Equilibre général

Une introduction

Jean-Marc Tallon

Table des matières

Remerciements

Cet ouvrage est issu d'un enseignement donné à l'Université de Cergy-Pontoise et à l'Université Evry-Val d'Essonne. Je tiens à remercier Robert Gary-Bobo et Alain Trannoy qui m'ont fait confiance pour dispenser ce cours à l'Université de Cergy-Pontoise. Je remercie également Thierry Laurent pour m'avoir donné la responsabilité de ce cours à l'Université Evry-Val d'Essonne. Je m'excuse auprès des étudiants qui ont du subir les premières versions de cet ouvrage. Ils ont largement contribué au résultat final.

J'ai bénéficié des conseils et de l'aide de nombreuses personnes. Je tiens à remercier tout particulièrement Mélika Ben-Salem, Martine Carré, Arnold Chassagnon, Jean-Pierre Drugeon, Emmanuel Even, Patrick Fève, Jean-Pascal Gayant, Eric Langlais, Michel Martinez et Muriel Roger.

Les remarques détaillées de Lionel Fontagné ont permis d'améliorer l'ouvrage sur de nombreux points. Je l'en remercie sincèrement.

La version finale de cet ouvrage doit beaucoup à Jérôme Glachant qui, par ses commentaires sans concession, a su me convaincre de modifier en profondeur certaines parties. Merci.

Chapitre 1

Introduction

Le modèle d'équilibre général[1] est sans doute le modèle le plus achevé de la théorie économique. Quelque peu paradoxalement, ce modèle est un modèle macro-économique, puisqu'il a vocation à parler d'une économie dans son ensemble, alors qu'il peut être considéré comme le point d'aboutissement de l'approche micro-économique. Le but essentiel de ce modèle est de proposer une étude du mécanisme d'allocation de ressources rares par le marché. Ce mécanisme, sur lequel nous reviendrons tout au long de cet ouvrage possède un certain nombre de propriétés remarquables qu'il conviendra de dégager et dont il faudra cerner les limites. Pour l'instant, nous nous contenterons d'une mise en perspective générale de questions qui seront traitées de manière plus détaillée dans la suite de cet ouvrage.

1.1 L'équilibre d'une économie

Si on posait à "l'homme de la rue" la question suivante :

Qu'adviendrait-il d'une économie composée de nombreux individus agissant égoïstement, dans leur intérêt propre ?

La réponse probable qu'on obtiendrait serait : le chaos, la loi de la jungle.

Or, la réponse des économistes ("néo-classiques") est totalement différente. C'est l'objet de l'étude du modèle d'équilibre général de montrer d'où vient cette différence, s'il existe une réponse "universelle" à cette question, si celle-ci est réaliste...

1.1.1 L'équilibre, une situation harmonieuse

La réponse à la question posée ci-dessus est, en caricaturant, la même depuis 1776, développée à l'origine par A. Smith. On relève ainsi dans l'ouvrage de K. Arrow et F. Hahn[2], synthèse des avancées de la théorie de l'équilibre général au début des années 1970, la réponse suivante, associée au courant néo-classique :

> "Une économie décentralisée, où chacun agit dans son intérêt propre en fonction des signaux de prix, permet une répartition des ressources disponibles qui peut être regardée comme étant préférable, dans un sens bien précis, à une classe assez étendue d'alternatives. De plus, le système de prix opère de manière à établir cette cohérence." (K. Arrow et F. Hahn, *General Competitive Analysis*, éditions North-Holland, 1971, p. vii.)

[1] A vrai dire, il vaudrait sans doute mieux parler de familles de modèles, tant les extensions du modèle originel ont été nombreuses.

[2] *General Competitive Analysis*, éditions North Holland, 1971.

Ainsi, l'étude de l'équilibre général d'une économie permettrait de montrer que, sous certaines hypothèses, la concurrence entre individus conduit l'économie à une situation efficace, où il n'y a aucun gaspillage de ressources rares. Si ces hypothèses sont vérifiées (nous les détaillerons au cours de cet ouvrage) alors la concurrence parfaite est optimale : les "décideurs" devraient en conséquence tout faire pour l'instaurer dans l'économie (ou du moins tout faire pour qu'elle soit possible). Ce modèle constituerait ainsi le fondement "scientifique" du libéralisme économique.

Plusieurs points de cette "réponse des économistes" méritent un commentaire.

– Premièrement, le cadre est celui d'une économie décentralisée, dans laquelle l'échange est volontaire. L'équilibre général s'intéresse donc à une économie de marché, dans laquelle les agents agissent en fonction des prix observés, qu'ils considèrent comme donnés (c'est là l'hypothèse de concurrence parfaite), dans un but purement égo‹ste. Le cadre institutionnel est donc donné : on n'étudie pas par exemple, une économie planifiée, ou une économie de type esclavagiste.
– Deuxièmement, il s'agit d'une approche micro-économique même si ultimement c'est l'économie dans son ensemble qui nous intéresse ; on part des individus pour comprendre le fonctionnement de l'économie. En particulier, il conviendrait, même si cela n'est pas souvent fait, d'expliquer les organisations qui émergent dans cette économie : pourquoi existe-t-il un gouvernement ? des entreprises ? etc... L'approche néo-classique "pure" veut expliquer toutes ces formes d'organisation à partir de motivations individuelles et a donc tendance à rejeter toute analyse dans laquelle ces mêmes institutions auraient des raisons d'être qui ne peuvent se résumer au désir des individus. La théorie néo-classique a d'ailleurs été souvent critiquée à ce propos. Il s'agit certes d'une limite de cette approche. Toutefois, adopter ce cadre d'analyse permet une meilleure compréhension de nombreux phénomènes économiques, sans pour autant nier l'intérêt d'apports extérieurs (sociologiques, historiques,...) permettant de remettre l'économique à sa "juste place". Nous verrons d'ailleurs dans cet ouvrage que dans de nombreuses circonstances la théorie ne permet pas une prédiction unique (par exemple lorsqu'il existe plusieurs équilibres) ; dans ce cas de figure, il faut avoir recours à des arguments extérieurs au modèle, voire des arguments extra-économiques, pour arriver à une prédiction théorique.
– Troisièmement, il est implicitement supposé que l'économie laissée à elle-même atteint un équilibre. La notion d'équilibre est empruntée à la physique : on dit d'un système qu'il est à l'équilibre s'il a atteint une situation de laquelle il ne s'écarte pas. Plus spécifiquement, un équilibre dans une économie concurrentielle sera un système de prix tel que, lorsque les agents économiques observent ce système, les actions qu'ils décident sont optimales pour eux et compatibles entre elles :
  – chaque entreprise choisit son plan de production pour maximiser son profit au prix existant,
  – chaque ménage choisit le plan de consommation qui maximise son utilité sous sa contrainte budgétaire,
  – l'état de l'économie ainsi obtenu est réalisable, c'est-à-dire que l'offre est égale à la demande sur chaque marché.

  Une telle situation, où tout le monde agit de manière égo‹ste mais où toutes ces actions sont compatibles entre elles, n'a pas *a priori* de raison d'exister. Un des résultats "positifs" les plus puissants de la théorie de l'équilibre général est précisément de démontrer l'existence de cet équilibre, sous des hypothèses "raisonnables".
– Quatrièmement, le seul mécanisme de coordination existant entre les agents est le système de prix. En d'autres termes, les agents économiques n'ont besoin de connaître que les prix pour prendre leurs décisions, qui se trouveront être compa-

tibles entre elles : le vecteur de prix résume toute l'information nécessaire à leur prise de décision. Le mécanisme d'allocation des ressources à l'œuvre est ainsi très parcimonieux en termes d'information. Nous reviendrons par la suite sur ces affirmations, qui méritent d'être qualifiées (voir notamment le chapitre 4).
– Enfin, l'équilibre ainsi atteint est optimal. Il n'est donc pas possible de faire "globalement" mieux (mais il conviendra de définir précisément ce qu'on entend par "mieux") que l'équilibre. Cette proposition normative forte est sans doute celle prioritairement associée à la théorie de l'équilibre général, et qui permet aux uns et aux autres de se positionner par rapport à celle-ci. Nous verrons que pour cette proposition également, l'analyse doit être affinée ; nous étudierons par exemple des modèles issus en droite ligne de la théorie de l'équilibre général et pour lesquels l'optimalité de l'équilibre concurrentiel se trouve invalidée.

En conclusion, l'étude de l'équilibre général que nous allons entreprendre ici consiste à rendre précise la "réponse des économistes", c'est-à-dire à

– définir la notion d'équilibre, étant donné un cadre institutionnel,
– définir la notion d'optimum économique,
– établir les conditions sous lesquelles un équilibre existe,
– établir les conditions sous lesquelles un équilibre est un optimum.

1.1.2 Pourquoi étudier le modèle d'équilibre général concurrentiel ?

A priori, dans sa version la plus simple (et donc la plus répandue), c'est un modèle utopique et irréaliste, alors pourquoi vouloir l'étudier ? La réponse à cette question comporte plusieurs points :

– Tout d'abord, c'est le modèle le plus achevé, élaboré, en économie. Il constitue donc un point de repère théorique essentiel, à l'aune duquel il est possible d'évaluer les autres modèles existants.
– De par son aspect normatif (souvent, et quelque peu abusivement, résumé par l'idée que la concurrence est "bonne"), il est souvent fait appel à lui pour des raisons de politique économique. Il faut donc savoir de quoi est constitué ce modèle pour juger de la pertinence de ces recommandations.
– Puisque dans certaines versions de ce modèle "tout va toujours bien", il permet de mieux comprendre pourquoi dans la réalité, tout ne va pas toujours aussi bien. Puisqu'il explicite toutes les hypothèses nécessaires au résultat d'optimalité de l'équilibre concurrentiel, il permet de mieux comprendre pourquoi ce résultat n'est pas toujours vrai. C'est ainsi que nous serons amenés à parler des biens publics, ou des externalités qui posent des problèmes que le marché ne peut résoudre.
– Enfin, la théorie de l'équilibre général constitue, plus qu'un modèle particulier, un langage permettant de discuter de l'allocation de ressources rares dans une économie. Prenons un exemple. Les modèles que nous aborderons dans cet ouvrage reposent tous sur l'idée de concurrence parfaite. Toutefois, l'approche d'équilibre général peut également s'appliquer à des situations de concurrence imparfaite (les modèles d'équilibre général en concurrence imparfaite sont actuellement très souvent utilisés, par exemple en macro-économie[3] et en économie internationale[4]).

[3] Voir O.J. Blanchard, *Lectures on macroeconomics*, éditions MIT Press, 1989, ou G. Mankiw et D. Romer, *New Keynesian economics ; imperfect competition and sticky prices*, éditions MIT Press, 1991.

[4] Voir par exemple G. Grossman *Imperfect competition and international trade*, éditions MIT Press, 1992.

Les raisonnements menés dans le cadre de cette théorie se retrouvent d'ailleurs souvent, sous une forme ou sous une autre dans de nombreuses autres approches économiques. A ce titre, il nous semble important de bien maîtriser les mécanismes économiques à l'œuvre dans le modèle le plus "épuré", avant d'entreprendre l'étude de modèles plus complexes (et sans doute plus réalistes), mais dont l'articulation théorique est souvent très proche du modèle canonique. Un autre exemple est la théorie financière. Les modèles d'évaluation de prix d'actifs, qui atteignent parfois un degré de sophistication technique très élevé, reposent très souvent sur des mécanismes économiques dont la nature n'est pas différente de ceux du modèle simple à deux périodes que nous présenterons dans cet ouvrage.

1.1.3 Equilibre général *versus* équilibre partiel

Si la réponse des économistes, telle que nous l'avons présentée au travers de la citation de l'ouvrage de K. Arrow et F. Hahn, explique pourquoi nous utilisons une théorie de *l'équilibre* pour étudier la situation résultant de l'interaction d'agents sur les marchés, on peut se demander ce qui justifie le terme de "général". En effet, il existe une approche alternative, dite d'équilibre partiel, qui, cherchant essentiellement à simplifier l'analyse, isole un marché du reste de l'économie. Il s'agit ici de comprendre les atouts, mais également les inconvénients d'une telle approche, et notamment pourquoi elle ne rend pas une étude d'équilibre général redondante.

L'approche d'équilibre partiel, en se concentrant sur un seul marché, considère celui-ci indépendamment du reste de l'économie. Plus précisément, elle considère que des changements sur le marché étudié n'auront aucun impact sur le reste de l'économie, qu'il est ainsi possible de considérer comme donnée. Cette simplification peut se justifier pour certains marchés, mais est intenable lors de l'étude de certains problèmes. Les modèles d'échanges entre deux pays sont par exemple par essence des modèles d'équilibre général.

Prenons un autre exemple. Un gouvernement se pose la question de savoir s'il faut subventionner le logement. Il dispose de deux approches. La première est de se concentrer sur le marché du logement et d'étudier les conséquences, sur ce marché, d'une subvention au logement, en considérant le reste de l'économie comme fixe. C'est là l'approche d'équilibre partiel. Les conclusions qu'il en tirera, notamment pour savoir à qui profitera cette subvention, sont-elles "correctes" ? *A priori*, la réponse doit être négative. En subventionnant le logement, le gouvernement ne peut omettre qu'il risque de modifier largement les prix d'équilibre sur les autres marchés. En négligeant cette modification de la situation sur les autres marchés, l'analyse d'équilibre partiel peut ainsi conduire un décideur à commettre des erreurs dans l'appréciation des résultats d'une politique donnée.

1.1.4 Que faire avec les modèles d'équilibre général ?

Nous l'avons dit plus haut, les modèles d'équilibre général constituent une référence théorique importante. Toutefois leur intérêt réside également dans les applications qui se sont récemment multipliées. Les modèles d'équilibre général calculables[5] ont en effet pris une place primordiale dans l'analyse des politiques économiques. Un domaine

[5] Pour une présentation de ces modèles, voir K. Schubert, " Les modèles d'équilibre général calculable : une revue de la littérature", *Revue d'Economie Politique*, Novembre 1993, p775-825. Un recueil

d'application privilégié est ainsi l'étude de l'impact de réformes fiscales telle celle au Royaume-Uni ou aux Etats-Unis. Ces modèles permettent de déterminer, pour schématiser, qui du capital ou du travail supporte la charge d'une augmentation du taux d'imposition sur le capital par exemple.

Un autre domaine où l'utilisation de modèles d'équilibre général calculable est très développée est l'économie internationale. Les chercheurs de la Banque Mondiale ont pour leur part développé des modèles d'équilibre général appliqués aux pays en voie de développement. Un autre exemple est l'intégration européenne. L'étude de l'impact économique de l'unification européenne ne peut raisonnablement être menée sans entreprendre *de facto* un "raisonnement de type équilibre général", dans lequel les interactions entre les différents marchés sont cruciales[6].

Cet ouvrage ne dira rien des applications concrètes des modèles théoriques étudiés. Le lecteur devra toutefois garder en mémoire que de telles applications sont maintenant très répandues, et reposent toutes sur des raisonnements du type de ceux dont nous allons entreprendre l'étude.

1.2 Historique

On attribue en général à A. Smith l'idée qu'une "main invisible" régit l'économie en concurrence parfaite. Son argumentation, littéraire, était basée sur l'idée de spécialisation des tâches, et semble assez éloignée du modèle d'équilibre général tel que nous le connaissons maintenant.

Vient ensuite A. Cournot, qui le premier formule en 1838, l'idée d'un équilibre général en termes "modernes" :

> "En réalité, le système économique est un ensemble dont toutes les parties se tiennent et réagissent les unes sur les autres. Il semble donc que pour trouver la solution complète et rigoureuse des problèmes relatifs à quelques parties du système économique, on ne puisse se dispenser d'embrasser le système tout entier. Or, cela surpasserait les forces de l'analyse mathématique et de nos méthodes pratiques de calculs." (*Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, Librairie des sciences politiques et sociales, 1838).

Le premier à révéler que ce problème admet théoriquement une solution fut L. Walras[7] en 1874. Sa contribution fut décisive, et c'est pourquoi l'on parle aussi bien de l'équilibre walrasien, que de l'équilibre général de concurrence parfaite.

Selon L. Walras, il faut mettre sous forme mathématique, et plus spécifiquement sous la forme d'un système d'équations, le fonctionnement d'une économie. En effet, seul un système d'équations simultanées peut rigoureusement prendre en compte les interdépendances des variables décrivant l'économie. La cohérence interne du système

intéressant d'articles traitant de différentes applications est le livre de H. Scarf et J. Shoven, *Applied general equilibrium analysis*, éditions Cambridge University Press, 1984. Voir également J. Shoven et J. Whalley, *Applying general equilibrium*, éditions Cambridge University Press, 1992.

[6] Le lecteur intéressé est renvoyé à la lecture de W. Perraudin et T. Pujol, "L'harmonisation fiscale en Europe et l'économie française : une approche en équilibre général", *Observations et Diagnostics Economiques*, Juillet 1991, p. 245-272.

[7] *Eléments d'économie pure*, éditions L. Corbaz, Lausanne, 1874.

et du mécanisme de formation des prix en concurrence parfaite provient alors, selon L. Walras, de l'égalité du nombre d'équations et du nombre d'inconnues. Même si cette approche était mathématiquement peu rigoureuse, L. Walras orienta la recherche ultérieure, en ce qu'il mis l'accent sur l'existence d'une solution, avant de s'interroger sur son optimalité.

Cette question de l'existence dut cependant attendre les années 1930 pour trouver une réponse satisfaisante (avec notamment la démonstration de l'existence d'un équilibre général, proposée à Vienne par A. Wald).

Toutefois, la théorie de l'équilibre général telle que nous la connaissons aujourd'hui provient de la formulation de K. Arrow , G. Debreu et L. McKenzie dans les années 1950. Les questions d'existence et d'optimalité sont alors "définitivement réglées", alors qu'il faudra attendre les années 1970 pour trouver une première réponse aux questions d'unicité et de stabilité de l'équilibre.

La théorie a alors évolué pour prendre en compte de nouveaux éléments, tels que l'asymétrie d'information entre les agents, le caractère dynamique des économies. Elle se tourne maintenant vers des problèmes de plus en plus techniques, mais a également investi de nombreux domaines, tels que la macroéconomie, l'économie du développement, de l'environnement etc...

1.3 Présentation

Le fait que la théorie de l'équilibre général s'est développée si tardivement, est en partie dû à l'absence des techniques mathématiques que la solution des problèmes posés requérait. La place des mathématiques est donc très importante dans cette théorie, même si la plupart des concepts étudiés peuvent être compris avec un niveau modeste en mathématiques. La difficulté principale de l'exposé qui suit réside donc en son caractère abstrait ; en revanche, il ne demande pas de connaissances très approfondies en mathématiques. Nous avons choisi de présenter les outils mathématiques utilisés au fur et à mesure, en insistant sur le contenu économique des hypothèses mathématiques utilisées, plutôt que de présenter tous ces outils dans une annexe mathématique nécessairement plus technique. Cependant, il nous a semblé utile de faire une exception à cette règle. En effet, les notions de convexité et de (quasi-) concavité revenant à de nombreux endroits, nous avons décidé de présenter, le plus simplement possible, les définitions et principales propriétés des fonctions convexes, concaves et quasi-concaves dans une annexe (chapitre 16).

Dans cet ouvrage, nous avons choisi de proposer des démonstrations formelles, seules capables de préciser les conditions de validité de telle ou telle proposition, de la plupart des résultats. Toutefois, avant de démontrer un résultat formel, nous nous sommes efforcés de développer une intuition économique, reposant souvent sur une approche graphique simple, permettant de comprendre la portée du résultat en question, d'en saisir les conditions de validité, et de maîtriser les mécanismes économiques sous-jacents.

Au total, nous avons recherché un équilibre entre le développement d'intuitions économiques et une approche plus abstraite et plus formelle. Le lecteur que l'aspect formel rebute devrait ainsi pouvoir se faire une idée assez précise de la manière dont un modèle d'équilibre général fonctionne en se concentrant sur les exemples et les illustrations graphiques.

Comme nous l'avons dit au début de cette introduction, la théorie de l'équilibre général regroupe un ensemble de modèles, parfois très différents entre eux et dont les résultats peuvent être radicalement opposés. Toutefois, ils adoptent tous le “langage commun” de l'équilibre général. Il a donc fallu opérer un choix parmi ces modèles, leur grande diversité excluant un traitement exhaustif. Le modèle de concurrence parfaite statique est un point de départ logique. En revanche l'extension de ce modèle canonique peut se faire dans de multiples directions. Nous avons choisi de nous concentrer plus particulièrement sur une “extension dynamique” simple de ce modèle, incluant également le traitement de l'incertitude. Toutefois, toujours dans l'idée de garder un cadre théorique le plus cohérent possible, nous n'avons pas traiter des modèles dynamiques, souvent rencontrés en finances et en macroéconomie, dans lesquels les agents (souvent supposés identiques) ont un horizon de vie infini, car les techniques utilisées pour l'étude de tels modèles (optimisation dynamique notamment) sont assez différentes de celles utilisées dans cet ouvrage.

Une extension du modèle canonique que nous n'aborderons pas non plus est le cadre de la concurrence imparfaite. Les modèles théoriques généraux, souvent très divers, nécessitent tous d'avoir recours à la théorie des jeux, outil que nous ne développerons pas ici[8]. De plus, du fait de la diversité de ces modèles, il est parfois difficile de dégager la portée théorique générale de tel ou tel résultat. Il nous a donc semblé que considérer de tels modèles n'était pas totalement en accord avec la logique de cet ouvrage, ce qui ne préjuge évidemment en rien de l'intérêt de tels modèles.

La démarche adoptée dans cet ouvrage est progressive. Nous rappelons dans un premier temps la théorie du consommateur et du producteur. L'accent sera mis principalement sur les propriétés de la somme des offres et des demandes individuelles. L'étude du comportement de ces acteurs économiques ne nous sera en effet utile qu'en ce qu'elle permet de dégager certaines propriétés au niveau agrégé. Nous abordons ensuite l'étude de l'interaction de ces individus. Avant d'entreprendre une analyse approfondie d'un mode d'interaction particulier (celui implicite à la théorie de l'équilibre de concurrence parfaite), nous discutons dans le chapitre 4 plusieurs modélisations possibles. Le chapitre suivant propose une première approche des thèmes essentiels de cet ouvrage, mais dans un modèle simplifié, à savoir un modèle d'équilibre partiel. Commence ensuite l'étude de l'équilibre général à proprement parler, d'abord dans le cadre d'une économie d'échanges. Le chapitre 6 aborde de manière principalement graphique les problèmes de l'existence, de l'unicité et de la stabilité de l'équilibre. Il aborde, toujours à l'aide de représentations graphiques élémentaires, le thème de l'optimalité de l'équilibre ainsi que celui de la décentralisation des allocations optimales. Les deux chapitres suivants reprennent plus formellement les thèmes développés graphiquement dans le chapitre 6. Ces deux chapitres, dans lesquels la plupart des résultats sont démontrés peuvent être omis dans un premier temps. Enfin, le chapitre 9 propose une étude alternative du mode d'allocation de ressources rares, qui co‹ncide avec celle réalisée par le mécanisme de marché.

Le reste de l'ouvrage est consacré à diverses extensions du modèle “simpliste” élaboré dans les chapitres consacrés au modèle d'échange statique. Nous introduisons la production dans le chapitre 10. Le chapitre suivant propose une étude d'une première “défaillance” du marché : son incapacité à traiter efficacement les problèmes liés à la présence d'externalités ou de biens publics. Nous entreprenons alors la présentation de plusieurs manières d'introduire le temps et l'incertain dans le modèle statique initial. Les deux chapitres consacrés au temps et à l'incertain sont construits sur des exemples simples qui permettent de mettre en valeur les importants problèmes de modélisation qui se posent (modélisation des anticipations des agents par exemple). Le chapitre 14 revient sur une controverse importante, à savoir le rôle informatif des prix. La question que nous chercherons alors à résoudre est la suivante : comment modéliser l'idée que

[8]Le lecteur intéressé pourra consulter R. Gary-Bobo, *Equilibre général et concurrence imparfaite*, éditions du CNRS, 1989

les prix dépendent de l'information détenue en propre par chaque agent, agrége celle-ci, et la révèle au marché dans son ensemble ? Enfin, le chapitre 15 étudie un modèle dynamique dont l'horizon est infini, le modèle à générations imbriquées, dans lequel l'équivalence entre équilibre et optimum est rompue, et qui sert ainsi fréquemment de support à des modèles macroéconomiques.

Chapitre 2

La théorie du consommateur

2.1 Introduction

Avant de vouloir étudier l'équilibre d'un système économique, il nous faut bien entendu en étudier les composantes. Nous commençons donc par l'étude du consommateur. Il s'agit ici de revoir certains faits connus de la théorie du consommateur, en se familiarisant avec les notations adoptées par la suite et surtout avec la logique de la démarche de l'équilibre général. Il ne s'agit pas en particulier de traiter la théorie du consommateur dans tous ses détails, le lecteur étant renvoyé par exemple aux manuels de H. Varian[9], de A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green[10], ou de F. Bourguignon, P.A. Chiappori et P. Rey[11], pour une étude plus complète. Une présentation plus intuitive de la théorie du consommateur se trouve dans le manuel de A. Schotter[12].

Le but premier de ce chapitre est d'étudier la forme que peut prendre la demande émanant des consommateurs. En particulier, nous nous interrogerons sur l'existence éventuelle d'une quelconque loi de la demande, à savoir une relation décroissante entre la consommation d'un bien et son prix. Nous procèderons en deux temps.

- Dans un premier temps, nous définirons la notion de rationalité du consommateur et établirons les objectifs de ce dernier. Ceci nous permettra de mettre en évidence un certain nombre de restrictions que la rationalité du consommateur impose sur la forme des fonctions de demande.
- Dans un second temps, nous essaierons d'agréger ces fonctions de demande individuelles. En effet, dans une optique d'équilibre général, ce n'est pas tant la demande individuelle que la demande globale qui nous intéresse. Nous verrons alors que la somme des demandes individuelles ne conserve que très peu de propriétés de ces dernières. La rationalité individuelle n'impose que peu de restrictions au niveau agrégé.

2.2 Les caractéristiques définissant un consommateur

Le terme de "consommateur" sera utilisé pour désigner toute entité économique (une personne, un ménage, une tribu,...) qui prend des décisions de consommation. Dans cette section, nous définissons les objectifs et contraintes du consommateur. Nous supposons qu'il existe H individus dans notre économie, et indiçons les consommateurs

[9] *Analyse micro-,conomique*, éditions De Boeck, 1995.
[10] *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995.
[11] *Théorie micro-économique*, éditions Fayard, 1992.
[12] *Microéconomie, une approche contemporaine*, éditions Vuibert, 1996.

par l'indice h ($h = 1, \ldots, H$). Il existe C biens dans l'économie, indicés par c, ($c = 1, \ldots, C$).

2.2.1 L'ensemble de consommation

La consommation d'un individu h quelconque est soumise à des restrictions, autres que celles relevant de la contrainte budgétaire que nous étudierons plus loin. Une contrainte assez évidente est que la quantité consommée d'un bien c quelconque doit être positive.

Nous notons x_h^c la quantité du bien c consommée par l'individu h. La contrainte de positivité de la consommation s'écrit donc $x_h^c \geq 0$, et ce pour tout bien $c = 1, ..., C$. En notant x_h le vecteur $(x_h^1, ..., x_h^C)$ des C biens consommés par l'individu h, la contrainte s'écrit, vectoriellement [13], $x_h \geq 0$. Nous supposerons que l'ensemble de consommation des agents est égal à $\mathbb{R}_+^C$, c'est-à-dire qu'ils peuvent *a priori* choisir n'importe quel panier de biens dans lequel la quantité de chaque bien est positive ou nulle, *i.e.* $x_h \in \mathbb{R}_+^C$.

Faisons quelques remarques à ce stade :

- Nous avons choisi 0 comme étant la borne inférieure de la consommation. Il est toutefois possible de supposer qu'un individu ne consommant pas de certains biens vitaux serait amené à disparaître. En d'autres termes, nous pourrions imposer un minimum vital, et supposer qu'un individu doit, pour survivre, consommer au moins une quantité $a^c > 0$ du bien c. Dans ce cas l'ensemble de consommation serait l'ensemble des x_h tel que $x_h^c \geq a^c > 0$, pour tout c. Imposer de telles bornes inférieures à la consommation ne modifierait en rien l'analyse, mais compliquerait singulièrement les notations. Nous supposerons donc par la suite que l'ensemble de consommation est toujours égal à $\mathbb{R}_+^C$.
- Le choix de cet ensemble implique qu'il n'existe pas de borne supérieure à la consommation, et exclut donc toute saturation physique des consommateurs : ceux-ci peuvent avaler autant de douzaines d'huîtres qu'ils veulent (si toutefois ils peuvent se les acheter), sans jamais saturer[14].
- Par ailleurs, le choix de l'ensemble des réels implique que les biens sont parfaitement divisibles, puisqu'il est possible de consommer π chocolats. Nous excluons donc *a priori* les biens indivisibles (dont il n'est possible de consommer qu'une quantité entière, comme par exemple une table) de l'analyse.
- Pour l'instant, le consommateur ne fournit pas de prestation (telle que le travail), qui serait comptée négativement. Nous reviendrons plus tard sur ce point, le travail étant traité comme un "bien négatif".

---

[13] Nous adopterons les conventions d'écriture suivantes : soit $x \in \mathbb{R}^n$

* $x \geq 0 \Longleftrightarrow x_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, ..., n$

* $x > 0 \Longleftrightarrow x_i \geq 0, \text{ pour } i = 1, ..., n$ et $x_i > 0$ pour au moins un i

* $x \gg 0 \Longleftrightarrow x_i > 0, \text{ pour } i = 1, ..., n$

[14] L'utilité marginale (voir plus bas) de la vingtième douzaine sera sans aucun doute très faible, voire négative. L'hypothèse d'absence de saturation physique se situe toutefois sur un autre plan, à savoir qu'elle postule simplement que le consommateur peut *a priori* envisager de manger vingt douzaines.

2.2.2 Les préférences et la fonction d'utilité

2.2.2.1 Hypothèses

Une des hypothèses de base de la théorie du consommateur est que celui-ci peut toujours classer de manière cohérente différents paniers de biens, afin de déterminer quel est celui qu'il préfère. En d'autres termes, nous supposons qu'un consommateur peut ordonner (de manière subjective bien entendu) tout l'ensemble de consommation. Il possède un préordre, noté $\succeq$, qui lui permet de décider si le panier x est meilleur, plus désirable, que le panier y. Nous noterons $x \succeq y$ le fait que x est préféré ou indifférent à y. $x \succ y$ signifie que x est strictement préféré à y, tandis que $x \sim y$ se lit : "le consommateur est indifférent entre x et y".

La "rationalité" du consommateur est une notion qui admet plusieurs définitions, selon le cadre d'analyse. Nous dirons ici qu'un consommateur est rationnel si ses préférences sont représentées par une relation d'ordre vérifiant l'hypothèse suivante :

Hypothèse : *Le préordre est*

- *complet : pour tout x, $y \in \mathbb{R}_+^C$, $x \succeq y$ ou $y \succeq x$,*
- *transitif : pour tout x, y et $z \in \mathbb{R}_+^C$, si $x \succeq y$ et $y \succeq z$ alors $x \succeq z$,*
- *continu : pour tout $y \in \mathbb{R}_+^C$, les ensembles $\{x \mid x \succeq y\}$ et $\{x \mid y \succeq x\}$ sont fermés.*

Le fait que le préordre soit complet signifie que face à deux paniers, le consommateur peut toujours décider s'il préfère l'un à l'autre, ou si les deux lui sont indifférents.

La transitivité quant à elle impose une certaine cohérence des choix du consommateur. S'il préfère le panier x au panier y et y à z, il serait alors incohérent ("irrationnel") pour lui de préférer strictement z à x. Enfin, la continuité signifie que les préférences des agents ne peuvent pas "sauter" : considérons deux suites de paniers de biens, $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ convergeant respectivement vers le panier x et le panier y ; si un agent préfère le panier x_n au panier y_n pour tout n, alors il doit préférer le panier x au panier y.

Un résultat important de la théorie du consommateur est que ce préordre, qui est un outil mathématique assez difficile à manier, peut être représenté par une fonction d'utilité u de $\mathbb{R}_+^C$ dans $\mathbb{R}$, si les hypothèses ci-dessus sont vérifiées. Il faut rappeler que la fonction d'utilité u ainsi définie ne l'est pas de manière unique, et qu'elle ne correspond qu'à une notion ordinale : elle indique si un panier est préféré à un autre mais ne mesure pas l'intensité avec laquelle celui-ci est préféré à celui-là. Elle n'est donc définie qu'à une fonction croissante près.

Prenons un exemple afin de comprendre ceci. Le préordre de préférences nous permet uniquement de dire si un consommateur préfère une orange à une banane et non d'affirmer qu'il serait deux fois plus heureux s'il mangeait une orange plutôt qu'une banane. La fonction d'utilité qui représente ces préférences ne peut donc, sans hypothèses supplémentaires, dire plus que "le consommateur préfère une orange à une banane". Ainsi, peu importe, en soi, le nombre affecté à l'utilité d'une orange. Que ce soit .01 ou 45000 n'a aucune signification intrinsèque. En revanche, ce nombre doit être supérieur à celui affecté à l'utilité d'une banane. En ce sens, la seule information importante qu'il nous est permis d'extraire de l'utilité d'une orange est qu'elle est supérieure à celle d'une banane. Seul l'ordre défini par la fonction d'utilité a un sens.

Mathématiquement la signification de cette fonction d'utilité est donnée par le fait qu'elle représente le préordre $\succeq$:

$$\text{Soient } x, y \in \mathbb{R}_+^C, \quad u(x) \geq u(y) \Longleftrightarrow x \succeq y$$

Le fait qu'elle soit définie à une fonction croissante près s'exprime en disant que si u est une fonction d'utilité représentant le préordre $\succeq$, alors $f \circ u$, où f est une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, représente ce même préordre de préférences.

Ainsi, si nous faisons l'hypothèse qu'il n'y a que deux biens, x^1 et x^2 et si $u(x^1, x^2) = (x^1)^{1/2}(x^2)^{1/2}$ représente le préordre $\succeq$, alors la fonction $v(x^1, x^2) = (x^1)(x^2)$ représente également ce préordre puisque $v(x^1, x^2) = f \circ u(x^1, x^2)$ avec $f(z) = z^2$ qui est bien entendu une fonction croissante.

Nous reviendrons sur cette discussion à l'occasion des chapitres 12 et 13. En effet, lorsque le consommateur fait des choix à plusieurs dates ou dans un environnement incertain, il est souvent supposé que sa fonction d'utilité est cardinale.

Plusieurs autres hypothèses sont, en général, faites sur ce préordre. La première n'est pas très restrictive et consiste à dire (dans sa version "forte") qu'un consommateur préfère toujours avoir plus. Cette hypothèse de monotonie des préférences s'exprime de la manière suivante :

Hypothèse : *Soient x et $y \in \mathbb{R}_+^C$. Les préférences sont strictement monotones si toute fonction d'utilité les représentant est strictement croissante (en tous ses arguments), ou encore si $x \geq y$ et $x \neq y$ implique $x \succ y$, c'est-à-dire $u(x) > u(y)$.*

Cette hypothèses implique que la fonction d'utilité est croissante par rapport à tous ses arguments. Une hypothèse un peu plus faible mais jouant un rôle semblable serait de dire qu'il n'existe pas de point de satiété pour le consommateur, c'est-à-dire qu'il existe toujours un panier qui est préféré au panier considéré (hypothèse de non satiété).

La seconde hypothèse usuellement faite est beaucoup plus restrictive. C'est l'hypothèse de convexité des préférences. Mathématiquement, cette hypothèse peut s'exprimer de la manière suivante :

Hypothèse : *L'ensemble $\mathcal{Y} = \{y \mid y \succeq x\}$ est convexe*[15]*, c'est-à-dire si $y, y' \in \mathcal{Y}$ alors $\lambda y + (1-\lambda)y' \in \mathcal{Y}$ pour tout $\lambda \in (0,1)$.*

Une autre manière de l'écrire est :

$$x \sim y \text{ et } x \neq y \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \succeq y \text{ pour tout } \lambda \in (0,1)$$

Si dans la définition précédente nous remplaçons $\succeq$ par $\succ$, alors nous obtenons la définition de la convexité stricte des préférences.

Economiquement, cette hypothèse signifie que le consommateur préfère consommer des paniers dans lesquels tous les biens sont présents. Par exemple, supposons qu'il n'y ait que deux biens, le vin rouge et le vin blanc. Supposons en outre que le consommateur est indifférent entre une bouteille de vin rouge et une bouteille de vin blanc. Dans ce cas, l'hypothèse de stricte convexité nous dit qu'il préfèrera une demi-bouteille de chaque type de vin à une bouteille de rouge ou une bouteille de blanc.

[15] Voir chapitre 16.

Cette hypothèse est une généralisation de l'hypothèse de taux marginal de substitution décroissant souvent rencontrée. C'est une hypothèse assez forte, mais il est souvent possible de s'en passer. Toutefois, pour simplifier l'analyse, nous ferons cette hypothèse et discuterons plus loin des manières de s'en débarrasser (il suffit en général de supposer qu'il existe un très grand nombre d'agents, ce qui est par ailleurs conforme à l'esprit de toute analyse concurrentielle).

