Exercices de Microéconomie de l'incertain
Dauphine- Licence MIDO

Table des matières

1 Premiers critères d'évaluation des loteries

1.1 Quelques exemples de fonction d'utilité

Soit le jeu de hasard suivant. Un dé est jeté, s'il tombe sur le 6, le banquier verse la somme de $g = 600$ Euros au joueur, sinon il ne verse rien. Le coût de participation à ce jeu est $q = 100$ Euros. Nous considérerons la situation d'un joueur disposant d'une richesse initial $w_0 = 10000$. Pour simplifier, on supposera que le joueur n'a la possibilité de jouer qu'une fois. Quelle sera sa décision si sa fonction d'utilité est U avec U définie comme suit ?

1. $U(W) = \sum \sqrt{p_i w_i}$
2. $U(W) = \sum p_i w_i$
3. $U(W) = \sum p_i \sqrt{w_i}$
4. $U(W) = \max w_i$
5. $U(W) = \min w_i$
6. $U(W) = \sum p_i w_i^2$
7. Pour chacune des fonctions précédemment définies, pour quelles valeurs de q, le joueur serait disposé à jouer au jeu de hasard ?

1.2 Un défaut des fonctions de type "sécurité d'abord"

Soit un individu dont les préférences sont représentées par une fonction du type *sécurité d'abord* (safety first) avec $t = 48$ et $k = 10$. Il doit choisir entre les deux loteries suivantes.

x_1	$p(x_1)$	x_2	$p(x_2)$
-5	$0,1$	-20	$0,01$
5	$0,2$	5	$0,29$
10	$0,7$	10	$0,7$

1. Laquelle choisira-t-il si $w_0 = 50$?
2. Supposons maintenant que $t = w_0$ (référence à la richesse initiale). Montrez que dans ce cas, quelle que soit la valeur de w_0, le choix de loterie restera toujours le même.
3. Montrez que la fonction linéaire de Markowitz partage ce défaut.

1.3 Une propriété de la fonction de Markowitz

La forme linéaire de la fonction de Markowitz pour un agent averse au risque est $U(W) = E(W) - k\sigma^2(W)$ avec $k > 0$. Serait-il plus général de considérer des fonctions de la forme $U(W) = aE(W) - b\sigma^2(W)$ avec $a, b > 0$?

1.4 La fonction de Markowitz (suite)

Soit un individu dont les préférences face au risque sont représentées par une fonction de Markowitz linéaire. Soient les deux loteries $L_1 = (1/4; 1/2; 1/4; 10; 12; 14)$ et $L_2 = (1/2; 1/2; 8; 20)$.

1. Supposons que l'individu préfère L_1 à L_2, est-il possible d'en déduire les préférences de cet individu entre L_2 et $L_3 = (1/2; 1/2; 4; 50)$?
2. Supposons que l'individu préfère L_1 à L_2, est-il possible d'en déduire les préférences de cet individu entre L_2 et $L_4 = (1/2; 1/2; 8; 40)$? Commentez.
3. Est-il suffisant de connaitre deux loteries différentes entre lesquelles un individu est indifférent pour pouvoir calculer sa fonction de Markowitz linéaire ? Idem pour une fonction safety first.
4. Supposons que notre individu soit indifférent entre L_1 et obtenir 11,5 avec probabilité 1. Calculez k.

1.5 Evaluez votre k !

. On supposera que vos préférences sont representées par une fonction de Markowitz linéaire

1. Soit la loterie $L' = (1/2; 1/2; 0; 10000)$. Quelle est la loterie dégénérée donnant un montant fixe avec probabilité 1 pour laquelle vous êtes indifférent avec L' ?
2. Déduisez en la valeur de votre k.
3. Soit la loterie $L'' = (1/2; 1/2; 0; 100)$. Quelle est la loterie dégénérée donnant un montant fixe avec probabilité 1 pour laquelle vous êtes indifférent avec L'' ?
4. Déduisez en la valeur de votre k.
5. Commentez.

1.6 Un premier exemple de partage du risque

Un individu A doté d'une richesse de 500 fait face à une loterie $\widetilde{x}_A$ qui avec probabilité 0,8 donne un gain de 0 et avec une probabilité de 0,2 donne un gain de -100.

