^*, w^i)$, pout tout $i = 1, \ldots, N$
- Les marchés s'apurent : $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$

Erratum. Dans certains cas, on peut avoir un prix p^* d'équilibre avec des coordonnées égales à 0 (voir Remarque 3.1 ci-dessous).

L'apurement des marchés peut se comprendre bien par bien : pour tout $\ell = 1, \ldots, L$ le marché du bien ℓ s'apure, i.e. $\sum_{i=1}^N z_\ell^i = \sum_{i=1}^N e_\ell^i$. Cette condition assure qu'il n'y a pas de *gaspillage* au sens où toutes les ressources sont allouées.

Interprétation : "main invisible"

— Le système de prix suffit à équilibrer les demandes des agents, qui n'agissent que pour maximiser leurs préférences individuelles.

— Les agents sont négligeables et n'ont donc pas d'influence sur les prix (*price takers*). Cette hypothèse est plausible lorsqu'il sont très nombreux, par exemple.

Théorème 3.1 (Existence). *Si l'économie $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ satisfait :*

— $\sum_{i=1}^N e^i \gg 0$, *c'est-à-dire si tous les biens sont présents dans l'économie*

— u^i *est continue, strictement croissante et strictement quasi-concave, pour tout* $i = 1, \ldots, N$

Alors $\mathcal{E}$ possède (au moins) un équilibre concurrentiel.

Remarque 3.1. Sous les hypothèses du théorème ci-dessus (notamment, la stricte-monotonie des préférences) tout prix p^* d'équilibre vérifie $p^* \gg 0$. En revanche, lorsque les utilités sont seulement croissantes (c'est le cas pour des utilités du type Leontieff, par exemple, ou pour une utilité linéaire $u(x) = \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell x_\ell$ avec au moins un coefficient $\alpha_k = 0$) on pourra avoir des prix d'équilibre p^* avec quelques coordonnées égales à 0 (ou à $+\infty$, puisque c'est les prix relatifs qui comptent).

Remarque 3.2. Le théorème donne simplement des conditions *suffisantes* pour l'*existence* d'un équilibre. Une démonstration standard du résultat fait appel à un théorème de point fixe ; nous y reviendrons. Une économie qui ne satisfait pas les conditions ci-dessus peut néanmoins avoir un équilibre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou linéaires en TD). L'unicité, question délicate, fait l'objet d'énoncés de nature tout à fait différente (voir Section 3.7).

On introduit maintenant une fonction qui jouera un rôle important dans la démonstration du théorème ci-dessus.

Définition 3.2. On définit la fonction *de demande excédentaire* (agrégée) $f : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$ par

$$f(p) := \sum_{i=1}^{N} d^i(p) - e^i$$

On notera que, pour tout $\ell = 1, \dots, L$ et $p \gg 0$, $f_\ell(p)$ correspond à l'excès de demande global (possiblement négatif) pour le bien ℓ dans l'économie $\mathcal{E}$.

Remarque 3.3. $p^* \gg 0$ est un prix d'équilibre si et seulement si $f(p^*) = 0$.

Question 10. Montrer que si $f_\ell(p^*) = 0$ pour tout $\ell = 1, \dots, L-1$ alors $f_L(p^*) = 0$ aussi.

Proposition 3.1. *Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie vérifiant les mêmes hypothèses que dans le Théorème 3.1. Alors la fonction de demande excédentaire vérifie les propriétés suivantes :*

(i) f est continue

(ii) f est homogène de degré 0

(iii) Loi de Walras : $\langle f(p), p\rangle = 0$ pour tout $p \gg 0$

(iv) Il existe $m > 0$ tel que $f_\ell(p) > -m$, pour tout $\ell = 1, \dots, L$ et tout p.

(v) Si $p^n \to p$, avec $p \neq 0$ et $\prod_{\ell=1}^{L} p_\ell = 0$, alors il existe ℓ tel que $p_\ell = 0$ et $f_\ell(p^n) \to +\infty$.

Démonstration. (i), (ii) et (iii) découlent de Proposition 2.2. (iv) découle de la positivité de la demande. (v) est laissé en **exercice**. *Indication* : il existe au moins un consommateur i tel que $\langle p, e^i\rangle > 0$, puisque $\langle p, \sum_{i=1}^{N} e^i\rangle > 0$. La stricte monotonie des préférences fera que $d_\ell(p) \to +\infty$ pour un des biens dont le prix tend vers 0. □

3.2 Calcul pratique d'équilibres et boîte d'Edgeworth

Considérons le cas $N = 2$ et $L = 2$. Notons les agents 1 et 2 et les biens x et y. Ainsi $e^1 = (e^1_x, e^1_y)$ est la dotation initiale du premier agent et $e^2 = (e^2_x, e^2_y)$ celle du second. Les utilités respectives sont u^1 et u^2, définies sur $\mathbb{R}^2_+$ et à valeurs dans réelles. Elle sont supposées régulières, c'est–à–dire, continues, strictement croissantes, strictement quasi-concaves et, de plus, continûment différentiables. La fonction de demande est donc bien définie, et elle est continue. Un équilibre consiste en une paire prix-allocation, $p = (p_x, p_y)$ et $z = (z^1, z^2) = ((x^1, y^1), (x^2, y^2))$.

3.3 Représentation graphique

Boîte d'Edgeworth (voir dessin). Notons $e_x = e_x^1 + e_x^2$ et $e_y = e_y^1 + e_y^2$ la quantité du bien x et y, respectivement, présents dans l'économie. L'idée est de placer l'agent 1 sur le point $(0, 0)$ et l'agent 2 sur le point (e_x, e_y), de sorte que les deux problèmes d'optimisation se représentent sur le même dessin (avec les coordonnées inversées). L'ensemble des allocations où la totalité des deux biens sont alloués est le suivant :

$$\{((x^1, y^1), (x^2, y^2)) \in \mathbb{R}_+^4 \mid x^1 + x^2 = e_x,\ y^1 + y^2 = e_y\}$$

Il correspond à la "boîte" $[0, e_x] \times [0, e_y]$. En effet, à chaque point $a = (a_x, a_y)$ tel que $0 \leq a_x \leq e_x$ et $0 \leq a_y \leq e_y$ lui correspond une, et une seule, allocation $((a_x, a_y), (e_x - a_x, e_y - a_y))$.

Contraintes budgétaires et fonctions de demande (voir dessin). Soit p un prix fixé et soient u^1 et u^2 des fonctions régulières. Les contraintes budgétaires $B(p, w^1)$ et $B(p, w^2)$ divisent la boîte en deux (voir dessin) et partagent la même frontière $\langle p, z^1 \rangle = w^1$ et $\langle p, z^2 \rangle = w^2$. C'est donc sur celle-ci que se placeront les demandes $d^1(p)$ et $d^2(p)$ des deux agents.

Quelques dessins :

— Allocation incompatible : excès de demande et/ou excès d'offre

— Allocation dominée : il existe une allocation réalisable qui améliore l'utilité à tous les agents

— Allocation d'équilibre

3.4 Résolution analytique

Etape 1. La résolution des problèmes d'optimisation individuels fournit les demandes $d^1(p)$ et $d^2(p)$ chaque consommateur, en fonction de p. En supposant une solution régulière (c'est–à–dire $x^i > 0$, $y^i > 0$ pour $i = 1, 2$) on résout les problèmes d'optimisation des deux agents en utilisant leurs TMS.

Agent 1

— (CPO) $TMS^1_{y \to x}\ (x^1, y^1) = \frac{\frac{\partial u^1}{\partial x}(x^1,y^1)}{\frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1,y^1)} = \frac{p_x}{p_y}$

(CB) $p_x x^1 + p_y y^1 = p_x e_x^1 + p_y e_y^1$

Agent 2

— (CPO) $TMS^2_{y \to x}\ (x^2, y^2) = \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x}(x^2,y^2)}{\frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2,y^2)} = \frac{p_x}{p_y}$

(CB) $p_x x^2 + p_y y^2 = p_x e_x^2 + p_y e_y^2$

On a déterminé ainsi $d^1(p) = (d_x^1(p), d_y^1(p))$ et $d^2(p) = (d_x^2(p), d_y^2(p))$, les fonctions de demande. On remarquera, en particulier, l'égalité à l'optimum $TMS^1_{y \to x}\ (x^1, y^1) = TMS^2_{y \to x}\ (x^2, y^2) = \frac{p_x}{p_y}$

Etape 2. Les conditions d'apurement des marchés :

— (bien x) $d_x^1(p) + d_x^2(p) = e_x^1 + e_x^2$

— (bien y) $d_y^1(p) + d_y^2(p) = e_y^1 + e_y^2$

Ces deux équations ne sont pas indépendantes, grâce à loi de Walras (voir exercice 11). . On garde donc un degré de liberté pour le vecteur de prix, qu'on peut normaliser. Cela veut dire que le prix d'équilibre n'est déterminer qu'à un facteur multiplicatif près : c'est le rapport des prix p_x/p_y que l'on déterminera en fait, et non pas les prix eux-mêmes. Les normalisations les plus courantes sont $p_x + p_y = 1$ ou $p_x = 1$ (on dit que le bien x est le *numéraire*).

Etape 3. Ayant déterminé p, on trouve l'allocation d'équilibre $((x^1, y^1), (x^2, y^2))$ en remplaçant p dans l'expression des demandes des consommateurs.

Remarque 3.4. Si les fonctions d'utilité ne sont pas différentiables, ou si la solution du problème d'optimisation d'un des deux consommateurs n'est pas strictement positive (solution au bord), on peut suivre la même démarche, c.à.d.

Etape 1 : déterminer la (fonction de) demande de chacun des consommateurs.

Etape 2 : vérifier pour quel(s) prix ces demandes sont compatibles, i.e. les marchés s'apurent.

MAIS on ne peut plus égaliser d'emblée les TMS ! ! !

(Voir exemples en TD, lorsque les biens sont des parfaits substituts ou des parfaits compléments)

Exemple 3.3. Déterminer l'équilibre concurrentiel pour $u^1(x, y) = \ln x + 2 \ln y$, $u^2(x, y) = 3 \ln x + \ln y$, $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (2, 3)$. On est dans le cadre régulier : les utilités sont continues, croissantes, strictement concaves et différentiables. Après quelques calculs on obtient $p_x/p_y = 31/14$, $z^1 = (15/31, 15/7)$ et $z^2 = (78/31, 13/7)$.

Question 11. Dans le cas d'une économie à 2 biens et 2 consommateurs ayant des préférences monotones et des fonctions de demande $p \mapsto d^i(p)$ bien définies, montrer que pour tout $p = (p_x, p_y) \gg 0$

$$p_x \left(d_x^1(p) + d_x^2(p) - e_x^1 - e_x^2 \right) + p_y \left(d_y^1(p) + d_y^2(p) - e_y^1 - e_y^2 \right) = 0$$

En déduire que si le marché pour le premier bien s'apure en p^*, alors il en est de même pour le marché du second. Autrement dit, p^* est un prix d'équilibre $\iff$ $d_x^1(p^*) + d_x^2(p^*) = e_x^1 + e_x^2$.

3.5 Démonstration dans le cas $N = L = 2$

Dans cette section, on démontrera le Théorème 3.1, i.e. l'existence d'un équilibre concurrentiel sous certaines hypothèses, pour une économie à deux biens et deux consommateurs. Les dotations initiales e^i resteront fixées et les utilités u^i sont régulières, pour $i = 1, 2$. Comme précédemment, on notera les deux biens x et y, et $p = (p_x, p_y)$.

Démonstration

- Rappelons que $f : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}^2$ est la fonction de demande excédentaire.
- D'après la Remarque 3.3, il suffit de montrer qu'il existe $p \gg 0$ tel que $f(p) = 0$.

- D'après l'Exercice 10, $f(p) = 0$ si et seulement si $f_x(p) = 0$.
- Par homogénéité, $f(p_x, p_y) = f(p_x/p_y, 1)$ pour tout $p = (p_x, p_y)$.
- Ainsi donc, il suffit de montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $f_x(r_0, 1) = 0$.
- D'après la Proposition 3.1 (v) , $\lim_{r\to 0} f_x(r, 1) = +\infty$. Il existe donc $s > 0$ tel que $f_x(s, 1) > 0$.
- Par homogénéité, $r \to +\infty$ est équivalent à $p_y \to 0$. En inversant les rôles de x et y, on obtient alors l'existence de $t > 0$ tel que $f_y(1, t) > 0$.
- Or, $\langle p, f(p)\rangle = 0$ pour tout p (d'après la loi de Walras). En particulier, $f_x(1, t) + tf_y(1, t) = 0$, et donc $f_x(1, t) = f_x(1/t, 1) < 0$.
- Le résultat découle alors de la continuité de f_x car, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe r_0 entre s et $1/t$ tel que $f_x(r_0, 1) = 0$

3.6 Démonstration du cas général

Dans cette section, on démontrera le Théorème 3.1 pour une économie d'échange satisfaisant les hypothèses du théorème, pour N et L quelconques. Contrairement au cas précédent ($N = L = 2$) la loi de Walras ne permet plus de se ramener à un problème sur $\mathbb{R}$, puisque $f_1(p^*) = 0$ n'implique pas que p^* soit un prix d'équilibre. Le théorème des valeurs intermédiaires, utilisé plus haut, devra être remplacé par un théorème de point fixe plus général.

Théorème 3.4 (du point fixe de Brouwer)**.** *Soit $S \subseteq \mathbb{R}^L$, $S \neq \emptyset$, compact, convexe non-vide et $g : S \to S$ une fonction continue. Alors, g admet un point fixe, c.à.d. $\exists\, x^* \in S$ tel que $g(x^*) = x^*$.*

Remarque 3.5. Ce résultat coincide avec le théorème des valeurs intermédiaires pour $S \subset \mathbb{R}$. En effet, un compact, convexe, non-vide de $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle fermé. Sans perte de généralité, on peut prendre $[0, 1]$. On a alors $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 1 \Leftrightarrow h(0) \leq 0$ et $h(1) \geq 0$, où $h(x) := g(x) - x$ est continue. Par Brouwer, il existe $x^* \in [0, 1]$ tel que $g(x^*) = x^* \Leftrightarrow$ il existe $x^* \in [0, 1]$ tel que $h(x^*) = 0$.

Démonstration

- On pose $S := \{p \in \mathbb{R}^L_+ \mid \sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1\}$, l'ensemble (compact) des prix normalisés.
  On note Int$S := \{p \in S \,|\, p \gg 0\}$ son intérieur.
- Rappelons que $f : S \to \mathbb{R}^L$ est la fonction de demande excédentaire.
- D'après la Proposition 3.1, f est continue sur Int$S$ et $\langle p, f(p)\rangle = 0$ pour tout $p \gg 0$.
  Nous négligerons ici les difficultés techniques liées au manque de continuité au bord. [6]
- D'après la Remarque 3.3, p^* est un prix d'équilibre ssi $f(p^*) = 0$.
- Contrairement au cas précédent ($N = L = 2$) la loi de Walras ne permet pas de se ramener à un problème sur $\mathbb{R}$. Ici, $f_1(p^*) = 0$ ne suffit plus.

6. Pour une preuve rigoureuse, voir Mas-Colell et al. (1995), chapitre 17. La fonction de demande excédentaire est remplacé par une correspondance, et on utilise le théorème de point fixe de Kakutani (généralisation du théorème de Brouwer, pour les correspondances).