Quelle est la propriété de la fonction d'utilité reflètant la convexité des préférences qu'elle représente ? Il est possible de démontrer que la (stricte) convexité des préférences est équivalente à la (stricte) quasi-concavité de la fonction d'utilité. Avant de poursuivre, rappelons la définition d'une fonction quasi-concave[16] :

Définition : *Une fonction f est quasi-concave si pour tout x et y tels que $x \neq y$, et $\lambda \in (0,1)$,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(f(x), f(y))$$

et strictement quasi-concave si l'inégalité est remplacée par une stricte inégalité.

Une définition alternative de la quasi-concavité, présentée dans le chapitre 16, est de dire que $\{x \mid f(x) \geq t\}$ est convexe pour tout t. Ainsi, la conveité des préférences signifie que l'ensemble des paniers procurant un niveau d'utilité de $\overline{u}$ au moins ($\overline{u}$ étant une constante quelconque) est convexe.

Finalement, en plus des hypothèses déjà mentionnées, nous supposerons dans la majeure partie de cet ouvrage que les fonctions d'utilité sont différentiables, ce qui exclut par exemple le cas de complémentarité stricte entre les biens[17], représenté par la fonction min, qui n'est pas différentiable.

2.2.2.2 Représentation graphique

Toutes ces notions et hypothèses ont une interprétation graphique, au travers du concept de courbes d'indifférence. Une courbe (ou plus généralement surface) d'indifférence représente le lieu de tous les paniers de biens entre lesquels le consommateur est indifférent. C'est donc l'ensemble des x tels que $u(x) = c$ où c est une constante donnée. Dans le cas de deux biens, l'équation d'une courbe d'indifférence devient : $u(x^1, x^2) = c$. Nous pouvons alors les représenter dans le plan (x^1, x^2) (graphique 2.1). Chaque courbe correspond à un niveau d'utilité différent.

L'hypothèse de préordre complet signifie qu'en tout point du plan passe une courbe d'indifférence : il est toujours possible de dire de deux paniers de biens s'ils sont sur la même courbe d'indifférence ou si l'un est sur une courbe "plus élevée" (c'est-à-dire correspondant à un niveau d'utilité supérieur) que l'autre.

La transitivité signifie que deux courbes ne s'intersectent pas. En effet, si deux courbes s'intersectaient, comme sur le graphique 2.2, alors le point A serait équivalent au point B, lui même indifférent à C tandis que A et C ne procureraient pas la même utilité au consommateur, puisqu'ils sont sur des courbes différentes, ce qui représente une contradiction.

La monotonie des préférences est représentée par le fait que l'utilité s'accroît lorsque nous nous déplaçons vers le Nord-Est dans le plan (x^1, x^2). En effet, en se déplaçant

[16] Voir également le chapitre 16.

[17] A titre d'exemple de biens complémentaires, citons une douille et une ampoule.

FIG. 2.1: Courbes d'indifférence

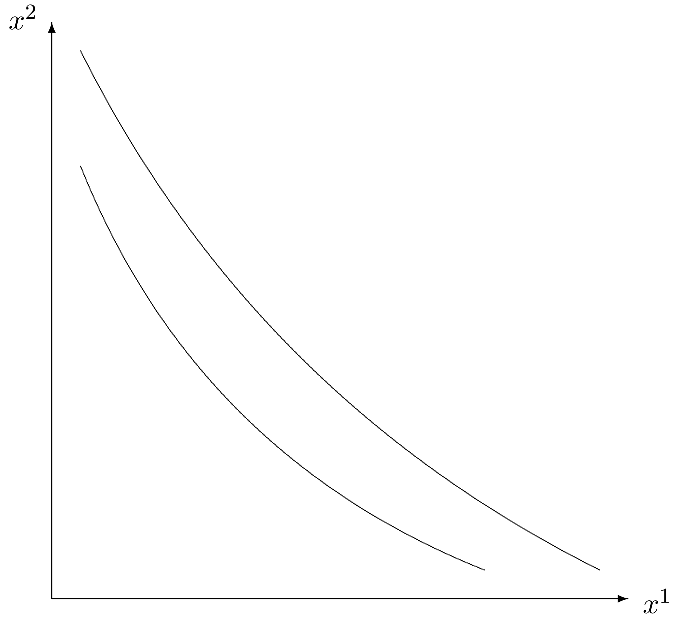
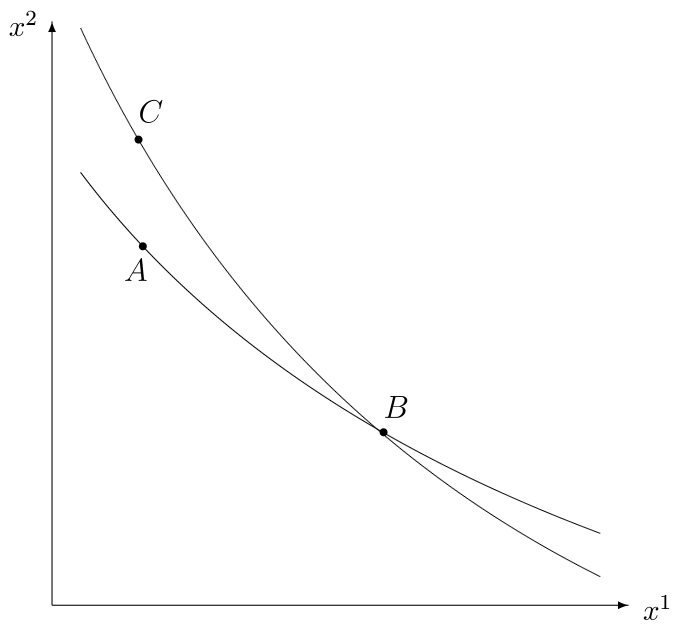


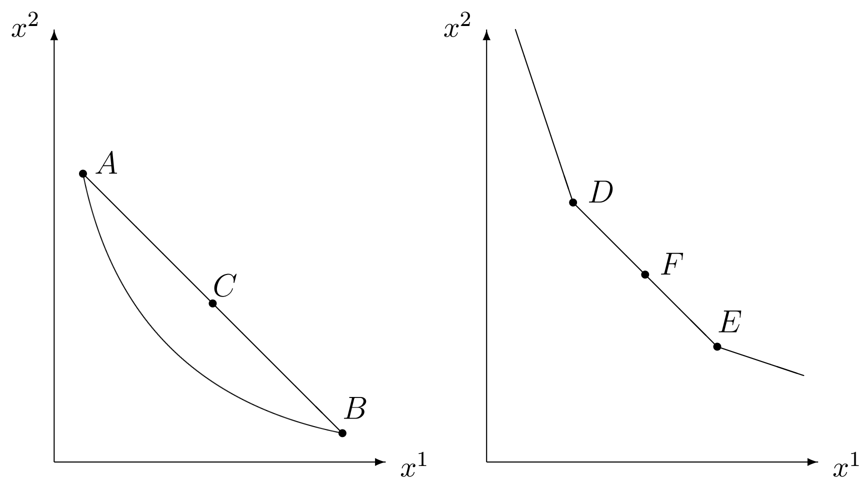
FIG. 2.2: Préférences non transitives



dans cette direction, nous augmentons la consommation d'au moins un des biens, sans jamais diminuer celle de l'autre.

Enfin la (stricte) convexité des préférences (ou la (stricte) quasi-concavité de la fonction d'utilité) est représentée par le fait que les courbes d'indifférence sont (strictement) convexes. Sur le graphique 2.3 sont représentées deux situations. La première correspond à des préférences strictement convexes : les points A et B sont indifférents, mais le point C, qui se trouve sur le segment AB leur est (strictement) préféré. La seconde correspond à des préférences convexes mais pas strictement convexes : le point D et le point E sont sur la même courbe d'indifférence mais le panier F, composé de la moitié de D et de la moitié de E leur est juste indifférent.

FIG. 2.3: Convexité des courbes d'indifférence



2.2.2.3 Le taux marginal de substitution

A partir des préférences du consommateur, il est possible de définir le taux marginal de substitution entre deux biens, par exemple les biens 1 et 2. C'est la quantité de bien 2 qu'il faut donner au consommateur pour le compenser de la perte d'une unité de bien 1. Notons-le $TMS_{2,1}$. Le taux marginal de substitution en un point (plaçons-nous dans le cas de deux biens) est égal à la valeur absolue de la pente de la courbe d'indifférence passant par ce point, soit :

$$TMS_{2,1} = -\frac{dx^2}{dx^1} \mid_{u=cste}$$

En effet, si nous supposons la fonction d'utilité différentiable, il est possible de différencier l'équation $u(x^1, x^2) = cste$ et d'obtenir :

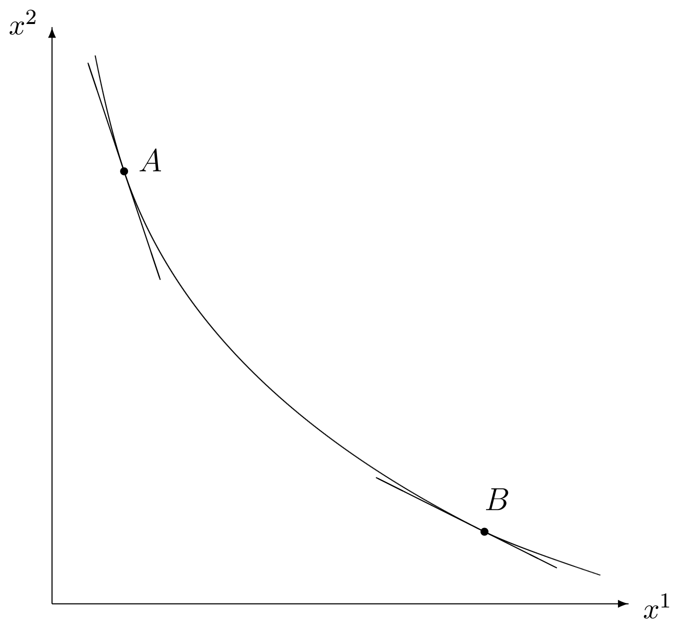
$$\frac{\partial u(x^1, x^2)}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial u(x^1, x^2)}{\partial x^2} dx^2 = 0$$

ce qui donne, lorsque $\partial u(x^1,x^2)/\partial x^2 \neq 0$, l'égalité suivante :

$$TMS_{2,1} = \frac{\partial u(x^1,x^2)/\partial x^1}{\partial u(x^1,x^2)/\partial x^2}$$

L'hypothèse de convexité des préférences implique ainsi que le taux marginal de substitution est décroissant le long d'une courbe d'indifférence. Sur le graphique 2.4, le TMS au point A est supérieur au TMS au point B, puisque la pente de la courbe d'indifférence est moins forte en ce dernier point.

FIG. 2.4: Le taux marginal de substitution



2.2.3 La contrainte budgétaire

Pour l'instant, nous savons comment un consommateur ordonne différents paniers de biens. Il nous manque cependant encore un ingrédient pour pouvoir étudier le choix du consommateur, à savoir la description des paniers qu'il peut acheter.

Pour définir cet ensemble, il est nécessaire d'introduire la notion de prix. Nous supposons que le prix d'un bien s'impose au consommateur, c'est-à-dire que ce dernier n'a aucun pouvoir sur les prix des biens. Ceux-ci sont une donnée exogène pour lui, et il se comporte de manière concurrentielle, en "preneur de prix".

Notons p le vecteur de prix des C biens, c'est-à-dire $p = (p^1, ..., p^C) \in \mathbb{R}_+^C$. La valeur, en francs, du panier de biens x est donc égale au produit scalaire $px = p^1x^1 + ... + p^Cx^C$. Si le consommateur dispose d'un revenu R, alors il peut acheter n'importe quel panier appartenant à l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+^C \mid px \leq R\}$. L'inégalité $px \leq R$ représente la contrainte budgétaire du consommateur.

Cette formalisation n'est pas tout à fait suffisante pour l'objet de notre analyse. En effet, lorsqu'on étudie l'équilibre général, le revenu R du consommateur est une variable endogène, "déterminée par le marché" et qui dépend des prix, ce qui n'apparaît pas dans la formulation précédente. Plus précisément, nous considérerons par la suite que chaque consommateur h possède des dotations initiales des différents biens. Ces dotations sont par définition données au consommateur avant que ne s'ouvrent des marchés sur lesquels les consommateurs échangent les biens qu'ils possèdent. Nous pouvons faire ici l'analogie avec un camp de prisonniers : chaque prisonnier reçoit des cigarettes et du pain, et peut échanger ces deux biens selon le rapport d'échanges qui s'établira sur le marché.

Nous notons ces dotations initiales $e_h = (e_h^1, ..., e_h^C) \in \mathbb{R}_+^C$. Le revenu du consommateur est donc égal à la valeur de ses dotations initiales, soit $pe_h = p^1 e_h^1 + \cdots + p^C e_h^C$. De façon plus réaliste, le revenu du consommateur provient de la vente de son travail. Ceci est représenté en supposant que le consommateur dispose d'une dotation en temps, qu'il peut ensuite vendre à un prix donné (le salaire). Le formalisme présent s'adapte donc assez naturellement à ce cas de figure. Nous reviendrons plus longuement sur ceci lors de l'étude de l'équilibre général avec production.

Il est facile de donner une représentation graphique de l'ensemble budgétaire d'un agent. Supposons qu'il n'y ait que deux biens dans l'économie. Les dotations initiales d'un consommateur sont représentées par un point dans le plan (x^1, x^2) et la contrainte budgétaire s'écrit :

$$p^1 x^1 + p^2 x^2 \leq p^1 e^1 + p^2 e^2$$

Traçons (voir le graphique **??**) la frontière de cet ensemble, dans le plan (x^1, x^2), c'est-à-dire la droite d'équation :

$$x^2 = -\frac{p^1}{p^2} x^1 + \frac{1}{p^2}(p^1 e^1 + p^2 e^2)$$

L'ensemble des paniers que le consommateur peut s'offrir étant données ses dotations initiales est donné par le triangle compris entre cette droite et l'origine. La pente de cette droite est, en valeur absolue, égale à $\frac{p^1}{p^2}$.

Lorsque le rapport de prix p^1/p^2 se modifie, la droite budgétaire pivote autour du point e de dotations initiales, puisque celui-ci est toujours accessible, quel que soit le niveau des prix. Nous pouvons vérifier ceci mathématiquement en remarquant qu'au point $(x^1, x^2) = (e^1, e^2)$ la contrainte budgétaire est vérifiée quel que soit le niveau des prix. Economiquement, cela signifie simplement qu'il est toujours possible de ne pas échanger et de consommer ses propres dotations initiales ; cela reviendrait à les vendre, puis à les racheter, ce qui constitue en effet une opération "blanche", réalisable pour tout système de prix. Remarquons qu'en menant ce raisonnement nous avons implicitement fait l'hypothèse qu'un agent pouvait vendre et acheter un bien au même prix, ce qui suppose en particulier l'absence de coûts de transaction.

La situation représentée sur le graphique 2.6 correspond à une hausse du prix du bien 1 relativement à celui du bien 2 : la pente de la droite budgétaire augmente (en valeur absolue) puisque elle est égale à p^1/p^2, et le point de dotations initiales reste sur la droite budgétaire.

Fig. 2.5: La droite budgétaire

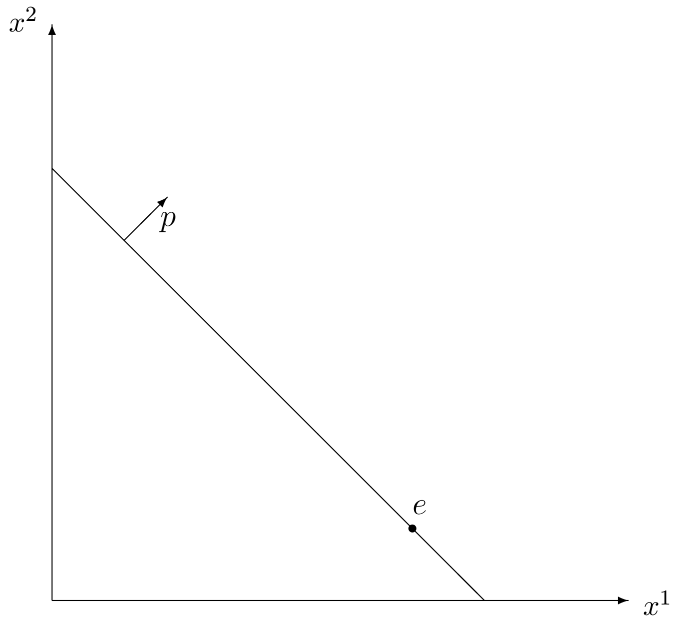
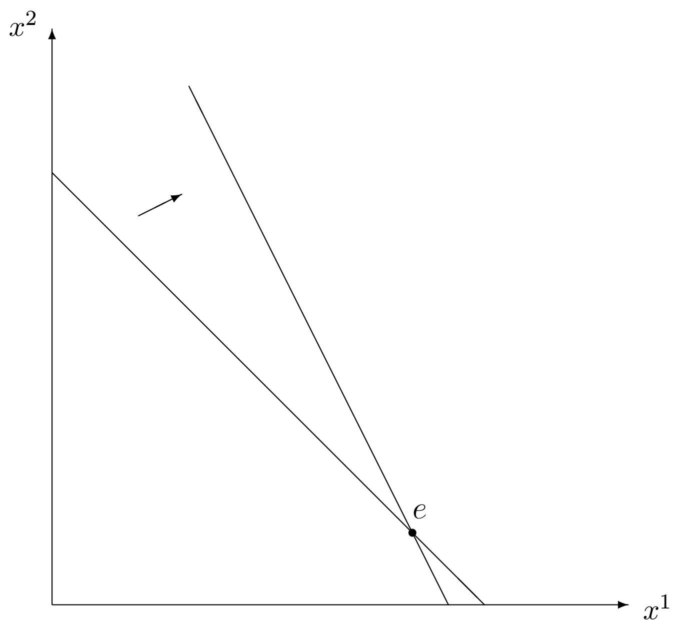


Fig. 2.6: Evolution de la droite budgétaire après un changement de prix



2.3 L'optimum du consommateur

Nous pouvons maintenant définir le programme du consommateur : il doit choisir le panier de biens qu'il préfère dans son ensemble budgétaire. Formellement, il doit maximiser sa fonction d'utilité sous sa contrainte budgétaire, soit[18]

$$\begin{array}{rl} \max_{x_h} & u_h(x_h) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{rcl} px_h & \leq & pe_h \\ x_h & \geq & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

La solution de ce programme de maximisation donne les fonctions de demande, c'est-à-dire la quantité demandée de chaque bien en fonction du vecteur de prix (de tous les biens). Introduisons à ce stade la notion d'excès de demande (ou demande nette, ou encore demande excédentaire) pour le bien c, qui n'est autre que la demande pour ce bien moins la dotation initiale du consommateur en ce bien. Nous parlerons aussi d'excès d'offre, lorsque l'excès de demande est négatif (c'est-à-dire lorsque la dotation en bien est supérieure à la demande du consommateur).

Nous allons maintenant établir les conditions sous lesquelles ce programme admet une solution, avant d'en étudier les propriétés.

2.3.1 Existence d'une solution

L'existence d'une solution ne pose pas de problème particulier. En effet, si l'ensemble défini par les contraintes est non vide, fermé et borné, ce système a une solution si u est continue. Ceci provient d'un théorème disant qu'une fonction continue atteint son maximum sur un ensemble non vide, borné et fermé dans $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire un ensemble compact).

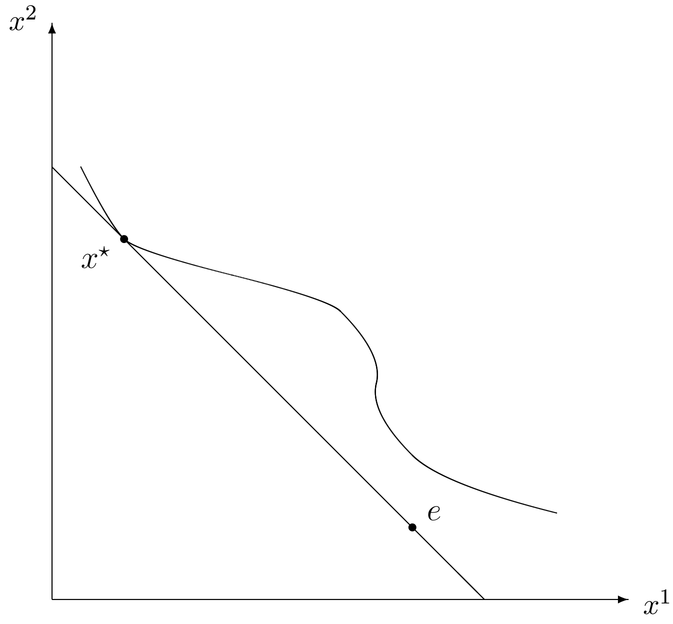
Ici, l'ensemble budgétaire est non vide car 0 (ou le point de dotations initiales) lui appartient. Il est fermé car défini avec des inégalités au sens large. Enfin, il est borné lorsque les prix sont tous strictement positifs, c'est-à-dire $p \gg 0$. Si ce n'était pas le cas, alors le consommateur demanderait, si nous supposons sa fonction d'utilité strictement croissante, une quantité infinie du bien dont le prix est nul, et il n'existerait pas de solution au problème de maximisation. Il convient de remarquer que l'existence d'une solution ne nécessite pas l'hypothèse de convexité des préférences (c'est-à-dire la convexité des courbes d'indifférence), comme le montre le graphique 2.7.

Ici, l'ensemble budgétaire est représenté par l'ensemble sous la contrainte, et une solution existe au problème de maximisation, c'est le point $x^\star$.

Enfin, il est bon de noter que le maximum obtenu ne dépend pas de la fonction d'utilité choisie pour représenter les préférences du consommateur. Au total donc, si le système de prix est tel qu'aucun prix n'est nul, alors un consommateur "rationnel" trouvera comment employer son argent, ou, en d'autres termes, trouvera quel panier de biens il préfère parmi tous ceux qu'il peut s'acheter. Nous étudions maintenant quelques propriétés de cette solution.

[18] Dans la suite du chapitre, nous omettrons, afin d'alléger les notations, l'indice h désignant un consommateur particulier.

FIG. 2.7: Préférences non convexes et solution de l'optimisation



2.3.2 Saturation de la contrainte budgétaire

A l'optimum du consommateur, si celui-ci possède des préférences monotones, la contrainte budgétaire doit être saturée. Le consommateur dépense tout son revenu : $px^\star = pe$.

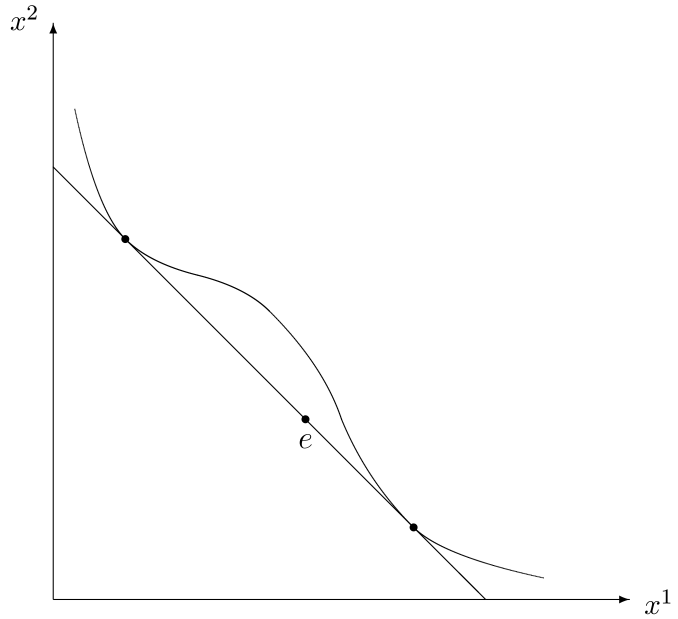
En effet, si tel n'était pas le cas (c'est-à-dire si, à l'optimum, $px^\star < pe$), il pourrait augmenter sa consommation d'au moins un bien, tout en restant dans son ensemble budgétaire, et accroîtrait ainsi son utilité. Ceci constitue une contradiction au fait que $x^\star$ est un optimum du consommateur, puisque nous aurions trouvé un panier procurant une utilité supérieure et que le consommateur peut s'acheter. Un cas de figure où cette propriété ne serait pas vérifiée est le suivant : il existe un panier de bien que le consommateur préfère à tout autre panier, et qui coûte moins cher que les ressources dont il dispose. Ceci semble toutefois peu réaliste.

Il est bon de rappeler que nous nous situons pour l'instant dans une optique totalement statique : le consommateur ne vit qu'une seule période et n'a pas de descendance, et n'a donc jamais intérêt à ne pas tout dépenser. Nous verrons comment introduire l'épargne dans ce modèle au chapitre 12.

2.3.3 Unicité de la solution

Il est possible qu'il existe plusieurs optima au problème du consommateur, comme c'est le cas sur le graphique 2.8 où deux solutions existent. Les courbes d'indifférence ne sont ici pas convexes, ce qui est à la source de la multiplicité des solutions.

FIG. 2.8: Une multiplicité de solutions



Toutefois, il existe également des cas dans lesquels les préférences sont convexes (la fonction d'utilité quasi-concave), et où il existe plusieurs solutions au problème d'optimisation. Ce cas de figure est représenté sur le graphique 2.9 : les préférences sont convexes mais pas strictement convexes, et au prix en vigueur, le consommateur est indifférent entre tous les paniers de biens situés sur le segment $[AB]$. Il existe alors une infinité de solutions au problème de maximisation.

Toutefois, il est aisé d'établir le résultat suivant, concernant des préférences strictement convexes :

Proposition : *Si u est strictement quasi-concave, alors la solution au problème du consommateur est unique*

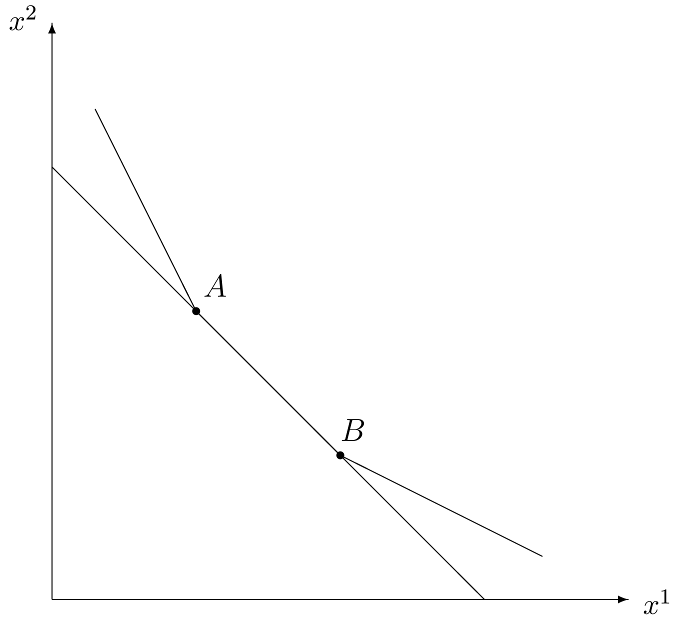
Démonstration : Supposons que x et x' sont deux solutions distinctes au problème. Nous obtenons alors $u(x) = u(x')$. Soit $\overline{x} = \lambda x + (1-\lambda)x'$ avec $\lambda \in (0,1)$. Par construction : $\overline{x} \geq 0$ et

$$\begin{aligned} p\overline{x} &= \lambda px + (1-\lambda)px' \\ &= \lambda pe + (1-\lambda)pe \\ &= pe \end{aligned}$$

et donc $\overline{x}$ est un vecteur de consommation budgétairement possible. De plus, par stricte quasi-concavité de u et du fait que $x \neq x'$:

$$u(\overline{x}) > u(x) = u(x')$$

FIG. 2.9: Un continuum de solutions



Donc, il ne peut y avoir deux solutions distinctes au problème de maximisation. □

Lorsque les préférences sont strictement convexes (ou la fonction d'utilité strictement quasi-concave), il n'existe qu'une solution, unique, au problème de maximisation, pour chaque prix. Nous pouvons donc définir une *fonction* de demande. Celle-ci associe à chaque niveau de prix, l'unique panier de biens optimal pour le consommateur à ces prix. Nous noterons cette fonction $x(p)$.

2.3.4 Caractérisation de la solution au problème de maximisation

2.3.4.1 Les conditions nécessaires d'optimalité

Il est possible de caractériser un peu plus avant les solutions au programme de maximisation. Soit $x^\star$ une solution du programme. Supposons que $x^\star > 0$, c'est-à-dire qu'à l'optimum aucune contrainte de positivité n'est contraignante, et que, par ailleurs les préférences sont monotones, ce qui implique $px^\star = pe$.

Il est alors possible de montrer qu'il existe $\lambda^\star \geq 0$ tel que $(x^\star, \lambda^\star)$ est une solution de la maximisation du lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = u(x) + \lambda(pe - px)$$

par rapport à x et à λ.

Ceci nous donne des renseignements supplémentaires sur la solution $x^\star$. En effet, les conditions nécessaires à la maximisation du lagrangien nous donnent (rappelons que nous avons supposé la fonction d'utilité différentiable) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}(x^\star,\lambda^\star)}{\partial x^c} & = 0 \quad c = 1, ..., C \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x^\star,\lambda^\star)}{\partial \lambda} & = 0 \end{cases}$$

ce qui implique

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x^\star)}{\partial x^c} - \lambda^\star p^c & = 0 \qquad c = 1, ..., C \\ pe - px^\star = 0 \end{cases}$$

Nous retrouvons alors l'égalité entre le taux marginal de substitution (TMS) entre deux biens et le rapport des prix de ces biens :

$$\frac{\partial u(x^\star)/\partial x^c}{\partial u(x^\star)/\partial x^{c'}} = \frac{p^c}{p^{c'}}$$

En conséquence, un consommateur maximise son utilité lorsqu'il égalise ses termes de l'échange "subjectifs" (son TMS) aux termes de l'échange "objectifs", donnés par le marché (le rapport des prix). Si jamais ces deux rapports n'étaient pas égaux, le consommateur pourrait augmenter son utilité en réarrangeant sa demande. Supposons par exemple que le TMS défini ci-dessus pris au point x soit supérieur à $p^c/p^{c'}$. Par définition de ce qu'est un prix, le consommateur peut toujours réaliser l'opération suivante : vendre une unité de bien c' et acheter $p^{c'}/p^c$ unités du bien c. Examinons quel effet cela a sur son bien-être, c'est-à-dire son utilité. En supposant que les unités en question sont infinitésimales, nous pouvons dire que la "perte" d'une unité de bien c' lui coûte (en termes d'utilité) $\partial u(x^\star)/\partial x^{c'}$. En revanche il gagne, toujours en termes d'utilité, $(\partial u(x^\star)/\partial x^c) \times \left(p^{c'}/p^c\right)$. L'opération est donc bénéfique pour le consommateur si :

$$\frac{\partial u(x^\star)}{\partial x^c}\frac{p^{c'}}{p^c} > \frac{\partial u(x^\star)}{\partial x^{c'}}$$

ce qui est le cas sous l'hypothèse que nous avons faite. La conclusion de ce raisonnement est donc que tant que l'égalité ci-dessus n'est pas satisfaite, le consommateur peut toujours augmenter son utilité simplement en modifiant la composition du panier de biens demandé.

Le multiplicateur de Lagrange, λ, représente ici "l'utilité marginale" du revenu, soit encore l'augmentation de l'utilité du consommateur[19] si son revenu augmentait d'une unité. Pour voir cela, considérons le revenu du consommateur comme une variable, *i.e.*, $R \equiv pe$ et différentions l'utilité du consommateur à l'optimum :

$$\begin{aligned} \frac{du(x^\star)}{dR} &= \sum_c \frac{\partial u(x^\star)}{\partial x^{c\star}}\frac{\partial x^{c\star}}{\partial R} \\ &= \lambda^\star \sum_c \frac{p^c \partial x^{c\star}}{\partial R} \end{aligned}$$

[19]Pour que ceci ait un sens, il faut ici avoir recours à l'interprétation cardinale de la fonction d'utilité.

$$= \lambda^\star$$

Le multiplicateur donne donc l'augmentation de l'utilité de l'individu (la fonction objectif) lorsque sa contrainte budgétaire se desserre. Nous retrouverons dans un cadre différent cette interprétation du multiplicateur de Lagrange (voir chapitre 8).

Nous ne développerons pas plus avant la théorie de la maximisation sous contrainte, car celle-ci n'est pas réellement nécessaire pour poursuivre l'étude de l'équilibre général. Il convient cependant de souligner que le traitement des inégalités est possible, à l'aide de la méthode dite de Kuhn et Tucker, plus générale que le lagrangien[20]. Il n'est alors plus possible de "dériver par rapport au multiplicateur" comme nous l'avons fait ci-dessus.

Un second point qui mérite d'être souligné est que les conditions données ci-dessus ne sont que des conditions nécessaires d'optimalité. En effet, elles s'expriment sous la forme, "si $x^\star$ est un optimum, alors il doit vérifier les conditions suivantes". Ces conditions ne sont suffisantes que lorsque des conditions de second ordre sont vérifiées, ce qui est le cas, par exemple si la fonction d'utilité est strictement quasi-concave. De plus, nous avons supposé que l'optimum était "intérieur" (c'est-à-dire que tous les biens sont consommés). Si tel n'était pas le cas (voir le graphique 2.11 ci-dessous), alors les conditions d'optimalité données ci-dessus ne seraient plus valables.

2.3.4.2 Représentation graphique

Supposons qu'il n'y ait que deux biens dans l'économie. Graphiquement, le point $x^\star$ est le point de tangence entre la courbe d'indifférence et la droite budgétaire (graphique 2.10).

Il y a alors égalité entre le TMS (la pente en un point de la courbe d'indifférence) en $x^\star$ et le rapport de prix (la pente de la droite budgétaire). Toutefois, si la solution était une "solution en coin", c'est-à-dire que l'optimum se situe sur un des deux axes, l'égalité du TMS au rapport de prix ne serait plus nécessairement satisfaite, comme le montre le graphique 2.11.

Ce graphique illustre une situation dans laquelle le consommateur désire consommer le panier $x^\star$ qui ne comporte pas de bien 1. Pour le prix relatif du bien 1 en bien 2 en vigueur, le consommateur préfère dépenser tout son revenu en bien 2. Le TMS du consommateur n'est cependant pas égal au rapport de prix. Il faut alors se demander pourquoi le raisonnement fait plus haut (page **??**) justifiant l'égalité du TMS avec le rapport de prix n'est plus valable ici. Sur le graphique 2.11, nous avons $TMS < p^1/p^2$. Selon le raisonnement ci-dessus, le consommateur désirerait donc vendre du bien 1 pour acquérir du bien 2, ce qui augmenterait son utilité. Le problème ici est bien s–r qu'au point $x^\star$, il ne peut plus vendre du bien 1 : il bute sur la contrainte de positivité de la demande.

La tangence de la courbe d'indifférence avec la contrainte budgétaire n'est pas une condition suffisante, comme l'illustre le graphique 2.12, où le point de tangence représente un minimum de l'utilité. L'hypothèse qui n'est pas satisfaite ici est bien s–r la convexité des préférences. Dans le cas représenté, l'optimum du consommateur se situe nécessairement sur un des deux axes (selon le rapport de prix en vigueur), et nous nous ramenons au cas précédent pour montrer que l'égalité du TMS avec le rapport de prix n'est pas nécessairement une condition d'optimalité.