1. Calculez l'espérance, la variance et l'écart-type de $\widetilde{x}_A$.
2. Exprimez la distribution de $\widetilde{w}_f$ la richesse finale de l'agent A et calculez son espérance, sa variance et son écart-type.

En plus de l'individu A, considérons l'individu B doté de la même richesse initiale qui fait face à $\widetilde{x}_B$ qui a les mêmes caractéristiques que $\widetilde{x}_A$ (mais les deux loteries sont indépendantes). Les deux individus s'accordent pour partager à parts égales le risque total auquel ils font face (chacun fait donc face à $1/2(\widetilde{x}_A + \widetilde{x}_B)$).

1. Quels sont les issues possibles de $Y = 1/2(\widetilde{x}_A + \widetilde{x}_B)$ et la probabilité de chacune d'entre elles ?
2. Exprimez la distribution de Y et calculez son espérance, sa variance et son écart-type.
3. Si la fonction d'utilité de l'investisseur i (avec $i = A; B$) est $U_i = E(\widetilde{w}_f^i) - k_i\sigma^2(\widetilde{w}_f^i)$ (avec $k_i > 0$), montrez que les deux individus profitent de l'accord passé entre eux.

Supposons que les deux individus se répartissent le risque de façon plus libre. L'individu A assume une fraction α du risque total et l'individu B, une fraction $1 - \alpha$ (avec $0 < \alpha < 1$).

1. Exprimez U_A et U_B en fonction de α
2. Soit $U = U_A + U_B$, le bien être total. Quelle est la valeur de α qui maximise le bien être total ? Commentez.

1.7 La représentation des situations extrêmes

En considérant une approche simplifiée des agents, on supposera que ceux-ci sont égoïstes. Par conséquent, il semble naturel d'associer le niveau de satisfaction $-\infty$ à l'état "je suis mort". On observe les comportements suivants chez les agents (simplifiés aussi). Soient les deux paniers de consommations suivants accessibles pour le même prix.

1. Un week-end à Biarritz, avec transport en train avec probabilité d'accident mortel nulle et satisfaction associée au week-end μ_1 ("équivalent argent").

2. Un week-end à Naples, avec transport en avion puis en voiture sur les routes sinueuses avec probabilité d'accident mortel θ_2 et satisfaction associée au week end en l'absence d'accident mortel, μ_2. On supposera que $0 < \theta_2$ et $0 < \mu_1 < \mu_2 < M$ avec M entier.

1. Représenter les deux paniers sous la forme de 2 loteries.
2. Soit la fonction d'utilité $U(W) = \sum p_i w_i$. Montrez que pour toutes valeurs des paramètres respectant les conditions définies, le même week-end est toujours préféré.
3. Expliquez ce résultat.

4. Suggérez une forme différente de fonction d'utilité telle que suivant les valeurs du paramètre, les deux loteries peuvent être choisies.
5. Quelle explication (non technique) fourniriez-vous au *paradoxe* de la question 1 ?

2 La théorie d'espérance d'utilité

2.1 Transformations des fonctions d'utilité élémentaires

Soit L l'ensemble des loteries définies sur le support $\{x_1; x_2; ...; x_N\}$.Montrez que deux fonctions d'utilité U et V sont associées à la même relation de préférences satisfaisant les axiomes vNM, $\succeq$ sur L si et seulement si il existe $a > 0$ et $b \in R$ tels que $V = aU + b$.

(indication : dans le cas où il existe $l_1 \succ l_0$, pensez à introduire α_l tel que $l \sim \alpha_l l_1 + (1 - \alpha_l) l_0$.)

2.2 Déterminez vos préférences !

On considère l'ensemble des loteries sur le support $(0; 100; 1000)$ (en Euros).

1. Soit une loterie qui donne 1000 avec probabilité p et 0 avec probabilité $1 - p$. Pour quelles valeurs de p préférez-vous cette loterie à une loterie qui vous donnerait 100 euros de façon certaine (il s'agit d'une réponse personnelle en fonction de vos préférences) ? On notera p_0 la borne inférieure de l'intervalle précédemment trouvé.
2. En supposant que vos préférences respectent les axiomes vNM, déterminez en fonction de p_0 vos préférences sur L.
3. Comparez suivant vos préférences les loteries suivantes.

x_1	$p(x_1)$	x_2	$p(x_2)$	x_3	$p(x_3)$
0	$0,5$	0	$0,05$	0	$0,7$
100	$0,25$	100	$0,75$	100	0
1000	$0,25$	1000	$0,2$	1000	$0,3$