- En revanche $f(p^*) \leq 0$ implique que $f(p^*) = 0$. En effet, d'après la Proposition 3.1 (v), on a nécessairement $p^* \gg 0$ et d'après la loi de Walras $\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^* f_\ell(p^*) = 0$. Donc $f_\ell(p_*) = 0$, $\forall \ell$.
- Le lemme suivant, qui repose sur le théorème de point fixe de Brouwer, termine la démonstration.

Lemme 3.1. Soit $h : S \to \mathbb{R}^L$ une fonction continue satisfaisant $\langle p, h(p)\rangle = 0$ pour tout $p \in S$. Alors il existe $p^* \in S$ tel que $h(p^*) \leq 0$.

Démonstration. On définit une fonction $g : S \to S$ en posant pour tout $\ell = 1, \ldots, L$

$$g_\ell(p) = \frac{p_\ell + \max\{0, h_\ell(p)\}}{1 + \sum_{k=1}^{L} \max\{0, h_k(p)\}}$$

Intuition pour cette définition : Bien sûr, h correspond à la fonction de demande excédentaire et $g(p)$ est un vecteur de prix (normalisé) obtenu par tâtonnement, en ajustant les prix en fonction de la demande. En effet, lorsque $h_\ell(p) \leq 0$ (excès d'offre) on maintient le prix du bien ℓ ; en revanche, lorsque $h_\ell(p) > 0$ (excès de demande) on augmente le prix. Le dénominateur est juste une normalisation assurant que $g(p)$ appartienne bien à S.

La fonction g est continue car h et le max le sont, et que le dénominateur est non nul. sur S, qui est un compact, convexe, non-vide de $\mathbb{R}^L$ (exercice). Par le théorème de Brouwer, il existe $p^* \in S$ tel que $g(p^*) = p^*$. On a donc :

$$p_\ell^* \sum_{k=1}^{L} \max\{0, h_k(p)\} = \max\{0, h_\ell(p^*)\}, \quad \forall \ell = 1, \ldots, L$$

En multipliant par $h_\ell(p^*)$ et en sommant sur $\ell = 1, \ldots, L$ on obtient :

$$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell^* h_\ell(p^*) \left(\sum_{k=1}^{L} \max\{0, h_k(p)\} \right) = \sum_{\ell=1}^{L} h_\ell(p^*) \max\{0, h_\ell(p^*)\}$$

Comme $\langle p, h(p)\rangle = 0$ pour tout $p \in S$, on a que $\sum_{\ell=1}^{L} h_\ell(p^*) \max\{0, h_\ell(p^*)\} = 0$ pour tout ℓ. Enfin, puisque $\max\{0, h_\ell(p^*)\} \geq 0$, on a bien $h_\ell(p^*) \leq 0$, pour tout ℓ, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 3.6. Dans le théorème de Brouwer, la continuité de g est essentielle, y compris "au bord". Le manque de continuité au bord de la fonction de demande excédentaire, que nous avons négligé, pose problème puisque nous ne pouvons pas appliquer le Lemme 3.1. Les aspects techniques pour contourner cette difficulté sont omis.

3.7 Unicité

L'unicité de l'équilibre n'est pas garantie par les hypothèses du théorème d'existence, comme le montre l'exemple ci-dessus. Cela est dû à l'absence d'une loi de la demande ou, de manière à peu près équivalente, au fait que la fonction de demande agrégée ne satisfait pas l'axiome faible des préférences révélées (WA). Pour ce faire une idée, en équilibre partiel (un seul bien isolé) cela revient à supposer que la fonction de demande est strictement décroissante. Sous des hypothèses qui vont en ce sens (l'existence d'un agent représentatif, par exemple, ou la prédominance de l'effet substitution sur l'effet revenu), on obtient bel et bien l'existence d'un unique équilibre. Il faut cependant garder en tête que, généralement, on ne peut pas supposer cela et que, donc, les équilibres peuvent être multiples.

Voici un exemple avec multiplicité de prix d'équilibre.

Exemple 3.5 (*Multiplicité d'équilibres*)**.** Considérons une économie avec $u^1(x,y) = (64x^{-2}+y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$, $u^2(x,y) = (x^{-2}+64y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ (fonctions à élasticité de substitution constante, voir Section 2.5) et $e^1 = (1,0)$, $e^2 = (0,1)$. Les fonctions d'utilité sont régulières, il existe donc au moins un équilibre. Sans perte de généralité on pose $p_y = 1$. En résolvant $f(p) = 0$, on obtient

$$f(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_x(p) = 0 \;\Leftrightarrow\; d_x^1(p) + d_x^2(p) = 1 \;\Leftrightarrow\; t^3 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$$

où $t := (p_x)^{1/3}$. Ce polynôme admet 3 solutions, $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \simeq 2.62$, et $t_3 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.38$, qui sont dont 3 prix (relatifs) d'équilibre.

Quelques détails de la solution

On obtient $d_x^1(p) = \frac{4p_x}{4p_x+(p_x)^{1/3}} = \frac{4t^3}{4t^3+t} = 1 - \frac{t}{4t^3+t}$ *et* $d_x^2(p) = \frac{1}{p_x+4(p_x)^{1/3}} = \frac{1}{t^3+4t}$*. Donc*

$$d_x^1(p) + d_x^2(p) = 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{t^3+4t} = \frac{t}{4t^3+t} \;\Leftrightarrow\; t^4 - 4t^3 + 4t^2 - t = 0 \;\Leftrightarrow\; t(t-1)(t^2-3t+1) = 0$$

La solution $t = 0$ *est exclue, car* $p \gg 0$*.*

Exemple 3.6. Soient $u^1(x,y) = u^2(x,y) = ax + by$ deux utilités identiques et linéaires. Le prix d'équilibre est unique (i.e. p^* tel que $p_x^*/p_y^* = a/b$ lorsque[7] $b \neq 0$) mais il y a une infinité d'allocations d'équilibre compatibles *(voir dessin).*

7. Et lorsque $b = 0$?

3.8 Exercices

On considère une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$.

Exercice 3.1 (*Fonction d'utilité Cobb-Douglas*)**.** Soient $e^1 = (1, 1)$, $e^2 = (1, 2)$ les dotations initiales et $u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$, $u^2(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ les utilités.

1. Vérifier si l'économie possède un équilibre concurrentiel.
2. Si oui, déterminer **les prix** et **les allocations** correspondantes.
3. Représenter les différentes quantités dans une boîte d'Edgeworth.

Exercice 3.2 (*Fonction d'utilité de Leontief*)**.** Mêmes questions que précédemment, avec $u^1(x, y) = u^2(x, y) = \min(x, y)$ et $e^1 = (2, 6)$, $e^2 = (1, 2)$.

Exercice 3.3 (*Fonction d'utilité linéaire*)**.** On considère une économie avec 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les fonctions d'utilité sont $u^1(x, y) = x + y$ et $u^2(x, y) = x$; les dotations initiales sont $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (1, 1)$.

1. Peut-on appliquer le théorème d'existence ? Pourquoi ?
2. Dans la boîte d'Edgeworth, dessiner précisément les courbes d'indifférence passant par les dotations initiales.
3. En raisonnant dans la boîte d'Edgeworth, déterminer explicitement, mais sans calculs, l'équilibre concurrentiel (prix et allocation d'équilibre).

Exercice 3.4 (*Fonction d'utilité à élasticité de substitution constante*)**.** On considère une économie d'échange comprenant deux consommateurs (1 et 2) et deux biens (x et y). Les dotations initiales sont $e^1 = (e^1_x, e^1_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et $e^2 = (e^2_x, e^2_y) \in \mathbb{R}^2_+$. Les fonctions d'utilité des deux consommateurs sont données par $u^1(x, y) = u^2(x, y) = \frac{xy}{x+4y}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.

1. Ecrire la fonction d'utilité des consommateurs de manière à montrer qu'elle est à élasticité de substitution constante ; indiquer la valeur des paramètres.
2. Représenter **précisément** au moins 3 courbes d'indifférence.
3. Vérifier par le calcul que les courbes d'indifférence sont strictement décroissantes et strictement convexes. Que peut-on en déduire sur la fonction d'utilité des consommateurs ?
4. Peut-on dire, *sans faire aucun calcul*, que cette économie possède un équilibre concurrentiel ?
5. Déterminer la demande de chacun des agents en fonction du prix $p = (p_x, p_y)$, pour $p_x > 0$ et $p_y > 0$, et de sa dotation initiale, en donnant les étapes du calcul.
6. Ecrire les équations d'équilibre sur les marchés des biens en fonctions du prix (p_x, p_y). Montrer que le prix $(p^*, 1)$ (on normalise du prix du bien y) est un prix d'équilibre si et seulement si $p^* = 4\frac{(e^1_y+e^2_y)^2}{(e^1_x+e^2_x)^2}$.

7. Pour les dotations $e^1 = (3, 1)$ et $e^2 = (5, 1)$ déterminer l'équilibre concurrentiel et représenter **précisément** l'économie et l'équilibre dans la boîte d'Edgeworth (boîte, dotations initiales, courbes d'indifférence, contraintes budgétaires, allocations).

Exercice 3.5 (*Utilités linéaires*)**.** Etudier l'existence d'un équilibre concurrentiel dans le cas de deux agents ayant des utilités linéaires (pas nécessairement égales) sur deux biens x et y. On pourra prendre, sans perte de généralité et en expliquant pourquoi, $u^1(x, y) = ax + y$ et $u^2(x, y) = bx + y$, avec $a, b > 0$.

4 Optimalité de Pareto

On considère une économie d'échange : $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$.

Définition 4.1. Une allocation $z = (z^1, \dots, z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ est *réalisable* si $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$
Autrement dit, z est réalisable si on n'alloue pas plus que ce qui est disponible.

NB. Certains auteurs définissent une allocation réalisable par une égalité $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$. On a préféré l'inégalité pour exprimer le fait qu'il est tout à fait possible de ne pas allouer toutes les ressources, bien que cela n'arrive pas à l'équilibre (apurement des marchés).

Exemple 4.2. Prenons $N = L = 2$ et des dotations initiales $e^1 = (2, 0)$ et $e^2 = (0, 2)$. L'allocation $((2, 2), (1, 0))$ n'est pas réalisable, car on ne peut pas allouer 3 unités du premier bien, alors qu'il n'y en a que 2 dans l'économie. En revanche, les allocations $((1, 1), (1, 1))$, $((0, 1), (1, 1))$ et $((0, 0), (0, 0))$ sont toutes réalisables.

Définition 4.3. Soient z et $\widetilde{z}$ deux allocations réalisables. On dit que *$\widetilde{z}$ domine z au sens de Pareto* si $u^i(\widetilde{z}^i) \geq u^i(z^i)$ pour tout $1 \leq i \leq N$, et il existe $1 \leq j \leq N$ tel que $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$.
Autrement dit, $\widetilde{z}$ est aussi bien que z pour tout le monde, et strictement mieux pour quelqu'un.

Définition 4.4. Une allocation réalisable z est *Pareto-optimale* (ou efficace, ou efficiente) si elle n'est pas dominée au sens de Pareto par aucune allocation réalisable.

Autrement dit, z est Pareto-optimale (ou PO) s'il n'est pas possible d'augmenter l'utilité d'un agent sans diminuer celle d'un autre.

NB. La dotation initiale est toujours réalisable, mais pas nécessairement Pareto-optimale.
Question. Que se passe-t-il si $(e^1, \dots, e^N)$ est une allocation Pareto-optimale ?

Commentaires

- La Pareto-dominance ne permet pas nécessairement de comparer deux allocations données, i.e. c'est un ordre partiel.
- Le concept d'optimum de Pareto ne fait pas appel à la notion de prix.
- A un optimum de Pareto, il n'existe plus d'échange mutuellement avantageux.
- On appelle *courbe de contrats* l'ensemble des optima de Pareto. Celui-ci dépend de la dotation initiale totale des agents $\sum_{i=1}^N e^i$, mais pas des dotations elles-mêmes. **Voir dessin.**
- Etant donnée une dotation initiale $(e^1, \dots, e^N)$, le *cœur* est le sous-ensemble de la courbe des contrats qui domine e au sens de Pareto. **Voir dessin.**
- Un optimum de Pareto n'est pas nécessairement souhaitable (un agent qui a tout, par exemple).
- En revanche, l'optimalité de Pareto est une condition minimale d'équilibre : une allocation dominée au sens de Pareto ne peut pas être un équilibre, car on pourrait améliorer l'utilité de tous les agents !

Exemple 4.5. Montrons comment calculer la courbe des contrats et le cœur dans une économie avec deux agents et deux biens. Prenons $u^1(x,y) = \ln x + 2\ln y$ et $u^2(x,y) = 3\ln x + \ln y$ et des dotations initiales $e^1 = (1,2)$ et $e^2 = (2,3)$. Pour la courbe des contrats, on procède en 2 étapes :

— Les fonctions étant régulières [8], pour tout prix donné, les optima (x^1, y^1) et (x^2, y^2) sont obtenus en égalisant $TMS^1(x^1, y^1) = TMS^2(x^2, y^2) = p_x/p_y$. Ici, cela donne $\frac{y^1}{2x^1} = \frac{3y^2}{x^2}$.

— D'un autre côté, l'apurement des marchés donne $x^1 + x^2 = 3$ et $y^1 + y^2 = 5$. En remplaçant $x^2 = 3 - x^1$ et $y^2 = 5 - y^1$ dans l'égalité des TMS on obtient $\frac{y^1}{2x^1} = \frac{3(5-y^1)}{5-x_1}$. Après quelques calculs, $y^1 = \frac{30x^1}{3+5x^1}$ qui est la courbe des contrats.

On peut vérifier que $(0,0)$ et $(3,5)$, allocation clairement Pareto-optimales (un agent possède tout), appartiennent bien à la courbe des contrats. On remarquera que l'on peut également exprimer la courbe des contrats (qui est la même) du point du vue du deuxième agent : $y^2 = \frac{5x^2}{18-5x^2}$. Il suffit pour cela de remplacer x^1 et y^1 dans l'égalités des TMS.

Pour le cœur, rappelons qu'il s'agit du sous-ensemble de la courbe des contrats qui améliore l'utilité de deux agents (faire un dessin). Pour l'obtenir, on calcule donc l'intersection entre les courbes d'indifférence initiales $\{u^1 = u^1(e^1)\}$ et $\{u^2 = u^2(e^2)\}$ et la courbe des contrats. La première intersection donne $\ln x^1 + 2\ln \frac{30x^1}{3+5x^1} = 2\ln 2$, et donc $x^1 \simeq 0.518$. Un calcul similaire, pour la seconde intersection, est laissé au lecteur.