[20]Voir par exemple, P. Michel, *Cours de mathématiques pour économistes*, éditions Economica,

FIG. 2.10: Solution intérieure au problème d'optimisation

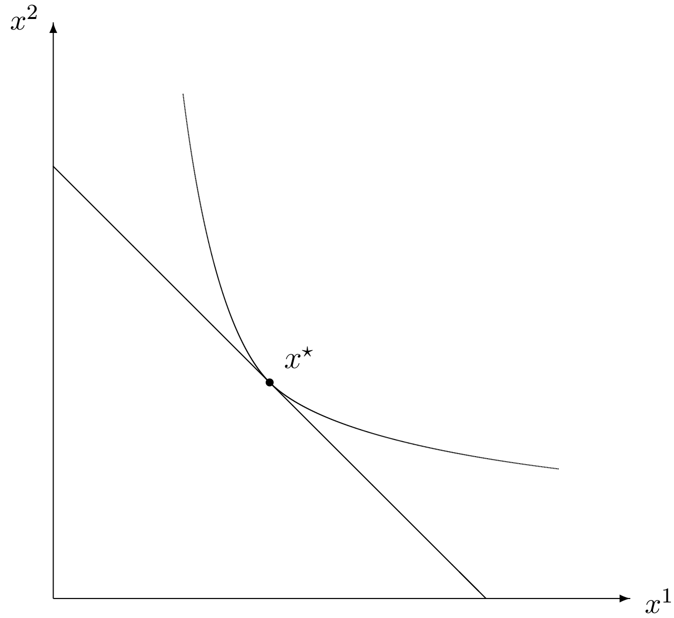


FIG. 2.11: Solution en coin au problème d'optimisation

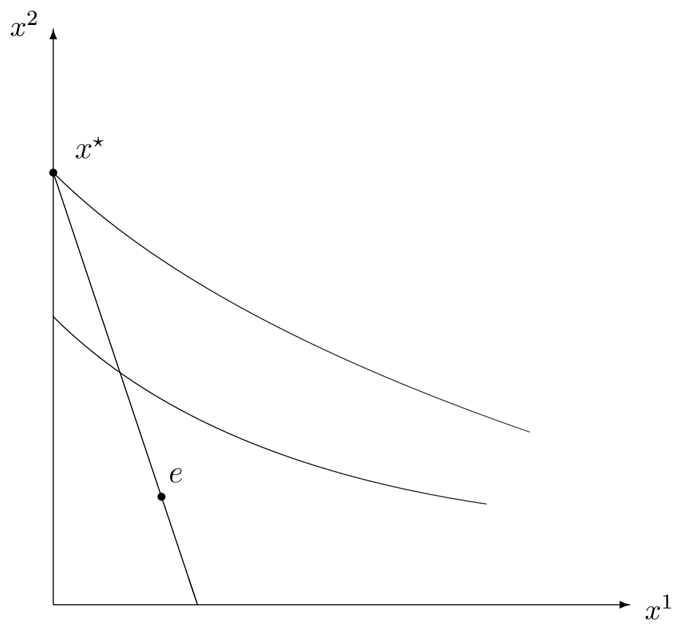
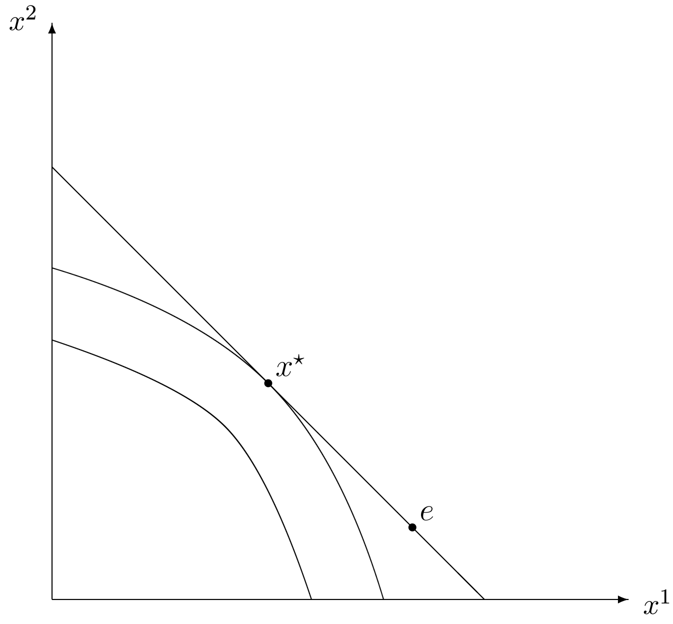


FIG. 2.12: Un minimum de l'utilité



Enfin, si la fonction d'utilité n'est pas différentiable, comme par exemple dans le cas de la fonction min(., .), la condition d'égalité du TMS et du rapport des prix n'a plus de sens puisque le TMS n'est pas défini aux points où la fonction d'utilité n'est pas différentiable.

2.4 L'étude des fonctions de demande

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où la fonction de demande est bien définie (en supposant par exemple que la fonction d'utilité est strictement quasi-concave), et étudions ses propriétés.

2.4.1 Homogénéité de degré zéro par rapport aux prix

Rppelons qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré α si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_{++}$, $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$. La fonction de demande possède une propriété d'homogénéité que nous démontrons maintenant.

Proposition : *Les fonctions de demande sont homogènes de degré zéro par rapport aux prix.*

1984.

Démonstration : Il suffit de remarquer que l'ensemble budgétaire est invariant à la multiplication des prix par une constante λ positive :

$$\{x \in \mathbb{R}_+^C \,|\, px \leq pe\} = \{x \in \mathbb{R}_+^C \,|\, \lambda px \leq \lambda pe\}$$

Or les prix n'interviennent dans le programme de maximisation que dans la définition de l'ensemble budgétaire et non dans la fonction d'utilité. Nous pouvons donc en conclure que $x(\lambda p) = x(p)$.

Lorsque le revenu R est exogène (la contrainte budgétaire s'écrit alors $px \leq R$), la fonction de demande s'écrit $x(p, R)$, et la propriété d'homogénéité s'énonce :

x_h est homogène de degré zéro par rapport aux prix et au revenu, soit $x(p, R) = x(\lambda p, \lambda R)$ pour $\lambda > 0$

Cette propriété d'homogénéité énonce que le consommateur n'est pas soumis à une "illusion monétaire". Une modification de l'unité monétaire servant d'unité de compte (ou de numéraire) n'affecte pas le comportement des consommateurs, en ce qui concerne leur demande de biens. En d'autres termes, compter en francs, en centimes ou en millions de francs n'affecte pas le comportement "réel" du consommateur.

2.4.2 Continuité et différentiabilité des fonctions de demande

Il s'agit ici de savoir si l'évolution de la demande lorsque le prix varie est continue, ou si au contraire il est possible d'observer des "sauts" dans la fonction de demande. Nous nous contenterons d'énoncer deux résultats concernant les fonctions de demande, sans les démontrer. Le premier résultat concerne la continuité de la demande.

Proposition : *Si les préférences du consommateur sont strictement convexes, monotones et continues, alors sa fonction de demande est continue.*

Si nous traçons la fonction de demande pour le bien c' en fonction du prix du bien c, alors ce résultat nous dit qu'il n'est pas possible d'être dans la situation représentée sur le graphique 2.13. Une variation infinitésimale du prix d'un bien n'entraîne qu'une réaction infinitésimale de la demande pour ce bien (ou tout autre bien).

Le second résultat concerne la différentiabilité de la fonction de demande.

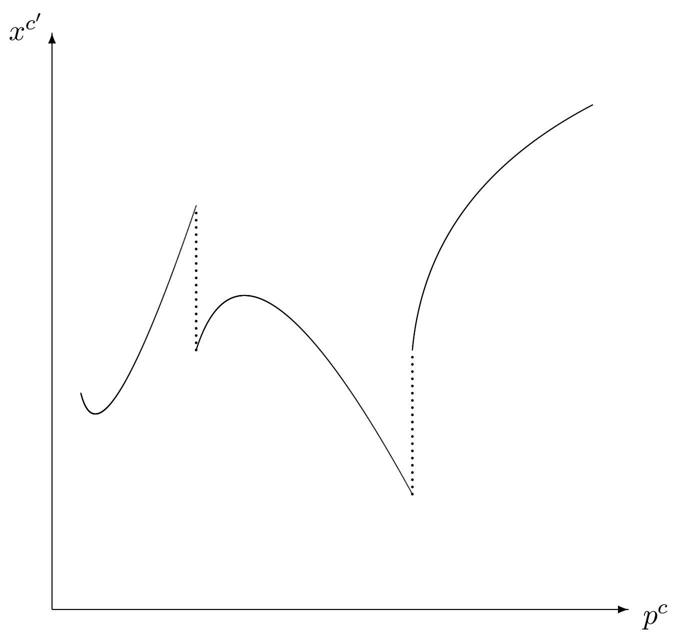
Proposition : *Si la fonction d'utilité est strictement quasi-concave, monotone, et différentiable deux fois, alors la fonction de demande est différentiable par rapport aux prix.*

Ce résultat indique qu'il ne peut y avoir de "coudes" dans la demande si la fonction d'utilité dont elle provient est elle-même différentiable.

Etant donné que nous accepterons dans la majeure partie de cet ouvrage que les fonctions d'utilité sont (au moins) strictement quasi-concaves et différentiables plusieurs fois[21], les fonctions de demande auxquelles nous nous intéresserons auront donc une allure régulière.

[21] Une exception notable est le cas des fonctions min.

FIG. 2.13: Fonction de demande discontinue



2.4.3 Deux implications de la rationalité du consommateur : les axiomes des préférences révélées

Les propriétés que nous venons d'établir sont des propriétés théoriques, qui ne sont pas empiriquement observables dans la mesure où personne n'a jamais observé une *fonction* de demande. En revanche, l'économètre peut observer un certain nombre (fini) de points (prix, quantité consommée). Nous nous demandons ici quelles implications la rationalité du consommateur impose sur ces observations.

2.4.3.1 L'axiome faible des préférences révélées

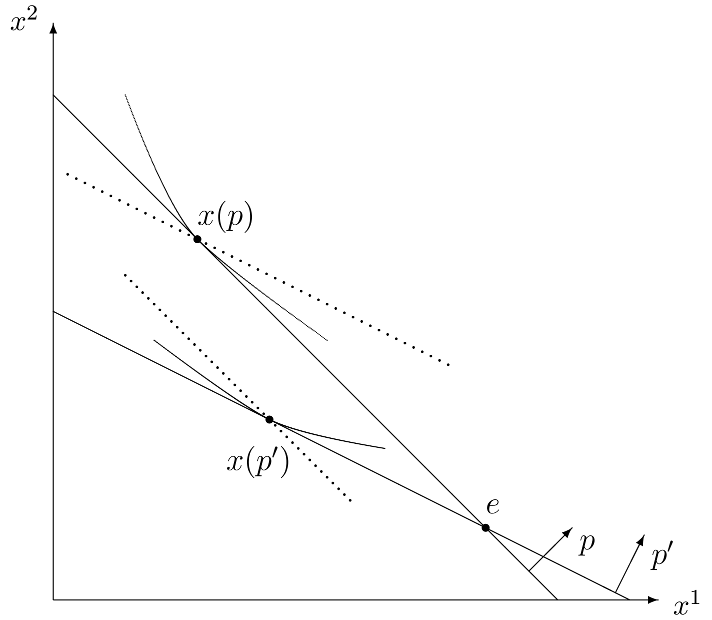
Une première restriction, assez intuitive, imposée par la rationalité du consommateur est que ses choix aient une certaine cohérence : supposons que pour un certain prix, le consommateur choisisse un panier x. Supposons également qu'à ce prix, il aurait pu s'offrir le panier x' ; puisqu'il ne l'a pas choisi, cela signifie qu'il préfère x à x'. Supposons maintenant que, dans d'autres circonstances, c'est-à-dire pour un autre prix, le choix du consommateur se porte précisément sur le panier x'. Dans ce cas, la rationalité du consommateur impose que celui-ci ne peut pas s'acheter, au prix courant, le panier x (qu'il préfère, comme la première expérience l'a montré, au panier x').

Formellement, nous dirons que la demande de l'agent h satisfait l'axiome faible des préférences révélées si, pour un prix p et un prix p' quelconques :

$$px_h(p') \leq px_h(p) \text{ et } x_h(p) \neq x_h(p') \implies p'x_h(p) > p'x_h(p')$$

Si le consommateur peut s'offrir $x_h(p')$ au prix p, mais qu'il a choisi en fait le panier $x_h(p)$ –en d'autres termes, le consommateur révèle qu'il préfère le panier $x_h(p)$ au panier $x_h(p')$–, alors le consommateur ne peut pas acheter le panier $x_h(p)$ au prix p'. En effet, s'il pouvait l'acheter, il devrait le préférer au panier $x_h(p')$ ce qui serait une contradiction puisque le panier $x_h(p')$ est par définition le meilleur panier que le consommateur peut s'acheter lorsque les prix sont p'. La situation est représentée sur le graphique 2.14.

FIG. 2.14: L'axiome faible des préférences révélées



Nous reviendrons ultérieurement sur les implications de cet axiome, qui est au cœur de la théorie de la demande.

2.4.3.2 L'axiome fort des préférences révélées

La fonction de demande provenant d'un consommateur rationnel satisfait toujours l'axiome faible des préférences révélées. Mais qu'en est-il de l'inverse, à savoir, toute fonction vérifiant l'axiome faible des préférences révélées peut-elle être une fonction de demande émanant d'un consommateur rationnel ?

La réponse à cette question est négative. Il faut en effet imposer un axiome plus fort pour que ceci soit vrai, l'axiome fort des préférences révélées. Cet axiome est en quelque sorte un axiome faible itéré. Il s'exprime formellement de la manière suivante.

Définition : *La fonction de demande $x_h(p)$ satisfait l'axiome fort des préférences révélées si pour toute liste de prix $p_1, p_2, \ldots, p_n$, telle que $x_h(p_i) \neq x_h(p_{i+1})$ pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, on a : $p_n x_h(p_1) > p_n e_h$ lorsque $p_i x_h(p_{i+1}) \leq p_i e_h$ pour tout $i \leq n-1$.*

Cet axiome signifie que si $x(p_1)$ est révélé, directement ou indirectement, être préféré à $x(p_n)$, alors $x(p_n)$ ne peut pas être révélé, directement ou indirectement, être préféré à $x(p_1)$.

Cet axiome "épuise" l'hypothèse de rationalité du consommateur, comme le résultat suivant (que nous ne démontrerons pas) l'établit.

Proposition : *Si la fonction de demande $x_h(p)$ vérifie l'axiome fort des préférences révélées et $px_h(p) = pe_h$, alors il existe une relation de préférences $\succ_h$, complète et transitive telle que, pour tout p, $x_h(p) \succ_h y$ pour tout $y \neq x_h(p)$ tel que $py \leq pe_h$.*

2.5 Les fonctions d'utilité Cobb-Douglas

Illustrons maintenant les propriétés précédentes à l'aide d'un exemple ; les fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas. Ces fonctions sont très usitées du fait de la simplicité de leur maniement et des bonnes propriétés qu'elles possèdent.

Supposons qu'il n'y ait que deux biens, x et y. Une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas s'écrit : $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$. Il n'y a pas de perte de généralité à se restreindre à des paramètres $\alpha + \beta = 1$, c'est-à-dire à des fonctions du type $u(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$. En effet, rappelons que si les préférences peuvent être représentées par $u(x, y) = x^\alpha y^\beta$, alors elles peuvent l'être par une fonction croissante de u, par exemple $u^{1/(\alpha+\beta)}$, qui correspond alors à des exposants s'additionant à un. De même, une transformation croissante souvent utilisée est de prendre le logarithme de u, afin d'obtenir : $u(x, y) = \alpha \log(x) + \beta \log(y)$, habituellement qualifiées de préférences log-linéaires.

Remarquons en premier lieu que cette fonction d'utilité est continue et même différentiable. Calculons le TMS entre les deux biens. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(x,y) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \tfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = TMS_{x,y} = \tfrac{\alpha}{1-\alpha}\tfrac{y}{x} \end{aligned}$$

Vérifions maintenant que la fonction d'utilité u représente des préférences convexes, c'est-à-dire que cette fonction est quasi-concave. Pour ce faire, utilisons la représentation en logarithme. Nous avons alors, pour deux paniers (x, y) et (x', y') et $\lambda \in [0, 1]$:

$$u\big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\big) = \alpha \log\big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) + (1-\alpha)\log\big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big)$$

Puisque log est une fonction concave nous obtenons :

$$\begin{aligned} &u\big(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y'\big) \\ &\qquad \geq \alpha\lambda \log x + \alpha(1-\lambda)\log x' + (1-\alpha)\lambda \log y + (1-\alpha)(1-\lambda)\log y' \\ &\qquad \geq \lambda\big(\alpha \log x + (1-\alpha)\log y\big) + (1-\lambda)\big(\alpha \log x' + (1-\alpha)\log y'\big) \\ &\qquad \geq \min\Big(\alpha \log x + (1-\alpha)\log y \ , \ \alpha \log x' + (1-\alpha)\log y'\Big) \\ &\qquad \geq \min\big(u(x,y) \ , \ u(x',y')\big) \end{aligned}$$

Ceci démontre la quasi-concavité de u et donc la convexité des préférences. Un autre moyen serait d'étudier la convexité de l'ensemble des paniers préférés à un panier donné (procurant une utilité égale à $\overline{u}$), c'est-à-dire de l'ensemble $\big\{(x, y)/u(x, y) \geq \overline{u}\big\}$.

Finalement, nous pouvons vérifier que les courbes d'indifférence sont bien décroissantes dans le plan (x, y). Etudions les propriétés de la courbe d'indifférence de niveau $\overline{u}$:

$$u(x,y) = \overline{u} \Longleftrightarrow y = \overline{u}^{\frac{1}{1-\alpha}} x^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}$$

ce qui donne comme dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}\overline{u}^{\frac{1}{1-\alpha}} x^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}-1} < 0$$

Si nous dérivons à nouveau par rapport à x, nous trouvons que $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}(x)^2$ est positif. Ceci signifie que la pente d'une courbe d'indifférence est croissante. Comme nous avons vu que cette pente était l'opposé du taux marginal de substitution, ceci exprime que le TMS est décroissant le long d'une courbe d'indifférence.

Posons maintenant le problème de maximisation, en notant (p_x, p_y) les prix des biens x et y, et (e_x, e_y) les dotations initiales (que nous supposerons strictement positives) :

$$\begin{array}{rl} \max_{x,y} & x^\alpha y^{1-\alpha} \\ \text{s.c.} & p_x x + p_y y = p_x e_x + p_y e_y \end{array}$$

Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^\alpha y^{1-\alpha} + \lambda\Big(p_x e_x + p_y e_y - p_x x - p_y y\Big)$$

En annulant les dérivées partielles du Lagrangien par rapport à x et y, nous obtenons :

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lambda p_x \quad \text{et} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \lambda p_y$$

soit :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y}$$

qui est la condition nous disant que le TMS doit être égal au rapport de prix.

En extrayant y en fonction de x dans cette expression et en reportant dans la contrainte budgétaire nous obtenons les fonctions de demande :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(p_x,p_y) & = & \alpha\dfrac{p_x e_x + p_y e_y}{p_x} \\ y(p_x,p_y) & = & (1-\alpha)\dfrac{p_x e_x + p_y e_y}{p_y} \end{array}\right.$$

Vérifions que ces fonctions sont homogènes de degré zéro :

$$x(\lambda p_x, \lambda p_y) = \alpha\frac{\lambda p_x e_x + \lambda p_y e_y}{\lambda p_x} = \alpha\frac{p_x e_x + p_y e_y}{p_x} = x(p_x,p_y)$$

Enfin, nous pouvons observer que ces fonctions sont continues et différentiables.

2.6 Les fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante

Une classe de fonctions d'utilité également très souvent utilisées est la classe des fonctions dites à "élasticité de substitution constante". Les fonctions Cobb-Douglas en sont un cas particulier.

Sous l'hypothèse qu'il existe deux biens, ces fonctions prennent la forme suivante :

$$u(x, y) = (ax^\rho + by^\rho)^{1/\rho}$$

où ρ sera supposé compris entre $-\infty$ et 1.

Si nous notons $x(p, R)$ et $y(p, R)$ les demandes en bien x et en bien y pour un revenu R et des prix $p = (p_x, p_y)$, l'élasticité de substitution entre le bien x et le bien y est définie par :

$$\xi_{xy}(p, R) = -\frac{\partial[x(p, R)/y(p, R)]}{\partial[p_x/p_y]} \frac{p_x/p_y}{x(p, R)/y(p, R)}$$

Cette élasticité mesure la sensibilité du ratio $x(p, R)/y(p, R)$ à une modification du prix relatif entre le bien x et le bien y. Nous vérifierons, après avoir calculé les fonctions de demande, que cette quantité est effectivement constante.

Les fonctions à élasticité de substitution constante constituent une classe de fonctions qui englobe un certain nombre de cas. Plus spécifiquement, nous avons les résultats suivants :

- Lorsque $\rho \to 0$, la fonction d'utilité représente les mêmes préférences que la fonction de type Cobb-Douglas , $x^a y^b$.
- Lorsque $\rho \to -\infty$, la fonction d'utilité représente les mêmes préférences que la fonction de type "min", $\min(x, y)$.
- Lorsque $\rho \to 1$, les courbes d'indifférence deviennent linéraires.

Calculons maintenant les fonctions de demande associées à cette fonction d'utilité. Pour simplifier le calcul, nous supposerons ici que $a = b = 1$. Nous cherchons donc la solution du problème suivant :

$$\begin{array}{rl} \max_{x,y} & (x^\rho + y^\rho)^{1/\rho} \\ \text{s.c.} & p_x x + p_y y = p_x e_x + p_y e_y \end{array}$$

Transformons la fonction objectif en lui appliquant une fonction croissante, ce qui ne change rien au résultat de la maximisation. Plus spécifiquement, étudions la fonction $\bar{u}(x, y) = \rho u(x, y)^\rho = \rho(x^\rho + y^\rho)$. La transformation opérée est bien croissante lorsque $\rho \leq 1$.

Les conditions de premier ordre donnent :

$$\frac{x}{y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{1}{\rho-1}}$$

qui est la condition nous disant que le TMS doit être égal au rapport de prix.

En réécrivant l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$p_x x = p_x^{-\frac{1}{1-\rho}} p_y^{\frac{1}{1-\rho}}$$

En remplaçant ceci dans la contrainte budgétaire, nous obtenons :

$$\left(p_x^{-\frac{1}{1-\rho}} p_y^{\frac{1}{1-\rho}} + p_y\right) y = p_x e_x + p_y e_y$$

Après quelques calculs, nous obtenons finalement, en notant $R = p_x e_x + p_y e_y$:

$$y(p,R) = \frac{p_y^{\frac{1}{\rho-1}} R}{p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

De même,

$$x(p,R) = \frac{p_x^{\frac{1}{\rho-1}} R}{p_x^{\frac{\rho}{\rho-1}} + p_y^{\frac{\rho}{\rho-1}}}$$

Il est aisé de vérifier la continuité et l'homogénéité par rapport au prix (et au revenu) de ces fonctions.

Concentrons-nous maintenant sur le calcul de l'élasticité de substitution à partir des expressions pour la demande des deux biens que nous venons d'obtenir.

Tout d'abord, $x(p,R)/y(p,R) = p_x^{\frac{1}{\rho-1}} / p_y^{\frac{1}{\rho-1}}$, soit $x(p,R)/y(p,R) = (p_x/p_y)^{\frac{1}{\rho-1}}$. Ceci permet d'établir que :

$$\frac{x(p,R)/y(p,R)}{p_x/p_y} = \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}$$

Maintenant :

$$\frac{d(x(p,R)/y(p,R))}{d(p_x/p_y)} = \frac{1}{\rho-1}\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{\frac{-\rho}{\rho-1}}$$

Ceci nous permet de calculer $\xi_{xy}(p,R)$:

$$\xi_{xy}(p,R) = \frac{1}{1-\rho}$$

L'élasticité de substitution entre les biens est indépendante des prix et du revenu, ce qui justifie l'appellation de fonction à élasticité de substitution constante.

Observons pour terminer que lorsque ρ tend vers $-\infty$, ξ tend vers 0. Ainsi, une fonction de type "min" a une élasticité de substitution nulle. La fonction de type Cobb-Douglas, quant à elle, a une élasticité de substitution unitaire ($\xi = 1$ quand $\rho = 0$). Enfin, lorsque les courbes d'indifférence sont linéaires, l'élasticité de substitution est infinie ($\xi \to \infty$ lorsque $\rho \to 1$).

2.7 Existe-t-il une “loi de la demande” ?

Nous nous interrogeons dans cette section sur la possibilité d'établir une relation non ambigüe entre la variation du prix d'un bien et la variation de la demande pour ce bien. Dans un premier temps nous montrons que cette relation n'existe pas lorsque l'on considère les fonctions de demande établies ci-dessus. En revanche, lorsque nous nous concentrons sur les fonctions de demande hicksienne (ou fonctions de demande compensée), nous pouvons établir une loi de la demande.

Nous supposons dans cette section que le revenu R est constant, c'est-à-dire que le consommateur résout le programme suivant :

$$\begin{array}{ll} \max_x & u(x) \\ \text{s.c.} & px \leq R \end{array}$$

et qu'il n'existe que deux biens dans l'économie, *i.e.*, $x = (x^1, x^2)$. La question posée est la suivante : comment analyser la variation de la demande du consommateur à la suite d'un changement de prix ?

2.7.1 Effet substitution, effet revenu

Nous ne referons pas ici la théorie complète de la décomposition de l'effet d'une variation de prix sur la demande en un effet substitution et un effet revenu, et nous nous contenterons d'un rappel graphique rapide[22].

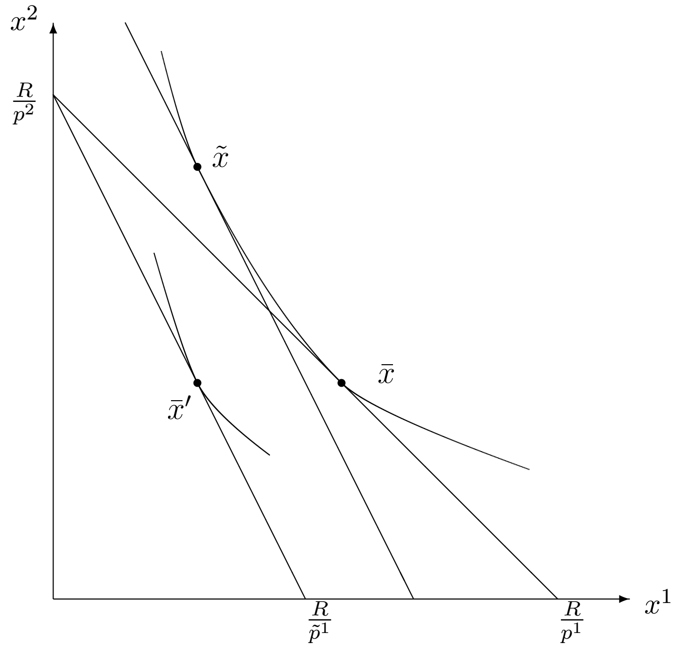
Supposons par exemple que le prix p^1 augmente, s'établissant au niveau $\widetilde{p}^1$, le prix p^2 et le revenu R restant constants. La demande passe alors du point $\overline{x}$ au point $\overline{x}'$ sur le graphique 2.15.

L'augmentation du prix du bien 1 a pour effet de faire pivoter la droite budgétaire autour de son point d'ancrage sur l'axe des ordonnées (à revenu inchangé, l'augmentation du prix du bien 1 n'a pas d'influence sur la quantité de bien 2 que le consommateur peut acheter s'il consacre tout son revenu à l'achat du bien 2). Le passage de $\overline{x}$ à $\overline{x}'$ peut s'analyser en deux temps.

- Premièrement, le passage de $\overline{x}$ à $\widetilde{x}$, soit l'effet de substitution : nous laissons le consommateur sur la même courbe d'indifférence (en lui donnant un revenu supplémentaire, fictif) et nous enregistrons sa réaction face à un changement de prix. Cet effet a toujours un signe négatif : la demande pour le bien dont le prix a augmenté (diminué) diminue (augmente) à la suite de l'effet substitution.
- Le second effet, l'effet revenu, est représenté par le passage du point $\widetilde{x}$ au point $\overline{x}'$. Retirons au consommateur le revenu fictif qui lui permettait de se maintenir sur la même courbe d'indifférence, tout en maintenant le prix au niveau $\widetilde{p}^1$. Le prix du bien 1 ayant augmenté, cela signifie que le revenu “réel” du consommateur a baissé. L'effet revenu peut *a priori* aller dans n'importe quel sens. Suite à une hausse du prix du bien 1, il est possible que l'effet revenu soit négatif, c'est-à-dire

[22] Pour plus de détails, consulter, par exemple, le manuel de P. Picard *Eléments de micro-économie*, éditions Montchrestien, 1992.

FIG. 2.15: Effet substitution & effet revenu



se rajoute à l'effet substitution pour faire diminuer la demande de bien 1. En revanche, il est également possible (pour des préférences qui satisfont toutes les hypothèses exposées jusqu'à maintenant), que l'effet revenu aille en sens inverse de l'effet substitution, et aille même jusqu'à annuler voire contrecarrer ce dernier. Ainsi, il est possible que l'effet revenu soit suffisamment fort pour que, suite à une hausse de p^1, la demande pour le bien 1 augmente[23].

Plus généralement, il est possible de décomposer analytiquement, à l'aide des équations de Slutsky, l'effet de la variation du prix d'un bien sur la demande de n'importe quel bien.

La conclusion qui nous intéresse ici est qu'il n'est pas possible de déduire de la simple rationalité du consommateur que la demande pour un bien est une fonction décroissante du prix de ce bien.

2.7.2 Fonction de demande hicksienne

Nous venons de voir que l'effet substitution avait le "bon signe", *i.e.* que suite à une augmentation du prix d'un bien, l'effet substitution conduit le consommateur à demander moins de ce bien. Ce résultat peut s'obtenir formellement, en considérant non plus le programme de maximisation de l'utilité sous une contrainte budgétaire comme nous l'avons fait ci-dessus, mais en étudiant le problème dual, à savoir la minimisation de la dépense sous la contrainte d'obtenir une certaine utilité.

[23] Un bien pour lequel l'effet revenu l'emporte sur l'effet substitution, et donc dont la demande croît lorsque le prix croît est qualifié de bien Giffen.

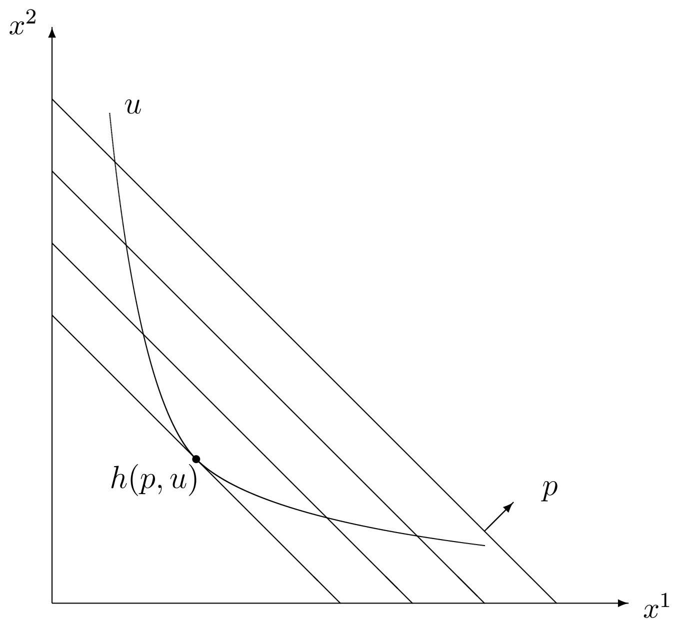
Formellement, considérons le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \min_x & px \\ \text{s.c.} & u(x) \geq u \end{array}$$

Il s'agit de trouver le panier de bien qui coûte le moins cher possible et qui permette d'atteindre un niveau d'utilité donné, $u \in \mathbb{R}$. Le résultat de cette maximisation nous donne des fonctions de demande qui dépendent du prix et du niveau d'utilité à atteindre, les fonctions de demande hicksienne, notées $h(p, u)$.

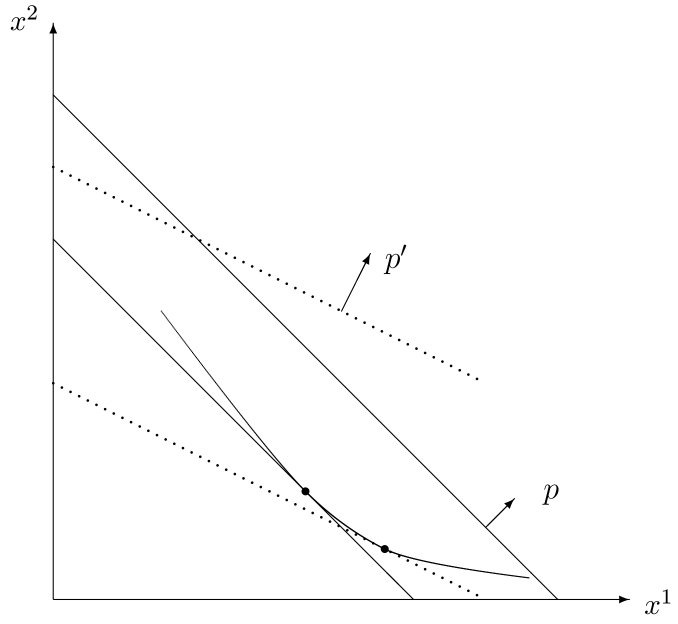
Illustrons ce programme graphiquement (graphique 2.16). Donnons-nous un certain niveau d'utilité à atteindre, u et traçons la courbe d'indifférence correspondante. Nous cherchons ensuite, pour un prix donné, le point de cette courbe qui coûte le moins cher. Lorsque le prix est fixé, l'ensemble des paniers coûtant un montant donné forme des droites "d'iso-budget", dont la pente est donnée (dans le plan (x^1, x^2)) par $-p^1/p^2$. Plusieurs de ces droites sont représentées sur le graphique 2.16. La demande hicksienne (ou demande compensée) au prix en vigueur, $h(p, u)$, est donnée par le point de contact le plus bas possible entre la courbe d'indifférence et une droite d'iso-budget.

Fig. 2.16: La demande hicksienne



Le processus permettant de trouver les fonctions de demande hicksienne est donc le *dual* de celui qui nous avait permis de trouver les fonctions de demande. Etudions maintenant l'effet d'une hausse du prix relatif p^1/p^2, qui passe du niveau p au niveau $\widetilde{p}$. Les droites d'iso-budget ont maintenant une pente plus forte, et le point donnant le panier le moins cher se déplace vers la gauche (graphique 2.17). Nous pouvons donc sans ambigu‹té affirmer que la demande hicksienne de bien 1 a diminué à la suite de l'augmentation de son prix. Il existe bien une loi de la demande, mais qui concerne uniquement les fonctions de demande hicksienne.

FIG. 2.17: Réaction de la demande hicksienne à un changement de prix



Nous pouvons démontrer ce résultat plus formellement.

Proposition : *Soit u une fonction d'utilité continue et croissante. Supposons que $h(p, u)$ soit une fonction pour tout $p \gg 0$. Alors, pour tout p et p', nous obtenons :*

$$(p - p')(h(p, u) - h(p', u)) \leq 0$$

Démonstration : Par définition de la demande hicksienne, $h(p, u)$ est le panier le moins cher, aux prix p, permettant d'atteindre un niveau de satisfaction u. En conséquence, $ph(p, u) \leq ph(p', u)$. De même, $p'h(p', u) \leq p'h(p, u)$.

En additionnant ces deux inégalités, nous obtenons :

$$ph(p, u) + p'h(p', u) \leq ph(p', u) + p'h(p, u)$$

ce qui donne, en réarrangeant les termes :

$$(p - p')(h(p, u) - h(p', u)) \leq 0$$

La demande hicksienne d'un bien est décroissante par rapport au prix de ce bien.

En particulier, si nous choisissons p et p' égaux sauf pour une composante, par exemple $p^1 = p'^1 + 1$, nous obtenons que $h^1(p, u) \leq h^1(p', u)$, c'est-à-dire que la demande hicksienne d'un bien est décroissante par rapport au prix de ce bien.

2.7.3 Axiome faible des préférences révélées et loi de la demande

Nous avons vu que l’axiome faible des préférences révélées exprimait une sorte de cohérence dans les choix des agents, cohérence minimale et plus faible que celle imposée par la rationalité (qui elle implique l’axiome fort des préférences révéles). Toutefois, une fonction qui satisferait l’axiome faible des préférences révélées possède une propriété proche de la loi de la demande. Nous énoncerons cette propriété sans démonstration[24].

Proposition : *Supposons que la fonction de demande $x(p, R)$ est homogène de degré zéro et vérifie l’égalité $px(p, R) = R$. Alors, $x(p, R)$ satisfait l’axiome faible des préférences révélées si et seulement si pour tout prix et revenu (p', R') tels que $R' = p'x(p, R)$, on a :*

$$(p - p')(x(p', R) - x(p', R')) \leq 0$$

avec une inégalité stricte si $x(p, R) \neq x(p', R')$.

Cette proposition indique qu’une forme de la loi de demande est vérifiée par toute fonction de demande vérifiant l’axiome faible des préférences révélées. Cette loi ne nous dit pas que si le prix d’un bien augmente, la quantité demandée doit diminuer. En effet, les hypothèses de la proposition établissent clairement qu’il faut, dans le même temps, compenser le consommateur de telle manière qu’il puisse toujours s’acheter, aux prix p', le panier qu’il consommait aux prix p, d’où la compensation de revenu : R' est précisément calculé de manière à ce qu’avec ce revenu, le consommateur peut s’acheter le panier qu’il choisissait aux prix p.

Un parallèle s’impose avec la loi trouvée au paragraphe précédent, et qui concernait la fonction de demande hicksienne. Dans le cas de demande hicksienne, le consommateur reste au même niveau d’utilité avant et après le changement de prix (graphiquement, il ne fait que se déplacer le long d’une courbe d’indifférence). Si nous voulons interpréter ceci en termes plus directs, ceci signifie qu’il faut le compenser, en lui donnant un revenu tel qu’il voit son utilité inchangée avant et après la modification des prix. Cette compensation, qui “annihile” l’effet revenu est précisément ce qui permet d’affirmer que si un prix augmente, la demande hicksienne de ce bien diminue. Il est habituellement fait référence à cette opération comme la compensation hicksienne. Dans la cas qui nous intéresse dans le présent paragraphe, la compensation considérée est légèrement différente, et habituellement appelée compensation de Slutsky. Elle consiste à s’assurer que le panier demandé au prix p est toujours budgétairement possible au prix p'. En assurant ceci, cette compensation empêche que “l’effet revenu soit trop important”, ce qui, ici aussi, est suffisant pour établir une loi de la demande compensée (au sens de Slutsky).