2.3 L'axiome d'indépendance

Montrez que que si la relation de préférence $\succeq$ sur l'ensemble L de loteries satisfait l'axiome d'indépendance alors pour tout $\alpha \in]0; 1[$ et tout l, l' et $l'' \in L$, on doit avoir :

$$l \succ l' \text{ si et seulement si } \alpha l + (1 - \alpha) l'' \succ \alpha l' + (1 - \alpha) l''$$

et

$$l \sim l' \text{ si et seulement si } \alpha l + (1 - \alpha) l'' \sim \alpha l' + (1 - \alpha) l''$$

2.4 Le paradoxe d'Allais

Soient les loteries suivantes :

x_1	$p(x_1)$	x_2	$p(x_2)$	x_3	$p(x_3)$	x_4	$p(x_4)$
0	$0,9$	0	$0,91$	0	0	0	$0,1$
10000	$0,1$	10000	0	10000	1	10000	0
15000	0	15000	$0,09$	15000	0	15000	$0,9$

Un agent préfère strictement x_2 à x_1 et x_3 à x_4. Ses préférences concernant ces loteries respectent-elles les axiomes vNM (explicitez) ?

2.5 Vers la notion d'équivalent certain

Soient les deux loteries suivantes :

l_1	$p(l_1)$	l_2	$p(l_2)$
200	$0,7$	1200	$0,1$
0	$0,3$	0	$0,9$

Soient x_1 et x_2 les montant d'argent certains tels qu'un individu est indifférent entre la loterie l_i et le montant x_i.

Montrez que si les préférences sur les loteries sont monotones et transitives, l'individu préfèrera la loterie l_1 à la loterie l_2 si et seulement si $x_1 \geq x_2$.

3 Equivalent certain et notions afférentes

3.1 Aversion et goût pour le risque

Considérons un agent ayant des préférences représentées par une fonction d'utilité avec pour fonction d'utilité de Bernoulli associée u. Pour les différentes valeurs u suivantes, qualifiez l'attitude par rapport au risque de l'agent.

1. $u(x) = \ln(x)$
2. $u(x) = -e^{-x}$
3. $u(x) = x^3$
4. $u(x) = ax + b$ avec $a, b > 0$
5. $u(x) = \frac{x^r}{r}$ avec $r > 0$

3.2 Retour sur l'exercice 1

On reprend les éléments de l'exercice 1.

1. Parmi les 6 fonctions d'utilité de l'exercice 1 lesquelles sont des fonctions d'utilité espérée vNM ?
2. Supposons maintenant que la richesse initiale de l'agent est de 169 et que sa fonction d'espérance d'utilité soit de la forme $U(W) = \sum p_i \sqrt{w_i}$. Si le prix de la participation au jeu est de 25, quelle est le gain g minimum tel que l'agent accepte de participer ?
3. Supposons maintenant que le coût de participation est de 60 et le gain de 1380 ? Pour quel niveau de la richesse initiale W_0 est-il indifférent entre participer et ne pas participer ?

3.3 Demande de travail...

Soit un producteur dont la fonction de production est $q = \sqrt{l}$ (q étant la quantité produite et l le nombre de travailleurs). Il doit décider du nombre de travailleurs à embaucher pour le salaire 1. Le prix de vente, p est inconnu. Avec probabilité 1/2, il est égal à 10 et avec probabilité 1/2, il est égal à 30.

1. Calculez la demande de travail en supposant que ses préférences sont représentables par la fonction espérance.
2. Calculez la demande de travail en supposant que ses préférences sont représentables par la fonction de Markowitz linéaire avec $k = 1/100$.
3. Calculez la demande de travail en supposant que ses préférences sont représentables par la fonction d'espérance d'utilité de Cramer ($\sqrt{}$).

3.4 Fonctions de Bernoulli : fonctions affines par morceaux

Soit un individu doté d'une richesse initiale $w_0 = 100$ et à qui est proposé la loterie suivante.

x	$p(x)$
-10	$0,25$
10	$0,75$

La fonction d'utilité de l'individu est définie comme suit. $U(w) = 2w$ pour $w \leq 100$ et $U(w) = w + 100$ pour $w > 100$.