4.1 Théorie du bien-être

Cette section porte sur deux résultats fondamentaux concernant la théorie du bien-être (*welfare theory*). Le premier théorème du bien-être affirme que l'équilibre concurrentiel est toujours efficient (i.e. Pareto-optimal). Le second, qui en est une sorte de réciproque, que toute allocation efficiente peut être obtenue comme équilibre d'une économie, lorsqu'une redistribution initiale des richesses est possible. Ces résultats ont peut-être été déjà vus sous l'angle de l'équilibre partiel, avec des consommateurs seulement, ou avec des consommateurs et des producteurs. Dans ce cours, nous allons les aborder dans une optique d'équilibre général. Nous commencerons par une économie composée uniquement de consommateurs (le cas d'une économie mêlant consommateurs et producteurs sera traité au Chapitre 5). Il est important de noter les hypothèses sur lesquelles reposent ces théorèmes, afin de comprendre quand et pourquoi ils ne s'appliquent pas ; on parle alors de défaillance du marché (sujet abordé au Chapitre 6). Le premier théorème repose sur 2 hypothèses :

— la complétude de l'économie

— les agents sont preneurs de prix

8. Rappel : une fonction $u : \mathbb{R}^L_+ \to \mathbb{R}$ strictement concave (et continue, croissante) atteint son maximum sur un budget $B(p)$ en un unique point x^* de sa frontière (i.e. l'ensemble $x \in \mathbb{R}^L_+$ tel que $\langle p, x\rangle = \langle p, e\rangle$). Soit ce point est dans un bord, et donc $x^{*i} = 0$ pour quelque $i = 1, \ldots, L$ ou $x^* \gg 0$, auquel cas $\nabla u(x^*)$ et p sont colinéaires. Il suffit donc, dans le cas d'une fonction u régulière, de résoudre l'équation $\nabla u(x) = \lambda p$ (ou les TMS), puis de vérifier si la solution est intérieure.

Complétude : il existe un marché pour tout, et toutes les informations importantes concernant les biens sont publiquement connues. On aura potentiellement une "défaillance du marché" dès lors qu'un bien ne peut pas s'acheter ou vendre librement, comme c'est le cas pour la pollution (externalités négative), pour la recherche (externalité positive), ou pour les biens publics (la sécurité sociale, l'éducation, l'armée). Un autre type de défaillance se produit lorsque les agents ont une information asymétrique sur les biens ; c'est le cas des compagnies d'assurances, par exemple. Dans tous ces cas là, les prix ne suffisent pas à eux seuls à réguler le marché.

Preneurs de prix : les agents sont si nombreux que leur consommation n'a pas d'influence sur le marché (sur les prix). Cela suppose aussi l'existence d'une grande quantité de biens identiques, ou du moins parfaits substituts. Là encore, on aura potentiellement une défaillance du marché dès lors qu'un agent, ou une firme, possède du "pouvoir de marché", comme c'est le cas dans un monopole ou, moins extrême, dans un oligopole.

Le second théorème nécessite, en plsu, d'une troisième hypothèse importante : la convexité.

Convexité : appétit pour la diversité. Cette hypothèse, qui se traduit par des propriétés mathématiques essentielles, est cruciale. Sans convexité (des préférences des consommateurs, des ensembles de production) le résultat ne sera plus valable.

4.1.1 Premier théorème du bien être

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\le i\le N}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité $(u^i)_i$ sont croissantes. Si $(p, \widetilde{z})$ est un équilibre concurrentiel, alors $\widetilde{z}$ est une allocation Pareto-optimale.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $\widetilde{z}$ soit Pareto-dominée par une allocation réalisable z. Dans ce cas, on a :

— $\sum_{i=1}^N z^i \le \sum_{i=1}^N e^i$
— $u^i(z^i) \ge u^i(\widetilde{z}^i)$ pour tout $1 \le i \le N$
— il existe j tel que $u^j(z^j) > u^j(\widetilde{z}^j)$.

Comme $(p, \widetilde{z})$ est un équilibre, pour tout $i = 1, \dots, N$, on a que $\widetilde{z}^i$ maximise la fonction $\zeta \mapsto u^i(\zeta)$ sous la contrainte budgétaire $\langle p, \zeta\rangle \le \langle p, e^i\rangle$. Donc

— $\langle p, z^i\rangle \ge \langle p, e^i\rangle$ pour tout $i = 1, \dots, N$
— $\langle p, z^j\rangle > \langle p, e^j\rangle$ pour le même j qu'auparavant

En effet, si $\langle p, z^i\rangle < \langle p, e^i\rangle$ pour un i, alors le consommateur i peut s'acheter z^i (qui est au moins aussi bien que $\widetilde{z}^i$) sans dépenser tout son budget. Avec ce qu'il lui reste $r^i := \langle p, e^i\rangle - \langle p, z^i\rangle > 0$ il peut s'acheter un petit $\varepsilon > 0$ de chaque bien (tant que $\langle p, (\varepsilon, \dots, \varepsilon)\rangle \le r^i$) de sorte que $z^i + (\varepsilon, \dots, \varepsilon) \in B(p)$. Mais u^i étant croissante, $u^i(z^i + (\varepsilon, \dots, \varepsilon)) > u^i(z^i) \ge u^i(\widetilde{z}^i)$, contredisant l'optimalité de $\widetilde{z}^i$. De même, l'optimalité de $\widetilde{z}^j$ implique que si $u^j(z^j) > u^j(\widetilde{z}^j)$ alors $\langle p, z^j\rangle > \langle p, e^j\rangle$.

En sommant ces inégalités on obtient $\langle p, \sum_{i=1}^N z^i \rangle > \langle p, \sum_{i=1}^N e^i \rangle$. Mais cela contredit le fait que z soit réalisable, puisque $p > 0$. En effet, il existe alors $\ell \in \{1, \ldots, L\}$ tel que $p_\ell > 0$ et $\sum_{i=1}^N z_\ell^i > \sum_{i=1}^N e_\ell^i$. Contradiction. $\square$

Commentaires sur le premier théorème du bien-être

— Il n'aborde pas la question de l'équité : une allocation Pareto-optimale peut être injuste ou inégale.

— Il semble faire appel à très peu d'hypothèses. Cependant, il n'a de sens que lorsqu'un équilibre concurrentiel existe. Autrement dit, pour l'appliquer il faut quand même être dans une situation concurrentielle : marchés complets, concurrence parfaite, agents preneurs de prix, information publique et parfaite.

— Il étend le résultat d'efficacité de l'équilibre vu l'an dernier pour un équilibre partiel (i.e. le cas d'un marché isolé, où le prix d'équilibre est déterminé par l'offre et la demande).

— Il donne l'impression que le marché est régi par une sorte de "main invisible" (cf. Adam Smith) qui conduit les agents, sans qu'ils aient besoin de se concerter, vers une allocation efficace.

4.1.2 Second théorème du bien-être

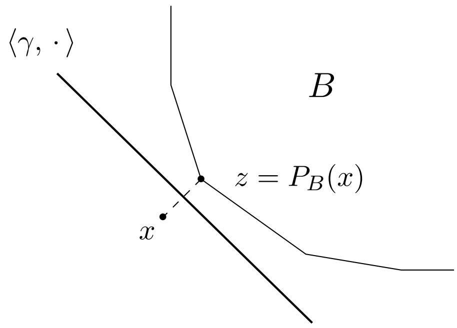
Théorème 4.2 (version 1)**.** *Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$ une économie où les utilités $(u^i)_i$ sont strictement croissantes et quasi-concaves. Soit $\widetilde{z}$ une allocation Pareto-optimale telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$ pour tout i. Alors $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre concurrentiel de $\mathcal{E}' = \{L, N, (\widetilde{z}^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$. Autrement dit, il existe p tel que $\widetilde{z}^i$ maximise $u^i(z^i)$ sous la contrainte $\langle p, z^i \rangle \le \langle p, \widetilde{z}^i \rangle$, pour tout $i = 1, \ldots, N$.*

Afin d'établir le second théorème du bien-être, on aura besoin du théorème de séparation.

Théorème 4.3 (de séparation)**.** *Soit $B \subseteq \mathbb{R}^N$ un ensemble convexe et $x \notin \mathrm{int}(B)$. Alors il existe un hyperplan $\gamma \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \neq 0$ séparant x et B, c'est–à–dire tel que $\langle \gamma, y \rangle \le \langle \gamma, x \rangle$, pour tout $y \in B$.*

Démonstration. La preuve dans le cas général est admise. Montrons le résultat lorsque x n'est pas dans $\bar{B}$ (l'adhérence de B). Alors $d(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|_2 > 0$. Cette fonction est continue et atteint son minimum dans $\bar{B}$, ce qui permet de définir $P_B(x)$, la projection orthogonal de x sur $\bar{B}$. On pose $P_B(x) := z$ pour $z \in \bar{B}$ tel que $\|x - z\|_2 \le \|x - y\|_2$ pour tout $y \in \bar{B}$. Par hypothèse, $\|x - z\|_2 > 0$ et il suffi de poser $\gamma = x - z \neq 0$. $\square$

Remarque 4.1. Dans le théorème de séparation, γ représente un hyperplan (ou, plus exactement, son vecteur orthogonal) séparant les deux convexes. La figure ci-dessous illustre le théorème dans $\mathbb{R}^2$, où la droite γ sépare x et B. On notera que la droite séparatrice n'est pas nécessairement unique.



Démonstration. (*du second théorème du bien-être*) ($*$)

- Soit $\widetilde{z} \gg 0$ une allocation Pareto-optimale.
- On pose $P^i := \{z^i \in \mathbb{R}^L_+ \,|\, u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i)\}$, pour tout $i = 1, \ldots, N$
- La quasi-concavité de u^i implique que P^i est convexe.
- Rappel : si A et B sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, alors $A + B := \{a + b \,|\, a \in A,\, b \in B\}$. On remarquera que si A et B sont convexes, alors $A + B$ l'est aussi (exercice facile).
- On pose $P := \sum_{i=1}^N P^i = \{w \in \mathbb{R}^L_+ \,|\, w = \sum_{i=1}^N z^i,$ avec $z^i \in P^i,\ \forall i = 1, \ldots, N\}$, qui est donc également convexe.
- Soit $\zeta = \sum_{i=1}^N \widetilde{z}^i$. Comme $\widetilde{z}$ est Pareto-optimale, on a $\zeta \notin \mathrm{int} P$
- Par le théorème de séparation, il existe $p \in \mathbb{R}^L$, $p \neq 0$, tel que $\langle p, \zeta \rangle \leq \langle p, z \rangle$, pour tout $z \in P$
- On vérifie ensuite que $p > 0$. En effet, cela découle du fait que l'ensemble P est "monotone", i.e. $w \in P \;\Rightarrow\; w' \in P$ pour tout $w' \geq w$.
- On vérifie enfin la condition d'optimalité de chaque consommateur : $u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i) \Rightarrow \langle p, z^i \rangle > \langle p, \widetilde{z}^i \rangle$, pour tout $i = 1, \ldots, N$. Il s'ensuit que z est une allocation d'équilibre.

$\square$

Commentaires sur le second théorème du bien-être

- Il permet d'aborder (voire, de résoudre) le problème de l'équité. Si une allocation Pareto-optimale $\widetilde{z}$ est considérée comme étant "plus juste", d'après certains critères, que les allocations obtenues à l'équilibre, une autorité centrale (i.e. un gouvernement) peut imposer une redistribution des dotations et un prix p tel que $(p, \widetilde{z})$ soit un équilibre.
- La convexité est une hypothèse cruciale : le résultat n'est pas nécessairement vrai dans une économie où les préférences ne sont pas convexes (voir exemple graphique).
- Il montre que les deux rôles du prix (d'un côté, il indique la rareté relative des biens, de l'autre, il donne lieu à une richesse) peuvent être séparés : en redistribuant la richesse on ne touche pas à la rareté relative des biens.
- Pour faire de $\widetilde{z}$ une allocation d'équilibre, on a modifié les dotations initiales, passant des dotations initiales $(e^i)_i$ à des nouvelle dotations initiale $(\widetilde{z}^i)_i$. Ce transfert de biens peut être lourd à réaliser. Une nouvelle version du théorème (voir ci-dessous) montre qu'il suffira d'effectuer des *transferts forfaitaires de richesse* afin de d'obtenir *décentralisation* de $\widetilde{z}$.

Pour énoncer précisément le résultat évoqué dans le dernier commentaire, on introduit une nouvelle notion d'équilibre, plus générale.

Définition 4.6. On dit que (p, z) est un *équilibre avec transferts* de $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ si :

— il existe des transferts $t^1, \ldots, t^N \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^N t^i = 0$.

— z^i est solution de $\max_{\zeta\in\mathbb{R}_+^L} u^i(\zeta)$ sous $\langle p, \zeta\rangle \leq \langle p, e^i\rangle + t^i$, pour tout $i = 1, \ldots, N$

— $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$

La quantité t^i est le transfert forfaitaire pour l'agent i, qui peut être positif ou négatif. Cependant, il faut que $\langle p, e^i\rangle + t^i \geq 0$ pour tout i pour que le problème du consommateur admette bien une solution.

N.B. Tout équilibre concurrentiel est un équilibre avec transferts (il suffit de poser $t^1 = \cdots = t^N = 0$). Cette notion est donc plus générale que la précédente.

Théorème 4.4 (version 2). *Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie où les fonctions d'utilité u^i sont strictement croissantes, quasi-concaves. Soit $\widetilde{z}$ une allocation Pareto-optimale telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$ pour tout i. Alors $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre avec transferts de $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre $t^i = \langle p, \widetilde{z}^i\rangle - \langle p, e^i\rangle$ pour tout $i = 1, \ldots, N$, où p est le prix qu'on a construit dans la démonstration précédente. □

4.2 Caractérisation des optima de Pareto et optimum social

Rappelons qu'une *allocation* $z = (z^1, \ldots, z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ de $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ est *réalisable* si

$$\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i$$

On considère l'ensemble des *utilités réalisables* :

$$V = \{(v^1, \ldots, v^N) \in \mathbb{R}^N \mid \exists z \text{ allocation réalisable, } v^i \leq u^i(z^i) \text{ pour tout } i = 1, \ldots, N\}$$

Cet ensemble décrit les vecteurs d'utilité que les agents peuvent atteindre en se redistribuant les biens dont ils disposent. On remarquera que V est *monotone* : $y \leq v$ et $v \in V \Rightarrow y \in V$. La *frontière de Pareto* de V est l'ensemble suivant :

$$PV = \{(v^1, \ldots, v^N) \in V \mid \nexists (w^1, \ldots, w^N) \in V \text{ tel que } \forall i,\ w^i \geq v^i \text{ et } \exists \text{ tel que } w^j > v^j\}$$

Question 12. Montrer qu'une allocation $z = (z^1, \ldots, z^N) \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ réalisable est Pareto-optimale si et seulement si $(u^1(z^1), \ldots, u^N(z^N)) \in PV$.

Question 13. Montrer que si $z \in (\mathbb{R}_+^L)^N$ est une allocation d'équilibre alors $u^i(z^i) \geq u^i(e^i)$, $\forall i$.

N.B. D'après l'Exercice 12, l'ensemble des allocations Pareto-optimales (la courbe des contrats), qui est un ensemble dans $(\mathbb{R}_+^L)^N$, se plonge dans l'ensemble $PV \subset \mathbb{R}^N$ des utilités Pareto-optimales.

N.B. D'après l'Exercice 13, le marché (quand l'équilibre existe) est bénéfique pour tous les agents !