Au total, nous avons établi ici qu’une hypothèse minimale (l’axiome faible des préférences révélées) est suffisant pour qu’une fonction de demande ait une propriété proche de la loi de la demande.

[24] Le lecteur intéressé consultera le chapitre 2 de A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green, *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995.

2.8 La demande agrégée

Après avoir rappelé certaines propriétés des fonctions de demande individuelles, c'est-à-dire émanant d'un consommateur, nous nous interrogeons ici sur les propriétés de la demande agrégée, c'est-à-dire la somme de ces demandes individuelles.

La fonction de demande agrégée pour le bien c, $x_g^c(p)$, est définie de la manière suivante :

$$x_g^c(p) = \sum_{h=1}^{H} x_h^c(p)$$

Le vecteur composé des demandes pour les C biens est noté $x_g(p)$, avec $x_g(p) = \sum_{h=1}^{H} x_h(p)$. Observons que nous avons défini ici la demande agrégée pour une répartition des dotations initiales données. Ainsi, pour chaque prix, nous avons une distribution des revenus dans l'économie donnée par le vecteur $(pe_1, \ldots, pe_H)$. Un changement de prix induit donc une modification de la répartition de la richesse entre les agents.

C'est essentiellement cette demande agrégée (ou demande globale) qui nous intéressera par la suite, puisque nous nous concentrerons sur le mode de formation des prix sur les marchés, ce qui fait intervenir la demande agrégée et non chaque demande individuelle. Il convient donc de s'interroger sur les propriétés qu'elle possède et, peut-être de manière plus importante, sur celles qu'elle ne possède pas.

2.8.1 Les propriétés de la demande agrégée

Nous nous plaçons dans une économie comportant H consommateurs possédant des préférences strictement convexes, continues et monotones.

La demande excédentaire agrégée provient de l'addition des demandes excédentaires individuelles. Notons-la $z_g(p) = \sum_h \big(x_h(p) - e_h\big)$. Elle possède un certain nombre de propriétés provenant de propriétés similaires au niveau individuel.

En fait, il a été montré que seules trois propriétés sont conservées par agrégation :

(i) $z_g(p)$ est une fonction continue, étant la somme de fonctions continues
(ii) $z_g(p)$ est homogène de degré zéro par rapport aux prix ; en effet $x_g(\lambda p) = \sum_h x_h(\lambda p) = \sum_h x_h(p) = x_g(p)$.
(iii) La loi de Walras, qui provient de l'agrégation des contraintes budgétaires : $\sum_{h=1}^{H} \sum_{c=1}^{C} p^c \big(x_h^c(p) - e_h^c\big) = 0$ ou, en notation vectorielle, $pz_g(p) = 0$.

Les propriétés (i) et (ii) ne méritent pas d'autres commentaires, puisqu'elles proviennent de manière immédiate des propriétés des demandes individuelles. La propriété (iii), la loi de Walras, provient quant à elle du fait que chaque consommateur, à son optimum individuel, dépense tout son revenu, comme nous l'avons déjà vu. Sa fonction de demande satisfait donc la contrainte budgétaire : $p(x_h(p) - e_h) = 0$. En additionant toutes ces contraintes individuelles, nous obtenons la loi de Walras. Nous retrouverons souvent cette "loi", à savoir que la somme des demandes agrégées en valeur est nulle. Observons pour l'instant qu'elle est vraie (elle est parfois appelée identité de Walras) quel que soit le prix de marché p. Cette loi n'est donc pas une propriété uniquement vraie à l'équilibre, mais est au contraire vérifiée pour tout prix.

Formellement, le résultat s'énonce de la manière suivante :

Proposition (théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu[25]) : *Soit $f(.)$ une fonction continue définie sur l'ensemble*

$$P_\varepsilon = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^C \,|p^c/p^{c'} \leq \varepsilon \text{ pour tout } c, c' \right\}$$

Supposons de plus que $f(.)$ est homogène de degré zéro et satisfait la loi de Walras. Alors, il existe une économie composée de C consommateurs dont la fonction de demande agrégée co‹ncide avec $f(.)$ sur le domaine P_ε.

Ce que ce résultat signifie peut être exprimé différemment. Soit f une fonction quelconque, continue, homogène de degré zéro, satisfaisant la loi de Walras (c'est-à-dire $pf(p) = 0$). Alors, il est possible de construire une économie (composée d'autant d'agents qu'il y a de biens), c'est-à-dire des préférences et des dotations, dans laquelle tous les agents sont rationnels, et qui possèderait f comme fonction de demande excédentaire agrégée (en faisant abstraction de ce qui se passe lorsqu'un prix relatif devient nul[26]).

En d'autres termes, la "rationalité individuelle" n'impose que peu de contraintes au niveau agrégé. La plupart des propriétés valables au niveau individuel ne le sont plus lorsque nous agrégeons les fonctions de demande.

Afin de sortir de ce qui peut sembler une impasse, plusieurs voies sont possibles. En effet, si certaines hypothèses sont faites sur la distribution des caractéristiques des agents dans l'économie, alors il devient possible de restreindre la classe à laquelle les fonctions de demande excédentaire peuvent appartenir. Ces hypothèses peuvent prendre la forme d'une distribution donnée des richesses de l'économie, ou encore d'une distribution donnée des préférences des agents. Ce dernier point renvoie à la formation des préférences des agents : celles-ci peuvent-elles être influencées par l'environnement social des agents ? A ce titre il est intéressant de noter que se développent actuellement des théories expliquant le comportement moutonnier des agents économiques, ce comportement reposant sur une absence d'information[27]. Une autre approche cherche à expliquer le désir de "conformité" des agents à une quelconque norme sociale[28]. Ces théories imposent donc des restrictions sur la diversité des comportements individuels. Le fait que ces théories, récentes, n'aient pas encore été développées dans un cadre d'équilibre général explique que nous ne les traitions pas ici, même si ces nouvelles avancées peuvent sans doute résoudre certains des problèmes posés par la théorie traditionnelle. Par ailleurs, en posant le problème de l'organisation sociale sous-jacente à l'économie étudiée, ces théories tendent à souligner la pauvreté des modèles d'équilibre général sur ce point. Savoir si ces théories peuvent être aisément développées dans un cadre d'équilibre général n'est ainsi pas évident.

---

[25] Voir W. Shafer et H. Sonnenschein, "Market demand and excess demand functions", dans K. Arrow et M. Intriligator, *Handbook of Mathematical Economics*, éditions North-Holland, 1982.

[26] Considérer le comportement de la fonction lorsqu'un prix tend vers zéro restreint la classe de fonctions admissibles.

[27] Voir, par exemple, S. Bikhchandani, J. Hirshleifer et I. Welch, "A theory of fads, fashion, custom and cultural change as informational cascade", *Journal of Political Economy*, Octobre 1992, p.992-1026 ; A. Banerjee, "A simple model of herd behavior", *Quarterly Journal of Economics*, Ao–t 1992, p.797-817, ou encore A. Kirman, "Ants, rationality, and recruitement", *Quarterly Journal of Economics*, Février 1993, p.137-156.

[28] Voir D. Bernheim, "A theory of conformity", *Journal of Political Economy*, Octobre 1994, p.841-877.

2.8.2 Les propriétés que la demande agrégée ne possède pas

2.8.2.1 Demande agrégée et axiome faible des préférences révélées

Nous avons vu que l'axiome faible des préférences était une “expression faible” de la rationalité du consommateur. Nous avons également établi que si une fonction vérifiait cet axiome, elle possédait une propriété proche de la loi de la demande (lorsque les variations de prix étaient compensées par des variations de revenu appropriées).

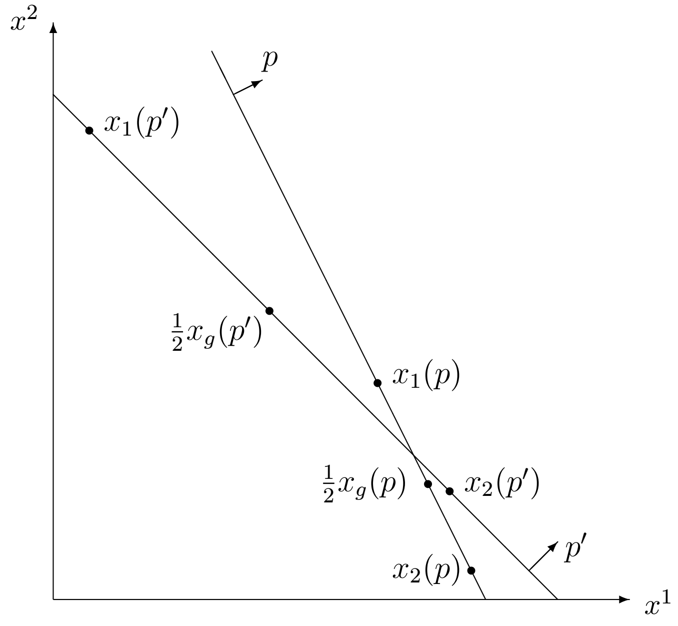
Nous établissons ici que la demande agrégée ne satisfait pas, en général, l'axiome faible des préférences révélées, même si toutes les demandes individuelles le satisfont. Pour cela considérons un exemple graphique simple, à deux biens, et deux agents. Chaque agent possède une unité de chaque bien. Considérons deux systèmes de prix différents : $p = (1/2, 1/2)$ et $p' = (1/4, 3/4)$. Observons que pour ces deux vecteurs de prix la richesse de chaque agent est égale à un, et donc la richesse globale dans l'économie est égale à deux pour les deux systèmes de prix.

Sur le graphique 2.18 sont représentées les demandes de chacun des deux agents, aux prix p et p'. Nous avons également porté la moyenne de ces demandes ($x_g(p)$ est la demande agrégée des deux biens). Nous observons que, par construction, $1/2p'x_g(p) < 1$ et $1/2px_g(p') < 1$. Ceci peut alors ce réécrire, puisque $px_g(p) = 2$ et $p'x_g(p') = 2$:

$$p'x_g(p) < p'x_g(p') \quad \text{et} \quad px_g(p') < px_g(p)$$

ce qui constitue une violation de l'axiome faible des préférences révélées.

FIG. 2.18: Axiome des préférences révélées et demande agrégée



Nous ne pouvons donc pas nous attendre à retrouver, au niveau agrégé, une quelconque loi de la demande. La raison en est relativement simple. Nous avons établi que cette loi de la demande était vraie lorsque les variations de prix étaient compensées par des variations de revenu appropriées. Or, il se peut que cette compensation soit vraie au niveau agrégé, c'est-à-dire que le changement de prix et de revenu soit tels que le panier de biens agrégé initial demeure dans le nouvel ensemble budgétaire agrégé, sans qu'elle soit nécessairement vraie pour chaque individu. Mais si chaque individu n'est pas compensé correctement, il n'y a pas de raison pour que sa demande soit décroissante par rapport aux prix. Lorsque nous agrégeons toutes ces demandes individuelles, il se peut que les "individus non compensés l'emportent" et que la demande agrégée ne satisfasse plus cette loi de la demande pour des variations de prix compensées, globalement, par une variation de revenu appropriée.

Au total, il est tout à fait possible que des effets revenus individuels viennent invalider une quelconque loi de la demande agrégée.

2.8.2.2 L'hypothèse d'agent représentatif

Il est important de souligner que la demande agrégée n'est pas en général la solution d'un programme de maximisation du type $\max u(x)$ s.c. $px \leq pe$.

En particulier, il n'est pas possible de décomposer les variations de la demande agrégée suite à une modification du système de prix, en un effet substitution et un effet revenu. Cette propriété, vraie au niveau individuel, n'est pas conservée par agrégation. De même, les relations de Slutsky ne sont en général pas vraies au niveau agrégé. Là encore, c'est la possibilité d'effets revenu importants qui empêche toute agrégation des comportements. En particulier, lorsque les prix changent, la distribution de la richesse dans l'économie a toutes les chances de se modifier.

Il convient donc de se méfier des analyses où un "agent représentatif", censé représenter tous les autres agents de l'économie, est introduit[29]. L'économie se comporterait alors comme si un seul ménage prenait les décisions de consommation, d'offre de travail... Dans ce type d'analyse, la demande globale provient de la maximisation par cet agent d'une fonction d'utilité sous contrainte budgétaire. Or, faire ceci revient à placer des restrictions très fortes sur la diversité des agents. En effet, un agent représentatif ne l'est vraiment que si tous les individus dans l'économie ont des préférences identiques *et* homothétiques (c'est-à-dire que la part du revenu consacrée à l'achat de chaque bien ne dépend pas du niveau du revenu).

Ce problème, très complexe, de l'agrégation a permis de montrer qu'il n'est certainement pas suffisant d'imposer une certaine rationalité au niveau individuel pour faire apparaître des régularités au niveau agrégé (macroéconomique). En fait, la diversité et la multiplicité des individus pourraient être suffisantes pour faire apparaître, au niveau macroéconomique, certaines constantes dans la fonction de demande par exemple[30] .

[29] Sur cette notion, voir A. Mas-Colell, M. et Whinston et J. Green, *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995, dont le chapitre 4 est plus particulièrement axé sur ce problème de l'agrégation.

[30] Voir W. Hildenbrand, *Market Demand : Theory and Empirical Evidence*, éditions Princeton University Press, 1994.

2.9 Conclusion

La théorie du consommateur permet de démontrer un certain nombre de propriétés, au niveau individuel, des fonctions de demande. Toutefois, dans une perspective d'équilibre, ces propriétés ne sont importantes qu'en ce qu'elles s'agrègent. Plus précisément, nous avons cherché dans ce chapitre à dégager quelles étaient les propriétés de la demande agrégée. La conclusion est assez négative : les propriétés des demandes individuelles ne se conservent pas, pour la plupart d'entre elles, par agrégation. Ce résultat théorique très fort ne doit cependant pas décourager l'étude de l'équilibre. Nous allons voir par la suite que nous pourrons quand même dégager certaines propriétés de l'équilibre général (existence, optimalité, unicité locale,...) à l'aide de ce nombre minimal d'hypothèses sur la fonction de demande agrégée. D'un point de vue appliqué, l'économètre dispose d'informations supplémentaires qui permettent éventuellement de tester si la fonction de demande agrégée observée possède d'autres propriétés.

Chapitre 3

La théorie du producteur

3.1 Introduction

Poursuivant notre étude des comportements individuels, nous nous concentrons maintenant sur le producteur. Nous ne prétendons pas non plus à l'exhaustivité en ce qui concerne l'étude de la théorie du producteur, et ne faisons que rappeler certains éléments qui nous seront utiles par la suite.

En particulier, nous ne rentrerons pas dans les détails de l'organisation de l'entreprise et prendrons celle-ci comme entité de base du secteur productif. L'étude de la nature et de l'organisation de l'entreprise, institution à l'intérieur de laquelle les rapports échappent à la notion d'échange marchand, ne relève pas de l'étude de l'équilibre général, mais plutôt de la théorie des organisations. Cette étude de la nature de la firme est en elle-même extrêmement intéressante et soulève d'importants problèmes théoriques. Toutefois, toujours dans l'idée que ce qui nous intéresse ici est un comportement d'offre agrégé, nous prendrons l'existence des entreprises comme une donnée, et les traiterons comme des entités qui transforment des biens en d'autres biens, sans nous interroger sur leur mode d'organisation interne.

Ce chapitre traite donc successivement de la représentation des activités productives d'une entreprise, de la définition d'un objectif de l'entreprise (la maximisation du profit), et enfin des propriétés de la fonction d'offre individuelle. Nous montrerons en particulier qu'il existe une loi de l'offre, bien établie. Nous pourrons alors étudier la possibilité d'agréger ces fonctions d'offre individuelles. Alors que cette agrégation pose problème, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, du côté de la demande, nous montrerons que l'agrégation des fonctions d'offre ne pose aucune difficulté particulière. Il se dégagera donc de cette étude qu'une loi de l'offre existe et qu'un secteur productif concurrentiel peut être représenté par une entreprise représentative. Nous nous placerons en effet tout au long de ce chapitre dans un cadre concurrentiel. Nous n'analyserons donc pas d'autres formes de concurrence (monopolistique par exemple) pas plus que des situations de monopole ou d'oligopole.

3.2 Ensemble de production

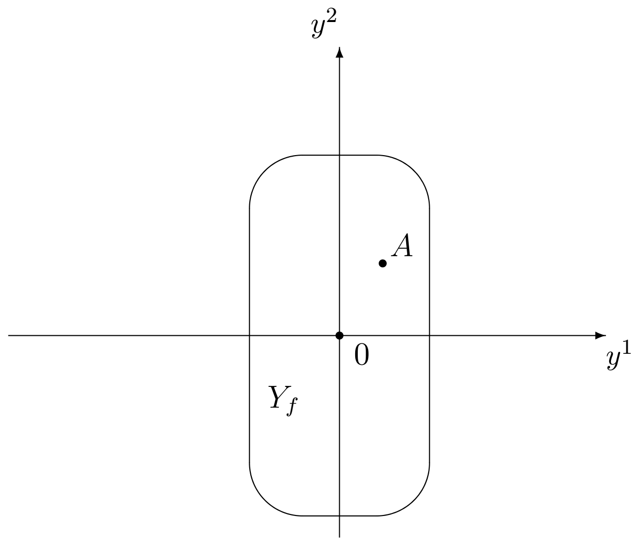
Le producteur se définit essentiellement par son activité, consistant à utiliser des biens (les *inputs*) afin d'en produire d'autres (les *outputs*). Deux représentations de ce processus de transformation des biens sont possibles, l'une en termes d'ensemble de production, l'autre en termes de fonction de production. Nous analyserons successivement les deux et étudierons leur lien.

Commençons donc par la représentation la plus générale d'un plan (ou programme) de production. Un plan de production est une liste des quantités des facteurs de production (inputs) utilisés et des différents biens produits à l'aide de ces inputs. Par convention, les inputs sont comptés négativement et les outputs positivement. Ainsi, supposons qu'il n'y ait que deux biens dans l'économie, le bois (bien numéro 1) et le papier (bien numéro 2), un plan de production (-20,1) signifie qu'avec 20 kilos de bois, il est possible de produire 1 kilo de papier.

Pour une entreprise f, un programme de production est donc un vecteur $y_f \in \mathbb{R}^C$. Nous avons ainsi une représentation abstraite et très générale du processus productif. L'ensemble des productions techniquement possibles pour l'entreprise f est appelé ensemble de production, et noté $Y_f \subset \mathbb{R}^C$. Cet ensemble de production est défini indépendamment des limitations éventuelles imposées par la rareté des ressources primaires, et n'exprime que l'état des connaissances techniques de la firme considérée. Ainsi, à ce stade et si nous supposons qu'il n'existe que deux biens, un ensemble de production n'est qu'un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}^2$.

Toutefois, tout en restant à un niveau d'abstraction assez élevé, il est clair que tout sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ne peut constituer un ensemble de production. Il existe en effet des contraintes techniques (par exemple il faut toujours utiliser au moins un input pour produire) qui, formalisées correctement, réduisent la classe d'ensembles de production ôacceptables". Ainsi, nous voyons que l'ensemble représenté sur le graphique 3.1 ne satisfait pas ces restrictions. Le point A correspond à une situation dans laquelle l'entreprise produit des deux biens sans utiliser de ressources.

FIG. 3.1: Un ensemble ne pouvant pas être un ensemble de production



3.2.1 Quelques hypothèses

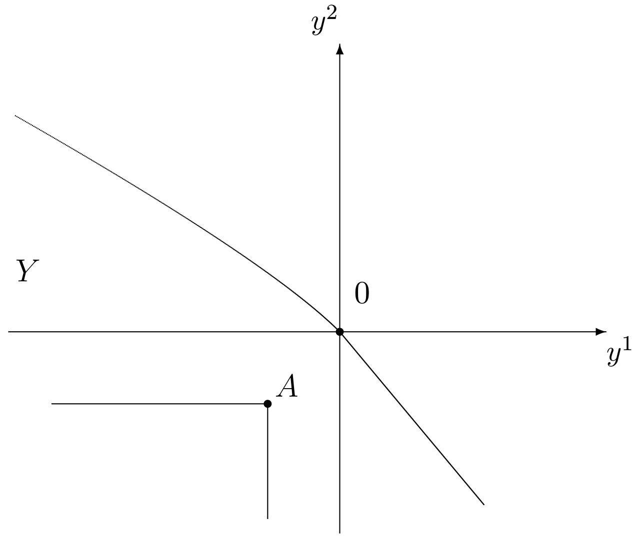
Nous présentons maintenant quelques hypothèses sur les ensembles de production[31], qui imposent certaines contraintes sur les techniques de production sous-jacentes, et qui nous seront utiles par la suite. Les quatre premières hypothèses seront maintenues tout au long de cet ouvrage, tandis que la cinquième a un statut à part que nous développerons dans le paragraphe suivant.

- $0 \in Y$: cette hypothèse signifie qu'il est toujours possible pour une firme de ne rien produire (en utilisant aucun input). Cette hypothèse prend une signification quelque peu différente selon le point de vue que l'on adopte. Si nous considérons une entreprise qui doit décider du choix d'une technique de production, avant d'être réellement constituée comme entreprise, alors le choix de l'inaction est effectivement possible. En revanche, si nous nous plaçons après que l'entreprise soit constituée et aie déjà pris des décisions (par exemple la construction d'une usine), alors cette hypothèse peut sembler plus problématique, puisque elle revient à supposer qu'aucun coût fixe, non récupérable, n'existe.
- $Y \cap \mathbb{R}_+^C = \{0\}$: cette hypothèse signifie qu'il n'est pas possible de produire un bien sans utiliser au moins un input. Pour illustrer ceci, plaçons nous dans une économie à deux biens et supposons que le vecteur $(1, 0)$ appartienne à $Y \cap \mathbb{R}_+^2$. Ceci signifierait alors qu'il est possible de produire une unité du premier bien sans avoir à utiliser le bien numéro 2. Cette hypothèse élimine une telle possibilité. Graphiquement, elle signifie qu'un ensemble de production ne peut jamais avoir une intersection non-vide avec le quadrant Nord-Est : cette hypothèse élimine le cas de figure représenté sur le graphique **??**, où le point A appartient à la fois au quadrant Nord-Est et à l'ensemble de production.
- $Y - \mathbb{R}_+^C \subset Y$: cette hypothèse est appelée hypothèse d'élimination libre. Elle signifie que lorsque nous retirons un vecteur positif quelconque à un vecteur techniquement réalisable, nous obtenons un vecteur qui reste réalisable. Elle exprime le fait que si un processus de production y est possible, alors tout autre processus dont les outputs seraient inférieurs et les inputs supérieurs (en valeur absolue) est également techniquement possible. Il est donc possible d'éliminer sans coût supplémentaire les productions excédentaires, telles que les déchets par exemple. Par exemple, si le plan (2,-3) appartient à Y, alors (1,-3) = (2,-3)-(1,0) et (2,-5)=(2,-3)-(0,2) appartiennent également à Y, ainsi que (1,-4)=(2,-3)-(1,1). Cette hypothèse peut paraître contestable, et n'est pas à proprement parler nécessaire à l'analyse, mais la simplifie. Graphiquement, cette hypothèse signifie que si le point A du graphique **??** est techniquement possible, alors tous les points situés au Sud-Ouest de ce point sont également techniquement réalisables.

- Y est un ensemble fermé : cette hypothèse est essentiellement technique et peu restrictive. Elle signifie que l'ensemble comprend ses frontières.
- Y est convexe : cette hypothèse, avec la première, signifie que les rendements d'échelle sont décroissants. Pour en comprendre la signification, il nous faut développer la notion de rendements d'échelle.

[31] Nous omettrons l'indice f afin d'alléger les notations.

FIG. 3.2: L'hypothèse d'élimination libre



3.2.2 Rendements d'un ensemble de production

3.2.2.1 Définition

Nous définissons ici la notion de rendements d'un ensemble de production, ou rendements d'échelle, qu'il ne faut pas confondre avec la notion de rendements marginaux des facteurs de production que nous introduirons par la suite.

Définition : *Un ensemble de production Y est :*

- *à rendements croissants si pour tout vecteur $y \in Y$ et tout scalaire $k \geq 1$, $ky \in Y$,*
- *à rendements décroissants si pour tout vecteur $y \in Y$ et tout scalaire $k \in [0, 1]$, $ky \in Y$,*
- *à rendements constantssi pour tout vecteur $y \in Y$ et tout scalaire $k \geq 0$, $ky \in Y$.*

Ces notions de rendements d'un ensemble de production s'interprètent aisément. Un ensemble de production est à rendements croissants si lorsque tous les inputs et les outputs d'un plan de production possible sont multipliés par un même scalaire, le plan de production ainsi obtenu est également techniquement possible. Il est donc possible d'augmenter arbitrairement l'échelle de production : si $(1, -2)$ appartient à Y, alors $(10^6, -2.10^6)$ appartient également à Y. En revanche, $(1/2, -1)$ n'appartient pas nécessairement à Y.

Un ensemble de production est à rendements décroissants s'il est toujours possible de diviser les inputs et les outputs, tout en restant dans le domaine des plans de production possibles. Il est alors possible de réduire arbitrairement l'échelle de production dans ce cas.

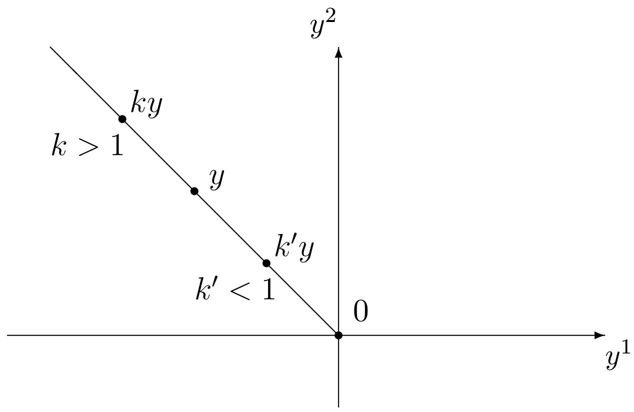
Enfin, un ensemble de production est à rendements constants lorsqu'il est à la fois à rendements croissants et à rendements décroissants. Dans ce cas, l'échelle de production peut être modifiée dans n'importe quel sens, tout en restant dans l'ensemble de production.

Il est important de comprendre que, tels que nous les avons définis, ces concepts sont des concepts globaux. Il est donc clair que cette typologie n'est pas exhaustive, et qu'un ensemble de production peut ne rentrer dans aucune de ces catégories, c'est-à-dire, par exemple être à rendements décroissants pour ôcertaines valeurs des inputs", et à rendements croissants pour ôd'autres valeurs".

3.2.2.2 Représentation graphique

Les graphiques suivants illustrent ces notions dans le cas de deux biens ; y^1 est l'input (compté négativement) et y^2 l'output. Avant de représenter les différents cas de figure possibles, il faut comprendre comment tracer le vecteur ky, où k est un scalaire. Ceci est représenté sur le graphique 3.3.

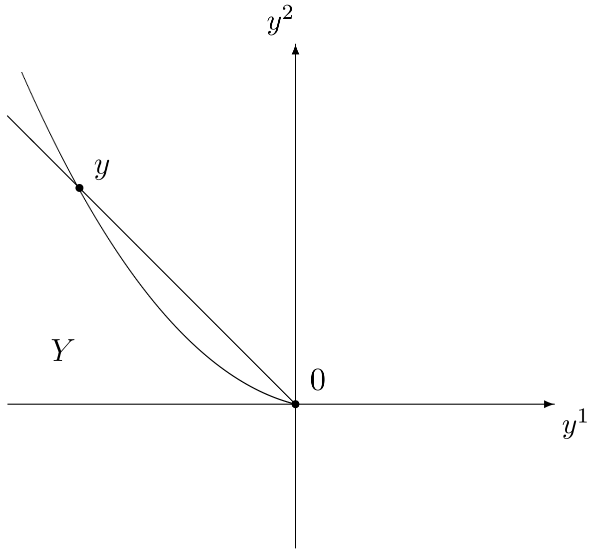
Fig. 3.3: La notion de rayon



Soit $y = (y^1, y^2)$ un vecteur avec $y^1 < 0$ et $y^2 > 0$. Le vecteur ky est égal à (ky^1, ky^2). Il conserve donc la même proportion d'input et d'output puisque $ky^1/ky^2 = y^1/y^2$. Graphiquement, le vecteur ky se situe sur le rayon passant par le vecteur y et par l'origine. Si $k > 1$, nous augmentons (en valeur absolue) les composantes du vecteur, et ky se situe plus loin de l'origine, tandis que si $k < 1$ nous diminuons (en valeur absolue) les composantes du vecteur, et nous nous rapprochons ainsi de l'origine. Nous pouvons maintenant procéder à la représentation des différents rendements. Sur les graphiques suivants, nous supposons que le bien 1 est nécessairement un facteur de production.

Le cas de rendements croissants est représenté sur le graphique 3.4. Les vecteurs ky pour $k \geq 1$ sont ceux situés sur le rayon passant par y, et à gauche de y. Si $y \in Y$ alors $ky \in Y$ pour tout $k \geq 1$.

FIG. 3.4: Un ensemble de production à rendements croissants



Le cas de rendements décroissants est représenté sur le graphique 3.5. Les vecteurs ky pour $k \in [0, 1]$ sont ceux situés sur le rayon passant par y, et compris entre y et 0. Si $y \in Y$ alors $ky \in Y$ pour tout k compris entre 0 et 1.

Enfin, le cas de rendements constants est illustré sur le graphique 3.6. Si y appartient à Y, alors cet ensemble doit contenir tout le rayon passant par y.

3.2.2.3 Coûts fixes et rendements d'échelle croissants

Nous avons jusqu'à présent adopté une présentation abstraite de la notion de rendements d'échelle. Nous discutons ici du lien entre cette approche et des approches plus ôintuitives", basée notamment sur la présence de coûts fixes.

Une source importante de rendements croissants est la présence de coûts fixes dans les processus de production. Nous avons déjà abordé le problème que pose l'hypothèse $0 \in Y$, à savoir le moment auquel nous nous plaçons (avant que l'entreprise ait construit son usine ou après). En faisant l'hypothèse que $0 \in Y$, nous supposons donc implicitement que l'entreprise n'a pas encore construit son usine. Cela exclut-il pour autant la présence de coûts fixes ?

FIG. 3.5: Un ensemble de production à rendements décroissants

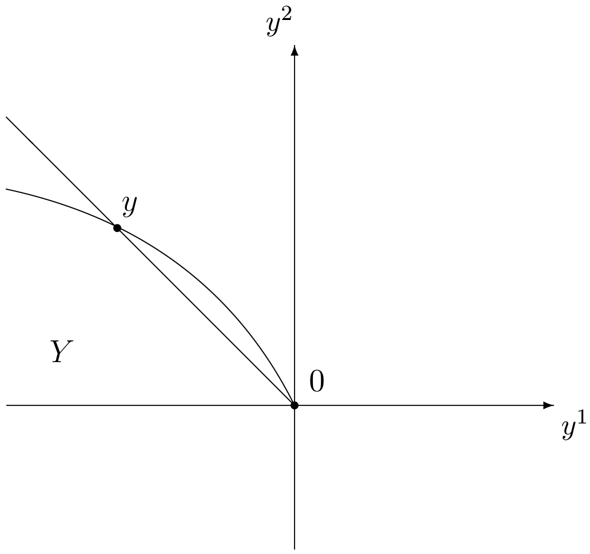
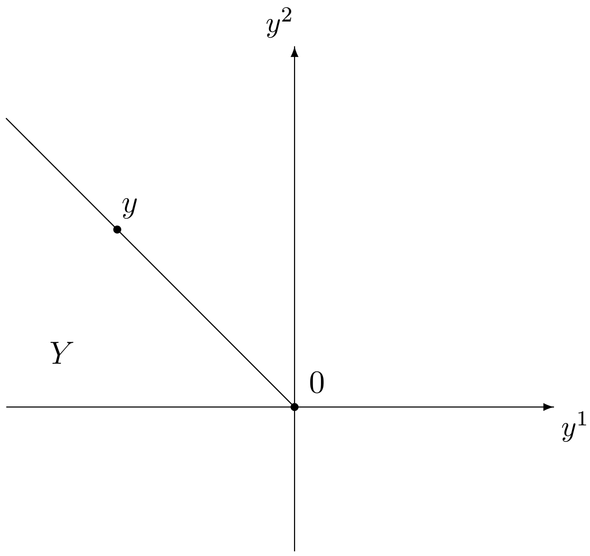
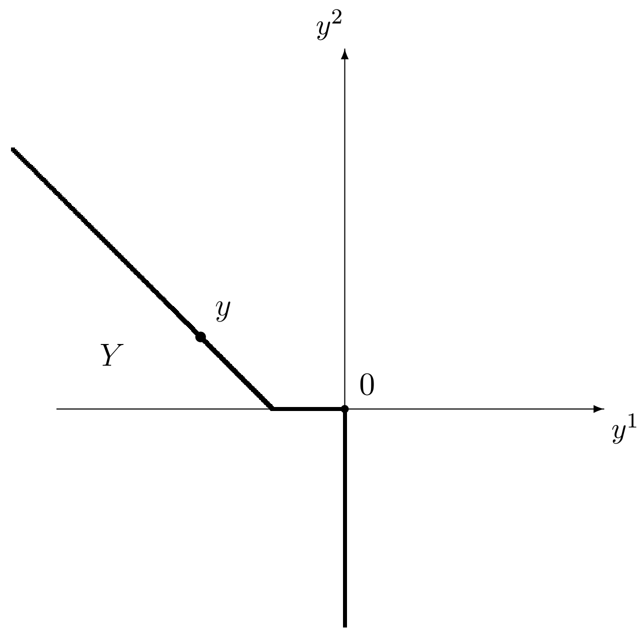


FIG. 3.6: Un ensemble de production à rendements constants



Il est aisé de voir que la réponse à cette question est bien évidemment négative. Les coûts fixes peuvent être incorporés à l'analyse sans aucune difficulté majeure, comme nous le constatons sur le graphique 3.7 (nous avons tracé la frontière de l'ensemble de production en gras pour bien la faire apparaître lorsqu'elle est confondue avec les axes).

FIG. 3.7: Un ensemble de production avec coûts fixes



Sur ce graphique, nous voyons que ne rien produire à un coût nul est toujours possible. En revanche, pour produire la première unité de bien 2, il est nécessaire d'investir un montant conséquent en bien 1. Ceci correspond bien à la notion de coûts fixes de production. Il est alors clair que les rendements ne peuvent être décroissants, le segment reliant le point y à 0 sortant nécessairement de l'ensemble de production.

Ainsi, les rendements de l'ensemble représenté sur le graphique 3.7, sont croissants.

3.2.2.4 Rendements d'échelle et convexité

Il est possible de relier la notion de rendements de l'ensemble de production à celle de convexité. En effet, la proposition suivante s'obtient aisément :

Proposition : *Si Y est convexe et $0 \in Y$, alors Y est à rendements décroissants.*

Démonstration : Puisque $0 \in Y$, nous obtenons par convexité de Y que pour tout $y \in Y$, et tout $k \in [0, 1]$, $k.y + (1 - k).0 = k.y \in Y$, ce qui est la définition des rendements décroissants.

Lorsque nous ferons par la suite l'hypothèse de convexité de Y, il conviendra de se souvenir qu'économiquement, cela implique des rendements décroissants (sans exclure, bien entendu, des rendements constants) si l'inactivité est possible sans coût[32].

3.2.2.5 Réplication et rendements constants

La notion d'ensemble de production à rendements constants a souvent été considérée comme étant la plus pertinente, sur la base d'un argument très intuitif. En effet, il est possible de défendre l'argument suivant : multiplier (diviser) l'utilisation de tous les inputs par deux devrait permettre de multiplier (diviser) la production par deux également. Cela peut être impossible à réaliser parce que certains inputs sont rares et ne peuvent être dupliqués, mais ce genre de considération ne doit pas interférer avec la définition d'un ensemble de production qui spécifie ce qu'il est possible de produire sans se préoccuper des limites de ressources[33].

Selon cette vue, les ensembles de production devraient toujours être représentés par des cônes convexes, c'est-à-dire des ensembles à rendements constants. Ainsi, des rendements décroissants seraient simplement le reflet de la rareté d'un facteur spécifique à la firme et non listé dans ces inputs, facteur qui serait ainsi ôcaché"'.

Formellement, nous pouvons rendre cette notion de facteur caché plus précise.

Proposition : *Pour tout ensemble de production* $Y \subset \mathbb{R}^C$ *convexe et tel que* $0 \in Y$*, il existe un ensemble de production à rendements constants* $Y' \subset \mathbb{R}^{C+1}$ *tel que* $Y = \{y \in \mathbb{R}^C \mid (y,-1) \in Y'\}$.