1. Calculez l'équivalent certain de la loterie, son prix de vente et sa prime de risque (utilisez une illustration graphique en plus des calculs).
2. Qu'advient-il de ces valeurs si U devient V définie par : $V(w) = 2w$ pour $w \leq 100$ et $V(w) = 0.5w + 150$ pour $w > 100$.
3. Interprétez les différences entre les résultats obtenus à chacune des deux premières questions.

3.5 Fonctions de Bernoulli : fonctions exponentielles

Soit un agent ayant pour fonction d'espérance d'utilité U avec fonction de Bernoulli associée u telle que $u(w) = -e^{-2w}$ et pour richesse initiale 1 et une loterie $\widetilde{x}$ définie par une fonction de distribution uniforme sur $[-0,4; 0,6]$.

1. Calculez l'équivalent certain, le prix de vente et la prime de risque associés à $\widetilde{x}$.
2. Comparez la valeur exacte de la prime de risque avec son approximation par la méthode d'Arrow-Pratt.

3.6 Fonctions de Bernoulli : fonctions quadratiques

Soit la fonction d'utilité de Bernoulli quadratique : $u(w) = w - \beta w^2$

1. Etudier les caractéristiques de cette fonction
2. Montrer que les préférences d'un individu pouvant être représentées par une fonction d'utilité de ce type ne dépendent que de l'espérance et de la variance de sa richesse finale.

3.7 Calculs de prime de risque

Soit une loterie $\widetilde{x}$ définie de la façon suivante :

x	$p(x)$
-1	$1/2$
0	$1/6$
3	$1/3$

Soit l'agent A disposant d'un patrimoine initial $W_0^A = 1$ et de la loterie $\widetilde{x}$ dont les préférences face au risque sont représentées par la fonction de Bernoulli suivante : $u(t) = \sqrt{t}$ pour tout $t \geq 0$ niveau de la richesse finale.

1. Calculez l'espérance d'utilité de l'agent A, l'équivalent certain pour lui de la loterie $\widetilde{x}$, son prix de vente, sa prime de risque et l'approximation par la méthode d'Arrow-Pratt de sa prime de risque.
2. Soit l'agent B qui ne diffère de l'agent A que par le montant de son patrimoine initial. $W_0^B = 100$. Calculez la prime de risque de l'agent B.
3. Comparez la prime de risque de l'agent A et celle de l'agent B. Commentez.

4 Compléments sur la mesure de l'aversion au risque

4.1 Risque partiel

Soit un individu ayant une richesse initiale w_0 et des préférences satisfaisant les axiomes vNM et représentées par une fonction de Bernoulli, u. On suppose qu'une fraction q avec $q \in [0;1]$ de la richesse de l'individu est placée sur un investissement risqué, le reste de sa richesse ne fait face à aucun aléa. Sa richesse finale peut alors s'écrire $\tilde{w}_f = (1-q)w_0 + qw_0(1+\tilde{x})$ avec $E(\tilde{x}) = 0$.

On définit $\hat{\pi}$ de la façon suivante : $u((1-q)w_0 + qw_0(1+\hat{\pi}) = E(u((1-q)w_0 + qw_0(1+\tilde{x}))$.

1. Donner une approximation de $\hat{\pi}$ (formule de type Arrow-Prat).
2. Donner la formule de l'aversion partielle au risque, son lien avec l'aversion relative et l'aversion absolue.

4.2 Risque partiel (suite)

Soit un individu ayant une richesse initiale de 10 euros et des préférences satisfaisant les axiomes vNM et représentées par une fonction de Bernoulli, $u(x) = x^{\frac{1}{2}}$. 6 euros font face à un aléa représenté par une variable aléatoire ayant une distribution uniforme sur $[-1;1]$. Le reste de sa richesse ne fait face à aucun aléa.

1. Calculer la valeur du $\hat{\pi}$ pour cet individu faisant face à ce risque
2. Donner la valeur approximée de $\hat{\pi}$.
3. Que pensez-vous de l'approximation ?

4.3 Prix de vente et prix d'achat

Nous allons nous pencher sur la différence entre le prix de vente t le prix d'achat d'une loterie. Soit un individu A ayant une préférence face au risque représentée par une fonction de Cramer. Il dispose d'une richesse initiale de 5 . Soit une loterie additive $\tilde{x}$ donnant -4 avec une probabilité $1/4$ et 4 avec une probabilité $3/4$.