$*$ **Le jeu de marché.** Pour chaque sous-ensemble $S \subset N$ d'agents, on définit l'ensemble des utilités réalisables par la coalition S (i.e. si les agents dans S forment un marché isolé du reste) :

$$V(S) = \left\{ v \in \mathbb{R}^N \,|\, \exists z \in \mathbb{R}_+^S, \text{ tel que } \sum\nolimits_{i \in S} z^i \leq \sum\nolimits_{i \in S} e^i, \text{ et } v^i \leq u^i(z^i) \text{ pour tout } i = 1, \dots, S \right\}$$

Formant une coalition, les agents dans S disposent des biens $\sum_{i \in S} e^i$, qu'ils peuvent se répartir comme ils veulent. Ils atteignent ainsi les utilités dans $V(S)$. On remarquera que $V(S) \in \mathbb{R}^N$ pour tout $S \subset N$, et que cela est indépendant du nombre de biens L que l'on considère. On remarquera aussi que l'ensemble V défini plus haut, correspond précisément à $V(N)$, les utilités réalisables par une coalition de tous les agents. Les ensembles $\{V(S),\ S \subseteq N\}$, définissent un *jeu de marché* (cf. la théorie des jeux [9]). C'est précisément de la théorie des jeux que vient le terme "cœur", que nous avons défini dans le cadre d'une boîte d'Edgeworth comme "l'ensemble des allocations Pareto optimales, bénéfiques aux deux joueurs". Donnons maintenant une définition générale.

Définition 4.7. Le *cœur* de l'économie $\mathcal{E} = \{L, N, (u^i, e^i)_i\}$ est l'ensemble $V(N) \backslash \bigcup_{S \subseteq N} \mathrm{int} V(S)$.

Cet ensemble correspond aux vecteurs d'utilité $v \in \mathbb{R}^N$ qui n'admettent pas une "déviation profitable" de la part d'aucune coalition. En effet si v est dans le cœur, il n'existe pas un sous-ensemble $S \subset N$ qui pourrait s'assurer, à lui seul, des utilités strictement supérieures pour tous ses membres.

Question 14. Déterminer le cœur pour un jeu de marché avec 2 agents, à l'aide d'un dessin.

Problème du planificateur social

Une autorité centrale (un gouvernement, par exemple) veut maximiser l'utilité globale de l'économie. Pour ce faire, on introduit $\gamma^i \geq 0$, le poids de l'individu i, et on considère le problème d'*optimisation sociale* suivant

$$\begin{cases} \max_{z \geq 0} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) \\ s.c. \ \sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i \end{cases}$$

Quitte à normaliser, on peut supposer sans perte de généralité que la somme des poids est égale à 1 de sorte que γ^i représente le poids relatif de l'individu i au sein de l'économie. Un planificateur *équitable* considère les poids uniformes $\gamma^i = \frac{1}{N}$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

N.B. Le problème (OS_γ) peut aussi se formuler aussi de la manière suivante :

$$(OS_\gamma) \qquad \max_{v \in V} \sum_{i=1}^N \gamma^i v^i$$

L'avantage de cette formulation est de d'avoir affaire à un problème d'optimisation linéaire sur un ensemble plus régulier. En particulier, on peut le résoudre graphiquement en faisant glisser un hyperplan

9. Il s'agit, plus précisément, d'un jeu coopératif à utilité non-transférable.

(une droite, pour $\mathbb{R}^2$) jusqu'à être tangent à l'ensemble V. **Voir dessin**.

N.B. Le problème du planificateur sociale admet une solution (i.e. le maximum est atteint) lorsque les $(u^i)_i$ sont continues, car les contraintes budgétaires définissent un ensemble compact (fermé et borné). Il en est de même pour V car, bien que non borné, ces deux problèmes admettent les mêmes solutions.

Proposition 4.1. *Soient $\gamma^1, \dots, \gamma^N$ des poids strictement positifs et soit $v_* = (v_*^1, \dots, v_*^N)$ une solution de (OS_γ). Alors $v_* \in PV$.*

Démonstration. Par l'absurde, supposons $v_* \notin PV$. Alors il existe $(w^1, \dots, w^N) \in V$ tel que $w^i \geq v_*^i$ pour tout i, et $w^j > v_*^j$ pour un j. Mais $\gamma^i > 0$, pour tout i. Donc $\sum_i \gamma^i w^i > \sum_i \gamma^i v_*^i$. Contradiction. $\square$

Le résultat suivant établit la réciproque, mais attention : sous l'hypothèse de convexité.

Proposition 4.2. *Si V est convexe, alors pour tout $\widetilde{v} \in PV$, il existe des poids $\gamma^1, \dots, \gamma^N \geq 0$, non tous nuls, tels que $\widetilde{v}$ soit solution de (OS_γ)*

Démonstration. Soit $\widetilde{v} \in PV$ tel que $\widetilde{v} \notin \mathrm{int}V$. Par le théorème de séparation, il existe $\gamma \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \neq 0$ tel que $\sum_{i=1}^N \gamma^i \widetilde{v}^i \geq \sum_{i=1}^N \gamma^i v^i$ pour tout $v \in V$. Il reste à montrer que $\gamma^i \geq 0$, pour tout i. La monotonie de V implique $\gamma > 0$. En effet, si $\gamma^j < 0$ pour un certain j, alors en prenant $v_n \in V$ tel que $v_n^j \to -\infty$ (ce qui est possible par monotonie) on aurait $\sum_{i=1}^N \gamma^i v_n^i \to +\infty$, ce qui contredit $\sum_{i=1}^N \gamma^i \widetilde{v}^i < +\infty$. $\square$

Remarque 4.2. Les propriétés ci-dessus s'appliquent même si l'ensemble des utilités réalisables ne provient pas d'une économie d'échange, mais d'un problème de décision collective quelconque.

Question 15. Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ un économie d'échange, où les $(u^i)_i$ sont concaves. Montrer que dans ce cas V est convexe.

On a donc obtenu les résultats suivants :

— Les solutions à (OS_γ) sont Pareto-optimales dès lors que $\gamma^1, \dots, \gamma^N > 0$.

— Réciproquement, si les fonction d'utilité $(u^i)_i$ sont concaves, alors toute allocation Pareto-optimale est solution d'un problème (OS_γ) pour certains poids $\gamma^1, \dots, \gamma^N \geq 0$ non tous nuls.

Cas à deux agents. Dans le cadre d'une boîte d'Edgeworth, l'ensemble des allocation Pareto-optimales est une courbe reliant les coins "sud-ouest" et "nord-est" de la boîte, correspondant aux allocations $((0,0),(e_x,e_y))$ (le premier agent n'a rien) et $((e_x,e_y),(0,0))$ (le premier agent a tout). Pour tout allocation $z \in PO$, il existe donc un poids $\gamma^1, \gamma^2 \geq 0$ tel que z est la solution du problème

(OS_γ). En normalisant (i.e. on pose $\gamma^1 + \gamma^2 = 1$ et $\alpha := \gamma^1$) cela revient à dire que z est la solution au problème de maximisation, sous contrainte, de la fonction

$$\alpha u^1(z^1) + (1-\alpha)u^2(z^2)$$

En ce sens, chaque point sur la courbe des contrats correspond à un certains partage $(\alpha, 1-\alpha)$. Bien entendu, $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ correspondent aux deux extrémités de la courbe. **Voir dessin**.

4.3 Utilités différentiables et interprétation des poids

Si les fonctions d'utilité u^i sont différentiables, on considère les CPO (conditions du premier ordre) associées au problème d'optimisation sociale (OS_γ) en $z \gg 0$. Supposons que $\gamma^i > 0$ pour tout i, de sorte que z est Pareto-optimale. Le Lagrangien se définit comme

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \gamma^i u^i(z^i) - \sum_{\ell=1}^{L} \lambda_\ell \left(\sum_{i=1}^{N} z_\ell^i - \sum_{i=1}^{N} e_\ell^i \right)$$

et les CPO s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_\ell^i} = \gamma^i \frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z_\ell^i} - \lambda_\ell = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, N \text{ et } \forall \ell = 1, \ldots, L$$

On a donc $\lambda_\ell = \gamma^i \frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z_\ell^i}$, pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $\ell = 1, \ldots, L$ et donc

$$TMS_{k\to\ell}^i(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z_\ell^i}}{\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z_k^i}} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k} \ \forall i = 1, \ldots, N, \ \forall k, \ell = 1, \ldots, L$$

Donc, pour tout couple de consommateurs $i, j \in \{1, \ldots, N\}$ et tout couple de biens $k, \ell \in \{1, \ldots, L\}$:

$$TMS_{k\to\ell}^i(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z_\ell^i}}{\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z_k^i}} = \frac{\frac{\partial u^j(z^j)}{\partial z_\ell^j}}{\frac{\partial u^j(z^j)}{\partial z_k^j}} = TMS_{k\to\ell}^j(z^j)$$

En une solution $z \gg 0$, les TMS des agents (relatifs à une paire de biens quelconques) sont égaux entre eux. On se rappelle que cette condition est satisfaite en une allocation d'équilibre concurrentiel z. En effet, $TMS_{k\to\ell}^i(z^i) = \frac{p_\ell}{p_k}$, où p est le prix d'équilibre. Par le premier théorème du bien-être, on s'attend à cette propriété. Elle indique aussi comment calculer le prix qui permet de décentraliser (second théorème du bien-être) une allocation Pareto-optimale en un équilibre concurrentiel : $\frac{p_\ell}{p_k} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k}$

Question 16. Soit $e_\ell = \sum_{i=1}^N e_\ell^i$ la dotation totale en bien ℓ. Soit $\widetilde{z} = \widetilde{z}(\gamma, e) \gg 0$ l'allocation Pareto-optimale correspondant aux poids $\gamma^1, \ldots, \gamma^N$. Montrer que λ_ℓ est l'utilité sociale marginale de e_ℓ, c.à.d. $\lambda_\ell = \frac{d}{d e_\ell}[\sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(\widetilde{z}^i)]$.

Interprétation des poids γ^i. Donnons maintenant une interprétation économique aux poids $(\gamma^i)_i$ correspondant à une allocation Pareto optimale : γ^i est l'inverse de l'utilité marginale du revenu de l'agent i. En effet, soit $z \gg 0$ une solution au problème (OS_γ) avec poids $(\gamma^i)_i$ strictement positifs. D'après la Proposition 4.1, z est Pareto-optimale et, d'après le second théorème du bien-être, il existe un prix p tel que (p, z) est un équilibre. Les CPO donnent alors pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $k, \ell \in \{1, \ldots, L\}$:

$$TMS^i_{k\to\ell}(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z^i_\ell}}{\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z^i_k}} = \frac{p_\ell}{p_k}$$

Mais on vient de voir que pour tout $i = 1, \ldots, N$ et tout $\ell = 1, \ldots, L$ on a :

$$\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z^i_\ell} = \frac{\lambda_\ell}{\gamma^i} \qquad (*)$$

On peut prendre $p = \lambda$ comme prix associé à l'équilibre z. Soit μ^i le multiplicateur de la contrainte budgétaire de l'agent i, et qui correspond, comme nous l'avons vu plus haut, à l'utilité marginale du revenu de l'agent i :

$$\frac{\partial u^i(z^i)}{\partial z^i_\ell} = \mu^i p_\ell = \mu^i \lambda_\ell \qquad (**)$$

En combinant $(*)$ et $(**)$ on obtient bien $\gamma^i = \frac{1}{\mu^i}$.

4.4 $*$ Marchandage de Nash

Cette section est hors programme

Dans le cas de deux agents ayant des fonctions d'utilités concaves et continues, l'ensemble des utilités réalisables V est un convexe, fermé de $\mathbb{R}^2$. Dans l'économie $\mathcal{E} = (u^i, e^i)_{i=1,2}$, on pose $d^i := u^i(e^i)$ l'utilité initiale de l'agent $i = 1, 2$. On appelle le point $d \in V$ le *point de désaccord*, correspondant aux utilités des agents “par défaut”, c'est–à–dire, lorsqu'ils décident de ne pas prendre part au marché.

Le *problème de Marchandage de Nash* consiste à déterminer, pour chaque couple (V, d) possible, un point $v = (v^1, v^2) \in V$ qui représente le résultat d'un marchandage (dont on ignore les modalités) entres les deux agents. Ce point v est la solution du problème (V, d), et pour cette raison là on le note $v = \Phi(V, d)$. Comment définir cette fonction Φ pour que le résultat doit “juste” ? Pour ce faire, Nash introduit quelques axiomes ; ce sont des propriétés que la fonction Φ *doit* vérifier.

Invariance par transformation affine positive. Cet axiome reflète le fait que rien ne devrait changer lorsqu'on change de devise (absence d'illusion monétaire) ni lorsqu'un déplace les utilités par une constante (indépendance du niveau d'utilité par ailleurs). Il est donc naturel de poser cet axiome. Précisément, soient $v = \Phi(V, d)$ et $w = \Phi(W, h)$ où W et h sont, respectivement, l'ensemble des utilités réalisables et le point de désaccord pour une économie $\mathcal{E}' = (a^i u^i + b^i, e^i)_{i=1,2}$, obtenue en appliquant une transformation affine strictement croissante [10] aux utilités de $\mathcal{E}$. Alors, on a la relation suivante : $w^i = a^i v^i + b^i$ pour $i = 1, 2$. Autrement dit, les solutions sont aussi transformées de la même manière.

N.B. D'après l'axiome précédent, on pourra toujours se ramener au cas où $d = (0, 0)$, après une translation des utilités. En effet, iil suffit de remplacer V par l'ensemble $V - d$. Cette remarque sera utile pour énoncer l'axiome suivant, tout aussi naturel.

Symétrie. Cet axiome reflète le fait que si les deux agents ont le même “pouvoir de marchandage”, alors la solution doit être équitable. Le pouvoir de marchandage est mesuré par la forme de V, mais tient compte aussi du point de désaccord d. Précisément, si l'ensemble $V - d$ est symétrique par rapport à la droite $x = y$, alors la solution $v = \Phi(V - d, 0)$ doit se trouver sur la diagonale, i.e. $v^1 = v^2$.

Indépendance des alternatives non pertinentes. Ce dernier axiome rappelle l'axiome faible des préférences révélées (WA). Il s'énonce comme suit : si lorsque l'ensemble des utilités réalisable est V, la solution $v = \Phi(V, d)$ appartient à certain sous-ensemble $W \subset V$, alors cela ne devrait rien changer si on restreint les agents à marchander dans W. Les alternatives $V \backslash W$ se sont, en quelque sorte, révélées *non pertinentes*, d'où le nom de cet axiome.

Le résultat suivant, très célébré à l'époque, établit l'unicité d'une solution vérifiant ces trois axiomes. Autrement dit, si on accepte que ces axiomes sont naturel (ou, du moins, souhaitables) alors il y a une unique façon de résoudre le problème de marchandage.

Théorème 4.5 (Nash 1951)**.** *Il existe une unique fonction Φ satisfaisant les 3 axiomes ci-dessus. De plus, pour chaque (V, d), la solution $v = \Phi(V, d) \in \mathbb{R}^2$ maximise le problème suivant*

$$\max_{(w^1, w^2) \in V} (w^1 - d^1)(w^2 - d^2)$$

L'allocation $z \in (\mathbb{R}^L_+)^2$ telle que $u^i(z^i) = v^i$ pour $i = 1, 2$ est l'allocation de Nash.

Approche descriptive versus approche normative. L'équilibre concurrentiel est une approche *descriptive* : on donne des ”conditions nécessaires” que doit satisfaire un équilibre. En effet, si au prix p, il existe un agent pour qui $u^i(z^i)$ n'est pas maximal, (p, z) ne peut pas être un équilibre puisque l'agent i ne s'en contenterait de z^i. Il serait amené à dévier, c'est–à–dire à demander un autre panier $\widetilde{z}^i$. La situation ne serait donc pas stable. De même, lorsque les marchés ne sont pas apurés, il existe un agent qui pourrait améliorer son utilité. En revanche, l'approche de Nash est *normative* : il propose une solution qui est “souhaitable”. La symétrie, par exemple, est tout à fait souhaitable, mais pas nécessaire. Cette dichotomie entre les deux approches est omniprésente en économie : les économistes (académiques) sont généralement descriptifs, alors que les décideurs politiques (*policy makers*) sont

10. Autrement dit, avec $a^1 > 0$ et $a^2 > 0$.

normatifs.