Démonstration : Il suffit de définir Y' de la manière suivante :

$$Y' = \left\{y' \in \mathbb{R}^{C+1} \mid y' = \alpha(y,-1), \text{ pour un } y \in Y \text{ et } \alpha \geq 0\right\}$$

Ce facteur caché représente donc tout ce qui est spécifique à la firme et ne peut être répliqué, et est souvent appelé en anglais *the entrepreneurial factor*. Dans un environnement concurrentiel, la rémunération de ce facteur est précisément le profit réalisé par la firme.

3.3 La fonction de production

La notion d'ensemble de production que nous venons de voir est reliée à celle, plus familière, de fonction de production. Une façon d'introduire la notion de fonction de production est de l'associer à celle de plan de production efficace.

3.3.1 Plans de production efficaces

Soit un ensemble de production Y. Un processus de production $y \in Y$ est efficace si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

[32] Remarquons par ailleurs que sur le graphique 3.7, l'ensemble Y n'est pas convexe du fait de la présence de coûts fixes.

[33] L'argument de réplication utilisé ici n'est pas valable en présence de coûts fixes : diviser par deux les ressources utilisées peut réduire de plus de la moitié la production si le coût fixe n'est plus couvert.

– Il n'est pas possible d'augmenter la production d'un output sans diminuer celle d'un autre output, ou augmenter la consommation d'un input.
– Il n'est pas possible de réduire la quantité utilisée d'un input sans augmenter celle d'un autre input, ou diminuer la production d'un output.

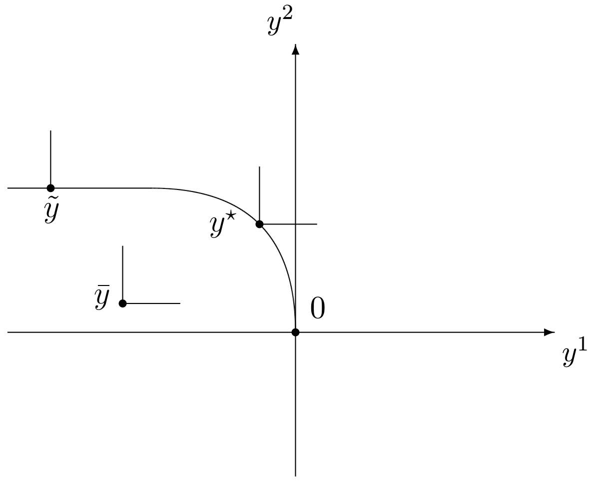
Compte tenu des conventions de signe, ceci est équivalent à dire qu'il n'est pas possible d'augmenter la production nette (égale à la quantité produite moins la quantité utilisée) d'un bien sans diminuer celle d'un autre.

Formellement, nous pouvons proposer la définition suivante :

Définition : $y^\star \in Y$ *est efficace si* $\left(\{y^\star\} + \mathbb{R}_+^C\right) \bigcap Y = \{y^\star\}$

Nous noterons E l'ensemble des plans de production efficaces, et proposons maintenant une interprétation graphique de cette notion. Sur le graphique 3.8, les points $\widetilde{y}$ et $\overline{y}$ correspondent à des plans de production non efficaces : en $\widetilde{y}$ il est possible de produire autant de bien 2 tout en diminuant la quantité de bien 1 utilisée, tandis qu'en $\overline{y}$, il est possible, en réduisant la quantité d'input utilisée, d'augmenter la production. Ces deux plans de production induisent donc un gaspillage des ressources. En revanche, le plan de production $y^\star$ est efficace. En ce point, si l'entrepreneur veut augmenter la production, il doit avoir recours à plus d'input, et s'il diminue la quantité d'input utilisée alors il doit nécessairement diminuer la quantité produite.

FIG. 3.8: Plans de production efficaces



3.3.2 Fonction de production et isoquante

Rappelons que les inputs sont comptés négativement et les outputs positivement. Un plan $y \in Y$ peut donc être représenté en le décomposant en I inputs z et O outputs q. Nous obtenons alors $y = (-z, q)$ avec $z \in \mathbb{R}_+^I$ et $q \in \mathbb{R}_+^O$.

Supposons maintenant pour simplifier, qu'une entreprise ne produit qu'un seul type de bien : $q \in \mathbb{R}_+$.

3.3.2.1 Définitions

Introduisons la notion de fonction de production.

Définition : *La fonction $g : \mathbb{R}_+^I \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(z) = q$ tel que $(-z, q) \in E$ est appelée fonction de production.*

La fonction de production associe à un vecteur d'input, l'output tel que le vecteur formé des inputs et de l'output est un plan de production efficace. La fonction de production est donc, en quelque sorte la frontière de l'ensemble de production. Ce n'est pas exactement la frontière car un point sur celle-ci peut correspondre à un plan de production inefficace, comme c'était le cas pour $\widetilde{y}$ sur le graphique 3.8.

Définition : *L'ensemble $I(q) = \left\{z \in \mathbb{R}_+^I \,|\, (-z, q) \in E\right\}$ est appelé isoquante au niveau q.*

Une isoquante est donc le lieu de toutes les combinaisons d'inputs conduisant à un niveau d'output donné. Etant donnée la définition de la fonction de production, nous pouvons réécrire la définition d'une isoquante comme : $I(q) = \left\{z \in \mathbb{R}_+^I \,|\, g(z) = q\right\}$.

Sont représentés sur les graphiques 3.9 deux cas de figure possibles, dans le cas de deux inputs. Sur le graphique de gauche une certaine substituabilité est possible entre les facteurs de production, tandis que ceux-ci sont strictement complémentaires sur le graphique de droite.

Enfin, il est possible de définir, à partir de la fonction de production considérée cette fois comme concept initial, l'ensemble de production associé, de sorte qu'il existe une relation forte entre ces deux manières de voir le processus productif.

Définition : *L'ensemble de production Y associé à la fonction de production g est donné par :*

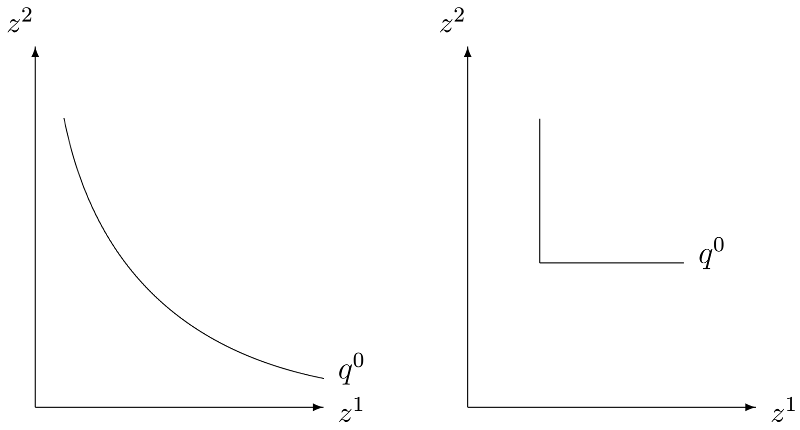
$$Y = \left\{y = (-z, q) \in (-\mathbb{R})_+^I \times \mathbb{R}_+ \;\mid\; q \leq g(z)\right\}$$

3.3.2.2 Rendements d'échelle décroissants et concavité de g

Nous avons vu l'importance et la signification de l'hypothèse de convexité pour un ensemble de production . Nous établissons ici que cela correspond à la concavité de la fonction de production. Rappelons[34] que Y est convexe si pour tout $y, y' \in Y$,

[34] Voir également le chapitre 16.

FIG. 3.9: Isoquantes



$\lambda y + (1-\lambda)y' \in Y$ pour tout $\lambda \in (0,1)$, et qu'une fonction g est concave si pour tout x, x', $g(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(x')$ pour tout $\lambda \in (0,1)$.

Proposition : *Y est convexe $\Longleftrightarrow$ g est concave*

Démonstration (dans le cas d'un seul output) :
(i) Y est convexe $\Longrightarrow$ g est concave
Soit (q,z) et (q',z') tels que $q = g(z)$ et $q' = g(z')$. En conséquence, $(-z,q) \in Y$ et $(-z',q') \in Y$, ce qui implique, par convexité de Y, que pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$(-\lambda z - (1-\lambda)z', \lambda q + (1-\lambda)q') \in Y$$

Donc, par définition de Y,

$$\lambda q + (1-\lambda)q' = \lambda g(z) + (1-\lambda)g(z') \leq g(\lambda z + (1-\lambda)z') \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in [0,1]$$

ce qui est bien la définition de la concavité de g.
(ii) Y est convexe $\Longleftarrow$ g est concave
Soit $(-z,q) \in Y$ et $(-z',q') \in Y$. Par concavité de g nous savons que, pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} g(\lambda z + (1-\lambda)z') &\geq \lambda g(z) + (1-\lambda)g(z') \\ &\geq \lambda q + (1-\lambda)q' \end{aligned}$$

puisque $g(z) \geq q$ et $g(z') \geq q'$.
Donc, $(-\lambda z - (1-\lambda)z', \lambda q + (1-\lambda)q') \in Y$, et Y est convexe. $\square$

Nous obtenons ainsi immédiatement que si g est concave et $g(0) \leq 0$, alors les rendements sont décroissants. En effet, dans ce cas, Y est convexe et $0 \in Y$, ce qui correspond bien à la notion de rendements décroissants.

3.3.2.3 Rendements marginaux

La fonction de production permet de définir la notion de rendement marginal d'un facteur de production. Supposons pour cela que la fonction de production g soit différentiable. $\frac{\partial g(z)}{\partial z^c}$ représente la contribution marginale de l'input c à la production de l'output. En d'autres termes, cette quantité nous dit de combien augmente la production de l'output lorsque la quantité de l'input c augmente. Nous l'appellerons *rendement marginal* ou *productivité marginale* de l'input c.

La concavité de g implique certaines propriétés de ses dérivées secondes (lorsque celles-ci existent), et en particulier que :

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial \left(z^c\right)^2} \leq 0$$

Ceci signifie que le rendement marginal de l'input c est décroissant. Plus ce dernier est utilisé, moins il est productif, toutes choses égales par ailleurs. En d'autres termes, le supplément de production que permet l'utilisation d'une unité supplémentaire d'input c diminue au fur et à mesure que la quantité du facteur de production c augmente.

Il est important de bien distinguer les notions de rendements d'échelle et de rendements marginaux. Dans le cas de rendements d'échelle, c'est l'ensemble des facteurs de production qui est multiplié par une constante, alors que dans le cas de rendement marginal, tous les facteurs de production sauf un sont maintenus constants. En particulier, il est tout à fait possible d'avoir des fonctions de production à rendements (d'échelle) croissants et à rendements marginaux décroissants.

3.3.2.4 Un exemple : les fonctions de production Cobb-Douglas

Supposons qu'il existe deux facteurs de production z^1 et z^2, qui, combinés, permettent la production d'un bien q, selon la fonction de production dite Cobb-Douglas, $q = g(z^1, z^2) = (z^1)^\alpha.(z^2)^\beta$, où α et β sont des paramètres positifs.

Il convient de remarquer que cette fonction est homogène de degré $\alpha+\beta$: $g\left(\lambda z^1, \lambda z^2\right) = \lambda^{\alpha+\beta} g\left(z^1, z^2\right)$.

L'ensemble de production associé à cette fonction est :

$$Y = \left\{(-z^1, -z^2, q) \mid q \leq g(z^1, z^2)\right\}$$

Nous nous demandons maintenant si cet ensemble est à rendements croissants, constants ou décroissants.

En d'autres termes, étant donné $(-z^1, -z^2, q) \in Y$, pour quelles valeurs de k le vecteur $k(-z^1, -z^2, q)$ appartient-il à Y ? La réponse dépend bien évidemment de la valeur de $\alpha + \beta$.

$$k(-z^1, -z^2, q) \in Y \Longleftrightarrow kq \leq g(kz^1, kz^2)$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow kq \leq k^{\alpha+\beta} g(z^1, z^2) \\ &\Longleftrightarrow q \leq k^{\alpha+\beta-1} g(z^1, z^2) \end{aligned}$$

Si nous nous restreignons maintenant aux plans de production efficaces, nous obtenons alors $q = g(z^1, z^2)$, et en conséquence :

$$k(-z^1, -z^2, q) \in Y \Longleftrightarrow 1 \leq k^{\alpha+\beta-1}$$

Nous pouvons ainsi récapituler les résultats selon les valeurs de $\alpha+\beta$ dans le tableau suivant, où nous adoptons la notation $x = (-z^1, -z^2, q)$:

	$k < 1$	$k > 1$	rendements
$\alpha + \beta < 1$	$kx \in Y$	$kx \notin Y$	décroissants
$\alpha + \beta = 1$	$kx \in Y$	$kx \in Y$	constants
$\alpha + \beta > 1$	$kx \notin Y$	$kx \in Y$	croissants

Etudions maintenant le rendement marginal du premier facteur de production (l'analyse pour le second est analogue).

Par simple dérivation, nous obtenons :

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z^1} = \alpha \left(z^1\right)^{\alpha-1} \left(z^2\right)^{\beta}$$

et

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial \left(z^1\right)^2} = \alpha(\alpha-1) \left(z^1\right)^{\alpha-2} \left(z^2\right)^{\beta}$$

Le rendement marginal du premier facteur de production est décroissant si $\alpha \leq 1$, puisque dans ce cas la dérivée seconde de la fonction de production par rapport à ce facteur est négative.

Il est donc clair que des rendements d'échelle décroissants impliquent que les rendements marginaux sont décroissants, mais il est également clair que la condition de rendements croissants ($\alpha + \beta > 1$) est compatible avec celle de rendements marginaux décroissants ($\alpha < 1$ et $\beta < 1$).

3.4 L'optimum du producteur

Maintenant que nous avons fourni une description des possibilités technologiques de l'entreprise, il nous faut spécifier son comportement économique. Nous commençons en définissant l'objectif de la firme. Une fois cet objectif défini, nous analysons le programme de l'entreprise et caractérisons son comportement d'offre.

3.4.1 L'objectif de la firme

Il est usuel de retenir comme critère pour l'entreprise celui de la maximisation du profit. Pourquoi ? L'entreprise en soi n'est en effet qu'une organisation destinée à produire des biens, et n'a pas *a priori* de critère propre bien défini, comme c'était le cas pour les consommateurs. En particulier, une entreprise est détenue par des individus qui sont également des consommateurs. Si une firme était détenue par un seul consommateur, son objectif serait clair : maximiser l'utilité de son propriétaire. Mais qu'en est-il si cette entreprise est en fait détenue par plusieurs individus ?

La réponse est que la maximisation du profit est précisément ce que chacun désire. Montrons rapidement pourquoi ceci est vrai. Une entreprise est détenue pour un certain pourcentage θ_h par le consommateur h. L'entreprise étant détenue à 100% par les ménages, $\sum_h \theta_h = 1$ (il est bien entendu possible que certains ménages ne détiennent aucune part de cette entreprise, auquel cas $\theta_h = 0$ pour ces ménages). Ecrivons maintenant le programme de maximisation d'un consommateur possédant une part de cette entreprise. Il va désirer maximiser son utilité $u_h(x_h)$ sous sa contrainte budgétaire qui s'exprime maintenant $px_h \leq pe_h + \theta_h py$.

Ce dernier terme mérite un commentaire. Il représente la part du profit de la firme à laquelle le consommateur a droit. En effet, compte tenu des conventions de signe, les facteurs de production sont représentés par le vecteur $-z$, avec $z > 0$, et nous avons bien $py = (p_q, p_z)(q, -z) = p_q q - p_z z =$ recettes - dépenses, c'est-à-dire le profit de la firme.

Ainsi, pour un vecteur de prix donné, des profits plus élevés accroissent le revenu du consommateur, ce qui lui est clairement favorable. Ceci étant vrai pour tous les consommateurs détenant cette entreprise, il s'en suit que tous les actionnaires de la firme sont d'accord pour que celle-ci leur procure le profit le plus élevé possible, lorsque les prix sont donnés. Nous pouvons donc conclure qu'il y a unanimité des actionnaires pour que la firme maximise son profit.

La discussion précédente justifie donc la modélisation suivante du comportement du producteur en concurrence parfaite. Sous l'hypothèse que chaque producteur considère le système de prix p comme donné, il cherche, de par ses décisions de production, à maximiser son profit.

Ce comportement peut se formaliser ainsi :

$$\begin{array}{ll} \max_y & py \\ \text{s.c.} & y \in Y \end{array}$$

L'hypothèse de preneur de prix est très importante. Si la firme avait un quelconque pouvoir de marché et que les prix pratiqués dépendaient de sa production, il se pourrait que les actionnaires ne soient plus d'accord entre eux sur l'objectif de la firme. En effet, prenons le cas extrême suivant : une firme, libre de choisir sa production et ses prix, est détenue par deux individus. L'un consomme exclusivement du bien produit par cette firme tandis que l'autre n'en consomme pas. Il est probable que ces deux individus auront des objectifs contraires, le premier désirant un prix du bien assez faible, tandis que l'autre voudra le prix qui maximise le revenu qu'il reçoit de la firme, c'est-à-dire le prix maximisant le profit. Comme il n'y a plus unanimité, l'objectif de la firme n'est plus bien défini.

Il est d'autres cas où l'objectif de l'entreprise devient difficile à définir, notamment lorsque l'environnement économique est incertain. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 13.

Pour l'instant, revenons à notre problème de maximisation du profit sous l'hypothèse de concurrence parfaite. Notons $\pi(p)$ le profit au prix p. Comme dans le cas du consommateur, nous devons nous interroger sur l'existence d'une solution, et, en cas de réponse positive, sur les propriétés de celle-ci.

3.4.2 Existence et unicité d'une solution

Le problème n'est pas aussi simple que pour le consommateur. Il n'est en effet pas possible de présenter des propriétés générales d'existence d'un maximum de profit. Le problème est assez facile à cerner : l'ensemble de production n'est pas borné, contrairement à l'ensemble budgétaire du consommateur qui lui était borné et fermé. En dépit de ce problème, nous pouvons tout de même établir certaines propriétés qui nous seront utiles par la suite.

Proposition : *Si* $0 \in Y$ *alors* $\pi(p) \geq 0$

Démonstration : 0 est un plan toujours réalisable et $p0 = 0$.

Proposition : *Si* $0 \in Y$ *et* Y *est à rendements constants alors le profit maximum, s'il existe, est nul*

Démonstration : $0 \in Y \Longrightarrow \pi(p) \geq 0$. Supposons maintenant que $\pi(p) > 0$ pour un plan de production y. Alors, les rendements étant constants, $2y$ est un plan possible et rapporte deux fois plus de profit. Dans ce cas, le profit maximal ne peut exister, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse initiale.

Proposition : *Si* Y *est strictement convexe et s'il existe une solution au problème de maximisation, alors celle-ci est unique.*

Démonstration : Soient y et y' deux solutions distinctes au problème de maximisation. Il s'en suit alors nécessairement que $py = py'$. Posons $\widetilde{y} = \lambda y + (1-\lambda)y'$ avec $\lambda \in (0,1)$. Puisque Y est strictement convexe, $\widetilde{y}$ appartient à l'intérieur de Y, comme l'illustre le graphique 3.10.

Il existe donc $\overline{y} \gg \widetilde{y}$ tel que $\overline{y} \in Y$. Ceci implique qu'il existe un plan réalisable, $\overline{y}$ qui procure un profit $p\overline{y}$ supérieur à $p\widetilde{y} = \lambda py + (1-\lambda)py' = py$ et donc que y n'est pas une solution au programme de maximisation, en contradiction avec l'hypothèse de départ.

Dans le cas où la solution existe et est unique, il est possible de définir une *fonction* d'offre, associant à chaque vecteur de prix le plan de production qui maximise le profit.

La représentation graphique de la maximisation du profit est similaire à celle de la maximisation de l'utilité pour le consommateur. Elle est illustrée sur le graphique 3.11.

Sur ce graphique est représentée une situation dans laquelle il existe une solution unique au problème de maximisation. Il y a deux biens, et le maximum de profit, sous contrainte de possibilité technique, est atteint au point de tangence $y^\star$ entre la droite

FIG. 3.10: Stricte convexité et intériorité de $\widetilde{y}$

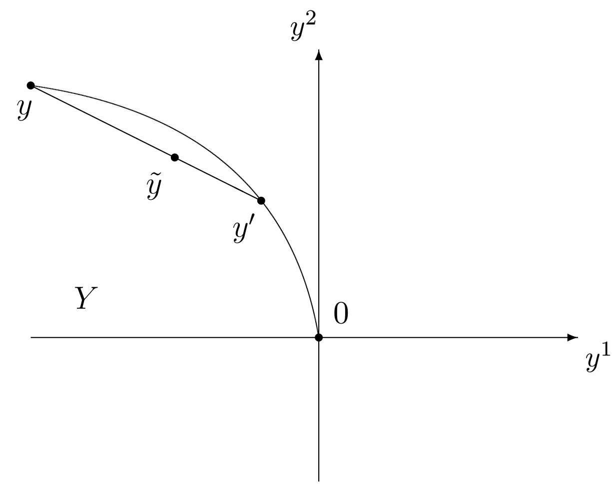
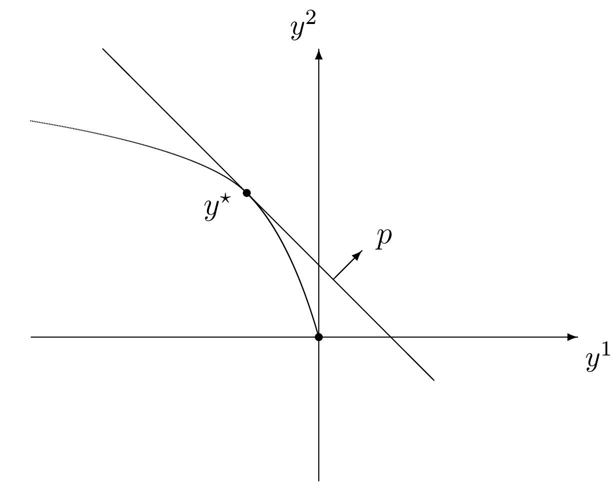


FIG. 3.11: Maximisation du profit

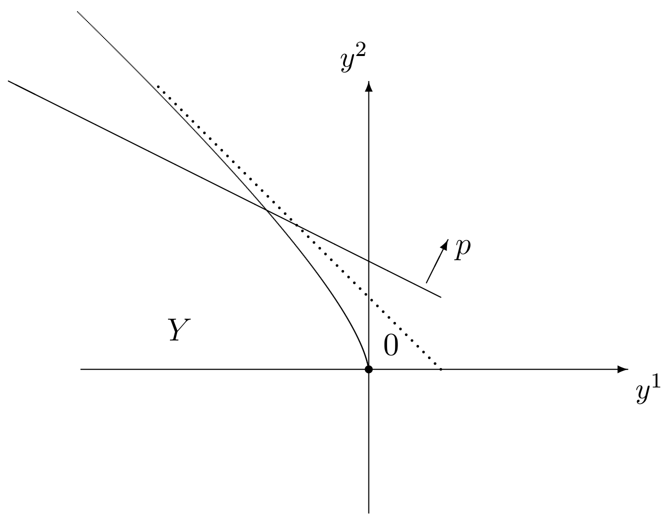


d'iso-profit, dont la pente est donnée par le rapport des prix des deux biens, et la frontière de l'ensemble de production.

Ce graphique suggère les raisons de la non-existence possible d'une solution. Tout d'abord dans le cas de rendements croissants, il n'existe pas de profit maximum. En effet, si le profit maximal était atteint en un point $\overline{y}$, alors le plan de production $k\overline{y}$, $k > 1$, serait réalisable et donnerait un profit encore plus élevé. Cette contradiction révèle que l'hypothèse de concurrence parfaite n'est pas appropriée pour le cas de firmes ayant des rendements croissants. Il est en effet peu probable que le prix ne change pas lorsqu'elles se mettent à produire sur une grande échelle. Dans ce cas, il est plausible qu'elles réalisent que le prix auquel elles peuvent vendre leur production dépend de la quantité produite. Dans ce cas de figure, l'hypothèse de concurrence parfaite semble particulièrement peu réaliste.

Il peut cependant arriver qu'il n'existe pas de solution au programme de maximisation, même lorsque l'entreprise a des rendements décroissants, comme le montre le graphique 3.12

FIG. 3.12: Absence de solution à la maximisation du profit



Supposons en effet que la frontière de l'ensemble de production (strictement convexe) admette une asymptote représentée par la droite en pointillés et que le système de prix soit tel que les droites d'iso-profit aient une pente inférieure (en valeur absolue) à celle de l'asymptote. Il n'existe alors pas de point de tangence entre l'ensemble de production et une droite d'iso-profit, et le problème n'admet pas de solution. L'entrepreneur, au système de prix en vigueur, a toujours intérêt à produire plus. En effet, la productivité marginale, en valeur, de l'input est toujours supérieure à son coût. Sur cet exemple, les rendements sont décroissants, mais ôasymptotiquement constants", ce qui est à la source de l'inexistence possible d'une solution au problème du producteur.

3.4.3 Caractérisation de l'optimum

Dans le cas d'un seul output, le problème de maximisation peut s'écrire de manière équivalente :

$$\begin{array}{ll} \max_{q,z} & pq - wz \\ \text{s.c.} & q = g(z) \end{array}$$

où p représente le prix de l'output et w le vecteur de prix des inputs. Nous omettons les contraintes de positivité de z et nous concentrons uniquement sur les solutions intérieures. La solution à ce problème nous donnera la fonction d'offre du producteur.

De la même manière que pour le consommateur, il est possible de montrer que si $(q^\star, z^\star)$ est une solution intérieure, alors il existe $\lambda^\star \geq 0$ tel que $(q^\star, z^\star, \lambda^\star)$ est une solution au problème de maximisation du lagrangien :

$$\mathcal{L}(q, z, \lambda) = pq - wz + \lambda(g(z) - q)$$

Les conditions de premier ordre, issues de la maximisation du lagrangien correspondant, nous donnent (w^c est le prix de l'input c) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p & = & \lambda \\ w^c & = & \lambda \frac{\partial g(z)}{\partial z^c} \quad \text{pour tout input } c \end{array} \right.$$

Ces deux équations permettent de dériver les deux formules suivantes :

$$\frac{\partial g(z)/\partial z^c}{\partial g(z)/\partial z^{c'}} = \frac{w^c}{w^{c'}}$$

c'est-à-dire qu'à l'optimum, le taux marginal de substitution (technique) entre les inputs c et c' doit être égal au rapport du prix des produits, et,

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z^c} = \frac{w^c}{p}$$

c'est-à-dire que la productivité marginale du facteur de production c doit être égale au rapport entre le prix de cet input et celui de l'output.

Pour comprendre la première de ces égalités, supposons qu'elle ne soit pas vérifiée, et par exemple que

$$\frac{\partial g(z)/\partial z^c}{\partial g(z)/\partial z^{c'}} > \frac{w^c}{w^{c'}}$$

Dans ce cas, il existe une possibilité d'augmenter le profit : il faut substituer de l'input c à l'input c'. Réalisons l'opération suivante : diminuons l'utilisation de l'input c' d'une unité, et avec cette économie, achetons $w^{c'}/w^c$ unités de l'input c : en termes d'achats d'input l'opération est neutre. Calculons le résultat de cette opération en termes de production (physique). Ayant diminué d'une unité l'utilisation du bien c', nous perdons une production de $\partial g(z)/\partial z^{c'}$. Ayant augmenté l'utilisation du bien c de $w^{c'}/w^c$ unités, nous gagnons une production de $\left(w^{c'}/w^c\right) \times \partial g(z)/\partial z^c$. Au total, nous voyons que les gains dominent les pertes si l'inégalité supposée est vérifiée. Il y a donc moyen d'augmenter le profit.

Raisonnons de la même manière pour la seconde égalité, et supposons qu'elle ne soit pas vérifiée, et que par exemple :

$$\frac{\partial g(z)}{\partial z^c} > \frac{w^c}{p}$$

Dans ce cas, augmentons l'utilisation de l'input c d'une unité. Ceci coûte w^c francs, mais rapporte $p \times (\partial g(z)/\partial z^c)$ du fait du surcroît de production permis. Au total, le profit réalisé par cette opération est positif si l'inégalité ci-dessus est vérifiée. Il n'existe plus de possibilité d'augmenter son profit lorsque l'égalité est satisfaite.

Ces relations ne proviennent que de l'étude des conditions de premier ordre, qui ne sont bien sûr pas des conditions suffisantes d'optimalité. L'étude des conditions de second ordre, que nous n'entreprendrons pas ici, ferait apparaître qu'au voisinage d'un optimum du producteur, les rendements marginaux doivent être décroissants.

Nous admettrons la proposition suivante[35], qui spécifie les conditions sous lesquelles les conditions de premier ordre sont suffisantes.

Proposition : *Si les contraintes techniques sont représentées par une fonction de production différentiable, définissant un ensemble de production convexe, et si $(-z, q) = y$ vérifie les conditions de premier ordre du problème de maximisation sous contrainte, alors y est un optimum de l'entreprise.*

3.4.4 Exemples

Nous illustrons la discussion abstraite des paragraphes précédents par trois exemples simples, avec un seul input et un seul output.

3.4.4.1 Rendements décroissants

Supposons ici que le producteur produise du bien y à l'aide du facteur de production z au moyen de la technique de production $y = A(z)^\alpha$, où A est un paramètre positif et α est strictement compris entre 0 et 1.

Nous avons vu ci-dessus que l'ensemble de production associé est convexe et donc nous pouvons trouver la fonction d'offre de bien et de demande de facteur de production en appliquant les conditions de premier ordre du programme de maximisation. Le producteur cherche donc à maximiser son profit, égal à $py - wz$ sous la contrainte technique.

La condition de premier ordre s'écrit : $pA(z)^{\alpha-1} = w$, ce qui nous donne comme fonction de demande de facteur de production :

$$z(p, w) = \left(\frac{A\alpha p}{w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

[35] Démontrée, par exemple, dans le manuel de E. Malinvaud, *Leçons de théorie micro-économique*, éditions Dunod, 1988.

et, en reportant dans la fonction de production, une fonction d'offre de bien

$$y(p,w) = A\left(\frac{A\alpha p}{w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Observons donc ici qu'il existe une solution unique au problème de maximisation du producteur quel que soit les prix et les salaires. En particulier, nous n'avons pas de problème d'existence car la fonction est à rendements décroissants et que la productivité marginale de l'input tend vers zéro quand l'utilisation de celui-ci tend vers l'infini. Ainsi, l'asymptote qqui correspondrait à celle tracée sur le graphique 3.12 est horizontale, et une solution existe pour tout rapport de prix positif.

3.4.4.2 Rendements constants

Considérons maintenant une technique de production représentée par : $y = Bz$, c'est-à-dire une technique à rendements constants. L'ensemble de production associé est convexe. Toutefois, les conditions de premier ordre ne sont pas suffisantes, ou plus précisément, il faut savoir les interpréter correctement.

En effet, il est aisé de voir que la condition de premier ordre (outre celle exprimant la faisabilité technique de la solution) se réduit à une relation entre les paramètres, à savoir $Bp = w$. Qu'est-il possible d'en déduire ?

Si nous appliquons la proposition énoncée ci-dessus, nous pouvons affirmer que si cette égalité est réalisée, tout vecteur (y, z) vérifiant $y = Bz$ est une solution au problème de maximisation. Nous avons donc une indétermination de la demande d'input et de l'offre d'output lorsque $Bp = w$. Autrement dit, tout vecteur techniquement réalisable constitue un vecteur maximisant le profit de l'entreprise.

Toutefois, cela n'épuise pas ce cas. Qu'en est-il, en effet, lorsque l'égalité $Bp = w$ n'est pas vérifiée (rappelons que p et w sont des paramètres pour l'entrepreneur) ?

Dans ce cas, les conditions du premier ordre ne nous disent plus rien, et il faut développer un raisonnement différent pour trouver offre et demande du producteur. En l'occurence, ce raisonnement est très simple. Si $Bp > w$, alors le profit réalisé sur chaque unité d'output est positif. Dans ce cas l'entrepreneur a intérêt à développer son offre à l'infini. Sa demande d'input est donc infinie, de même que son offre d'output. En revanche, si $Bp < w$, le producteur réalise une perte sur chaque unité de bien produite. Il préfèrera donc ne rien offrir et aura en conséquence une demande de facteur de production nulle.

Nous avons donc obtenu la fonction d'offre suivante :

- si $Bp > w$, l'offre de bien est infinie. Le profit est lui-même infini (de telle sorte qu'un maximum n'existe pas).
- si $Bp = w$, l'offre de bien est indéterminée. Le profit est identiquement nul.
- si $Bp < w$, l'offre de bien est nulle. Le profit est nul.

3.4.4.3 Rendements croissants

Considérons enfin le cas d'une technique à rendements croissants, par exemple $y = C(z)^\beta$ où C est un paramètre positif et $\beta > 1$. Nous savons que l'ensemble de production associé à cette fonction de production n'est pas convexe. Les conditions du premier ordre ne sont donc pas suffisantes. Si toutefois nous appliquions cette approche et calculions l'offre et la demande qui annule la dérivée du profit, nous obtiendrions :

$$k = \left(\frac{\beta Cp}{w}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \quad \text{et} \quad y = C\left(\frac{\beta Cp}{w}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}}$$

Toutefois, le résultat de cette ômaximisation" donne en fait le minimum du profit. Les conditions de second ordre ne sont en effet pas vérifiées pour l'obtention d'un maximum. Il est aisé de vérifier que la ôsolution" donnée ci-dessus correspond en fait à un profit négatif. En conséquence, l'entrepreneur ayant toujours la possibilité de ne rien produire et de faire un profit nul, les fonctions ci-dessus ne constituent pas la solution au problème de maximisation du profit.

Comment trouver cette dernière ? En fait, comme nous pouvions nous en douter intuitivement, une telle solution n'existe pas. Afin de s'en convaincre, écrivons la dérivée du profit par rapport à z :

$$\beta Cp(z)^{\beta-1} - w$$

Cette expression est croissante en z puisque $\beta > 1$. Ainsi, à partir d'un certain seuil, la dérivée du profit par rapport à z est toujours positive. L'entrepreneur gagne ainsi toujours plus en développant toujours plus son activité. En conséquence, le profit maximum est infini, et le producteur demande un montant infini de facteur de production et offre une quantité également infinie de bien.

Economiquement, il est clair qu'il est toujours souhaitable de développer le plus possible une technique de production qui devient de plus en plus rentable au fur et à mesure qu'elle est plus utilisée. Ceci explique pourquoi le producteur désire produire une quantité infinie. Mais il est également clair que l'hypothèse de preneur de prix n'a plus grand sens dans ce cas. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous étudierons l'équilibre général avec production.

3.5 Propriétés de la fonction d'offre

La fonction d'offre définit $y^\star$, la solution au problème de maximisation, en fonction du prix p. Nous avons vu que $y^\star(p)$ est bien une fonction lorsque Y est strictement convexe. Nous en étudions maintenant les propriétés.

Remarquons que par fonction d'offre, nous entendons ici offre nette : l'offre de facteurs de production est négative (et correspond en conséquence à une demande), tandis que l'offre d'output est positive.

3.5.1 Homogénéité de la fonction d'offre

Nous établissons ici que la fonction d'offre est homogène de degré zéro par rapport aux prix : le producteur ne souffre donc d'aucune ôillusion monétaire". Si nous changeons l'unité monétaire et décidons de compter en centimes plutôt qu'en francs, le comportement réel du producteur (ses offres et ses demandes) ne sera pas modifié.

Proposition : *La fonction d'offre est homogène de degré zéro par rapport aux prix, soit $y^\star(kp) = y^\star(p)$ pour tout $k > 0$.*

> **Démonstration** : Cette propriété découle du fait que les programmes
>
> $$\max_y \quad py \;\text{ s.c. }\; y \in Y \qquad \text{et} \qquad \max_y \quad kpy \;\text{ s.c. }\; y \in Y$$
>
> définissent la même solution si $k > 0$.

3.5.2 Efficacité et maximum de profit

Nous établissons ici qu'un plan de production maximisant le profit du producteur, s'il existe, doit être un plan efficace.

Proposition : *Soient $p \gg 0$ et $y^\star$ une solution au problème de maximisation du profit, alors $y^\star$ est efficace.*

> **Démonstration** : Supposons que $y^\star$ ne soit pas efficace. Alors il existe $\overline{y} > y^\star$ qui appartient à Y. Puisque $p \gg 0$, $p\overline{y} > py^\star$, ce qui est en contradiction avec le fait que $y^\star$ est une solution du problème.

Cette proposition est un premier exemple d'un des thèmes essentiels de la théorie de l'équilibre général, à savoir que la concurrence sur les marchés conduit à une situation efficace[36]. En effet, cette proposition nous dit que si chaque producteur agit en maximisant son profit étant donnés les prix, alors il produit un plan efficace, n'entraînant auncun gaspillage de ressources. Remarquons aussi que cette proposition est vraie même si l'ensemble de production n'est pas convexe (il faut toutefois qu'une solution au programme de maximisation existe).

3.5.3 La loi de l'offre

Il est possible, contrairement au cas du consommateur, de dire sans ambigu‹té que lorsque le prix d'un bien augmente, l'offre nette de ce bien ne peut pas diminuer.