1. Quel est le prix de vente et la prime de risque de la loterie pour l'individu A.
2. Montrer que le prix d'achat ne peut pas être égal au prix de vente précédemment obtenu.
3. Calculer une valeur approximative de ce prix d'achat
4. Soit un individu B ayant des préférences face au risque représentées par une fonction $u(w) = -e^{-\beta w}$, disposant du même capital initial et faisant face à la même loterie, calculer le prix de vente, la prime de risque et le prix d'achat de la loterie pour l'individu B.
5. Commentez

5 Comparaison de risques

5.1 Dominance stochastique à l'ordre 1

1. Expliquez l'expression suivante : "La richesse de M. Albert domine stochastiquement à l'ordre 1 celle de M. Benoît."
2. Exprimez rigoureusement la phrase relâchée : "La demande de micro-ordinateurs continue à être très aléatoire mais elle augmente."
3. Démontrez que la variable aléatoire$X = Y + a$ (avec Y variable aléatoire et $a \in R^+$) domine stochastiquement à l'ordre 1 Y.
4. Classez les 3 loteries suivantes par ordre de dominance stochastique à l'ordre 1, $L_1 = (10; 20; 30; 0,1; 0,8; 0,1)$, $L_2 = (10; 21; 30; 0,1; 0,8; 0,1)$, $L_3 = (10; 20; 30; 0,2; 0,6; 0,2)$

5.2 Dominance stochastique d'ordre 2

Soient les 3 loteries suivantes :

x	$p(x)$	y	$p(y)$	z	$p(z)$
0	1/2	-1	1/4	0	1/2
10	1/2	1	1/4	9	1/4
		10	1/2	11	1/4

1. Montrez que tout agent averse au risque préfère $\tilde{x}$ aux deux autres loteries. Montrez aussi que les préférences entre les deux autres loteries ne sont pas unanimes entre les agents averses au risque.

5.3 Risques d'incendie...

Un individu A possède un montant 100 et une maison de valeur 80. La probabilité d'un incendie impliquant la destruction totale de la maison est $0,1$. Un autre individu, B, dispose de la même fortune et de deux maisons chacun d'une valeur 40. Chacune des maisons fait face au même risque d'incendie de 0,1 (les incendies de bâtiment différents sont indépendants). Les individus ne sont pas assurés contre l'incendie.

1. Donnez l'expression des fonctions de répartition des fortunes finales de chacun des individus et représentez les graphiquement.
2. Montrez que A est dans une situation plus risquée que B. Donnez l'intuition de ce résultat.
3. Modifions un peu la situation de B et supposons que les risques d'incendie peuvent être corrélés. Chaque maison peut brûler avec une probabilité $0,1$ et le risque que la seconde maison brûle conditionnellement au fait que la première brûle et maintenant $q \in [0,1]$. Comparez les situations de risque de A et B en fonction des valeurs de q.

5.4 Billets de loteries...

Soient les loteries, L_1, L_2, L_3 et L_4 suivantes :

x_1	$p(x_1)$	x_2	$p(x_2)$	x_3	$p(x_3)$	x_4	$p(x_4)$
-2	1/2	-4	1/4	-2	1/4	-2	1/6
2	1/2	0	1/2	0	1/2	0	1/2
		4	1/4	2	1/4	2	1/3

On considère l'agent A disposant d'un patrimoine initial 4 et ayant une fonction d'utilité de Cramer.

1. Un entreprise de loteries vend des billets dont les espérances sont représentées par la loterie L_1. Calculez l'espérance d'utilité de l'agent A détenant un billet de loterie, l'équivalent certain de la situation de M. A, la prime de risque et son approximation.
2. Montrez que détenir deux billet correspond à un tirage représenté par la loterie L_2 (les tirages sont indépendants) et que détenir deux demi billet correspond à un tirage représenté par la loterie L_3
3. Montrez que tout agent averse au risque préfère L_3 à L_1 et L_1 à L_2.
4. Montrez que tout agent ayant des préférences monotones préfère L_4 à L_3.

5.5 Gestion des probabilités faibles

L'utilité espérée permet aussi de gérer des probabilités très faibles lorsqu'on est habitué à réfléchir avec des plus élevées.

Supposons qu'une agence de sécurité doive établir un critère permettant de définir dans quelles conditions une zone inondable doit être évacuée. La probabilité d'inondation est de 1%. Il y a 4 possibilités.