Conclusion : Pour $N = 2$, la courbe des contrats reflète toutes les allocations Pareto-optimales. Parmi elles, celles qui améliorent l'utilité des deux agents constituent le cœur. Dans celui-ci, se trouvent les équilibres concurrentiels, lorsqu'il en existe, de même que l'allocation de Nash.

Question : Si vous aviez à "négocier" avec un autre agent au sujet de la répartition de biens dont chacun possède une dotation initiale, et qu'il n'y a pas de monnaie, comment le feriez-vous ?

4.5 Exercices

On considère, dans tous les exercices ci-dessous, une économie d'échange à 2 agents (1 et 2) et 2 biens (x et y). Les dotations initiales des agents sont notées $e^i = (e^i_x, e^i_y) \in \mathbb{R}^2_+$ et leurs fonctions d'utilité $u^i : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $i = 1, 2$. On note x^i la consommation de bien 1 de l'agent i et y^i, la consommation de bien 2 de l'agent i ($i = 1, 2$). Une allocation est désignée par $z = [(x^1, y^1), (x^2, y^2)]$.

Exercice 4.1 (*Fonction d'utilité Cobb-Douglas*)**.** Considérons les fonctions d'utilité, les dotations initiales et une allocation suivants :

$$u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}, \quad u^2(x, y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}, \quad e^1 = (1, 1), \quad e^2 = (1, 2), \quad \text{et} \quad z = [(1, \frac{12}{5}), (1, \frac{3}{5})]$$

1. Déterminer la courbe des contrats et la représenter dans une boîte d'Edgeworth.
2. Vérifier, si vous disposez des données nécessaires, que les équilibres concurrentiels éventuels sont Pareto-optimaux.
3. Le cas échéant, montrer que l'allocation z correspond à un équilibre concurrentiel moyennant un transfert approprié de richesse. Déterminer ce transfert.

Exercice 4.2 (*Fonction d'utilité linéaire*)**.** Soient $e^1 = (0, 3)$, $e^2 = (2, 1)$ et $u^1(x^1, y^1) = x^1 + 5y^1$ et $u^2(x^2, y^2) = 5x^2 + y^2$, dotations et utilités.
Déterminez la courbe des contrats et représentez-la dans une boîte d'Edgeworth, dans laquelle vous indiquerez aussi les dotations initiales.

Exercice 4.3 (*Décentralisation*)**.** Soient $e^1 = (1, 1)$ et $e^2 = (1, 1)$ et $u^1(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ et $u^2(a, b) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$, dotations et utilités.

1. Déterminer la courbe des contrats et la représenter dans la boîte d'Edgeworth.
2. Pour des raisons d'équité, l'Etat souhaiterait privilégier l'optimum de Pareto qui garantit une quantité égale de bien x aux deux consommateurs. De quel optimum s'agit-il ?
3. Pour décentraliser cet optimum, l'Etat a la possibilité d'effectuer un transfert dans les dotations initiales en bien x. Déterminer ce transfert et l'équilibre concurrentiel correspondant.

5 Economies avec production

Nous considérons désormais une économie avec production :

$$\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$$

Celle-ci consiste en :

— L biens, $\ell = 1, \ldots, L$

— N agents (ou consommateurs) $i = 1, \ldots, N$

— Chaque agent i est caractérisé par sa dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}^L_+$ et sa fonction d'utilité u^i

— M entreprises $j = 1, \ldots, M$

— Chaque entreprise j est caractérisée par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^L$

— une part $\theta^{ij} \geq 0$ de l'entreprise j appartient à l'agent i avec $\sum_{i=1}^N \theta^{ij} = 1$, $\forall j = 1, \ldots, M$

5.1 Le producteur

Le producteur et le consommateur jouent des rôles symétriques dans le marché : le premier transforme des biens (inputs) en produits (outputs), le second "transforme" ses bien (dotation initiale) en achats (panier). Tous les deux maximisent quelque chose (le producteur son bénéfice, le consommateur son utilité) sous des contraintes (possibilités de production pour l'un, contrainte budgétaire pour l'autre). Là où on parle de demande pour le consommateur on parle d'offre pour le producteur : offre et demande définissent les deux côtés du marché.

Commençons par considérer un producteur typique (on omet donc l'indice j) caractérisé par son *ensemble de production* $Q \subseteq \mathbb{R}^L$. Celui-ci décrit la technologie de l'entreprise : celle qui permet de transformer les dotations initiales des agents (inputs) en produits de consommation (outputs).

NB. Les inputs sont comptés négativement, les outputs positivement.

Exemple 5.1. . Si $L = 4$, $(-1, 1, 0, -2.5) \in Q$ signifie qu'on peut produire 1 unité de bien 2 à partir d'1 unité de bien 1 et de 2.5 unité de bien 4, le bien 3 n'est pas utlisé.

Les ensemble de production ne sont pas des ensembles quelconques. Dans le cas d'une production à un seul output, on pourra décrire Q à l'aide d'une *fonction de production* g on posant :

$$Q = \{(-x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}^{L-1}_+,\; y \in \mathbb{R}_+, y \leq g(x)\}$$

Voici quelques propriétés usuelles pour l'ensemble Q (**voir dessins**)

- $Q \neq \emptyset$: il est possible de produire quelque chose
- $0 \in Q$: il est possible de ne rien produire
- $Q \cap \mathbb{R}^L_+ \subseteq \{0\}$: *no free lunch* (il n'est pas possible de produire sans input)
- $Q - \mathbb{R}^L_+ \subseteq Q$: élimination libre (Q est monotone)

- Q est fermé (hypothèse purement technique)
- Q est convexe
- Q est à rendements d'échelle :
  — décroissants si pour tout $q \in Q$ et $0 \leq \alpha \leq 1$, on a $\alpha q \in Q$
  — croissants si pour tout $q \in Q$ et $\alpha \geq 1$, on a $\alpha q \in Q$
  — constants si pour tout $q \in Q$ et $\alpha \geq 0$, on a $\alpha q \in Q$

Proposition 5.1.

1. *Si $0 \in Q$ et Q est convexe, alors Q est à rendements décroissants.*
2. *Si Q est décrit par une fonction de production g, alors :*
   (a) *Q est convexe $\Leftrightarrow$ g est concave.*
   (b) *Q est à rendements décroissants $\Leftrightarrow$ $g(\lambda x) \leq \lambda g(x)$, pour tout $\lambda \geq 1$*

Démonstration. Exercice. □

Exemple 5.2 (Cobb-Douglas et rendements d'échelle)**.** Soit $g(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$ une fonction de production décrivant un ensemble de production $Q \subset \mathbb{R}^3$, avec $\alpha, \beta \geq 0$. On remarquer que pour $\lambda \geq 0$, $g(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^{\alpha+\beta} g(x_1, x_2)$. Ainsi, les rendements d'échelle de Q sont constants si $\alpha+\beta = 1$, croissants si $\alpha + \beta > 1$ et décroissants si $\alpha + \beta < 1$.

On introduit l'*efficacité*, analogue de l'optimalité de Pareto pour le producteur. Un vecteur de production $q \in Q$ est efficace s'il n'existe pas un autre vecteur de production réalisable qui génère autant d'output en utilisant moins d'inputs avec, en plus, un output qui est produit strictement plus, ou un input qui est utilisé strictement moins. Formellement, on a la définition suivante.

Définition 5.3. Le vecteur de production $q \in Q$ est *efficace* si $\nexists q' \in Q$ tel que $q' \geq q$ et $q' \neq q$.

Remarque 5.1. Les plans efficaces sont dans la frontière de Q. Si Q est décrit par une fonction de production g, les plans de production efficaces sont donc dans $\{(x, g(x)), x \in \mathbb{R}_+^{L-1}\}$.

5.2 Optimum du producteur

Soit $p = (p_\ell)_{1 \leq \ell \leq L} \in \mathbb{R}_+^L$ un vecteur de prix. Le producteur, comme le consommateur, est "preneur de prix" (hypothèse de concurrence parfaite). Le plan $q \in Q$ procure au producteur un profit

$$\langle p, q \rangle$$

On remarquera que dans le plan de production q certaines coordonnées, correspondant aux inputs, sont négatives. En écrivant $q = (-x, y)$, où $x \in \mathbb{R}_+^K$ sont des inputs et $y \in \mathbb{R}_+^{L-K}$ les outputs, et en posant $p = (p_x, p_y)$, on peut écrire les bénéfices comme les gains moins les coûts, i.e. $\langle p, q \rangle = \langle p_y, y \rangle - \langle p_x, x \rangle$ (noter que les produits scalaires dans cette égalité ne sont pas dans le même espace : le premier est dans $\mathbb{R}^L$, le second dans $\mathbb{R}^{L-K}$ et le troisième dans $\mathbb{R}^K$).

Problème d'optimisation du producteur. Le but du producteur est de maximiser son profit sous ses contraintes technologiques :

$$\pi(p) := \max_{q \in Q} \langle p, q \rangle$$

Justification. On suppose que les consommateurs $1, \ldots, N$ sont propriétaires de l'entreprise. Soit $\theta^i \geq 0$ la part du consommateur i, avec $\sum_{i=1}^N \theta^i = 1$. Le consommateur reçoit la part $\theta^i \langle p, q \rangle$ du profit de l'entreprise, qui contribue à son revenu. Comme les consommateurs maximisent leur utilité sous la contrainte de ne pas dépasser leur revenu, ils ont intérêt à avoir le revenu le plus élevé possible et sont donc unanimes pour que l'entreprise maximise son profit.

Définition 5.4. Pour chaque p, on note $O(p)$ l'ensemble des solutions du problème d'optimisation du producteur au prix p fixé. L'application $p \mapsto O(p)$ est la *correspondance d'offre*. Lorsque la solution est unique pour tout p, on parlera de *fonction d'offre* et on l'écrit $o(p)$. (On utilise parfois la notation $q^*(p)$ pour se référer à la quantité offerte au prix p).

N.B. Par définition $O(p) = \{q \in Q \mid \langle p, q \rangle \geq \langle p, q' \rangle, \ \forall q' \in Q\}$. Donc pour tout $q \in O(p)$ et $q' \in Q$ on a

$$\pi(p) = \langle p, q \rangle \geq \langle p, q' \rangle$$

N.B. Un vecteur dans $O(p)$ est un mélange d'inputs et outputs. Les premiers sont demandés, alors que les seconds sont produits. Ainsi, à proprement parler, $O(p)$ mélange demande (pour certains biens, les inputs) et offre (pour les outputs). On a cependant préféré de parler simplement d'offre, pour faire le parallèle avec les correspondance de demande vues au Chapitre 2.

Quelques commentaires

- Le problème d'optimisation du producteur $\max_{q \in Q} \langle p, q \rangle$ n'a pas nécessairement de solution car Q n'est pas borné.
- Si les rendements sont croissants, le problème n'a pas de solution. L'existence d'une solution n'est pas non plus assurée lorsque les rendements sont décroissants.
- Si Q est à rendements constants, le profit maximal, s'il existe, est nécessairement nul (exercice).

Le résultat suivant montre l'importance de la convexité dans la définition d'une fonction d'offre. Le problème de l'existence d'une solution est laissé pour plus tard.

Proposition 5.2. *Supposons que $O(p)$ est non-vide. Alors*

(i) Q convexe $\Rightarrow$ $O(p)$ convexe

(ii) Q strictement convexe[11] $\Rightarrow$ *$O(p)$ contient un unique élément, noté $o(p)$.*

Démonstration. Exercice. □

11. C'est–à–dire que pour tout $q, q' \in Q$ et $0 < \alpha < 1$ on a $\alpha q + (1 - \alpha) q' \in \operatorname{int} Q$.

La proposition suivante établit quelques propriétés fondamentales de la correspondance d'offre (comparer avec la Proposition 2.2, analogue pour la correspondance de la demande). L'efficacité de la production correspond à la loi de Walras pour la demande, exprimant le fait que toutes les ressources sont utilisées à l'optimum. La grande nouveauté est *la loi de l'offre* qui ne pose aucun problème contrairement à la loi de la demande (voir Section 2.7).

Proposition 5.3 (Propriétés de l'offre)**.** *Toute correspondance d'offre $O : \mathbb{R}^L_{++} \to \mathbb{R}^L$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Absence d'illusion monétaire. *$O(\alpha p) = O(p)$ pour tout $\alpha > 0$ et tout $p \gg 0$*

(ii) Efficacité de la production. *Pour tout $p \gg 0$ et tout $q \in O(p)$, le plan q est efficace.*

(iii) Loi de l'offre. *$\langle p - p', q - q' \rangle \geq 0$, pour tout $p, p' \gg 0$ et $q \in O(p)$ et $q' \in O(p')$.*
En particulier, quand le prix d'un bien augmente, l'offre (nette) pour ce bien augmente aussi.

Démonstration. (i) Exercice. (ii) Voir Proposition 5.4. (iii) $\langle p, q \rangle \geq \langle p, q' \rangle$ car q est optimal en p. De même, $\langle p', q \rangle \leq \langle p', q' \rangle$, ce qui équivaut à $-\langle p', q \rangle \geq -\langle p', q' \rangle$. Il suffit alors de sommer. Le cas particulier est obtenu en considérant p' et p qui différant seulement en la ℓ-ème coordonnée. Dans ce cas, on a $\langle p - p', q - q' \rangle = (p_\ell - p'_\ell)(q_\ell - q'_\ell) \geq 0$. □

NB. On peut distinguer l'effet de la loi de l'offre sur les inputs et sur les outputs : lorsque le bien ℓ est un input, l'augmentation de p_ℓ provoquera une diminution de l'utilisation de ℓ dans la production ($0 \geq q'_\ell \geq q_\ell$). Lorsque ℓ est un output, l'augmentation de p_ℓ provoquera une augmentation de la production de ℓ (dans ce cas $q'_\ell \geq q_\ell \geq 0$).

Question 17. Illustrer la loi de l'offre sur un dessin, dans le cas d'une production avec 1 input et 1 output, lorsque Q est un ensemble convexe.

Finissons cette section avec un résultat élémentaire mais important, qui peut être interprété comme étant une version du premier théorème du bien-être (pour un seul agent producteur).

Proposition 5.4. *Si $q \in Q$ maximise le profit pour un certain prix $p_0 \gg 0$, alors q est efficace.*

Démonstration. Par l'absurde, si ce n'était pas le cas, il existerait $q' \in Q$ tel que $q' \neq q$ et $q' \geq q$. Mais alors $\langle p_0, q' \rangle > \langle p_0, q \rangle$, une contradiction car q maximise $\langle p_0, q \rangle$ dans Q. □

5.3 Production d'un seul output

Dans cette section on s'intéresse aux conditions nécessaires pour un optimum dans le cas d'un seul output. Dans ce cas, on note $g : \mathbb{R}^K_+ \to \mathbb{R}_+$ la fonction de production de l'output ($K = L - 1$) et

$$Q = \{(-x, y) \,|\, x \in \mathbb{R}^K_+,\ y \in \mathbb{R}_+,\ y \leq g(x)\}$$

On suppose que g est différentiable. Le prix de l'output sera noté r. Le prix du k-ème input sera noté w_k, pour $k = 1, \ldots, K$. Ainsi donc, $p = (w_1, \ldots, w_K, r)$.