Proposition : *Soient p et p' deux vecteurs de prix, et y et y' les deux optima correspondant, alors $(p - p')(y - y') \geq 0$.*

> **Démonstration** : Par définition de y et y', $py' \leq py$ et $p'y \leq p'y'$. Combinant ces deux inégalités (la seconde peut se réécrire $-p'y' \leq -p'y$), nous obtenons : $(p - p')y' \leq (p - p')y$, soit encore :
>
> $$(p - p')(y - y') \geq 0$$
>
> En particulier, si p et p' sont identiques sauf en ce qui concerne leur c$^{\text{ième}}$ composante, c'est-à-dire le prix du bien c, nous avons : $(p^c - p'^c)(y^c - y'^c) \geq 0$, c'est à dire que si $p^c \geq p'^c$ alors $y^c \geq y'^c$.

[36] Nous aurons bien évidemment à revenir sur la définition de cette notion d'efficacité lorsque nous considérerons l'économie dans son ensemble (voir chapitre 6).

Quand le prix d'un output augmente un entrepreneur ne produit pas moins de ce bien. Quand le prix d'un input augmente il n'utilise pas plus ce facteur de production. Ainsi, contrairement au cas du consommateur, nous avons pu très simplement établir une loi de l'offre individuelle. Nous envisageons maintenant le problème de l'agrégation de ces fonctions d'offre individuelles.

3.6 L'offre agrégée

La section précédente nous a permis d'établir que l'offre de chaque entreprise était une ôfonction" (faiblement) décroissante. Ceci étant vrai pour chaque entreprise, nous obtenons ainsi une loi de l'offre agrégée, à savoir que quand le prix d'un output augmente les entreprises dans leur ensemble ne produisent pas moins de ce bien et quand le prix d'un input augmente elles n'utilisent pas plus ce facteur de production.

Contrairement au côté demande, il existe bien une loi de l'offre agrégée. Il est même possible d'aller plus loin et de montrer qu'il est possible de raisonner en terme d'une entreprise représentative même si les entreprises diffèrent par leur ensemble de production.

Soit $y_g(p) = \sum_{f=1}^{F} y_f(p)$ l'offre agrégée (qui n'est pas nécessairement une fonction) et $Y_g = \sum_{f=1}^{F} Y_f$ l'ensemble de production agrégé. Cet ensemble exprime les possibilités technologiques de l'économie dans son ensemble. En effet, un vecteur y appartient à Y_g si et seulement s'il peut se décomposer en la somme de F vecteurs y_f, chaque y_f étant techniquement réalisable pour l'entreprise f, et tels que $y_g(p) = \sum_{f=1}^{F} y_f(p)$.

Nous énonçons maintenant une propriété d'agrégation (que nous retrouverons dans le chapitre 10 pour démontrer le premier théorème du bien-être dans une économie de production).

Proposition : *$y_g = \sum_f y_f$ maximise le profit agrégé py_g aux prix p sous la contrainte $y_g \in Y_g$ si et seulement si y_f maximise py_f sous la contrainte que $y_f \in Y_f$ pour tout $f = 1, ..., F$.*

Démonstration :
Montrons tout d'abord que si y_g maximise le profit agrégé, alors y_f maximise le profit individuel pour tout f. Supposons donc que y_g maximise le profit agrégé mais que la firme f' puisse avoir un profit supérieur en choisissant le plan de production $\widetilde{y}_{f'}$. Alors, le profit agrégé serait plus élevé en choisissant $\widetilde{y}_{f'}$ pour la firme f' et y_f pour les autres.
Démontrons maintenant la réciproque, à savoir que la maximisation du profit individuel conduit à la maximisation du profit agrégé. Soit $(y_f)_{f=1}^{F}$ un ensemble de plans de production maximisant py_f sous contrainte $y_f \in Y_f$ pour tout f. Supposons que $\sum_f y_f$ ne maximise pas py_g sur Y_g. Il existe alors y' tel que $py' > p\sum_f y_f$, c'est-à-dire $\sum_f py'_f > \sum_f py_f$. Dans ce cas, une firme au moins doit faire un profit supérieur en adoptant le plan de production y'_f, qui est réalisable pour elle puisque $\sum_f y'_f \in Y_g$.

Ainsi, la maximisation du profit par un grand nombre d'entreprises considérant les prix comme donnés fournit le même résultat que si elles fusionnaient et maximisaient la somme de leur profit. Ce résultat n'a de sens évidemment que si le problème de maximisation du profit admet une solution, ce qui élimine *a priori* le cas des rendements croissants.

Si nous combinons ce résultat avec celui d'efficacité des plans de production maximisant les profits individuels, nous obtenons le résultat que si chaque firme maximise son profit isolément, alors le plan de production agrégé résultant, égal à la somme des plans individuels, est socialement efficace, en ce sens qu'il n'existe pas de plan de production agrégé qui permette de produire plus d'outputs sans utiliser plus d'inputs. Ce résultat a une philosophie proche du premier théorème du bien-être, que nous étudierons ultèrieurement, puisqu'il établit ôl'optimalité productive" de la concurrence parfaite.

3.7 Conclusion

L'analyse du producteur, en situation concurrentielle, nous a permis d'aboutir à une conclusion plus positive que l'analyse du consommateur. Il est possible de dégager une loi de l'offre, individuelle et agrégée. De plus, les comportements individuels s'agrègent aisément, et il n'y a pas de perte de généralité à considérer une entreprise représentative. Ceci ne serait bien évidemment plus vrai si nous sortions du cadre concurrentiel.

Une autre conclusion importante qui s'est dégagée de ce chapitre est que la concurrence conduit les producteurs à adopter des techniques de production efficaces. Si nous transposons ceci au niveau agrégé (ce que nous avons le droit de faire étant donné le résultat d'agrégation), ceci signifie que le secteur productif, s'il fonctionne selon un mode concurrentiel, est efficace techniquement, c'est-à-dire produit les biens de manière optimale, sans aucun gaspillage de ressources.

Chapitre 4

Concurrence, marchés et échanges

4.1 Introduction

Nous avons étudié jusqu'à présent la manière dont consommateurs et producteurs prenaient leurs décisions, en fonction du système de prix qu'ils observaient. Nous avons déjà remarqué que cette approche faisait implicitement référence à une hypothèse de concurrence parfaite, en ce sens que les agents prennent leur décision en fonction des prix en vigueur mais n'exercent aucune influence sur le mode de formation de ces derniers.

Le reste de cet ouvrage est consacré à l'étude de l'allocation de biens qui va résulter de l'interaction entre ces agents sur des marchés concurrentiels. Avant de poursuivre l'analyse formelle de la compatibilité de ces décisions (c'est-à-dire de la détermination du système de prix tel que l'offre égalise la demande), nous pensons qu'il est bon de consacrer un chapitre préliminaire à une discussion informelle de la forme que revêt l'interaction entre les agents. En effet, la notion d'équilibre que nous étudierons dans les chapitres suivants représente un mécanisme d'allocation des biens assez spécifique, qu'il convient de mieux cerner avant de poursuivre plus avant.

4.2 Un modèle d'équilibre

Une première caractéristique du modèle que nous allons étudier est qu'il s'agit d'un modèle d'équilibre. E. Malinvaud propose la définition suivante d'un équilibre :

> "Dans la représentation abstraite d'une catégorie de phénomènes économiques, un équilibre est un état dans lequel les actions des divers agents sont mutuellement cohérentes entre elles et sont, pour chaque agent, compatibles avec le comportement que cette représentation lui attribue." E. Malinvaud, *Voies de la recherche macroéconomique*, éditions Odile Jacob, 1991, p.125.

Notons pour l'instant, et ceci apparaîtra plus clairement lorsque nous présenterons le concept d'équilibre dans notre cadre d'analyse, que la définition d'un équilibre est muette sur la nature du mécanisme permettant de l'atteindre. Ceci constitue le problème, conceptuellement très différent, de la stabilité de l'équilibre.

Il faut par ailleurs souligner que le fait de se concentrer sur une allocation d'équilibre ne signifie pas que seules les situations dans lesquelles tout est "immobile" seraient analysées. En effet, cette notion d'équilibre est également pertinente dans un modèle dynamique, dans lequel il se peut que la trajectoire d'équilibre soit fluctuante.

Enfin, cette définition met en avant la compatibilité entre les actions des différents agents entre elles. C'est cette seule propriété qui définit l'équilibre. Dans la théorie de l'équilibre général, comme dans bien d'autres théories, la compatibilité sera simplement exprimée par l'égalité de l'offre globale et de la demande agrégée. Il est toutefois possible de concevoir d'autres formes de compatibilité (comme par exemple dans la théorie du déséquilibre, qu'il est d'ailleurs préférable d'appeler théorie de l'équilibre non-walrasien). Les propriétés (autres que la compatibilité des actions) de cette allocation d'équilibre (si elle existe) seront bien évidemment dépendantes de la "représentation abstraite" des phénomènes considérés, c'est-à-dire du modèle utilisé.

Ainsi, la notion d'équilibre n'impose que peu de restrictions sur le cadre de l'analyse. Il nous faut maintenant nous concentrer plus particulièrement sur la réprésentation abstraite du fonctionnement d'une économie que propose la théorie de l'équilibre général.

4.3 Le fonctionnement des marchés de concurrence parfaite

La théorie sur laquelle nous nous concentrons postule que les échanges se font sur des marchés sur lesquels prévaut une forme extrême de concurrence.

4.3.1 La notion de marché concurrentiel

Le fonctionnement d'un marché concurrentiel repose sur des échanges volontaires, effectués à un prix donné. La dimension volontaire des échanges entre les individus est à contraster avec un autre type d'économie, de type planifié dans laquelle l'allocation des ressources est centralisée. Nous reviendrons plus bas dans cette section sur l'hypothèse de "formation des prix" retenue ici. Retenons pour l'instant la définition suivante d'un marché[37] :

Définition : *Un marché est constitué par un groupe d'individus et d'entreprises en relation les uns avec les autres pour acheter ou vendre un certain type de bien de consommation ou de facteur de production.*

Un marché est donc essentiellement caractérisé par le bien qui y est échangé. Il faut alors spécifier quelles sont les caractéristiques d'un bien. Un bien doit en effet être distingué non pas uniquement par son aspect "physique" mais également par :

- sa localisation : transporter des biens est une activité productive, et le marché du nougat n'est pas le même à Paris et à Montélimar,
- sa qualité : le travail, par exemple, est un bien dont il est important de considérer les différentes qualités ou qualification,
- sa date de disponibilité : lorsque la date de disponibilité du bien co‹ncide avec la date à laquelle la décision d'échange est prise, nous parlerons de marché au comptant (achat d'une baguette de pain, par exemple). En revanche, il existe également des marchés à terme, sur lesquels les conditions de la transaction (la

[37] Cette définition est empruntée au manuel de P. Picard, *Eléments de micro-,conomie*, éditions Montchrestien, 1992.

quantité vendue) sont décidées à une certaine date, mais la quantité n'est livrée qu'à une date ultérieure, préalablement spécifiée alors que le paiement est effectué aujourd'hui ; ce genre de transactions se rencontre fréquemment sur les marchés financiers,
- enfin, sa condition de disponibilité : un contrat d'assurance, par exemple, prévoit de dédommager l'assuré que dans certaines circonstances bien définies (en cas d'accident, de maladie,...).

Sur ces marchés les agents considèrent les prix comme donnés, et pensent qu'il n'existe aucune limite, au prix en vigueur, à ce qu'ils peuvent acheter ou vendre. Implicitement, ceci fait référence à des marchés sur lesquels de grandes quantités sont échangées par un nombre élevé (infini ?) de consommateurs et de producteurs, tous également informés des caractéristiques du produit échangé. Remarquons enfin que sur un tel marché, et presque par définition, un prix unique apparaît ; un même bien ne peut avoir deux prix différents dans ce modèle. Ceci ne sera pas le cas si les vendeurs possèdent une information privilégiée sur la qualité des biens qu'ils offrent. Dans ce cas, les acheteurs ne seront pas informés de toutes les caractéristiques du bien qu'ils achètent et la notion de bien doit être définie de manière à prendre ceci en compte. Ce genre de situation, dans laquelle existe une asymétrie d'information entre les agents, soulève des problèmes différents, très largement étudiés en équilibre partiel[38], mais dont l'étude en équilibre général est encore peu développée.

Au total, nous considèrerons dans un premier temps qu'un marché est défini par le bien qui y est échangé. L'hypothèse de concurrence signifie que ce prix s'impose aux acteurs de ce marché.

4.3.2 Prix et information

La définition du concept de concurrence parfaite fait tout de suite apparaître que la seule information dont les agents ont besoin pour prendre leurs décisions est la connaissance du prix des biens. Ainsi, les actions des agents ne sont rendues compatibles que par le système de prix, ce qui permet d'avancer que ce processus d'allocation des biens est particulièrement parcimonieux en termes d'information que les agents doivent posséder. Cet argument a été souvent utilisé pour asseoir la supériorité d'un système de libre échange sur un système centralisé, dans lequel l'allocation des biens se ferait selon un mécanisme autoritaire (comme celui de la planification soviétique en son temps).

Il est en effet remarquable que le système de prix, à lui seul, permette la "coordination" des agents sur une allocation d'équilibre. Cette implication n'est-elle néanmoins pas critiquable, en ce que l'analyse ne précise pas comment trouver ce prix d'équilibre, mais seulement qu'un tel prix existe ? Or, cacluler ce prix requiert, *a priori*, une information considérable sur les caractéristiques de l'économie, et l'avantage informationel de l'économie de concurrence parfaite mérite, pour le moins, d'être relativisé. En d'autre termes, affirmer qu'un petit nombre de signaux (les prix) résument ce que les agents ont besoin de savoir ne fait que déplacer le problème : comment ces signaux sont-ils calculés ? existe-t-il quelqu'un dans le modèle qui connait totalement celui-ci et qui établirait ces prix, et si tel était le cas, cela n'est-il pas très proche de la conception que l'on peut avoir d'une économie centralisée, dans laquelle les signaux "viendraient d'en haut" ?

La discussion menée jusqu'à présent nous conduit donc à nous poser deux questions : qui fixe les prix ? et qu'échange-t-on sur un marché ?

---

[38] Pour une introduction simple, voir A. Schotter, *Microconomie*, éditions Vuibert, 1996.

4.3.3 Qui fixe les prix ? qu'échange-t-on sur un marché ?

Dans le modèle classique de concurrence parfaite aucun acteur économique ne fixe les prix. Il est alors fait appel à un individu, le commissaire priseur, dont le seul rôle est d'annoncer des prix, comme lors d'une vente aux enchères, ou d'un marché à la criée.

Le fonctionnement des marchés est le suivant : le commissaire priseur annonce un vecteur de prix. Il reçoit alors les offres et les demandes des agents à ce prix. Si elles co‹ncident, les marchés sont à l'équilibre et les transactions peuvent se faire au prix annoncé. Si elles ne co‹ncident pas, aucune transaction n'est effectuée et le commissaire priseur modifie le vecteur de prix, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il trouve le prix d'équilibre, à supposer qu'il le trouve jamais.

Cette hypothèse, à savoir que le prix n'est pas fixé par un des acteurs économiques, est essentielle pour l'analyse. Si au contraire il était supposé que les entreprises décident du prix des biens qu'elles vendent, la nature de l'équilibre en serait radicalement modifiée. Il faudrait en effet alors se placer dans le cadre de la concurrence imparfaite pour étudier cette situation et envisager explicitement la notion d'interactions stratégiques entre les agents économiques.

Un second ordre d'hypothèses, inhérent à la définition de l'équilibre, stipule qu'aucune transaction n'est effectuée avant que l'équilibre ne soit atteint. Si tel était le cas, il faudrait changer de modèle et inclure dans le comportement des agents la possibilité que le prix observé ne soit pas celui qui apure les marchés. Les agents, comprenant les implications de ceci, prennent alors en compte la possiblité de rationnements. Il faudrait alors adopter une approche différente, du type de celle développée dans la théorie des équilibres non-walrasiens.

Une autre faiblesse du cadre institutionnel discuté ci-dessus, est l'absence de spécification de ce qui est échangé sur un marché. Est-ce un bien contre un autre bien, auquel cas il n'est pas possible de parler du marché d'*un* bien, ou est-ce un bien contre de la monnaie, auquel cas il faudrait explicitement introduire la monnaie dans le modèle ? En fait, il est implicite dans la forme la plus simple de la théorie de l'équilibre général que les échanges se font sur un marché gigantesque sur lequel il est possible d'échanger n'importe quel bien contre n'importe quel autre bien. Nous nous éloignons alors sensiblement de l'idée habituelle (qui était celle d'A. Smith) de concurrence dans une économie décentralisée. En effet, le processus d'échange que nous venons de décrire apparaît comme étant hautement centralisé, un seul marché hypertrophié existant dans l'économie, sur lequel les échanges ressemblent à du troc.

Les deux problèmes soulevés ici nous conduisent à penser qu'il ne faut sans doute pas se contenter du mode d'allocation des biens sous-jacent à la théorie de l'équilibre concurrentiel. Il faut au contraire développer d'autres modèles, fonctionnant selon des mécanismes différents, et comparer les allocations d'équilibre ainsi obtenues avec celles du modèle d'équilibre général de concurrence parfaite. En particulier, est-il possible de considérer le modèle d'équilibre général walrasien comme la forme réduite d'un modèle dans lequel les échanges se feraient selon des mécanismes plus "réalistes" ? C'est ce que nous abordons dans la section suivante.

4.4 Le modèle d'équilibre général comme une forme réduite ?

Le problème posé par la représentation des échanges dans la théorie de l'équilibre général walrasien a été soulevé depuis longtemps, et nous ne ferons pas l'historique des controverses sur ce sujet. Nous nous contenterons d'exposer des formalisations plus "réalistes", et en général beaucoup plus complexes, du fonctionnement des marchés. Ces modélisations alternatives, dont certaines en sont encore à un stade de développement relativement précoce, s'efforcent toutes de dépasser l'idée d'un unique marché et la fiction du commissaire priseur. Nous discuterons ici, informellement, de cinq modes d'échange et de leur relation avec la concurrence parfaite. Ces différentes théories n'ont pas encore l'homogénéité et l'élégance de la théorie walrasienne de l'équilibre. Il est donc encore un peu tôt pour juger si elles invalident ou au contraire justifient la théorie de l'équilibre général comme forme réduite du processus d'échange et de formation des prix.

4.4.1 *Search* et loi du prix unique

Un mode d'échange, originellement développé par P. Diamond[39] , consiste à supposer que les consommateurs doivent payer un coût donné pour pouvoir observer un prix. La justification est la suivante : les échanges ne sont pas centralisés et les consommateurs doivent chercher quel magasin propose le prix le plus avantageux pour un bien quelconque qu'ils désirent acheter. En particulier, chaque magasin peut afficher un prix différent des autres, de telle sorte qu'il n'existe pas un prix pour un bien, mais une distribution de prix pour ce bien. Chercher le meilleur prix a un coût pour le consommateur (il doit visiter plusieurs boutiques, ce qui prend du temps et est donc, ne serait-ce que pour cette raison, coûteux). Celui-ci ne va donc pas chercher éternellement pour obtenir la meilleure occasion possible. Chaque consommateur doit ainsi mettre au point une stratégie qui spécifie quand il doit cesser de chercher. La stratégie optimale est fréquemment du type : acheter le bien si son prix est inférieur à un certain seuil, continuer à chercher sinon.

P. Diamond montre que dans le modèle de base de *search* (recherche), si le coût de recherche est strictement positif, alors tous les magasins affichent le même prix, à savoir celui de monopole. On remarque ainsi une discontinuité à la limite, puisque le modèle de *search* sans coût de recherche est essentiellement le modèle de concurrence usuel. Des travaux ultérieurs ont élaboré le modèle de base et montré que sous certaines conditions, l'équilibre du modèle était caractérisé non pas par un unique prix d'équilibre, mais bien par une distribution de prix d'équilibre. Ce type de modèle n'a pas encore réussi à traiter de manière réellement convaincante le cas de plusieurs biens, et reste donc encore assez partiel.

4.4.2 Monnaie

Le marché hypertrophié de la théorie de l'équilibre général est un marché dans lequel n'existe aucun intermédiaire des échanges, c'est-à-dire un bien qui faciliterait l'échange d'autres biens. Tous les échanges se font sur la base de la double co‹ncidence

[39] "Money in Search Equilibrium", *Econometrica*, 1984, p. 1-20.

des besoins puisque n'importe quel bien est échangeable contre n'importe quel autre bien instantanément. Un moyen de faire apparaître une forme de monnaie consiste à imaginer le processus suivant, basé sur celui évoqué dans le paragraphe précédent.

N. Kiyotaki et R. Wright[40] ont proposé un modèle formel illustrant l'idée (certes plus ancienne) qu'un intermédiaire des échanges tel que la monnaie permet d'effectuer des échanges de manière décentralisée. En particulier, l'utilisation de la monnaie permet de rompre la double co‹ncidence des besoins des deux parties. L'idée du modèle peut se résumer de la manière suivante.

Il existe trois catégories d'agents produisant chacun un bien et en consommant un autre, ce qui traduit l'idée (smithienne) de spécialisation des tâches dans l'économie. De plus, un agent d'une catégorie donnée désire consommer les biens produits par une autre catégorie d'agents, alors que cette dernière ne désire consommer que les biens produits par la troisième catégorie. Il y a donc absence totale de co‹ncidence des besoins. Dans ce cadre, les auteurs montrent qu'introduire de la monnaie, qui ne possède aucune utilité en soi, est bénéfique et que celle-ci va effectivement servir à effectuer des échanges. En effet, un agent acceptera de recevoir de la monnaie uniquement parce qu'il sait (ou anticipe) qu'il pourra l'échanger plus tard contre un bien qu'il désire consommer.

Cette modélisation du processus d'échange en est encore à ses débuts, et il est pour l'instant difficile d'en tirer des conclusions un tant soit peu générales. L'explication du mécanisme de formation des prix est notamment encore très peu développée dans ces modèles.

4.4.3 Noyau et concurrence

Une interprétation possible du modèle de concurrence parfaite (nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 9) est de supposer qu'il constitue la limite d'un modèle dans lequel les agents négocient les échanges directement entre eux (sans passer par le marché) en décidant éventuellement de former des coalitions si cela est dans leur intérêt. On dira qu'une allocation appartient au noyau de l'économie si aucune coalition d'agents ne peut se former, qui obtiendrait un bien-être supérieur à celui obtenu en cette allocation. Nous verrons alors que le noyau d'une économie converge vers l'ensemble des équilibres de concurrence parfaite, lorsque le nombre d'agents dans l'économie devient infini. Il n'est ainsi pas nécessaire d'avoir recours à ce marché gigantesque pour obtenir une allocation d'équilibre concurrentielle.

Le concept de noyau d'une économie, proposé à l'origine par F.Y. Edgeworth, propose une vision très peu précise du mécanisme d'échange, en même temps qu'une vision extrême de la concurrence. En effet, ce concept stipule uniquement que tout échange avantageux pour une coalition d'agents va être effectué : ceci explique pourquoi toute allocation dans le noyau est optimale, en ce sens qu'un planificateur disposant de toute l'information ne pourrait améliorer le bien-être de tous les agents simultanément. L'absence, dans la théorie du noyau, de toute référence à une quelconque institution facilitant les échanges en rend l'interprétation parfois difficile. En particulier, le montant d'information que chaque individu doit détenir, à savoir toutes les possibilités d'échange dans l'économie, est comparable à ce que le commissaire priseur doit connaître pour trouver un équilibre.

Nous développerons cette théorie dans le chapitre 9, car de toutes celles que nous évoquons ici, c'est la seule pour laquelle il est pour l'instant possible d'établir quelques résultats assez généraux.

[40] "On Money as a Medium of Exchange", *Journal of Political Economy*, 1989, p. 927-954.

4.4.4 Les jeux de marché

Une vision plus structurée de la notion de concurrence consiste à formaliser un processus d'échange marché par marché, où le prix dépendrait selon une règle connue de tous, du rapport entre l'offre et la demande sur ce marché. Les échanges sont effectués en monnaie, qui sert sur tous les marchés. Il s'agit d'un modèle, développé à l'origine par M. Shubik[41] , qui fait explicitement appel à la théorie des jeux non-coopératifs. En effet, lorsque le nombre d'intervenants sur un marché est faible, chaque agent sait que ses actions auront une influence sur le prix auquel va s'effectuer les transactions. Ce type de jeux est appelé jeu de marché, l'équilibre non coopératif résultant de l'échange étant appelé l'équilibre de Cournot.

Une question naturelle est de savoir sous quelles conditions l'équilibre de ce jeu de marché converge vers celui de concurrence parfaite lorsque le nombre d'intervenants sur les différents marchés augmente. Là encore, il n'est pas possible d'apporter de réponse générale. En particulier, le concept de solution utilisé (à savoir l'équilibre de Nash) conduit souvent a une grande multiplicité d'équilibres. Toutefois, il est possible d'établir, sous certaines hypothèses, que la convergence vers l'équilibre de concurrence parfaite est probable. Ce type de modèle se prête également à une incorporation explicite de la monnaie.

Dans un même ordre d'idées, J.P. Bénassy[42] donne des conditions générales (suffisantes) sur les "règles du jeu" définissant le mécanisme d'échange, telles que le résultat de celui-ci corresponde à un équilibre walrasien. Une de ces règles est que les consommateurs achètent prioritairement les biens aux vendeurs affichant le prix le plus bas, ce qui nécessite également une information importante de la part des acheteurs. De même, les vendeurs doivent vendre en priorité aux acheteurs qui annoncent le prix le plus élevé.

4.4.5 L'équilibre de concurrence parfaite, limite d'équilibres de concurrence imparfaite ?

Finalement, l'équilibre walrasien peut être vu comme la limite d'un processus d'échange dans lequel les firmes sont en situation de concurrence imparfaite. Contrairement au modèle discuté dans le paragraphe précédent, où tous les acteurs économiques agissent de manière stratégique, ce type de modèle suppose que seules les entreprises (les offreurs) adoptent un tel comportement. Implicitement, ceci fait référence à un modèle dans lequel les acheteurs sont très nombreux et prennent les prix comme donnés, tandis que l'offre est le fait d'un petit nombre d'individus ou de firmes. Il est difficile, ici également, d'être précis sur ces résultats ; presque par définition (la concurrence imparfaite étant l'abandon d'une ou plusieurs conditions de la concurrence parfaite), de nombreuses modélisations de ce qu'il faut entendre par "concurrence imparfaite" sont possibles.

Lorsque les firmes se font une concurrence à la Cournot (c'est-à-dire qu'elles fixent la quantité produite en fonction de ce que les autres font) alors que les acheteurs prennent les prix comme donnés, l'équilibre du modèle est appelé équilibre de Cournot-Walras. Observons que ce type de concurrence laisse inexpliqué le mode de formation des prix. Lorsque le nombre de firmes augmente, jusqu'à tendre vers l'infini (ce qui correspond

---

[41] Pour une présentation, voir, par exemple, M. Shubik, *Game theory in the social sciences*, éditions MIT Press, 1982.

[42] "On competitive market mechanisms", *Econometrica*, Janvier 1986, p. 95-108.

bien au cas d'atomicité du marché de concurrence parfaite), l'allocation d'équilibre tend, sous certaines conditions, vers l'équilibre général walrasien. G. Codognato et J.J. Gabszewicz[43] proposent un exemple simple de convergence de l'équilibre de Cournot-Walras vers l'équilibre de concurrence parfaite, lorsque le nombre d'offreurs tend vers l'infini.

Dans ce modèle, sans production, deux catégories d'agents coexistent. Les oligopoleurs, en nombre limité, détiennent toutes les ressources en bien 1. En face d'eux, les agents concurrentiels, détenant les ressources des autres biens, sont en nombre élevé. Chaque agent concurrentiel se comporte donc en preneur de prix. En revanche, les oligopoleurs sont conscients du lien existant entre leur décision et le prix du bien 1. Il est supposé que ces derniers se font une concurrence à la Cournot (chacun considère l'offre des autres oligopoleurs comme donnée et maximise son profit sous cette hypothèse). Le résultat de G. Codognato et J.J. Gabszewicz est que, dans l'exemple considéré, lorsque le nombre d'oligopoleurs tend vers l'infini, l'équilibre du jeu précédemment décrit tend vers l'équilibre de concurrence parfaite, *i.e.* du modèle dans lequel tous les acteurs économiques prennent les prix comme donnés.

4.5 Conclusion

Nous nous sommes contentés d'une discussion très informelle de certains problèmes et questions posés par la notion d'équilibre de concurrence parfaite. Nous avons préféré ne pas aborder les aspects liés aux anticipations de prix dans des modèles dynamiques[44], pas plus que les problèmes posés par des asymétries d'information entre acheteurs et vendeurs[45]. Ces problèmes, et les solutions qui y ont été apportées, ont d'ailleurs constitué une large partie de la recherche économique durant les vingts dernières années. Ils dépassent les problèmes abordés ici, à savoir la modélisation de l'organisation des échanges sur un marché.

Le modèle d'équilibre général tel qu'il fut développé par K. Arrow, G. Debreu et L. McKenzie a permis d'établir de manière très détaillée et très claire les conditions de validité de résultats tels que l'existence et l'optimalité d'un équilibre. En adoptant une telle démarche, le modèle s'est exposé aux critiques, a engendré et structuré le débat. On peut même suggérer que le modèle d'équilibre général d'alors a été à l'origine d'un programme de recherche bien défini, à savoir précisément d'identifier et d'analyser les situations dans lesquelles le modèle de base n'était pas satisfaisant.

Au terme de cette discussion informelle, dans laquelle ont été développés des arguments pour et contre l'approche de concurrence parfaite, nous pouvons simplement conclure que le débat quant à "la" meilleure modélisation d'un processus d'échange n'est certainement pas clos, ce dont témoigne la recherche actuelle, et qu'une grande partie de cette recherche s'est développée en faisant explicitement référence au modèle d'équilibre général.

[43] "Equilibres de Cournot-Walras dans une économie d'échange", *Revue Economique*, Novembre 1991, p. 1013-1026.

[44] Ce sujet sera largement abordé dans les chapitres 12, 13 et 14.

[45] Ce problème sera partiellement traité dans le chapitre 14. Toutefois, ce chapitre n'épuise pas, loin s'en faut, la question. La plupart des problèmes liés à la présence d'information asymétrique sont cependant essentiellement traités dans des modèles d'équilibre partiel, ce qui justifie que nous ne les traitions pas ici. Pour une introduction simple sur ce sujet, voir H. Varian, *Analyse micro-économique*, éditions De Boeck, 1995 ou A. Schotter, *Microéconomie*, éditions Vuibert, 1996.

Ainsi, ne serait-ce que pour des raisons historiques, normatives ou encore pour comprendre les dernières avancées théoriques de la modélisation du processus d'échange, le modèle d'équilibre général walrasien reste un modèle de référence, et doit à ce titre être étudié et compris.

Chapitre 5

Une première approche : l'équilibre partiel

5.1 Introduction

Le but de ce chapitre, et plus généralement de cet ouvrage, est d'étudier la manière dont est déterminé le prix qui "égalise l'offre et la demande" sur les marchés. Comme nous l'avons vu en introduction, il existe au moins deux façons d'aborder le problème, l'une étant d'étudier les marchés indépendamment les uns des autres, en négligeant les relations existant entre marchés (l'approche d'équilibre partiel), tandis que l'autre consiste à étudier l'économie dans son ensemble, sans vouloir isoler tel ou tel marché (l'approche d'équilibre général).

Cette seconde approche est plus générale, et il convient de se demander quel intérêt il y a à étudier la première, c'est-à-dire l'équilibre partiel. D'un point de vue purement pédagogique l'approche en termes d'équilibre partiel est plus simple que celle en termes d'équilibre général, et en constitue une bonne introduction. Nous introduirons ainsi dans le cadre le plus simple possible les thèmes essentiels de l'analsye concurrentielle, thèmes que nous reverrons dans les chapitres suivants consacrés à l'équilibre général, à savoir l'existence, l'unicité, la stabilité et l'optimalité d'un équilibre.

Par ailleurs, cette approche permet de représenter assez bien le fonctionnement d'un marché dans de nombreuses situations. Nous verrons cependant les limites de cette approche lorsque nous aborderons l'étude de l'équilibre général au chapitre suivant.

En toute rigueur, le raisonnement d'équilibre partiel ne se justifie que sous des hypothèses très fortes notamment sur la fonction d'utilité des consommateurs ; hypothèses qui permettent de justifier que le prix et l'allocation d'équilibre sont indépendants de la distribution des richesses dans l'économie. Dans ce cas, l'étude de l'équilibre partiel n'est qu'un cas particulier de l'étude d'un équilibre général. Nous avons cependant privilégié ici une étude plus simple et essentiellement graphique, qui permet d'introduire la plupart des thèmes que nous reverrons formellement par la suite.

5.2 Existence et unicité d'un équilibre partiel

Nous nous concentrons donc dans ce chapitre sur le marché d'un bien. Son prix est noté p, qui est ici un scalaire et non un vecteur.

La demande agrégée pour le bien est notée $x_g(p) = \sum_{h=1}^{H} x_h(p)$, et l'offre agrégée pour le bien, $y_g(p) = \sum_{f=1}^{F} y_f(p)$.

Implicitement, nous avons supposé dans la définition des fonctions agrégées que le nombre de consommateurs et de producteurs était donné. Il s'agit donc d'une analyse de "court terme".

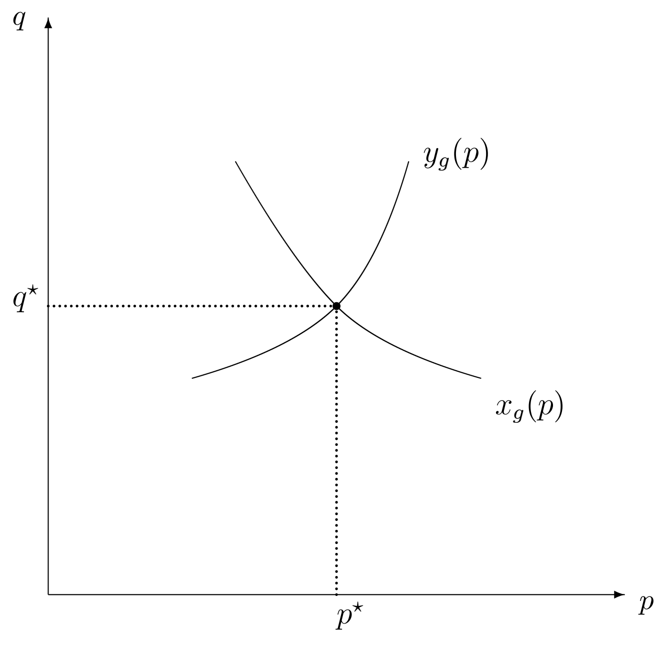
5.2.1 Définition de l'équilibre

Commençons par définir un prix d'équilibre partiel.

Définition : $p^\star$ *est un prix d'équilibre si* $x_g(p^\star) = y_g(p^\star)$.

Cette définition correspond à l'idée usuelle d'équilibre, à savoir que la demande est égale à l'offre. Observons qu'implicitement nous avons admis que les consommateurs maximisaient une fonction d'utilité sous contrainte budgétaire pour déterminer leur demande, et que les entrepreneurs maximisaient leur profit sous leurs contraintes technologiques pour déterminer leur offre. Graphiquement, le prix d'équilibre est à l'intersection des courbes d'offre et de demande (graphique 5.1[46]).

FIG. 5.1: L'équilibre sur un marché



[46]Noter que sur ce graphique, ainsi que sur les graphiques suivants, le prix est en abscisse et la quantité en ordonnée. Ceci va à l'encontre de la représentation traditionnelle (marshallienne). Il nous semble toutefois plus logique dans une approche d'équilibre, où demande et offre sont des fonctions du prix et où il s'agit de trouver le prix égalisant ces deux fonctions, de le porter en abscisse.

5.2.2 Existence

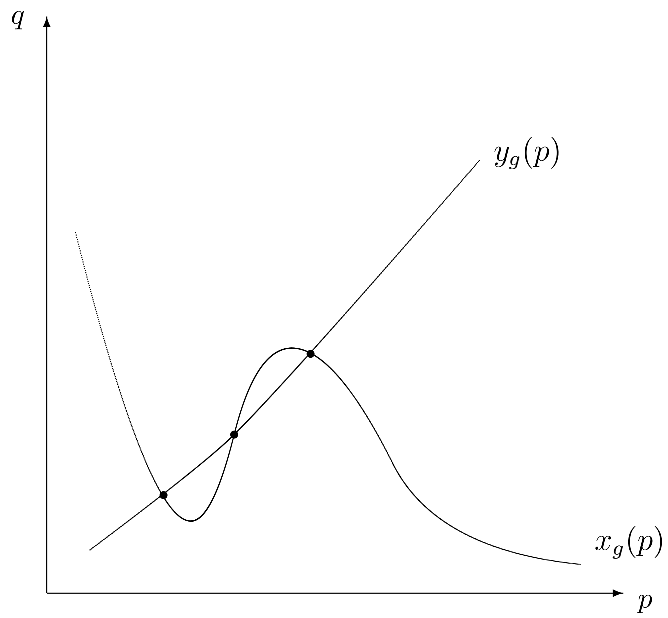
Avant de vouloir étudier les propriétés d'un équilibre, il convient de savoir si l'analyse n'est pas vaine, et donc de vérifier que l'objet d'analyse existe.