A) L'évacuation n'est pas nécessaire et elle n'est pas effectuée.

B) Une évacuation non nécessaire est effectuée.
C) Une évacuation nécessaire est effectuée.
D) Il n'y a pas d'évacuation et l'inondation cause une catastrophe.

Supposons que l'agence soit indifférente entre la situation B et la loterie qui donne A avec probabilité p et D avec probabilité $1-p$ et entre la situation C et la loterie qui donne B avec probabilité q et D avec probabilité $1-q$. On supposera aussi que $0 < p, q < 1$, que les axiomes de vNM sont satisfaits et que A est préférée à D.

1. Construisez une fonction d'utilité espérée pour cette agence.

   Soit les deux critères de décision différents :

   1- Critère 1 : Ce critère résultera en une évacuation dans 90% des cas d'inondation et une évacuation non nécessaire dans 5% des cas où il n'y pas d'inondation.

   2- Critère 2 : Ce critère résultera en une évacuation dans 95% des cas d'inondation et une évacuation non nécessaire dans 10% des cas où il n'y pas d'inondation.
2. Quelles sont les distributions de probabilité des 4 possibilités avec ces deux critères de décision ?
3. En utilisant la fonction d'utilité trouvée à la première question, donnez les conditions pour que le critère 1 soit préféré.

5.6 Un exemple de mutualisation du risque

Soient trois individus dotés de patrimoine initiaux identiques. Ces patrimoines sont constitués d'une dotation financière F non aléatoire et d'une voiture de valeur f. Avec une probabilité p, la voiture de chaque individu fait face à un accident et sa valeur devient 0. Les probabilités d'accident des trois voitures sont indépendantes. On note $\tilde{w}_1$, la variable aléatoire représentant la richesse de l'un de ses individus, $\tilde{w}_2$, la richesse de l'un de ses individus s'il associe avec un autre individu pour former une mutuelle et $\tilde{w}_3$, la richesse de l'un de ses individus s'il associe avec les deux autres individus pour former une mutuelle.

1. Exprimez, F, G et H, les fonctions de distribution associées respectivement à $\tilde{w}_1$, $\tilde{w}_2$ et $\tilde{w}_3$ et tracez les.
2. Vérifiez que $\tilde{w}_3$ DS2 $\tilde{w}_2$ et $\tilde{w}_2$ DS2 $\tilde{w}_1$

5.7 Une réinterprétation

1. Si on reprend les données de l'exercice précédent, peut-on les interpréter comme une représentation d'un risque de santé avec des frais médicaux et si oui comment ?

   2. En vous permettant de faire évoluer quelques éléments de la modélisation, dans quels cas des mutuelles "santé" sont inutiles ?

   3. Pour une mutuelle remboursant des frais médicaux, semble-t-il justifier de faire payer plus les riches (= salaires élevés) que les pauvres (= salaires faibles) ?

   4. Même question si la mutuelle santé inclut le paiement des salaires "perdus".

6 Décisions d'investissement en univers risqué

6.1 Fonction d'utilité de Bernoulli logarithmique

Considérez un individu caractérisé par une fonction d'utilité de Bernoulli $u(w_f) = ln(w_f)$. Il peut placer une partie a de sa richesse initiale, w_0, sur un actif risqué dont le rendement peut prendre deux valeurs $\tilde{x} \in \{\underline{x}; \bar{x}\}$ avec $\underline{x} < i < \bar{x}$ où i est le taux de rendement du placement sans risque. La probabilité de rendement faible est noté par q.

1. Déterminez la valeur analytique de a.
2. Etudiez les variation de a en fonction de q et de w_0.
3. Application numérique : calculez a lorsque $\tilde{x} \in \{-0,04; 0,2\}$, $q = 0,55$, $i = 0,06$ et $w_0 = 10000$.

6.2 Fonction d'utilité de Bernoulli exponentielle et loi normale

Soit un individu caractérisé par une fonction d'utilité de Bernoulli $u(w_f) = -e^{-\beta w_f}$. Il peut placer une partie a de sa richesse initiale, w_0, sur un actif risqué dont le rendement $\tilde{x}$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2.