Problème du producteur (1 inputs). Au prix $p = (r, w) \in \mathbb{R}^2_{++}$ fixé, le problème s'écrit simplement $\max_{x \geq 0} rg(x) - wx$. A l'optimum $x^* > 0$ on a $g'(x) = w/r$ **(voir dessin)**.

Problème du producteur (K inputs). Au prix $p = (r, w) \in \mathbb{R}^L_{++}$ fixé, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \max \ ry - \langle w, x \rangle \\ s.c. \ x \in \mathbb{R}^K_+ \text{ et } y = g(x) \end{cases}$$

On s'intéresse aux solutions $(x^*, y^*) \gg 0$ intérieurs. En dérivant, on obtient la condition nécessaire de premier ordre $r\nabla g(x^*) = w$, qui est suffisante si g est strictement concave **(voir dessin)**. Autrement dit, le gradient de g et w sont proportionnels.

On peut également raisonner en termes de Lagrangien. On pose

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) := ry - \langle w, x \rangle - \lambda(y - g(x)) = ry - \sum_{k=1}^{K} w_k x_k - \lambda(y - g(x))$$

La fonction $\mathcal{L}$ est concave (si g l'est). Une condition nécessaire de premier d'ordre (CPO) pour que (x^*, y^*, λ^*) soit un maximum (si c'est un point intérieur) est d'avoir l'égalité $\nabla\mathcal{L}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0$. Coordonnée par coordonnée, cela s'écrit :

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k^*}(x^*, y^*, \lambda^*) = -w_k + \lambda \frac{\partial g(x^*)}{\partial x_k} = 0$, pour tout $k = 1, \ldots, K$
- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x^*, y^*, \lambda) = r - \lambda^* = 0$

En un optimum $(x^*, y^*) \gg 0$ on a donc les conditions nécessaires suivantes :

1. Le *taux marginal de substitution technique* de l'input k à l'input ℓ est égal au rapport du prix de ces inputs :
$$TMST_{k \to \ell}(x^*) := \frac{\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_\ell}}{\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_k}} = \frac{w_\ell}{w_k}, \quad \forall 1 \leq k, \ell \leq K$$
2. La *productivité marginale* de chaque input est égale au rapport du prix de ce facteur au prix de l'output :
$$\frac{\partial g(x^*)}{\partial x_k} = \frac{w_k}{r}, \quad \forall 1 \leq k \leq K$$

5.4 Plusieurs producteurs : offre agrégée

Contrairement à la demande l'agrégation des fonctions d'offre ne pose aucun problème. Supposons maintenant qu'il y a M entreprises $j = 1, \ldots, M$, caractérisées chacune par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^L$. Soient $\pi^j(p) = \max_{q \in Q^j} \langle p, q \rangle$ et $O^j(p)$ le profit et l'ensemble d'offre respectivement pour l'entreprise j, pour un prix $p \gg 0$ donné.

On définit l'ensemble de production agrégé par :

$$Q_{AG} = \sum_{j=1}^{M} Q^j = \left\{ q \in \mathbb{R}^L \,|\, \exists\; q^j \in Q^j,\; j = 1, \ldots, M \text{ tel que } q = \sum\nolimits_{j=1}^{M} q^j \right\}$$

Soient $\pi^*(p) = \max_{q \in Q_{AG}} \langle p, q \rangle$ le profit pour une entreprise centrale, capable de regrouper et organiser toutes les entreprises dans l'économie, et soit $O^*(p)$ l'ensemble d'offre correspondant. Naturellement, on a l'inégalité $\pi^*(p) \geq \sum_{j=1}^{M} \pi^j(p)$. En effet, elle s'explique par le fait que l'entreprise centrale peut toujours décentraliser ; son profit est donc au moins aussi grand que la somme des profits.

Le résultat suivant, en revanche, est plus fort et aussi plus surprenant : la centralisation n'apporte rien, ni en termes de profit, ni en termes d'offre.

Proposition 5.5. *Soit $p \gg 0$ un vecteur de prix. Alors*

(*i*) $\pi^*(p) = \sum_{j=1}^{M} \pi^j(p)$

(*ii*) $O^*(p) = \sum_{j=1}^{M} O^j(p)$

Démonstration. (i) Soit $q^j \in Q^j$ un plan de production pour $j = 1, \ldots, M$. Alors, par définition, $\sum_j q^j \in Q_{AG}$. Comme π^* est la fonction de profit associé à Q_{AG} on a $\pi^*(p) \geq \langle p, \sum_j q^j \rangle = \sum_j \langle p, q^j \rangle$. Donc $\pi^*(p) \geq \sum_{j=1}^{M} \pi^j(p)$. Réciproquement, soit $q \in Q_{AG}$. Par définition il existe $(q^j)_j$ tels que $q^j \in Q^j$ pour tout j et $\sum_j q^j = q$. Donc $\langle p, q \rangle = \sum_j \langle p, q^j \rangle \leq \sum_j \pi^j(p)$, pour tout $q \in Q_{AG}$. En maximisant sur $q \in Q_{AG}$ on obtient l'inégalité cherchée $\pi^*(p) \leq \sum_j \pi^j(p)$.
(ii) Montrons d'abord l'inclusion $\sum_{j=1}^{M} O^j(p) \subset O^*(p)$. Soient $q^j \in O^j(p)$ pou tout $j = 1, \ldots, M$. Alors $\langle p, \sum_j q^j \rangle = \sum_j \langle p, q^j \rangle = \sum_j \pi^j(p) = \pi^*(p)$, d'après (i). Donc $\sum_j q^j \in O^*(p)$, ce qui prouve l'inclusion. Réciproquement, soit $q \in O^*(p)$. Alors, par définition de Q_{AG} il existe $(q^j)_j$ tels que $q^j \in Q^j$ et $\sum_j q^j = q$. Comme $\langle p, \sum_j q^j \rangle = \pi^*(p) = \sum_j \pi^j(p)$ et que, pour tout j, on $\langle p, q^j \rangle \pi^j(p)$, on doit bien avoir $\langle p, q^j = \pi^j(p)$ pour tout j. Par conséquent, $q^j \in O^j(p)$ pour tout j et donc $q \in \sum_j O^j(p)$. Ce qui montre l'inclusion $O^*(p) \subset \sum_{j=1}^{M} O^j(p)$.

□

Cette proposition est un résultat remarquable de décentralisation : la solution globale au problème de production agrégée n'est autre que la somme des solutions individuelles. Autrement dit, en laissant chaque producteur maximiser de son côté (de façon décentralisée), on arrive au même profit que lorsqu'une unique entreprise coordonne les actions de tout le monde.

Conclusion : Si les firmes maximisent leurs profits en “preneurs de prix”, alors le côté production de l'économie s'agrège merveilleusement bien.

5.5 Equilibre concurrentiel avec production

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ une économie avec production. On définit la contrainte budgétaire de l'agent i au prix $p \in \mathbb{R}^L_+$ par :

$$B^i(p) := \left\{z^i \in \mathbb{R}^L_+ \mid \langle p, z^i\rangle \leq \langle p, e^i\rangle + r^i(p)\right\}$$

où $r^i(p) := \sum_{j=1}^M \theta^{ij}\pi^j(p)$ est la "rente" du joueur i, i.e. le profit total obtenu par l'agent i de par sa participation aux firmes $j = 1, \dots, M$. Cet ensemble correspond aux paniers que l'agent i peut s'acheter avec son revenu, provenant à la fois de sa dotation initial et de sa participation aux profits des firms dont il est actionnaire. Rappelons cependant que l'existence du profit $\pi^j(p)$ (i.e. solution au problème du producteur) n'est pas toujours assurée (voir Section 5.2). Il en est donc de même pour cet ensemble.

La notion d'équilibre concurrentiel, vue au Chapitre 3.1, s'étend à une économie avec production. Le résultat d'existence (sous certaines hypothèses), ainsi que les deux théorèmes du bien-être, seront aussi obtenus dans ce cadre plus général.

Définition 5.5. Un *équilibre concurrentiel* (p, q, z) pour $\mathcal{E}$ consiste en

— un vecteur de prix $p = (p_1, \dots, p_L) \in \mathbb{R}^L_+$

— une allocation $(q, z) = (q^1, \dots, q^M, z^1, \dots, z^N) \in (\mathbb{R}^L)^M \times (\mathbb{R}^L_+)^N$, telle que

- q^j maximise le profit de la firme j sous la contrainte Q^j.
- z^i maximise l'utilité u^i de l'agent i sous sa contrainte budgétaire $B^i(p)$.
- Les marchés s'apurent : $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i + \sum_{j=1}^M q^j$

Quelques commentaires

— Rappelons que q^j maximise le profit de la firme j sous la contrainte Q^j si et seulement si $q^j \in O^j(p)$ ou, de manière équivalente, si et seulement si $q^j \in Q^j$ et $\langle p, q^j\rangle \geq \langle p, \tilde{q}^j\rangle$, $\forall \tilde{q}^j \in Q^j$. A l'équilibre, on aura donc $\langle p, q^j\rangle = \pi^j(p)$ pour tout $j = 1, \dots, M$.

— L'existence d'un équilibre suppose donc que la maximisation du profit des entreprises ait une solution, ce qui exclut les rendements croissants.

— La condition d'apurement des marchés est une condition "bien par bien". Pour chaque bien ℓ, la quantité totale demandée par les agents $\sum_{i=1}^N z^i_\ell$ doit être égale à la quantité totale disponible sur le marché, $\sum_{i=1}^N e^i_\ell + \sum_{j=1}^M q^j_\ell$.

En ajoutant des hypothèses (de convexité) sur les ensembles de production, on généralise le théorème fondamental d'existence vu dans le cadre des économies d'échange.

Théorème 5.1. *Sous des hypothèses appropriées, il existe une équilibre concurrentiel.*

Démonstration. Admise. □

5.6 L'économie de Robinson Crusoé

Nous avons considéré au Chapitre 3 le cas d'une économie avec $N = 2$ consommateurs et $M = 0$ producteurs. On parlait alors d'économie d'échange. Nous allons considérer ici le cas d'une économie avec $N = 1$ consommateur et $M = 1$ producteur. Le parallèle avec Robinson Crusoé vient du fait qu'il s'agit en réalité d'un seul agent, à la fois consommateur et propriétaire de l'unique entreprise de l'économie.

Voici précisément le modèle :

— Un agent, à la fois consommateur et propriétaire d'une entreprise de production

— Deux biens : loisir $x \in [0, 24]$ et nourriture $y \geq 0$

— w = salaire horaire (prix du loisir) et r = prix d'une unité de nourriture

— La firme est décrite par une fonction de production $t \mapsto g(t)$ qui transforme du travail $t = 24-x$ en nourriture. Elle maximise son profit $\pi(t, y) := ry - wt$ sous $y = g(t)$.

— Les droites d'iso-profit, dans le plan (x, y), ont une pente $-\frac{w}{r}$ **(voir dessin)**.

— Le consommateur a une dotation initiale $(e_x, e_y) = (24, 0)$ et une fonction d'utilité u. Il maximise $u(x, y)$ sous la contrainte $wx + ry \leq 24w + \pi(24 - x, y)$. Il consacre son salaire et son profit d'actionnaire à l'achat du bien de consommation. La pente de la contrainte budgétaire dans le plan (x, y) est $-\frac{w}{r}$ **(voir dessin)**.

Comme dans la boîte d'Edgeworth, on peut représenter les deux problèmes (celui de Robinson-firme et celui de Robinson-consommateur) sur un même dessin. Pour ce faire, on les représente sur le même axe des les abscises mais avec des ordonnées décalés de 24. Le point $(0, 0)$ pour Robinson-consommateur correspond au point $(-24, 0)$ pour Robinson-firme : lorsque le consommateur demande x unités de loisir, la firme "détruit" les$24 - x$ restantes (c'est un input, donc ce sera $x - 24$) pour les transformer en $y = g(24 - x)$ unités de nourriture.

La firme utilise le loisir comme input afin de produire de la nourriture **(voir dessin)**.

Exemple 5.6 (Rendements d'échelle décroissants)**.** *Prenons une fonction de production g (strictement) concave telle que $g(0) = 0$. Autrement dit, sans travail, la firme ne produit pas de nourriture. A l'équilibre (il existe d'après le Théorème d'existence), les quantités de nourriture produite (output) et de nourriture consommée doivent être égales et la quantité de travail utilisée comme input (par Robinson-firme) doit être égale à 24 moins la quantité de loisir consommée (par Robinson-consommateur). De plus, le profit π de la firme apparaît dans la contrainte budgétaire du consommateur. L'équilibre est une solution du problème unifié de Robinson. En notant d la fonction de demande de Robinson-consommateur, et o la fonction d'offre de Robinson-firm, la condition d'apurement des marchés s'écrit :*

$$d_x(p^*) = o_x(p^*)$$

$$d_y(p^*) = 24 + o_y(p^*)$$

Offre et demande pour la nourriture, le bien x, doivent être égales. De même, le loisir demandé par le consommateur et le loisir (négatif) broyé par la firme doivent totaliser $24h$.

Exemple 5.7 (Rendements d'échelle constants)**.** *La fonction de production g est une droite. Les droites d'iso-profit (dans le plan (x, y)) ont une pente $\frac{w}{r} > 0$. A l'optimum, le profit du producteur est nul.*

- *Si la pente de g est $> \frac{w}{r}$, il n'y a pas de solution : $\pi \to \infty$.*
- *Si la pente de g est $< \frac{w}{r}$, l'unique solution consiste à ne rien produire (ce qui ne peut pas constituer un équilibre, vu les préférences de Robinson-consommateur).*
- *Il faut donc que la pente de g soit $= \frac{w}{r}$. Si un équilibre existe, son prix est déterminé indépendamment des préférences du consommateur **(voir dessin)**.*

Exemple 5.8 (Rendements d'échelle croissants)**.** *La fonction de production g est convexe. On peut encore trouver une solution au problème unifié de Robinson, c-est–à–dire un optimum de Pareto, mais celui-ci n'est pas décentralisable par un système de prix : il n'y a pas d'équilibre **(voir dessin)**.*

5.7 Optimalité de Pareto

La notion d'optimalité au sens de Pareto s'étend à une économie avec production :

$$\mathcal{E} = \{N, M, (e^i, u^i)_i, (Q^j)_j, (\theta^{ij})_{i,j}\}$$

Il est important de préciser que l'on s'intéressera uniquement au bien-être des individus (consommateurs qui possèdent les entreprises) et non pas à celui des firmes (des technologies de transformation des dotations initiales (inputs) en produits (outputs)).

Définition 5.9. Une allocation $(q, z) = (q^1, \ldots, q^M, z^1, \ldots, z^N) \in (\mathbb{R}^L)^M \times (\mathbb{R}^L_+)^N$ est *réalisable* (dans $\mathcal{E}$) si $q^j \in Q^j$ pour tout $j = 1, \ldots, M$ et $\sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i + \sum_{j=1}^M q^j$. Elle est *Pareto-optimale* (dans $\mathcal{E}$) si, de plus, il n'existe pas d'autre allocation réalisable $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ qui domine (q, z) au sens de Pareto, i.e. telle que $u^i(\widetilde{z}^i) \geq u^i(z^i)$, pour tout $1 \leq i \leq N$, et $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$ pour un $1 \leq j \leq N$.