L'existence d'un équilibre partiel ne pose pas de problèmes particuliers dès lors que les courbes d'offre et de demande globales sont continues : l'intersection de celles-ci existe toujours sous des hypothèses raisonables. En effet, les courbes ne se couperaient pas si $y_g(p) > x_g(p)$ pour tout p, ou si $y_g(p) < x_g(p)$ pour tout p. Le premier cas est exclu si nous admettons que la demande pour le bien tend vers l'infini lorsque son prix tend vers zéro (ce que nous pouvons résumer par $x_g(0) = \infty$). Le second cas n'est pas non plus possible puisque $x_g(p) \to 0$ et $y_g(p) \to \infty$ lorsque $p \to \infty$.

5.2.3 Unicité de l'équilibre

Le problème de l'unicité de l'équilibre est plus complexe. Celle-ci n'est pas assurée en général, tout dépendant de la forme des courbes de demande et d'offre globales. Nous avons vu que la courbe d'offre individuelle était toujours croissante par rapport au prix, et qu'il en était de même pour la fonction agrégée. En revanche, la courbe de demande globale peut revêtir une forme quelconque. Rien n'exclut alors la situation d'équilibres multiples représentée sur le graphique 5.2.

FIG. 5.2: Une multiplicité d'équilibres



Il y a là trois points d'intersection, correspondant à trois équilibres différents. L'existence d'équilibres multiples pose-t-elle problème ?

Si l'analyse a pour but, d'une manière ou d'une autre, de prévoir ce qui sera observé sur un marché, la réponse est, sans ambigu‹té, oui. En effet, il se pose un problème de détermination de l'équilibre. A quel équilibre le marché va-t-il s'établir ? La plupart des marchés n'oscillent pas constamment entre plusieurs positions d'équilibre. Il faut donc introduire un élément nouveau dans l'analyse, qui permettrait d'expliquer comment le marché aboutit à un équilibre particulier et s'y maintient.

La situation représentée sur le graphique 5.2 est peu "probable", en ce sens que la courbe de demande doit être croissante sur un certain intervalle de prix pour qu'il y ait multiplicité d'équilibres. Or, si ceci est tout à fait possible en général (voir chapitre 2), les hypothèses sous-jacentes à l'idée même d'analyse d'équilibre partiel, à savoir que le bien étudié représente une infime partie du revenu des consommateurs, considéré comme donné, rendent ce cas peu plausible. Les effets revenus devraient en effet être quasiment absents. La particularité de l'exemple n'enlève cependant rien au problème plus général de savoir comment déterminer quel est l'équilibre atteint lorsqu'il en existe plusieurs (pour quelque raison que ce soit). En anticipant sur la suite, nous pouvons déjà mentionner que dans un modèle d'équilibre général, il existe souvent une multiplicité d'équilibres concurrentiels, sans même qu'il soit besoin de supposer que la demande pour un bien soit croissante par rapport au prix de ce bien.

5.3 Stabilité de l'équilibre partiel

Un élément qui permet de répondre partiellement à la question posée à la fin de la section précédente, est de considérer la stabilité de l'équilibre.

Ce problème, très complexe en équilibre général, est relativement aisé à traiter en équilibre partiel. Il s'agit de savoir par quel processus une économie atteint un point d'équilibre puisque celui-ci est une notion statique. En effet, nous avons défini un équilibre comme une situation de laquelle il n'existe aucune raison de s'éloigner, une fois atteinte. En revanche, nous n'avons rien dit sur la manière dont il est possible de "s'y rendre" si l'économie n'y est pas.

Un équilibre est stable si, lorsque l'économie n'est pas à l'équilibre, elle tend à y retourner. Cette définition laisse dans l'ombre la manière dont l'économie évolue lorsqu'elle "n'est pas à l'équilibre". Nous envisagerons ici deux lois d'évolution possibles : le *cobweb* et le tâtonnement walrasien.

5.3.1 Le *cobweb*

Il s'agit d'un modèle d'équilibre dans lequel existe un décalage temporel entre la décision de production et l'échange. Le modèle est donc différent du modèle purement statique exposé jusqu'à présent. L'exemple traditionnel est celui d'un fermier décidant aujourd'hui de la surface qu'il va ensemencer, en fonction de l'anticipation du prix auquel il pourra vendre sa récolte, six mois plus tard, et qui anticipe que le prix en vigueur dans six mois est le même que celui qui prévaut aujourd'hui.

5.3.1.1 Présentation du modèle

Formellement, l'offre à la période t est égale à l'offre décidée à la période $t-1$, en fonction du prix en vigueur à cette date, soit[47] : $y_t = y(p_{t-1})$. Du côté de la demande, les consommateurs achètent en fonction du prix en vigueur à la date de l'échange, soit $x_t = x(p_t)$. Il existe donc un décalage temporel entre les décisions d'offre et celles d'achat. C'est ce décalage qui est à l'origine de la dynamique du *cobweb*.

La notion d'équilibre dans ce modèle dynamique est quelque peu différente de celle vue jusqu'à maintenant, même si la logique en est la même. En effet, puisque nous nous plaçons dans un cadre dynamique, la notion d'équilibre requiert l'égalité de l'offre et de la demande à chaque instant. Plus précisément, l'équilibre dans ce modèle est donné par une suite de prix $p_t^\star$ telle que $y(p_{t-1}^\star) = x(p_t^\star)$. Parmi ces équilibres dynamiques, il en existe un qui possède la propriété que le prix d'équilibre est le même à chaque période. Un tel équilibre, c'est-à-dire qui se reproduit à l'identique au cours du temps, est appelé équilibre stationnaire. Pour trouver un équilibre stationnaire, il faut trouver un prix $p^\star$ tel que $y(p^\star) = x(p^\star)$. Remarquons que l'indice temporel a disparu puisque $p^\star$ équilibre le marché à chaque période.

La dynamique de ce modèle se comprend graphiquement. Sur le graphique 5.3 est représentée la détermination du prix à l'instant t.

L'offre est donnée (puisque la décision de planter telle ou telle surface a été prise en $t-1$), et peut donc être représentée par une droite horizontale au niveau $y(p_{t-1})$. Le prix se fixe alors au niveau qui égalise cette offre fixe et la demande. L'ajustement se fait par la demande.

Les graphiques 5.4 et 5.5 représentent la dynamique de l'économie. Sur ces deux graphiques sont représentées les "vraies" courbes d'offre et de demande globales. L'équilibre stationnaire se situe à l'intersection de ces courbes, au point $(p^\star, q^\star)$.

Considérons le graphique 5.4 et supposons que nous commençons, à la date 0, avec une offre prédéterminée au niveau q_0. Le prix s'ajuste comme sur le graphique **??**, et s'établit au niveau p_0. A la date 0, les producteurs prennent leur décision de production pour la date 1, en fonction du prix p_0, soit une offre $q_1 = y(p_0)$. Le prix s'ajuste pour égaliser la demande à cette offre totalement inélastique. Il est aisé de voir que la répétition de ce processus ne nous ramène pas vers l'équilibre $p^\star$. Celui-ci est donc instable.

En revanche, sur la figure 5.5, le processus décrit ci-dessus tend à ramener l'économie vers son point d'équilibre, et ce quelle que soit la situation initiale de l'économie (c'est-à-dire quel que soit q_0).

Le processus dynamique est convergent lorsque l'élasticité prix de la demande est forte et celle de l'offre faible. Dans ce cas, de forts écarts dans les volumes offerts ne se traduisent que par un mouvement limité des prix. Ce faible mouvement induit alors une réponse plus modérée des volumes, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'économie ait convergé vers $p^\star$.

Le *cobweb* est un modèle dynamique simple, dont la limite essentielle est le comportement excessivement "myope" des producteurs. A chaque période, ils se trompent

[47] Nous omettrons les indices g désignant l'offre *globale* et la demande *globale* afin d'alléger les notations.

FIG. 5.3: La détermination du prix à la date t

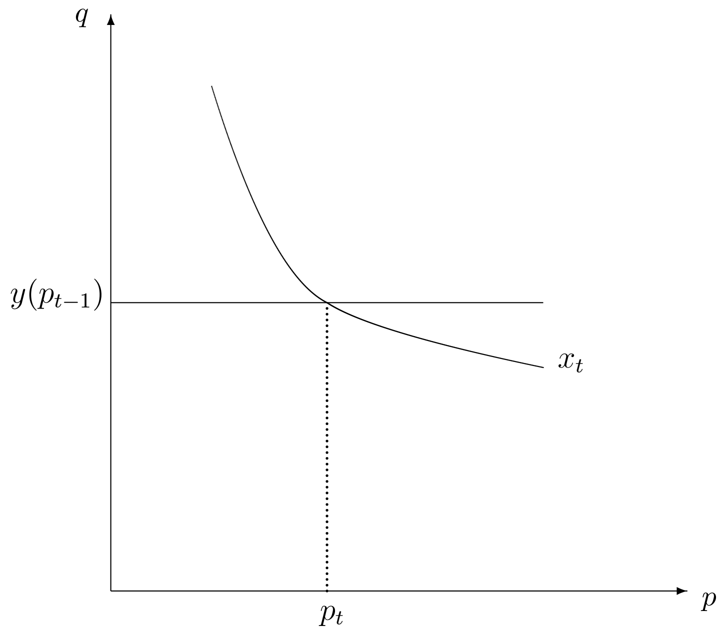


FIG. 5.4: Un équilibre instable selon la dynamique du *cobweb*

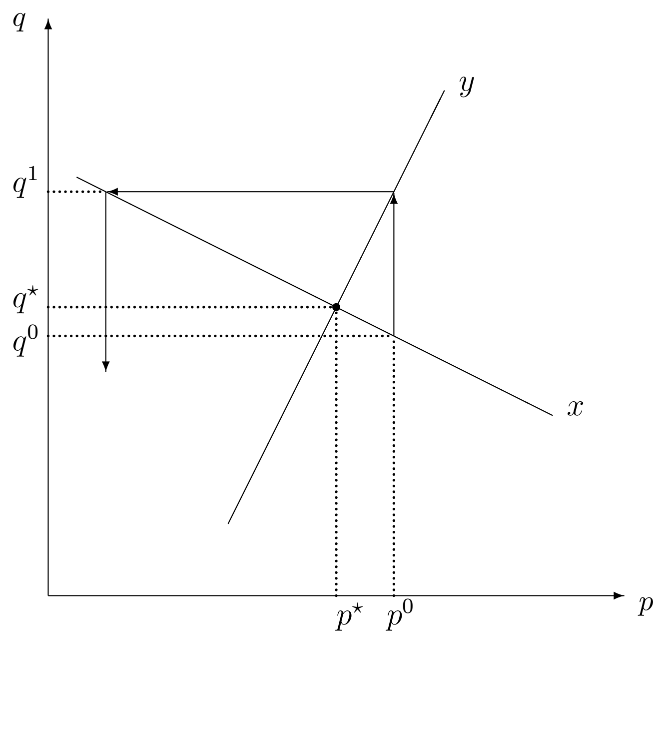
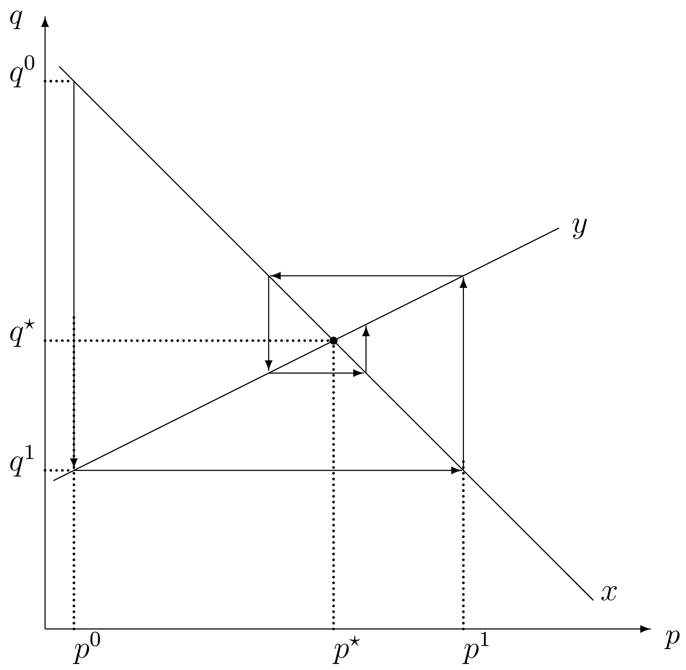


FIG. 5.5: Un équilibre stable selon la dynamique du *cobweb*



dans leur anticipation de prix. En effet, à chaque période, ils anticipent que le prix ne se modifiera plus, alors qu'en fait, à chaque période, celui-ci se modifie. Leurs anticipations ne se révèlent correctes qu'à l'équilibre stationnaire. Ce modèle repose donc sur une modélisation peu satisfaisante du comportement des agents en dynamique. Nous reviendrons sur le rôle des anticipations dans des modèles dynamiques ainsi que sur les différentes formalisations possibles dans le chapitre 12.

5.3.1.2 Exemple

Supposons que les fonctions d'offre et de demande agrégées soient linéaires (tous les paramètres sont positifs et $a > c$) :

$$x_t(p_t) = a - bp_t \quad \text{et} \quad y_t(p_{t-1}) = c + dp_{t-1}$$

L'équilibre stationnaire correspond au prix $p^\star$ tel que $x_t(p^\star) = y_t(p^\star)$, ou encore $a_b p^\star = c + dp^\star$. $p^\star$ est donc égal à $\frac{a-c}{b+d}$. Cet équilibre est stable si l'équation récurrente provenant de l'égalisation de l'offre et de la demande à chaque date : $x_t = y_t$, c'est-à-dire $p_t = -\frac{d}{b}p_{t-1} + \frac{a-c}{b}$, est convergente. Nous pouvons résoudre cette équation. La solution de l'équation sans terme constant est de la forme $p_t = \left(-\frac{d}{b}\right)^t \alpha$, et nous cherchons également une solution particulière du type $p_t = \beta$. La solution à l'équation récurrente est donc de la forme : $p_t = \left(-\frac{d}{b}\right)^t \alpha + \beta$.

Déterminons maintenant α et β. β est une solution particulière et doit donc vérifier :

$$\beta = -\frac{d}{b}\beta + \frac{a-c}{b}$$

soit $\beta = \frac{a-c}{b+d}$. Il reste à déterminer α. Soit p_0 le prix initial, nous avons :

$$p_0 = \left(-\frac{d}{b}\right)^0 \alpha + \frac{a-c}{b+d}$$

ce qui donne $\alpha = p_0 - \frac{a-c}{b+d}$. La suite peut donc s'écrire :

$$p_t = \left(-\frac{d}{b}\right)^t \left(p_0 - \frac{a-c}{b+d}\right) + \frac{a-c}{b+d}$$

En fin de compte, nous obtenons le résultat suivant :

- L'équilibre stationnaire est stable si $d < b$ et le prix converge vers $\frac{a-c}{b+d}$.
- L'équilibre stationnaire est instable si $d > b$.
- Si $d = b$, l'équilibre dynamique oscille perpétuellement entre deux prix, et ne converge pas vers l'équilibre stationnaire.

5.3.2 Le tâtonnement walrasien

Au lieu d'avoir ici un réel modèle dynamique, comme c'était le cas dans le paragraphe précédent, imaginons le processus fictif suivant : il existe un commissaire priseur sur le marché, dont la tâche est de trouver le prix d'équilibre. Il annonce un prix et reçoit des offres et des demandes à ce prix. Si l'offre globale est égale à la demande globale, sa tâche est terminée, il a trouvé l'équilibre. Si l'offre est supérieure à la demande, il diminue le prix et si la demande est supérieure à l'offre, il l'augmente. Les échanges n'ont lieu qu'à l'équilibre.

Ce mécanisme d'ajustement appelé tâtonnement walrasien (augmenter le prix en cas d'excès de demande et le diminuer en cas d'excès d'offre), conduit-il toujours à l'équilibre ? Si le processus se fait de manière continue, et que l'équilibre est unique, alors ce dernier est stable pour le tâtonnement walrasien, comme l'illustre le graphique 5.6.

Si l'ajustement n'est pas effectué en temps continu, alors il est possible que le commissaire priseur surajuste le prix à chaque étape : lorsqu'il faut augmenter le prix, il le fait trop, ce qui le conduit à l'étape suivante en une zone où il faut baisser le prix. S'il baisse le prix de manière brutale, il peut alors revenir dans une zone d'excès de demande, dans laquelle il convient d'augmenter le prix. Le marché peut ainsi osciller sans jamais converger vers l'équilibre. Ce phénomène est exclu si les ajustements sont effectués en temps continu, et sont donc infinitésimaux à chaque instant.

Que se passe-t-il lorsqu'il existe plusieurs équilibres, comme sur le graphique 5.7 ?

Dans ce cas de figure, l'économie tend vers l'un des deux équilibres, $p_1^\star$ ou $p_3^\star$. Les points d'équilibre E_1 et E_3 sont donc localement stables : si l'économie se trouve dans

Fig. 5.6: Un équilibre stable selon la dynamique du tâtonnement

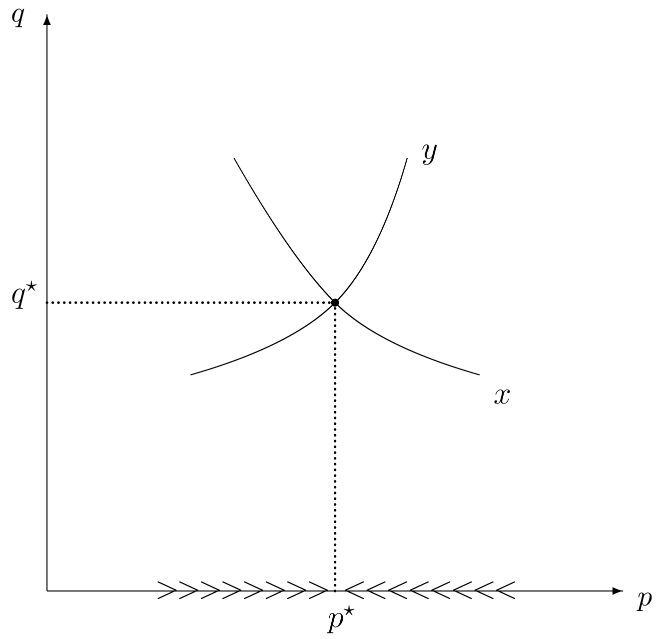
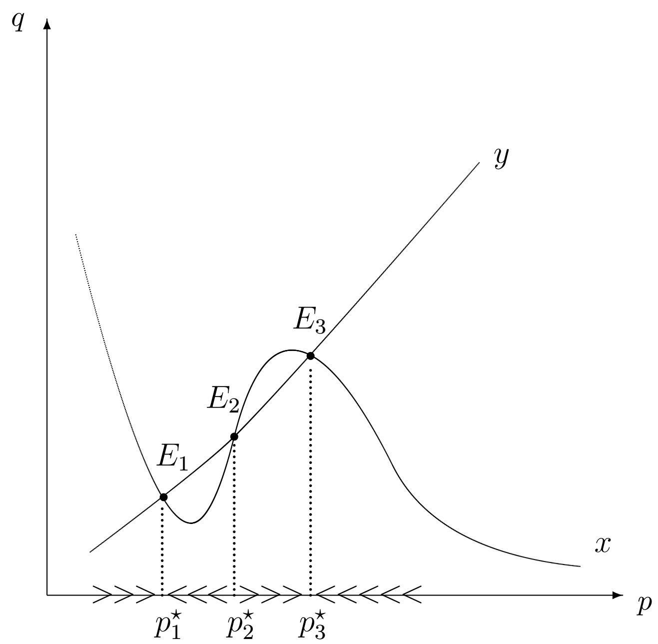


Fig. 5.7: Equilibres stable et instable dans la dynamique du tâtonnement



leur voisinage, alors elle aura tendance à converger vers eux. En revanche le point E_2 est instable : à moins de se trouver en ce point "par hasard", l'économie n'y viendra jamais. Faisons ici l'analogie avec une bille au sommet d'un dôme. Si elle est posée au sommet de ce dôme, elle y restera. En revanche, si elle n'est pas initialement en cette position, elle ne l'atteindra jamais.

D'un point de vue descriptif, nous pouvons éliminer un tel équilibre, puisqu'il est peu probable que l'économie atteigne jamais E_2. Toutefois, ces considérations de stabilité ne nous ont pas permis "d'éliminer" tous les équilibres sauf un. Il demeure donc un problème quant à la détermination de l'équilibre qui apparaîtra finalement. Remarquons toutefois que ce problème n'est pas propre à la théorie de l'équilibre général (ou partiel), et constitue un problème récurrent en théorie des jeux par exemple.

Le tâtonnement walrasien est une "idéalisation" du processus intuitif de la "loi de l'offre et de la demande", consistant à dire que si l'offre est supérieure à la demande, les entreprises diminueront leur prix, tandis qu'elles l'augmenteront dans le cas inverse. Cependant, nous avons fait l'hypothèse que les entreprises n'ont aucun pouvoir individuel sur les prix des biens qu'elles produisent. C'est pourquoi il est nécessaire d'avoir recours à la notion de commissaire priseur walrasien.

5.4 Statique comparative

Définir l'équilibre d'un marché, examiner son unicité et sa stabilité ne sont pas des fins en soi. L'utilité de la démarche réside dans la possibilité de mener des exercices de statique comparative, dans lesquels une situation de référence est comparée à la situation résultant d'un "choc" du côté de l'offre ou de la demande, tel une augmentation des impôts, une baisse de la TVA,...

Examinons ici, par exemple, le cas d'une baisse de l'impôt sur le revenu, et supposons que la fonction de demande pour le bien dont nous étudions le marché est croissante avec le revenu. Suite à cette baisse de l'impôt, la fonction de demande se déplace vers le Nord-Est (de x en x'), comme sur le graphique 5.8.

L'équilibre se déplace du point E au point E', et le prix s'en trouve augmenté, de même que la quantité échangée à l'équilibre.

Un autre exercice de statique comparative peut être mené en supposant que le choc porte sur la fonction d'offre. Imaginons par exemple qu'un procédé nouveau est découvert, qui permet de produire le bien à moindres frais. La fonction d'offre s'en trouve déplacée vers le Nord-Ouest, comme sur le graphique 5.9. L'équilibre se déplace de E en E', qui correspond à une quantité échangée plus élevée à un prix plus faible.

La situation est moins facile à analyser lorsqu'il existe des équilibres (localement stables) multiples. Se pose alors la question de savoir si, suite à un choc, l'économie va rester au même équilibre, ou au contraire va "sauter" d'un équilibre à l'autre.

Lorsque le choc est faible (ainsi que le représente le graphique 5.10, dans le cas d'un choc d'offre négatif, tel une gelée détruisant une partie de la récolte de fruits), il est possible (même s'il n'existe aucun argument formel pour l'expliquer) que l'économie restera dans le voisinage du point d'équilibre auquel elle se trouvait avant le choc. Si

FIG. 5.8: Un choc de demande

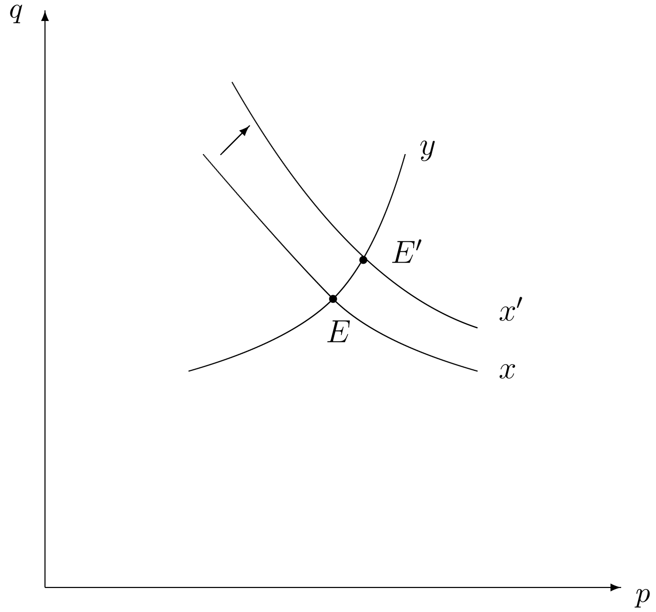


FIG. 5.9: Un choc d'offre

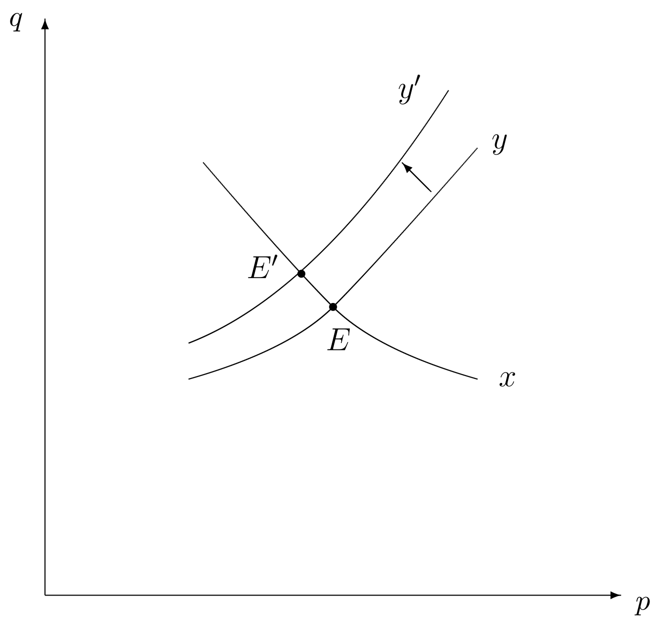
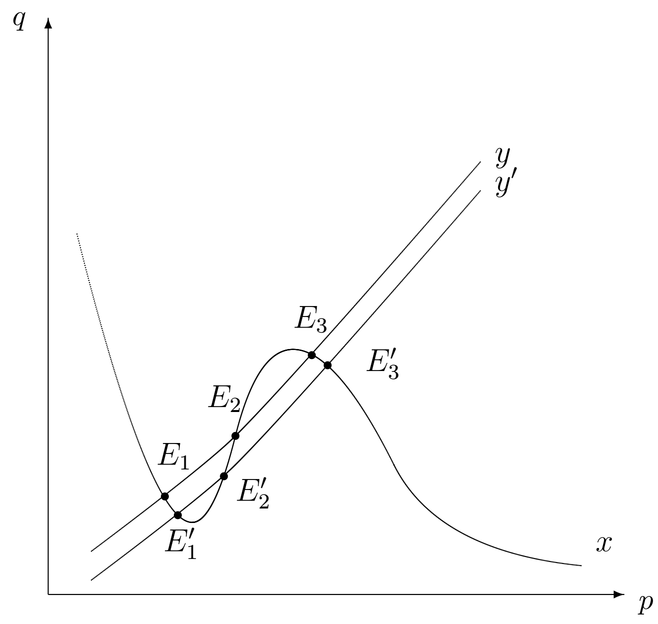


FIG. 5.10: Statique comparative en présence de plusieurs équilibres



elle se trouvait en E_1, nous pouvons penser qu'elle se retrouvera en E_1' après le choc, et de même pour E_3 et E_3'.

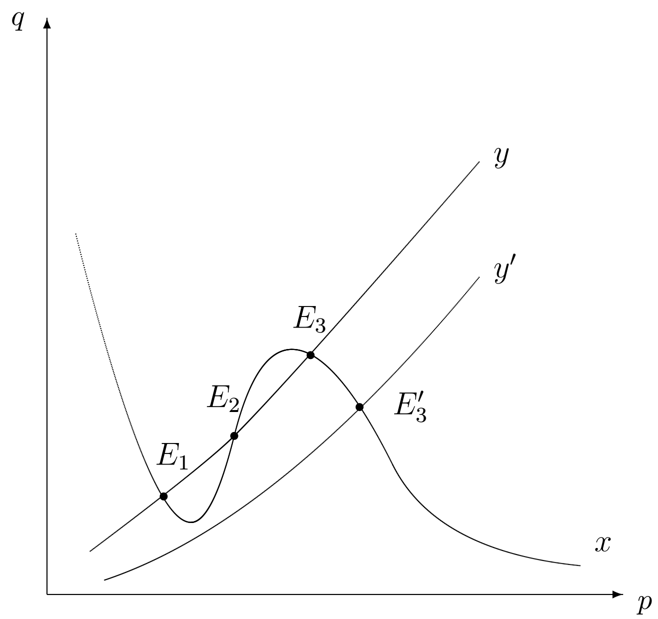
Cependant, il existe des situations où le choc modifie l'économie plus profondément, en ce qu'il modifie le nombre d'équilibres de celle-ci, comme sur le graphique 5.11.

Dans ce cas, les équilibres associés à E_1 et E_2 disparaissent et le seul équilibre restant est E_3'. Nous pouvons alors obtenir des propriétés quelque peu contre-intuitives. En effet, si l'économie était initialement en E_3, le choc a pour effet de *diminuer* la quantité échangée et d'en augmenter le prix. En revanche, si l'économie était à l'équilibre E_1, le choc conduit à une *augmentation* de la quantité échangée et à une hausse du prix.

5.5 L'efficacité de l'équilibre de concurrence parfaite

Nous avons vu que l'intérêt essentiel de l'analyse est de permettre d'analyser les modifications du prix et des quantités échangées sur un marché soumis à un choc exogène du côté de l'offre ou de la demande (ou éventuellement des deux). Il faut également développer des critères permettant de comparer les deux situations, initiale et finale.

FIG. 5.11: Un choc peut réduire le nombre d'équilibres



5.5.1 Le surplus du consommateur

Définissons le surplus du consommateur comme étant l'évaluation (en termes monétaires) de l'utilité "gratuite" que le consommateur retire de ses achats au prix en vigueur. Comment ce surplus se construit-il ?

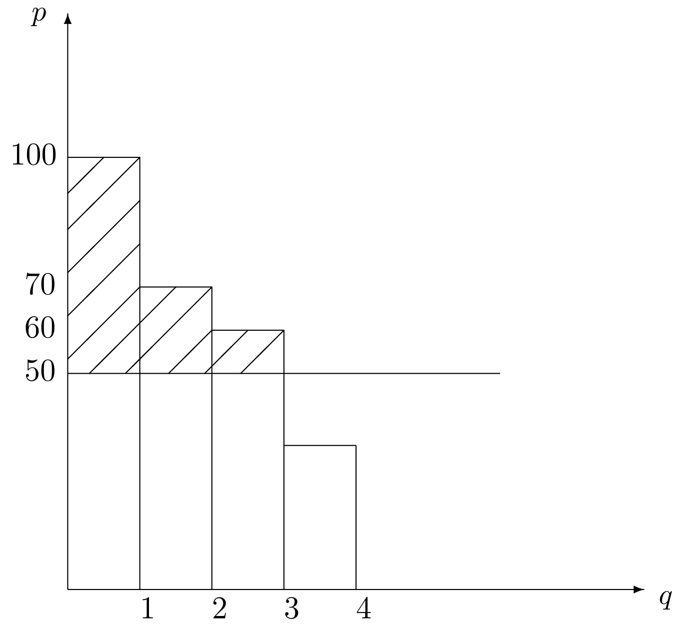
Demandons au consommateur le montant maximum qu'il serait prêt à payer pour acheter une unité du bien en question, puis le montant qu'il serait disposer à payer pour acheter une seconde unité, puis une troisième, etc... Le surplus est alors la différence entre la somme de tous ces montants et ce que le consommateur a effectivement payé. Graphiquement, il est aisé de représenter[48] le surplus du consommateur (graphique 5.12).

Sur le graphique, le prix en vigueur sur le marché est de 50 francs par unité, et le consommateur, à ce prix, achète 3 unités. Toutefois, il serait prêt à payer 100 francs pour obtenir la première unité, 70 francs pour obtenir la seconde, et 60 pour obtenir la troisième. Son surplus est alors la différence entre ces sommes et le prix effectivement payé pour chaque unité : $S = (100 - 50) + (70 - 50) + (60 - 50) = 80$. C'est également l'aire de la surface hachurée.

Lorsque le bien est supposé parfaitement divisible (ce qui a été supposé dans les chapitres précédents), c'est-à-dire que la demande n'est plus une fonction en escalier comme sur le graphique 5.12, le surplus est représenté par l'aire hachurée sur le graphique 5.13.

[48]Il convient de prendre garde au fait que, contrairement aux graphiques précédents, le prix est ici en ordonnée.

FIG. 5.12: Le surplus du consommateur avec des unités indivisibles



Analytiquement, c'est la surface sous la courbe de demande et au dessus du prix $p^\star$:

$$S = \int_0^{x^\star} p(x)dx - p^\star x^\star$$

où $p(x)$ est la fonction de demande inverse.

Cette expression du surplus du consommateur n'est rigoureusement exacte que dans le cas d'une fonction d'utilité linéaire par rapport à la "monnaie".

En effet, lorsque la fonction d'utilité s'écrit $v(x, M) = u(x) + M$, où x est le bien dont nous étudions le marché et M représente un bien composite censé représenter le reste des biens dans l'économie et dont le prix est normalisé à un, et que nous appellerons monnaie. La contrainte budgétaire s'écrit alors $px + M = R$. Le consommateur maximise $u(x) + R - px$, et la condition de premier ordre nous donne : $u'(x) = p$, ce qui définit une fonction $p(x)$, tel que $p(x) = u'(x)$.

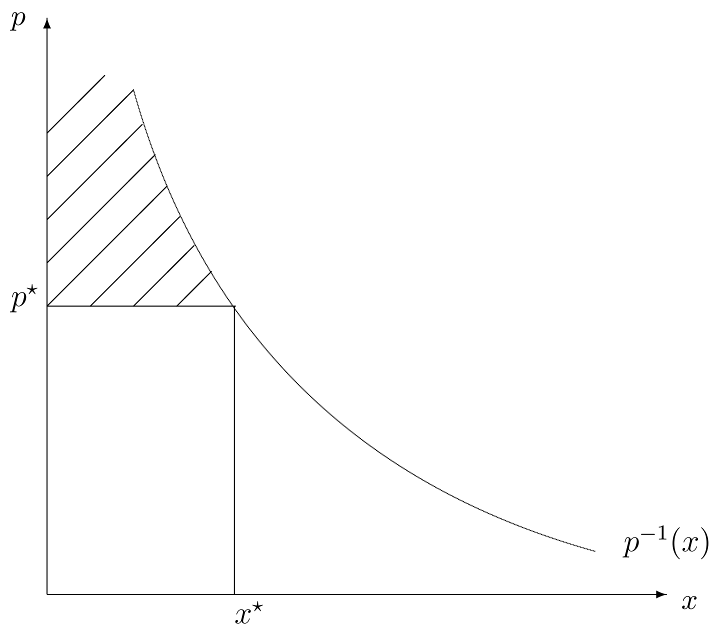
Maintenant, le surplus du consommateur tel que nous l'avons décrit "littérairement" est la différence d'utilité du consommateur entre ne rien consommer et consommer $x^\star$ unités au prix $p^\star$, soit :

$$S = u(x^\star) + R - p^\star x^\star - (u(0) + R)$$

Nous obtenons donc

$$S = (u(x^\star) - u(0)) - p^\star x^\star$$

FIG. 5.13: Le surplus du consommateur pour un bien parfaitement divisible



$$= \int_0^{x^\star} u'^\star x^\star$$
$$= \int_0^{x^\star} p(x)dx - p^\star x^\star$$

Nous venons de voir que cette expression du surplus n'est rigoureusement exacte que dans le cas particulier où la "monnaie" a une utilité marginale constante[49]. L'expression obtenue ci-dessus constitue néanmoins une bonne approximation du vrai surplus dans les cas où l'utilité n'est pas linéaire par rapport à la "monnaie".

Finalement, il est possible d'agréger les surplus des différents consommateurs pour obtenir le surplus des consommateurs :

$$S_C = \int_0^{x^\star} p_g(x)dx - p^\star x^\star$$

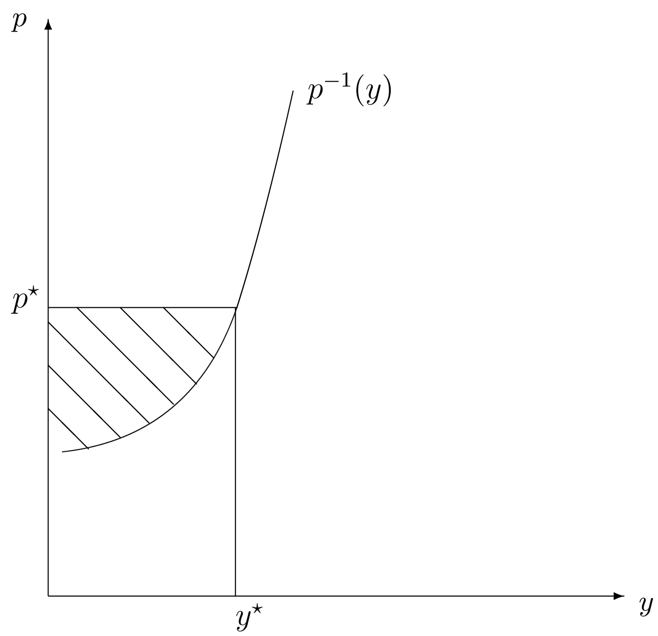
où $p_g(x)$ est la demande globale inverse.