1. Montrez que l'espérance d'utilité sera alors :
   $E(u(\tilde{w}_f)) = -\int e^{-\beta[(1+i)w_0+(x-i)a]-\frac{1}{2}\beta^2a^2\sigma^2}dx$.
2. Déterminez la valeur analytique de a pour un individu maximisant son espérance d'utilité.
3. Comparez le résultat obtenu avec d'autres critères de choix dans l'incertain.
4. Faites un dessin de $u(w_f)$ pour comparer le cas β faible au cas β élevé.
5. Comment varie le choix de a avec β ? Interprétez ce résultat avec les dessins de fonction d'utilité.
6. Comment varie le choix de a et $\frac{a}{w_0}$ avec w_0 ?
7. Application numérique : calculez a lorsque $\mu = 0,068$, $\sigma = 0,038736$, $i = 0,06$, $\beta = 0,000034$ et $w_0 = 10000$.

6.3 Assurance et asymétrie d'information

Soit une population constituée de deux groupes de même taille d'individus. Les individus du groupe A disposent d'une richesse initiale de 100 qui ne fait face à aucun aléa et d'une richesse de 100 qui fait face à un aléa. celle-ci peut disparaitre avec une probabilité $p_A = 1/10$. la fonction d'utilité des individus est de la forme vNM avec $u(w) = -\exp(-w/2)$. Les individus du groupe B ont les mêmes caractéristiques si ce n'est que la probabilité que leur richesse aléatoire disparaisse est de $3/10$.

Une assurance se propose d'assurer les individus en coassurance avec un niveau de couverture a et un taux de chargement $1/5$.

Pour commencer, on supposera que l'assureur peut parfaitement distinguer à quel groupe chaque individu appartient.

1. En supposant que les individus du groupe A peuvent librement choisir leur taux de couverture quel taux choisiront-ils ?

2. Calculer l'accroissement d'utilité espérée associée à la disponibilité de l'assurance pour un individu du groupe A.

3. En supposant que les individus du groupe B peuvent librement choisir leur taux de couverture quel taux choisiront-ils ?

4. Calculer l'accroissement d'utilité espérée associé à la disponibilité de l'assurance pour un individu du groupe B.

Supposons que le l'assureur ne puisse pas distinguer les deux groupes, il considère donc le taux moyen de sinistralité de $1/5$.

5. Quels seront alors les choix des deux population d'assurés ? Quel problème cela pose-t- il ?

6. Suggérez deux solutions à l'assureur pour résoudre ce problème (une restreignant les possibilités d'assurance et une autre jouant sur le taux de sinistralité).

7. Evaluez les pertes pour chacun des groupes d'individu avec chacune des deux propositions.

6.4 Choix d'assurance et aversion au risque

On considère une population où chaque individu a la fonction d'utilité de Bernoulli $u(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ (avec $\lambda > 0$) et court le risque de perdre 1000 Euros. Pour 90% de la population, le risque est faible et la probabilité de perte de 1/10. Pour 10% de la population, le risque est élevé et la probabilité de perte de 6/10. On suppose que les risques de chaque individu sont indépendants. Une compagnie d'assurance propose d'assurer complètement contre ce risque les individus. La compagnie est encadrée et reglementée et doit donc proposer un contrat au coût actuariel (pas de frais de structure).

1. Donnez l'expression du degré d'aversion absolue pour le risque des individus de cette population.
2. Soit $\lambda = 0,001$, calculez l'équivalent certain, le prix de vente et la prime de risque d'un individu à risque élevé, non assuré et disposant d'une fortune initiale égale à 3000 Euros.

   (*Pour la suite, on ne tient pas compte de la fortune initiale des individus.*)
3. Montrez qu'en l'absence d'assurance, quel que soit λ, l'utilité espérée d'un individu à risque faible est supérieure à celle d'un individu à risque élevé.
4. Déterminez la condition sur λ pour qu'un individu à risque faible souscrive un contrat d'assurance de prime P.
5. Déterminez la condition sur λ pour qu'un individu à risque élevé souscrive un contrat d'assurance de prime P.
6. Calculez le montant de la prime si tous les individus s'assurent.
7. A partir des questions précédentes, déterminez la condition sur λ pour que l'économie ait un équilibre où tous les individus souscrivent une assurance.
8. Calculez le montant de la prime si seuls les individus à risque élevé s'assurent.
9. A partir des questions précédentes, déterminez la condition sur λ pour que l'économie ait un équilibre où seuls les individus ayant un risque élevé souscrivent une assurance.