On retrouve dans ce cadre les deux théorèmes du bien-être. On notera bien que, comme auparavant, le premier repose "seulement" sur la croissance des fonction d'utilité, alors que le second nécessite la stricte convexité des utilités et la convexité des ensembles de production.

Théorème 5.2 (*Premier théorème du bien-être*)**.**
Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_i, (Q^j)_j, (\theta^{ij})_{ij}\}$ une économie où les fonctions d'utilité $(u^i)_i$ sont croissantes. Si $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})$ est un équilibre concurrentiel, alors $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est Pareto-optimale.

Démonstration. On procède comme dans le cas d'une économie d'échange. Soit $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})$ un équilibre ; supposons, par l'absurde, que $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ soit Pareto-dominée par (q, z). On montre que $\langle p, \sum_{j=1}^M q^j \rangle > \langle p, \sum_{j=1}^M \widetilde{q}^j \rangle$, ce qui contredit que $\widetilde{q}^j$ maximise le profit du producteur j, pour tout $j = 1, \ldots, N$. $\square$

Théorème 5.3 (*Second théorème du bien-être*).
Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_i, (Q^j)_j, (\theta^{ij})_{ij}\}$ une économie où les fonctions d'utilité $(u^i)_i$ sont strictement croissantes et quasi-concaves, et les ensembles de production $(Q^j)_j$ convexes. Si l'allocation $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est Pareto-optimale dans $\mathcal{E}$ et $\widetilde{z}^i \gg 0$ pour tout $i = 1, \ldots, N$, alors il existe un vecteur de prix $\widetilde{p}$ tel que

- *$\widetilde{q}^j$ maximise $\langle \widetilde{p}, q^j \rangle$ sous $q^j \in Q^j$ (et donc $\langle \widetilde{p}, \widetilde{q}^j \rangle = \pi^j(\widetilde{p})$) pour tout $j = 1, \ldots, M$.*
- *$\widetilde{z}^i$ maximise $u^i(z^i)$ sous $\langle \widetilde{p}, z^i \rangle \leq \langle \widetilde{p}, \widetilde{z}^i \rangle + \sum_{j=1}^M \theta^{ij} \langle \widetilde{p}, \widetilde{q}^j \rangle$, pour tout $i = 1, \ldots, N$.*

Comme dans le cas d'une économie d'échange, il s'agit d'un équilibre dans l'économie $\mathcal{E}'$ obtenue en changeant les dotations initiales par $(\widetilde{z}^i)_i$).

Finissons par énoncer la variante du second théorème du bien-être à l'aide de transferts forfaitaires.

Théorème 5.4 (*Second théorème bis*). *Si $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est une allocation Pareto-optimale dans $\mathcal{E}$, telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, pour tout $i = 1, \ldots, N$, alors $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est une allocation d'équilibre avec transferts de $\mathcal{E}$.*

5.8 Caractérisation des optima de Pareto

On supposera dans cette section que les ensembles de production $(Q^j)_j$ sont tous de la forme

$$Q^j = \{q^j \in \mathbb{R}^L \mid g^j(q^j) \leq 0\}$$

pour une certaine fonction $g^j : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}$ concave (ce qui implique que Q^j est un ensemble convexe) telle que $g^j(0) \leq 0$. Sous ces hypothèses, en un plan de production q^j efficace, on aura $g^j(q^j) = 0$. On supposera aussi que les fonctions d'utilité $(u^i)_i$ sont croissantes et concaves.

Soit $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ une allocation Pareto-optimale. En procédant comme pour une économie d'échange, on montre qu'il existe des poids $\gamma^1, \ldots, \gamma^N \geq 0$ non tous nuls ($\gamma \neq 0$), tels que $\widetilde{z}$ soit solution du problème d'optimisation sociale (OS_γ) suivant :

$$\begin{cases} \max_{q,z} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) \\ \text{s.c. } g^j(q^j) = 0, \text{ pour tout } j = 1, \ldots, M \\ \sum_{i=1}^N z^i_\ell = \sum_{i=1}^N e^i_\ell + \sum_{j=1}^M q^j_\ell, \text{ pour tout } \ell = 1, \ldots, L \end{cases}$$

Dans (OS_γ), les variables sont les quantités demandées par les consommateurs $z^1_1, \ldots, z^1_L, \ldots, z^N_1, \ldots, z^N_L$, ainsi que les quantités "offertes" par les firmes $q^1_1, \ldots, q^M_1, \ldots, q^1_L, \ldots, q^M_L$. Il y a donc $NL + ML$ variables réelles.

Si les fonctions g^j et u^i sont différentiables, on considère les conditions du premier ordre associées au problème, en un optimum $(\widetilde{q}, \widetilde{z}) \gg 0$. On définit le Lagrangien par :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) - \sum_{j=1}^M \mu^j g^j(q^j) - \sum_{\ell=1}^L \lambda_\ell \left(\sum_{i=1}^N z^i_\ell - \sum_{i=1}^N e^i_\ell - \sum_{j=1}^M q^j_\ell \right)$$

Les conditions de premier ordre (CPO) pour les variables z_ℓ^i s'écrivent ici comme :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_\ell^i} = \gamma^i \frac{\partial u^i(\widetilde{z}^i)}{\partial z_\ell^i} - \lambda_\ell = 0, \text{ pour } i = 1, \ldots, N, \;\; \ell = 1, \ldots, L$$

ce qui implique :

$$TMS^i_{k \to \ell}(\widetilde{z}^i) = \frac{\frac{\partial u^i(\widetilde{z}^i)}{\partial z_\ell^i}}{\frac{\partial u^i(\widetilde{z}^i)}{\partial z_k^i}} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k} \quad \forall i, k, \ell \tag{1}$$

De même, les CPO pour les variables q_ℓ^j s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\ell^j} = \mu^j \frac{\partial g^j}{\partial q_\ell^j}(q^j) - \lambda_\ell = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, M, \quad \ell = 1, \ldots, L$$

et donc

$$TMT^j_{k \to \ell}(\widetilde{q}^j) = \frac{\frac{\partial g^j(\widetilde{q}^j)}{\partial q_\ell^j}}{\frac{\partial g^j(\widetilde{q}^j)}{\partial q_k^j}} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k} \quad \forall j, k, \ell \tag{2}$$

En combinant les égalités (1) et (2) on obtient que, en un optimum $(\widetilde{q}, \widetilde{z}) \gg 0$, on a :

$$TMS^i_{k \to \ell}(\widetilde{z}^i) = TMT^j_{k \to \ell}(\widetilde{q}^j) \quad \forall i, j, k, \ell$$

Le taux marginal de substitution de *chaque* agent entre deux biens quelconques doit donc être égal au taux marginal de *transformation* de chaque entreprise entre ces deux biens. En particulier, les taux marginaux de substitution des différents agents sont égaux entre eux.

5.9 Exercices

Exercice 5.1 (*Rendements*)**.** Soit la fonction de production Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$, avec $\alpha, \beta > 0$.

1. Décrire l'ensemble de production, en fonction des paramètres α, β.
2. Les rendements sont-ils décroissants ? constants ? croissants ? (en fonction des paramètres)
3. Soit la fonction de production à élasticité de substitution constante $g : \mathbb{R}^2_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (ax^\rho + by^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$. Montrer que les rendements sont constants.

Exercice 5.2 (*Maximisation du profit*)**.**

1. Pour des fonctions de production linéaires, déterminer graphiquement et analytiquement les solutions du problème de maximisation du profit en dessinant les courbes d'isoprofit, dans $\mathbb{R}^2$.
2. Soit la fonction de production Cobb-Douglas $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$. Déterminer l'offre de l'entreprise et le profit associé en fonction des prix.

Exercice 5.3 (*Equilibre avec un producteur*)**.** On considère une économie avec production, comprenant un consommateur, une entreprise et deux biens. Le consommateur a une dotation initiale $e = (e_x, e_y) = (10, 0)$ et une fonction d'utilité $u(x,y) = \frac{xy}{x+4y}$. L'entreprise produit une quantité $y = g(x)$ du second bien à partir de x unités du premier. On normalise le prix du premier bien p_x à 1 et on note $p_y = p$ le prix du second bien.

1. Définir l'"élasticité de substitution". Ecrire la fonction d'utilité du consommateur de manière à montrer qu'elle est à élasticité de substitution constante. Indiquer la valeur des paramètres.
2. Déterminer la fonction de demande $(d_x(p,\pi), d_y(p,\pi))$ du consommateur en fonction du prix p et du profit π de l'entreprise.
3. On suppose que $g(x) = 9x$. Représenter graphiquement l'ensemble de production et les droites d'isoprofit de l'entreprise. Déterminer, en fonction du prix p, l'offre (ou les offres) $(x^*(p), y^*(p))$ et le profit maximal $\pi^*(p)$ de l'entreprise (pour autant que ces quantités existent).
4. Calculer l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuel(s), lorsque $g(x) = 9x$.
5. Calculer l'équilibre (ou les équilibres) concurrentiel(s) éventuel(s), lorsque $g(x) = e^x - 1$.

Exercice 5.4 (*Equilibre avec deux producteurs*)**.** On considère une économie à deux consommateurs, deux biens de consommation, un facteur de production (le travail) et deux entreprises. On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i, $(i = 1,2)$. La dotation initiale du consommateur 1 est d'une unité de travail ; celle du consommateur 2, de 2 unités de travail. Leurs fonctions d'utilité sont $u^i(x^i, y^i) = \sqrt{x^i y^i}$, $i = 1,2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_1 = z_1$. L'entreprise 2 produit le second bien de consommation à l'aide de travail, suivant la technologie $q_2 = \frac{1}{2}z_2$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de travail, $k = 1,2$). On suppose enfin que le consommateur 1 possède les entreprises.

1. Ecrire les conditions que doit satisfaire une allocation $(x^1, y^1; x^2, y^2; q_1, z_1; q_2; z_2)$ pour être réalisable dans cette économie. En déduire qu'une allocation $(x^1, y^1; x^2, y^2)$ en biens de consommation est réalisable si et seulement si, $x^1 + x^2 + 2(y^1 + y^2) = 3$.
2. Montrer que l'économie possède un équilibre concurrentiel, en fixant le prix du travail à 1 et en notant p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1, 2$. Calculer l'utilité de chaque consommateur à l'équilibre.
3. Sans faire de calcul, peut-on affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto-optimal ?
4. En utilisant le point 1, écrire le programme d'optimisation sociale qui permet de déduire les optima de Pareto. Déterminer les allocations Pareto optimales intérieures et montrer qu'une paire de niveaux d'utilités $(v^1; v^2)$ pour les consommateurs est Pareto-optimale si et seulement si $v^1 + v^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $v^1, v^2 \geq 0$. Représenter graphiquement l'ensemble des niveaux d'utilités réalisables dans l'économie et les niveaux d'utilités de l'équilibre concurrentiel. Vérifier que l'équilibre est Pareto optimal.

Exercice 5.5 (*Production sur deux périodes*)**.** Définir l'équilibre des économies suivantes :

1. On considère une économie d'échange pur où tous les produits sont fabriqués à partir du pétrole sur 2 périodes. Seul le pétrole est négocié. Il y a deux ménages et deux sites de dépôt de pétrole qui ont chacun une capacité de production sur l'ensemble des deux périodes de 1 tonne. Le premier site appartient au ménage A, une quantité de pétrole peut en être extraite à chaque période. Le deuxième appartient à B, mais celui-ci ne peut extraire du pétrole qu'à la seconde période. Les ménages ont la même fonction d'utilité (strictement concave) et sont impatients.
2. Les individus sont dotés d'une unité de capital humain et d'une unité de temps. Dans la première période, ils divisent leur temps entre l'accumulation de capital humain (les étude), le travail, et le loisir. Dans la deuxième, ils le divisent uniquement entre loisir et travail. L'entreprise produit un bien de consommation, en utilisant le travail, et la contribution de chaque heure de travail est proportionnelle au capital humain du travailleur.

Exercice 5.6 (*Production à deux vitesses*)**.** Imaginons une économie où un seul bien est produit par deux types des programmeurs : des bons programmeur et les programmeurs médiocres. Les premiers sont 10 fois plus productifs que les seconds. Déterminer une fonction de profit pour l'entreprise. Déterminer l'équilibre d'une économie possédant un programmeur de chaque type, tous les deux ayant des parts égales dans l'entreprise.

6 Défaillances du marché : effets externes et biens publics

L'efficacité du marché, nous l'avons vu, tient à plusieurs hypothèses telles que la concurrence parfaite (les agents sont preneurs de prix), la complétude du marché (il y a un marché pour chaque bien), la symétrie de l'information (les agents sont tous pareillement informés sur les biens), il n'y a pas d'externalités (les agents ne se préoccupent que de leur allocation) et aussi sur la nature des biens (ce sont des bien privés). En effet, sous ces hypothèses (avec en plus la monotonie des fonctions d'utilité) le marché "mène à" une allocation Pareto-Optimale. Dans la réalité, cependant, cela ne passe pas toujours aussi bien. L'équilibre (situation plus ou moins stable à laquelle se trouve l'économie) n'est pas forcément efficace. On parle alors de défaillance du marché. Ces anomalies proviennent nécessairement de la non-vérification d'une des hypothèses ci-dessus. Dans ce chapitre on s'intéresse aux défaillance dérivés de la présence d'externalités et de la présence de biens publics.

On étend le modèle canonique vu aux chapitres précédents pour prendre en compte deux aspects importants des préférences et de la nature des biens :

— *Effets externes* : effet indirect d'une activité de production ou de consommation sur les préférences ou les technologies de production des agents (exemple : pollution).

— *Biens publics* : l'usage par un agent n'empêche pas son usage par un autre agent (exemple : éclairage public).

La présence d'effets externes et de biens publics complique sensiblement l'analyse. Dans ce chapitre, on n'établit pas de résultat général, on raisonnera sur des exemples simples, dans des économies à 2 agents et 2 biens (**voir Tallon chapitre XI**).

6.1 Effets externes

Illustrations classiques :

1. Apiculteurs et cultivateurs : externalités de production, positive et réciproque.
2. Pollution, bruit, congestion : externalité de production ou de consommation, négative.
3. Réseaux de communication : externalité positive pour la consommation

Formellement, on peut définir une économie d'échange avec des effets externes en considérant des fonctions d'utilité qui dépendent de l'allocation de tous les agents. Jusqu'à présent, l'utilité de l'agent i ne dépendait que de son allocation z^i. Cependant, il arrive que l'utilité des uns dépende de la consommation (ou la production) des autres. Cette dépendance existe toujours, à travers les prix : la consommation (ou, plutôt, la demande), d'un agent affecte le prix des autres biens ; cela a un effet sur la demande des autres agents et, par conséquent, sur leur utilité. Parfois, cette dépendance est plus directe et n'est pas véhiculé par les prix : lorsqu'un agent consomme "de la musique à fond la caisse" dans son jardin, l'utilité de son voisin en est affecté.

On considère donc ici la situation plus générale où la fonction u^i dépend des allocations $z^1, \ldots, z^N$ de tous les agents, i.e. $u^i : (\mathbb{R}_+^L)^N \to \mathbb{R}$. La consommation des paniers de biens $(z^j)_{j \neq i}$ modifie les préférences de l'agent i. Par contre, le comportement microéconomique de l'agent i est inchangé, il cherche toujours à maximiser son utilité sous contrainte budgétaire, mais il prend comme donnée l'externalité produite par les autres.

La définition de l'équilibre concurrentiel est donc inchangée : un prix et une allocation tels que chaque agent maximise son utilité sous sa contrainte budgétaire (étant donnés le prix et les consommations des autres agents), les marchés s'apurent (définition inchangée).

Message principal : en présence d'externalités, l'équilibre concurrentiel n'est pas nécessairement efficient.

6.1.1 Un exemple dans le cas $L = N = 2$

- 2 agents 1 et 2
- 2 biens (x et y)
- Dotations initiales $e^1 = (1, 0)$ et $e^2 = (0, 1)$
- x^i : quantité de bien x consommée par l'agent i
- y^i : quantité de bien y consommée par l'agent i

Jusqu'ici les agents n'avaient d'utilité que pour leur propre consommation. A présent, l'utilité de l'agent 1 dépend de la consommation en bien x de l'agent 2 :

$$u^1(x^1, y^1; x^2) = \sqrt{x^1 y^1} - x^2 \qquad \text{et} \qquad u^2(x^2, y^2) = \sqrt{x^2 y^2}$$

On a remarquera qu'on a préféré les notations $u^1(x^1, y^1; x^2)$ et $u^2(x^2, y^2)$, à la place de $u^1(x^1, y^1; x^2, y^2)$ et $u^2(x^1, y^1; x^2, y^2)$, pour illustrer la dépendance effective. La définition d'équilibre est inchangée mais l'agent 1 ne contrôle pas x^2 lorsqu'il maximise son utilité ! On est donc en présence d'externalité.

Agent 1. Les problèmes $\max u^1(x^1, y^1; x^2) = \sqrt{x^1 y^1} - x^2$ sous la contrainte $p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$ et $\max \sqrt{x^1 y^1}$ sous la contrainte $p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$ admettent la même solution. On détermine ainsi la fonction de demande $d^1(p) = (\frac{1}{2}, \frac{p_x}{2p_y})$ comme dans le cas où il n'y a pas d'effet externe.

Agent 2. Pas d'externalité pour lui. En résolvant le problème $\max u^2(x^2, y^2) = \sqrt{x^2 y^2}$ sous la contrainte $p_x x^2 + p_y y^2 \leq p_y$ on obtient sa fonction de demande $d^2(p) = (\frac{p_y}{2p_x}, \frac{1}{2})$.

Equilibre. En posant $d^1(p) + d^2(p) = e^1 + e^2 = (1, 1)$ (apurement des marchés), on obtient $p_x = p_y$ et donc $d^1(p) = d^2(p) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On obtient le même résultat que s'il n'y avait pas d'externalité, **mais**

ce n'est pas un résultat général ! (voir Remarque ci-dessous). En revanche, les utilités à l'équilibre sont maintenant : $u^1_* = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0$ et $u^2_* = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ (au lieu de $u^1_* = u^2_* = \frac{1}{2}$ sans externalité).

L'équilibre n'est pas Pareto optimal. Montrons que l'allocation $z = (z^1, z^2) = ((\frac{2}{3}, \frac{1}{5}), (\frac{1}{3}, \frac{4}{5}))$ domine l'allocation $\widetilde{z} = ((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ obtenue à l'équilibre. Tout d'abord, vérifions que z est réalisable : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ et $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$. Ensuite, on calcule les utilités $u^1(z^1) = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{1}{5}} - \frac{1}{3}$, $u^2(z^2) = \sqrt{\frac{1}{3}\frac{4}{5}}$. Enfin, on vérifie que $u^1(z^1) > u^1(\widetilde{z}^1)$ et $u^2(z^2) > u^2(\widetilde{z}^2)$.

Remarque 6.1. Lorsque les utilités avec externalités sont séparables, c'est–à–dire que les effets externes entrent dans les préférences des agents sous forme additive comme dans l'exemple précédent, l'allocation d'équilibre avec ou sans externalités coincident. Pourquoi ? (écrire le programme de maximisation du consommateur pour s'en convaincre).

6.1.2 Externalités : conditions d'optimalité de Pareto

A partir d'un exemple qui généralise le précédent.
— 2 agents, notés 1 et 2
— 2 biens, notés x et y
— La consommation de bien x par un agent affecte l'autre

Ecrivons le programme d'optimisation social (OS_γ) pour des poids $\gamma^1, \gamma^2 > 0$:

$$\begin{cases} \max_{x,y} & \gamma^1 u^1(x^1, y^1; x^2) + \gamma^2 u^2(x^2, y^2; x^1) \\ s.c. & x^1 + x^2 = e_x \\ & y^1 + y^2 = e_y \end{cases}$$

Rappelons que, d'après la Proposition 4.1 les solutions de (OS_γ) correspondent toujours à des allocations Pareto-optimales.

En supposant u^1 et u^2 différentiables, on résout le problème (OS_γ) en introduisant le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \gamma^1 u^1(x^1, y^1; x^2) + \gamma^2 u^2(x^2, y^2; x^1) - \lambda_x(x^1 + x^2 - e_x) - \lambda_y(y^1 + y^2 - e_y)$$

Les CPO s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^1} = \gamma^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \gamma^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \lambda_x = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^2} = \gamma^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \gamma^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \lambda_x = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^1} = \gamma^1 \frac{\partial u^1}{\partial y^1} - \lambda_y = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^2} = \gamma^2 \frac{\partial u^2}{\partial y^2} - \lambda_y = 0 \tag{6}$$

En combinant (3), (5) et (6), on obtient :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{\gamma^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^1}}{\gamma^1 \frac{\partial u^1}{\partial y^1}} + \frac{\gamma^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1}}{\gamma^2 \frac{\partial u^2}{\partial y^2}}$$

C'est–à–dire :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = TMS^1_{y^1 \to x^1} + TMS^2_{y^2 \to x^1} \tag{7}$$

En procédant de même avec (4), (5) et (6) on obtient :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = TMS^1_{y^1 \to x^2} + TMS^2_{y^2 \to x^2} \tag{8}$$

A l'optimum de (OS_γ), et donc pour toute allocation Pareto-optimale dans $\mathcal{E}$, nécessairement :

$$TMS^1_{y^1 \to x^1} + TMS^2_{y^2 \to x^1} = TMS^1_{y^1 \to x^2} + TMS^2_{y^2 \to x^2} \tag{9}$$

Cette équation signifie que la somme (sur les agents) des TMS doit être constante : lorsque, par exemple, la consommation en bien 1 du premier consommateur augmente, il faut tenir compte du fait que cela affecte également le bien-être du second consommateur. On peut voir la quantité :

$$\frac{\frac{\partial u^1}{\partial x^1}}{\frac{\partial u^1}{\partial y^1}} + \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x^1}}{\frac{\partial u^2}{\partial y^2}}$$

comme étant le *TMS social du bien 1 détenu par le premier consommateur*. C'est ce TMS qui est déterminant dans l'allocation des ressources dans une économie avec externalités. Les prix d'équilibre concurrentiel, dans une économie où chacun ne tient pas compte du fait qu'il affecte, par ses décisions, le bien-être d'autrui, ne reflètent pas cette dimension sociale de la consommation de certains biens. L'inefficacité de l'équilibre provient précisément de ceci.

Revenons à l'exemple initial (section 6.1.1). A l'équilibre concurrentiel on a :

$$TMS^1_{y^1 \to x^1} = TMS^2_{y^2 \to x^2} = \frac{p_x}{p_y} = 1, \quad TMS^2_{y^2 \to x^1} = 0, \quad \text{et} \quad TMS^1_{y^1 \to x^2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

L'égalité (9) n'est pas vérifiée puisque :

$$1 = TMS^1_{y^1 \to x^1} + TMS^2_{y^2 \to x^1} \neq TMS^2_{y^2 \to x^2} + TMS^1_{y^1 \to x^2} = -1$$

L'équilibre concurrentiel de l'économie avec externalité n'est donc pas Pareto optimal.

Conclusion. Optimum de Pareto : notion tout à fait générale. Equilibre concurrentiel : approprié quand il y a des marchés.

A savoir faire : retrouver les conditions d'optimalité dans une économie à 2 agents et 2 biens, interpréter ces conditions comme un TMS social et les comparer avec la caractérisation de l'équilibre.

6.2 Retrouver la Pareto-optimalité

Prenons comme exemple un marché avec une externalité négative créée par un agent polluant. Il existe plusieurs façons de faire face à la non-optimalité de l'équilibre :

— *quotas* : imposer des quotas sur la production et/ou consommation du bien polluant (mesure protectionniste)
— *subventions* : inciter la firme polluante à développer une technologie propre
— *création de marchés additionnels* : ouvrir un marché pour l'"air propre" (measure néo-libérale)
— *taxe* : imposer un impôt sur la consommation et/ou sur la production polluantes
— *fusion des agents polluants* : créer une nouvelle firme sans externalités (internalisation de l'externalisation)
— *"laissez-faire"* : les agents vont résoudre l'externalité tous seuls (Coase theorem)

6.2.1 Création d'un marché additionnel

On s'arrêtera ici cette année....

6.3 ∗ Biens publics

Il existe différents types de biens, selon qu'il soit rival ou non (la consommation de ce bien par un agent affecte-t-elle la quantité disponible pour les autres agents ?), et qu'il soit excluable ou non (peut-on empêcher quelqu'un de le consommer ?). En combinant ces deux traits, on obtient quatre types de bien :

— *bien privés* (rival, excluable) : la nourriture, les voitures, les vêtements, etc
— *biens à péage* (non-rival, excluable) : canal +, une auto-route, un brevet
— *biens communs* (rival, non-excluable) : les ressources naturelles (poisson, cuivre, etc)
— *biens publics* (non-rival, non-excluable) : la connaissance, les emissions de radio, l'air, la défense nationale, les phares

On remarquera que rivalité et excluablité sont deux propriétés essentielles pour pouvoir définir un marché. La présence de bien publics va compromettre les résultats obtenus dans le premier et second théorème du bien-être.

6.4 Exercices

Exercice 6.1 (*Externalités 1*)**.** On considère une économie consistant en deux consommateurs (1 et 2), un producteur et deux biens (1 et 2). Les dotation initiales des consommateurs sont $e^1 = (10, 20)$ et $e^2 = (10, 32)$, respectivement. Le consommateur 1 possède l'entreprise, qui produit du bien 1 à partir du bien 2 suivant la technologie $q = g(z) = 2\sqrt{z}$ (pour éviter toute confusion, on désigne par z l'input en bien 2 et par q l'output en bien 1). La fonction d'utilité du consommateur 1 est $u^1(x, y) = \sqrt{xy}$. Le consommateur 2 subit maintenant une externalité de la part de l'entreprise : sa fonction d'utilité devient $u^2(x, y, z) = \sqrt{xy} - 2z$, où z est la quantité de bien 2 utilisée par l'entreprise (et comme précédemment, x et y, les quantités de bien 1 et bien 2 respectivement consommées par le consommateur 2).

1. Déterminer l'équilibre de cette économie avec externalité (on pourra simplifier les calculs en considérant la version sans externalité après justification).
2. Vérifier que l'allocation suivante : $q = 2$, $z = 1$, $(x^1, y^1) = (12, 22)$, $(x^2, y^2) = (10, 29)$ est réalisable et Pareto-domine l'équilibre trouvé à la question précédente.

Exercice 6.2 (*Externalité 2*)**.** On considère une économie, consistant en deux entreprises (1 et 2), un consommateur, un facteur de production et deux biens de consommation (1 et 2). Le consommateur détient initialement k unités du facteur de production (où $k > 0$ est un paramètre fixé) ; l'entreprise h, $h = 1, 2$. La fonction de production de l'entreprise 1 est $y_1 = g_1(z_1) = z_1$ tandis que celle de l'entreprise 2 est $y_2 = g_2(z_2) = az_2$ où $a > 0$ est perçu comme un paramètre fixé par l'entreprise 2. En fait, $a = y_1$ où y_1 est la quantité de bien 1 produite par l'entreprise 1 et représente donc une externalité de production. Le consommateur ne tire d'utilité que des biens de consommation ; sa fonction d'utilité est $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$.

1. Déterminer (en fonction de k) l'équilibre concurrentiel de l'économie en normalisant à 1 le prix de facteur de production. (Indication : ne tenir compte de l'externalité qu'après avoir déterminé l'équilibre en traitant a comme un paramètre).
2. Déterminer (en fonction de k) et représenter graphiquement l'ensemble des productions (y_1, y_2) réalisables (y_h désignant la quantité de bien de consommation h produit par l'entreprise h, $h = 1, 2$).
3. En identifiant la quantité de bien h consommée par le consommateur avec la quantité de bien h produite, déterminer (en fonction de k) la ou les productions réalisables (y_1^*, y_2^*) qui maximisent l'utilité du consommateur.
4. Comparer les solutions obtenues en 1 et 4.
5. On modifie l'économie en taxant le bien 2. Pour ce bien, on distingue le prix à la production p_2 et le prix à la consommation $p_2 + t$, où t désigne une taxe unitaire. Les recettes fiscales sont redistribuées au consommateur sous forme de transfert forfaitaire. Déterminer (en fonction de k et t) l'équilibre avec taxe.

6. Montrer qu'on peut choisir la taxe t pour que l'équilibre avec taxe calculé en 5. coïncide avec l'optimum calculé en 3.

Exercice 6.3 (*Bien public 1*)**.** On considère une économie avec deux consommateurs (1 et 2) dont les utilités sont, respectivement :

$$u^1(x^1, y) = \ln x^1 + 2 \ln y \quad \text{et} \quad u^2(x^2, y) = 2 \ln x^2 + \ln y$$

où $x^i > 0$ désigne la quantité de bien privé consommé par l'agent i et $y > 0$ la quantité de bien public produit dans l'économie. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = z$. La dotation initiale de chaque consommateur est de 15 unités de bien privé.

1. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) réalisables dans l'économie.
2. Caractériser l'ensemble des allocations (x^1, x^2, y, z) Pareto-optimales.
3. Déterminer l'optimum de Pareto associé à des prélèvements identiques pour les 2 consommateurs.
4. Déterminer l'équilibre de Lindahl et montrer que c'est un optimum de Pareto.
5. Déterminer l'équilibre avec souscription (en déterminant au préalable les fonctions de réaction $z^1(z^2)$ et $z^2(z^1)$) et montrer que ce n'est pas un optimum de Pareto.

Exercice 6.4 (*Bien public 2*)**.** On considère une économie comprenant deux consommateurs (1 et 2), un bien privé et un bien public. Les fonctions d'utilité des consommateurs, $u^i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, sont

$$u^1(x_1, y) = x_1^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} \quad \text{et} \quad u^2(x_2, y) = x_2^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

où x_i désigne la quantité de bien privé consommée par l'agent i et $y > 0$, la quantité du bien public. La fonction de production du bien public à partir du bien privé est $y = g(z) = \sqrt{z}$. La dotation initiale globale des deux consommateurs est de 10 unités de bien privé.

1. Vérifier si chacune des cinq allocations (x_1, x_2, y) suivantes est réalisable et/ou Pareto-optimale : $(3, 3, 2)$; $(5, 5, 0)$; $(2, 8, 2)$; $(2, 4, 2)$; $(3, 3.2, \sqrt{3.8})$
2. Justifier brièvement.