[49]A vrai dire, cette forme de la fonction d'utilité, pour laquelle l'utilité marginale du revenu est constante, est la seule qui permette de justifier une analyse d'équilibre partiel comme un cas particulier de l'équilibre général. Voir A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green, *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995.

5.5.2 Le surplus du producteur

Le surplus du producteur n'est rien d'autre que son profit. Représentons-le sur le graphique 5.14.

FIG. 5.14: Le surplus du producteur



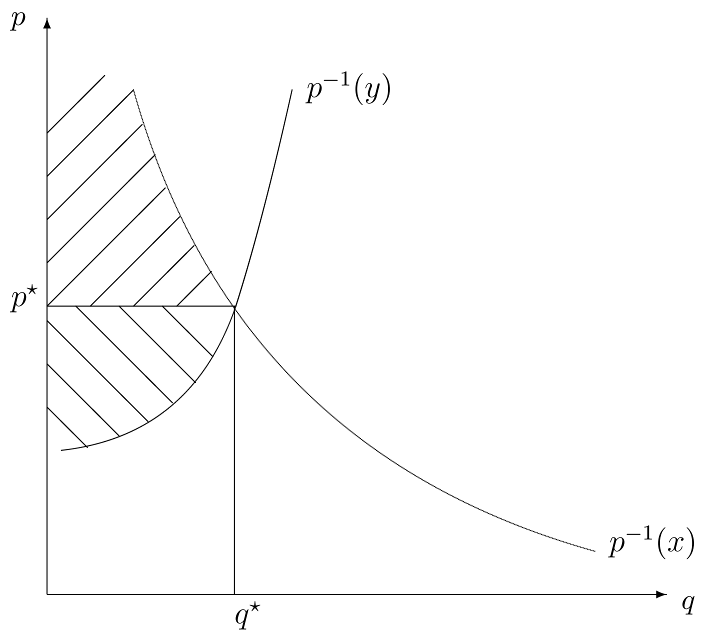
Cette représentation appelle quelques commentaires. En effet, le profit est égal à $\pi(p) = py - CT(y)$, où $CT(y)$ est le coût total de production de la quantité y. La maximisation du profit conduit à égaliser p et le coût marginal $Cm(y)$ (du moins lorsque l'ensemble de production de l'entreprise est à rendements décroissants), ce qui donne la fonction d'offre $y(p)$. Maintenant, par définition du coût marginal, $CT(y^\star) = \int_0^{y^\star} Cm(y)dy$ et le profit de l'entreprise lorsqu'elle produit $y^\star$ s'écrit : $\pi(p^\star) = p^\star y^\star - \int_0^{y^\star} Cm(y)dy$. Cette grandeur est représentée par l'aire hachurée sur le graphique 5.14.

5.5.3 Efficacité de l'équilibre de concurrence parfaite

Le surplus global est la somme du surplus des consommateurs et de celui des producteurs. Il est maximal à l'équilibre de concurrence parfaite et est représenté par l'aire hachurée du graphique 5.15.

Un des résultats fondamentaux de la théorie est que la concurrence parfaite sur un marché conduit à une situation efficace, en ce sens que le surplus dégagé sur ce marché y est maximal. Nous reviendrons dans les chapitres suivants sur ce résultat normatif. Examinons toutefois dans ce cadre simple les raisons pour lequel ce résultat

Fig. 5.15: Le surplus global



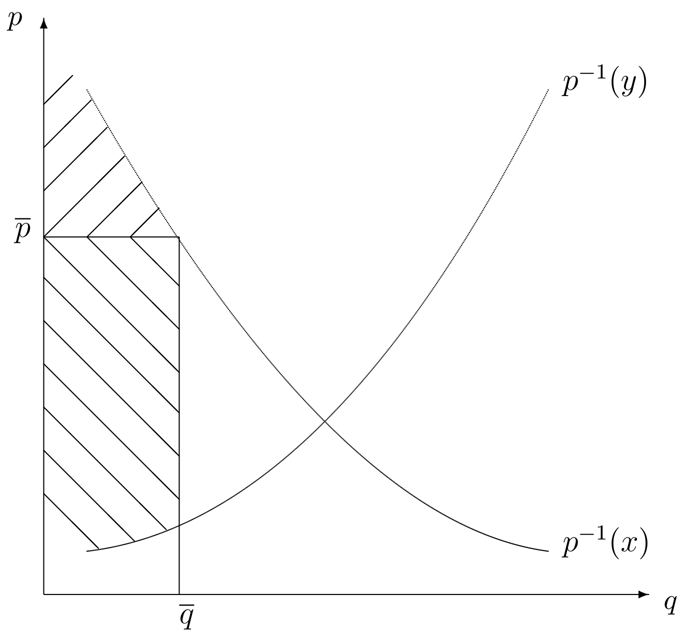
est vrai. Pour le comprendre, supposons que la situation de l'économie soit en dehors de l'équilibre (le prix fixé par une autorité publique par exemple, est différent de celui d'équilibre). Dans ce cas, le surplus global est inférieur à celui de l'équilibre concurrentiel, comme le montre le graphique 5.16.

Sur ce graphique, le gouvernement fixe un prix $\overline{p}$. Nous faisons l'hypothèse que la quantité échangée est alors le minimum de l'offre et de la demande à ce prix (ici c'est la demande qui est inférieure à l'offre). Ce comportement entraîne une réduction du surplus global : la quantité échangée est plus faible que celle d'équilibre, et en conséquence, les agents ne tirent pas pleinement profit des gains à l'échange potentiels. La recommandation de politique économique sous-jacente est donc qu'il ne faut pas intervenir sur les marchés en fixant des prix plancher ou plafond, car de telles interventions, même si elles peuvent augmenter le bien-être de telle ou telle catégorie d'acteurs économiques, n'en diminue pas moins le surplus global "produit" par cette économie.

Plus généralement, si l'économie n'est pas au point d'équilibre, le surplus est moindre que le surplus d'équilibre. Sur le graphique 5.16, la perte de surplus par rapport à l'équilibre est donnée par l'aire du triangle compris entre les courbes d'offre et de demande d'une part, et $\overline{x}$ et le point d'équilibre d'autre part. Il est usuel d'appeler ce triangle la "charge morte", liée à tout phénomène (réglementation, taxe,...) qui conduit l'économie hors de l'équilibre concurrentiel.

La notion de surplus que nous avons présentée n'est pas exempte de critiques. Outre le fait que la notion de surplus n'a de sens que dans le cadre d'un équilibre partiel, cette mesure de l'efficacité d'un marché souffre de quelques déficiences. En premier lieu, nous avons vu qu'elle n'était valable que pour des préférences d'un type très particulier. Il est cependant possible de considérer qu'elle constitue une approximation de cas plus compliqués. En second lieu, cette mesure, comme la plupart des mesures

FIG. 5.16: Inefficacité d'une situation hors équilibre



d'efficacité économique, fait abstraction de la répartition des richesses. Un surplus global de 100 peut en effet recouvrir des situations très différentes : les entreprises pourraient s'accaparer tout le surplus (comme dans le cas d'un monopole parfaitement discriminant, situation elle aussi efficace), ou les consommateurs pourraient obtenir l'intégralité de celui-ci, etc... A moins de pouvoir redistribuer librement le surplus entre les acteurs économiques, ce qui pose souvent de gros problèmes, il semble donc difficile de juger une situation uniquement sur la base du surplus global qui lui est attaché.

Prenons un exemple. La politique européenne de soutien des prix agricoles est inefficace puisque elle empêche les prix de tomber au niveau de leur prix d'équilibre (*i.e.* celui établi sur les marchés mondiaux). Il existe donc un gain en termes de surplus global à abandonner cette politique. En revanche, il est évident qu'abandonner cette politique aurait des conséquences redistributives très importantes. En effet, les consommateurs paieraient sans doute les produits agricoles moins chers, mais toute une partie de l'agriculture européenne serait amenée à disparaître[50]. Un système de transferts entre les consommateurs et les agriculteurs est bien s–r envisageable, de manière à ce que ces derniers ne voient pas leur niveau de profit chuter après suppression de la politique de prix plancher. Toutefois, l'analyse en termes de surplus ignore les difficultés propres à la mise en place de tels transferts (qui auront également, dans la plupart des cas, des effets distorsifs).

[50] Une limite de l'analyse en termes d'équilibre partiel apparaît avec force ici : les ressources utilisées à produire des excédents laitiers pourraient sans doute être utilisées plus efficacement ailleurs.

5.6 Conclusion

Ces rappels sur la théorie de l'équilibre partiel ont permis d'introduire très simplement certains problèmes que nous retrouverons dans l'étude de la théorie de l'équilibre général, à savoir la définition de la notion d'équilibre, les problèmes d'existence, d'unicité et de stabilité de celui-ci, et enfin ses propriétés d'optimalité. Les chapitres qui suivent sont consacrés à l'analyse de ces problèmes dans le cadre de l'équilibre simultané sur tous les marchés. Même si les thèmes abordés sont semblables, l'étude de l'équilibre général est sensiblement plus compliquée et nécessite de développer de nouveaux outils théoriques. Nous introduisons ces nouveaux outils de manière progressive dans les trois chapitres suivants.

Chapitre 6

Economie d'échange (I) : La boîte d'Edgeworth

6.1 Introduction

Nous abordons ici l'étude de l'équilibre général d'une économie au moyen d'une construction géométrique très simple connue sous le nom de boîte d'Edgeworth. Cette représentation géométrique permet de développer une intuition de beaucoup de phénomènes que nous retrouverons par la suite.

Nous avons étudié au chapitre précédent l'équilibre partiel, sur un marché, en ignorant le reste de l'économie. Ici, nous étudierons la réalisation simultanée de l'équilibre sur tous les marchés. Ce problème est très différent de l'étude de l'équilibre partiel : en particulier, il ne se ramène pas à la succession d'équilibres partiels obtenus marché par marché. En effet, si nous essayons d'équilibrer un marché, en changeant le prix du bien échangé sur ce marché, nous allons nécessairement modifier la situation sur les autres marchés.

Prenons un exemple à deux biens, les voitures et le pétrole. Supposons le prix des voitures donné, et cherchons à réaliser l'équilibre partiel sur le marché du pétrole. Une fois celui-ci trouvé, fixons le prix du pétrole au prix d'équilibre partiel, et utilisons le prix des voitures pour équilibrer le marché des voitures. Le problème ici est qu'une fois le marché des voitures équilibré, rien ne garantit plus que celui du pétrole demeure équilibré. En effet, le prix des voitures a changé par rapport à celui qui prévalait lorsque nous avions trouvé le prix équilibrant le marché du pétrole. La demande de pétrole dépendant du prix des voitures, celle-ci aura changé, et le marché du pétrole se trouvera dans une situation de déséquilibre.

Plus formellement, supposons qu'il y a deux biens, 1 et 2. L'offre et la demande de chaque bien dépend de p^1 et de p^2. Fixons le prix du bien 2 à $\overline{p}^2$, et calculons le prix d'équilibre sur le marché du bien 1. Celui-ci dépend de $\overline{p}^2$ et nous le noterons $p^{1\star}(\overline{p}^2)$. Intéressons-nous maintenant au marché du bien 2, et pour cela fixons le prix du bien 1 à son niveau $p^{1\star}(\overline{p}^2)$. Le prix d'équilibre sur le marché pour le bien 2 est alors égal à $p^{2^\star}\left(p^{1\star}(\overline{p}^2)\right)$, et n'a aucune raison d'être égal au prix $\overline{p}^2$ que nous avions fixé au début de l'analyse. Si p^2 est fixé au niveau $p^{2^\star}\left(p^{1\star}(\overline{p}^2)\right)$, alors $p^{1\star}(\overline{p}^2)$ n'apure plus le marché du bien 1. Ces prix ne sont pas des prix d'équilibre. Cet exemple préliminaire fait apparaître que le vecteur de prix d'équilibre va être un point fixe du processus défini ci-dessus. Nous reviendrons formellement sur ceci dans le chapitre suivant.

Ce raisonnement montre qu'il n'est pas possible d'appréhender l'étude de l'équilibre général en cherchant à équilibrer successivement les marchés un par un : chaque prix ne peut plus être affecté à un marché en particulier. Il est donc nécessaire d'adopter une approche plus générale.

Afin de faciliter l'analyse au maximum, nous commencerons notre étude par le cas d'une économie "d'échange pur", c'est-à-dire de laquelle toute production est absente. Les agents échangent entre eux des biens dont la quantité totale est donnée et fixe. L'exemple classique de ce type de situation est l'échange dans un camp de prisonniers de cigarettes contre du chocolat.

Dans ce chapitre, nous faisons deux hypothèses supplémentaires, à savoir qu'il n'y a que deux biens et deux agents dans l'économie. Cette économie constitue le cadre minimal pour pouvoir étudier le phénomène de l'échange. Il faut deux personnes pour qu'il y ait échange. De plus, s'il n'y avait qu'un seul bien, les individus ne pourraient l'échanger contre autre chose. Cette hypothèse permet de plus une représentation graphique très simple, la boîte d'Edgeworth. L'hypothèse de concurrence parfaite telle qu'elle est généralement justifiée (à savoir la présence d'un grand nombre d'agents) peut sembler problématique ici. Si nous voulions absolument défendre l'idée d'un grand nombre d'agents, il suffirait d'interpréter la boîte d'Edgeworth comme illustrant l'échange entre deux agents parmi un grand nombre. En effet, les conclusions du modèle développé ici ne changeraient pas si nous faisions l'hypothèse qu'il n'existe que deux types d'agents, en nombre égal dans l'économie. Toutefois, afin de ne pas alourdir la discussion nous ferons l'hypothèse que nos deux agents se comportent en preneurs de prix.

6.2 Une économie à deux biens et deux agents

Nous établissons ici les hypothèses et donnons une représentation graphique de cette économie.

6.2.1 Les hypothèses

Il y a deux biens $c = 1, 2$ et deux consommateurs $h = 1, 2$. Notons $x_h = (x_h^1, x_h^2)$ la consommation de l'agent h, et $e_h = (e_h^1, e_h^2)$ ses dotations initiales des deux biens. Notons enfin $e = e_1 + e_2 = (e_1^1 + e_2^1, e_1^2 + e_2^2)$ les dotations totales de l'économie.

Chaque consommateur possède une fonction d'utilité $u_h : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$.

Hypothèses : *Pour* $h = 1, 2$,

- $e_h \gg 0$,
- u_h *est strictement croissante, strictement quasi-concave, continue et différentiable.*

Ces hypothèses sont assez restrictives, mais nous permettent de reporter l'étude des problèmes techniques aux chapitres suivants. La première signifie que chaque consommateur possède une dotation initiale de chaque bien. Elle assure que, pour tout vecteur de prix dont une composante au moins est non nulle, la richesse d'un agent est strictement positive. Nous verrons qu'elle est nécessaire pour établir l'existence d'un équilibre. La seconde de ces hypothèses renvoie aux notions étudiées dans le chapitre 2. Nous étudierons des exemples dans lesquels l'une de ces deux hypothèses n'est pas vérifiée au cours du chapitre.

6.2.2 Le programme des agents

Chaque agent maximise sa fonction d'utilité sous sa contrainte budgétaire :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_h} & u_h(x_h) \\ \text{s.c.} & p(x_h - e_h) = 0 \end{array}$$

$p(x_h - e_h)$ est le produit scalaire de p et $(x_h - e_h)$, égal à $p^1(x_h^1 - e_h^1) + p^2(x_h^2 - e_h^2)$. Nous notons $z_h = x_h - e_h$ le vecteur d'excès de demande[51] du consommateur h.

Nous avons établi dans le chapitre 2, que ce programme a une solution lorsque $p \gg 0$, ce que nous supposerons être le cas ici. De plus, la solution est unique et varie contin–ment en fonction de p compte tenu des hypothèses faites.

6.2.3 Représentation graphique : la boîte d'Edgeworth

6.2.3.1 Le cadre de la boîte d'Edgeworth

Nous représentons, dans un premier temps, le cadre de la boîte d'Edgeworth, qui est définie par les données de l'économie.

La somme des dotations initiales est indépendante des actions des agents puisqu'il n'y a pas de production. L'économie peut donc être représentée (graphique 6.1) sous la forme d'un rectangle, de côtés $(e_1^1 + e_2^1)$ et $(e_1^2 + e_2^2)$, c'est-à-dire respectivement la dotation initiale globale en bien 1 et celle en bien 2.

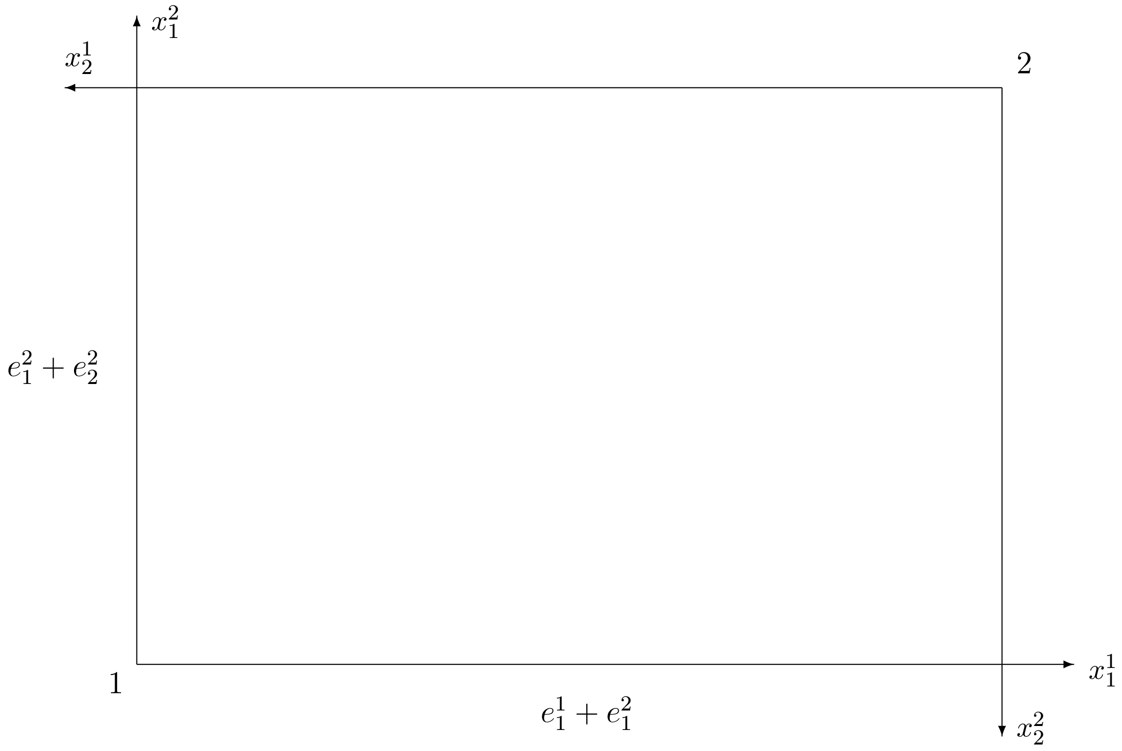
Définissons maintenant deux systèmes d'axes dans ce rectangle. Le système d'axes correspondant au premier agent a son origine dans le coin en bas à gauche de la boîte. La quantité de bien 1 qu'il consomme est alors comptée sur l'axe horizontal (vers la droite) et celle de bien 2 sur l'axe vertical (vers le haut). Le système d'axes correspondant au second agent est inversé : son origine est le coin en haut et à droite de la boîte. Sa consommation de bien 1 est comptée sur l'axe horizontal, en partant de l'origine et en allant vers la gauche, tandis que celle de bien 2 est comptée sur l'axe vertical, en allant vers le bas.

Il est important de comprendre que la boîte d'Edgeworth n'est que la superposition de ces deux systèmes d'axes. En particulier, un agent, lorsqu'il exprime sa demande pour un prix donné, peut tout à fait "sortir de la boîte". En revanche, l'allocation d'équilibre ne pourra être en dehors de la boîte puisque toute allocation en dehors de celle-ci excède nécessairement les ressources agrégéesé de l'économie.

La taille de la boîte représente donc la dotation fixe de l'économie dans les deux biens.

[51] Il convient de remarquer que z ne représente plus ici les inputs, comme c'était le cas dans le chapitre 3.

FIG. 6.1: Le cadre de la boîte d'Edgeworth

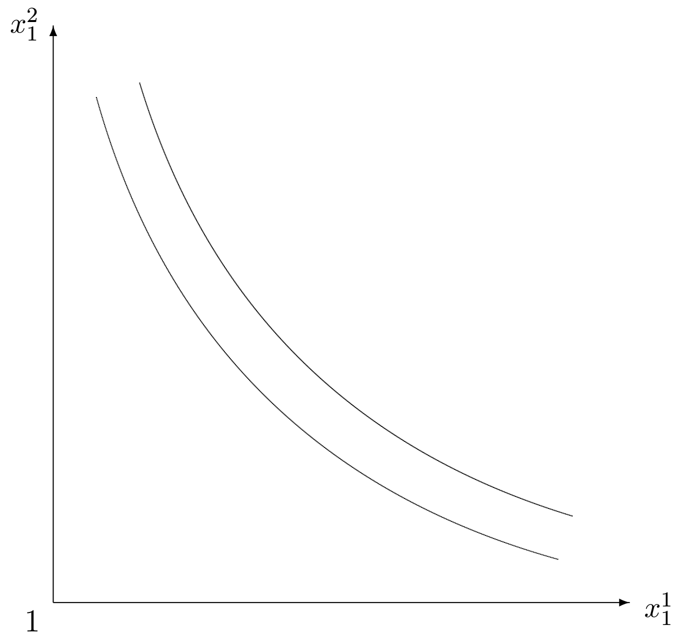


6.2.3.2 Représentation des préférences

La représentation des préférences (suposées convexes ici) des agents ne présente pas de difficultés autres que celles liées aux deux systèmes d'axes différents.

Pour le premier agent, les courbes d'indifférence prennent une forme habituelle, comme l'indique le graphique 6.2.

FIG. 6.2: Courbes d'indifférence du premier consommateur

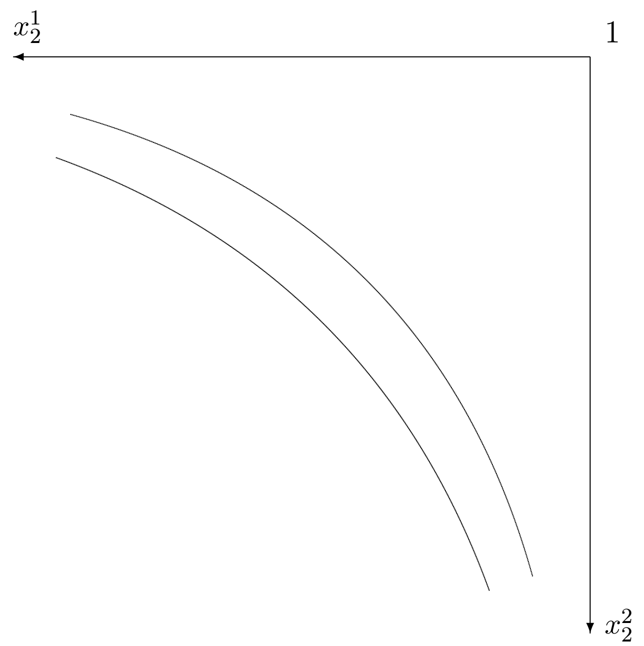


Pour le consommateur 2, il suffit de retourner le système d'axes pour obtenir une représentation de ses courbes d'indifférence, comme le montre le graphique 6.3. L'utilité du consommateur 2 augmente lorsque nous nous éloignons de l'origine de son système d'axes, c'est-à-dire lorsque nous nous déplaçons vers le Sud-Ouest.

6.2.3.3 Représentation des contraintes budgétaires

Il nous reste à préciser la contrainte budgétaire de chaque agent. Pour ce faire, il faut d'abord représenter le point de dotations initiales. Ce vecteur de dotations correspond bien à un point dans la boîte, par construction de celle-ci (voir graphique 6.4). L'abscisse de ce point sur le système d'axes du premier agent représente sa dotation en bien 1, tandis que l'abscisse de ce point cette fois lu sur le système d'axes du second agent représente sa dotation en bien 1 ; le raisonnement étant similaire pour les dotations en bien 2.

FIG. 6.3: Courbes d'indifférence du second consommateur



La contrainte budgétaire du premier agent, $px_1 = pe_1$ peut être réécrite de la manière suivante :

$$x_1^2 = -\frac{p^1}{p^2}x_1^1 + \frac{pe_1}{p^2}$$

Cette droite a pour pente $-p^1/p^2$ et passe par le point (e_1^1, e_1^2).

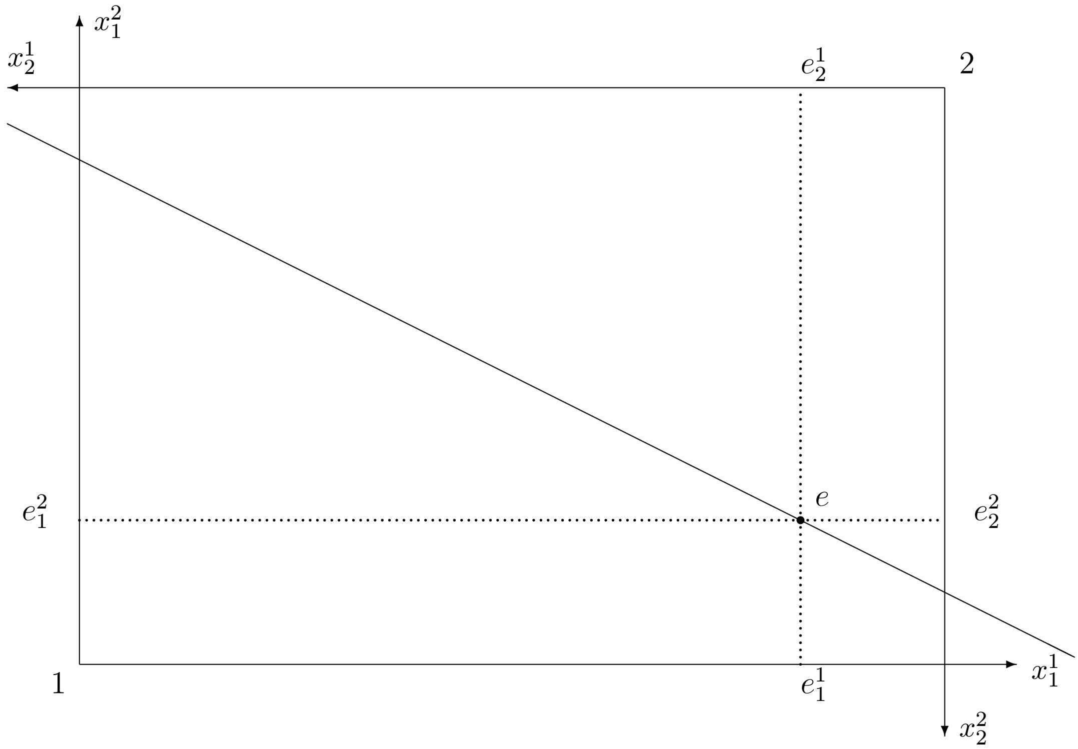
De même, la contrainte budgétaire du second agent s'écrit :

$$x_2^2 = -\frac{p^1}{p^2}x_2^1 + \frac{pe_2}{p^2}$$

Cette droite a pour pente $-p^1/p^2$ et passe par le point (e_2^1, e_2^2).

Il apparaît donc que les deux droites budgétaires sont confondues dans la boîte d'Edgeworth, comme le montre le graphique 6.4. Les ensembles budgétaires sont cependant différents. Le premier agent peut s'acheter les paniers de biens situés sous cette droite, tandis que le second consommateur peut s'offrir ceux situés au-dessus de cette droite (ce qui correspond au "dessous" de la droite budgétaire, vue à partir de l'origine du système d'axes du second agent). Ici également, les ensemble budgétaires des agents ne se restreignent pas au cadre de la boîte, et peuvent "en sortir".

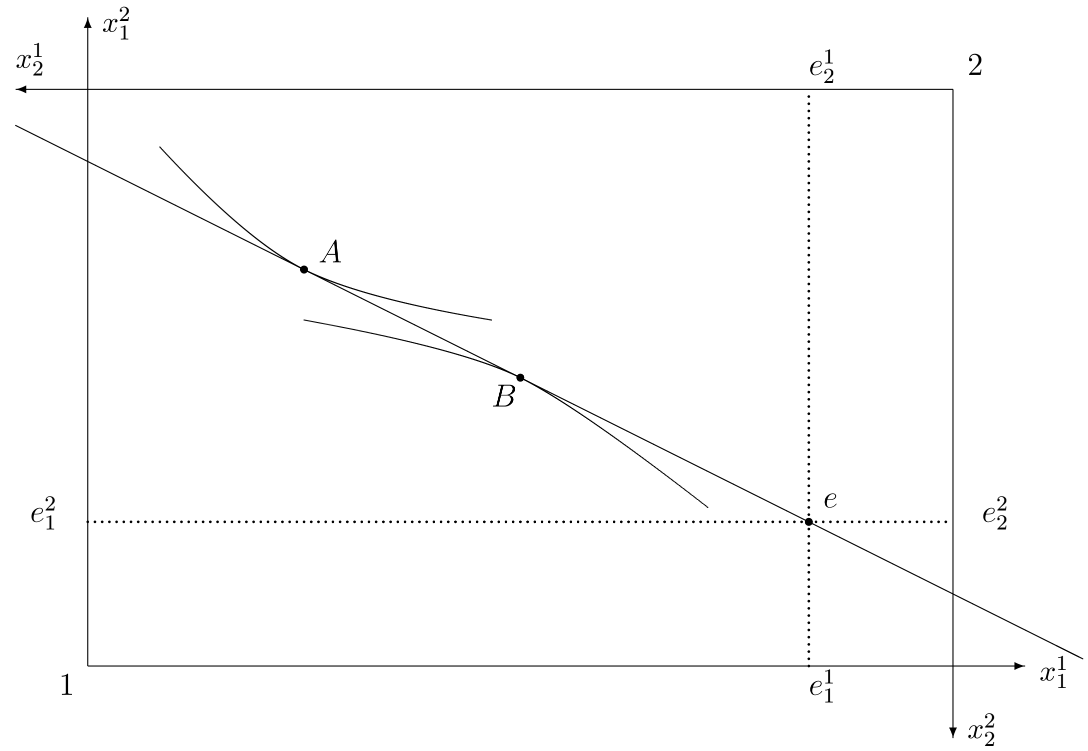
Fig. 6.4: Droite et ensembles budgétaires dans la boîte d'Edgeworth



6.2.3.4 Représentation des demandes

En adjoignant les représentations des préférences et des contraintes budgétaires, nous pouvons représenter les demandes des consommateurs (graphique 6.5). Sur ce graphique le premier consommateur demande le point A, le second le point B.

Fig. 6.5: Des demandes non concordantes



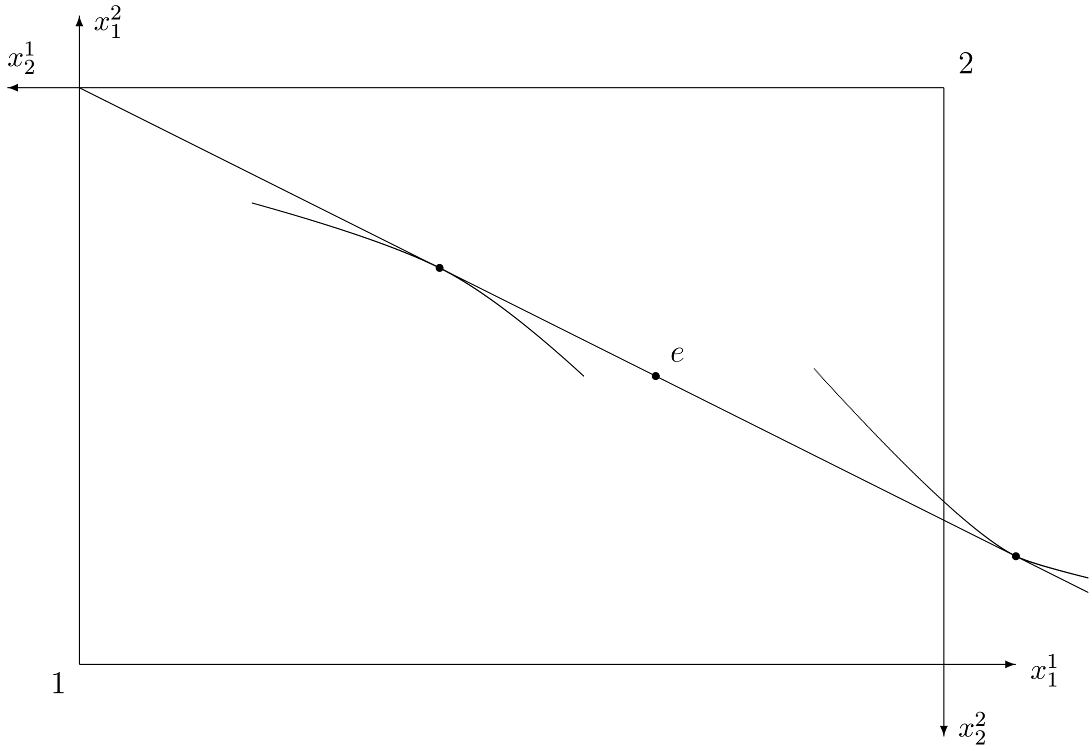
Les deux demandes représentées sur le graphique 6.5 ne sont pas compatibles. En effet, il y a un excès d'offre de bien 1 et un excès de demande de bien 2, soit :

$$x_1^1 + x_2^1 < e_1^1 + e_2^1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 > e_1^2 + e_2^2$$

Le but de l'analyse est alors de trouver, si celui-ci existe, un système de prix qui rende ces demandes compatibles.

Avant de passer à l'étude de l'équilibre, illustrons l'idée développée plus haut que la demande des agents n'est aucunement restreinte au cadre de la boîte d'Edgeworth. Sur le graphique 6.6, le premier consommateur demande aux prix en vigueur, une quantité de bien 1 qui excède la quantité globale disponible. Sa demande sort de la boîte d'Edgeworth. Cette situation ne pourra évidemment pas être un équilibre, mais est possible du point de vue d'un agent en particulier (agent qui n'a pas à se soucier, lorsqu'il formule sa demande, de savoir comment celle-ci se compare à l'offre).

Fig. 6.6: La demande d'un consommateur peut "sortir de la boîte"



6.3 L'équilibre concurrentiel

Bien qu'il n'existe que deux agents dans notre économie, nous avons fait l'hypothèse qu'ils se comportent de manière concurrentielle, et considèrent les prix comme donnés.

6.3.1 Définition

Commençons par définir la notion d'équilibre retenue.

Définition : *Un équilibre concurrentiel de l'économie est un vecteur de prix* $p = (p^1, p^2)$ *et une allocation* $x = (x_1, x_2)$ *tels que :*

- *étant donné le vecteur de prix* p, x_h *maximise l'utilité de* h *sous sa contrainte budgétaire, et ce pour* $h = 1, 2$,
- *les marchés s'apurent :* $x_1 + x_2 = e_1 + e_2$.

Nous écrirons souvent par la suite la condition d'équilibre sur les marchés : $z_1+z_2 = 0$.

Avant de passer à la représentation graphique de l'équilibre, commentons rapidement cette notion d'équilibre.

- L'équilibre est parfois défini comme étant simplement le système de prix, l'allocation associée (maximisant l'utilité des agents) étant définie de manière unique dans le cas où les fonctions d'utilité sont strictement quasi-concaves.
- A l'équilibre, les décisions des agents sont rendues compatibles par le seul système de prix. Les agents ont uniquement besoin de connaître les prix pour prendre leur décision. Nous retrouvons ici un thème qui remonte (au moins) à A. Smith : les agents, pour arriver à une situation d'équilibre, n'ont besoin de connaître que le système de prix. Toute l'information dont ils ont besoin pour formuler leur demande est contenue dans les prix, et ceux-ci coordonnent les actions des différents agents de telle manière qu'elles soient compatibles entre elles.

6.3.2 Représentation graphique

Graphiquement, pour qu'il y ait équilibre, c'est-à-dire pour que les marchés soient “apurés” ou “soldés”, il faut que les demandes des deux agents soient représentées par un seul point dans la boîte d'Edgeworth. Il faut en plus que ce point soit supporté par un système de prix tel que le point corresponde effectivement aux demandes des agents.

Une situation d'équilibre (le point E et le vecteur de prix défini par la droite budgétaire) est représentée sur le graphique 6.7. Le point D du graphique 6.8 n'est pas quant à lui un équilibre, car il ne correspond pas au point maximisant l'utilité du second consommateur, étant donnés les prix.

Remarquons qu'à l'équilibre, le TMS de chaque agent est égal au rapport de prix, c'est-à-dire que les courbes d'indifférence des agents sont tangentes à la droite budgétaire, ou encore $TMS_1 = p^1/p^2 = TMS_2$. Cette égalité des TMS au rapport des prix

Fig. 6.7: Une situation d'équilibre

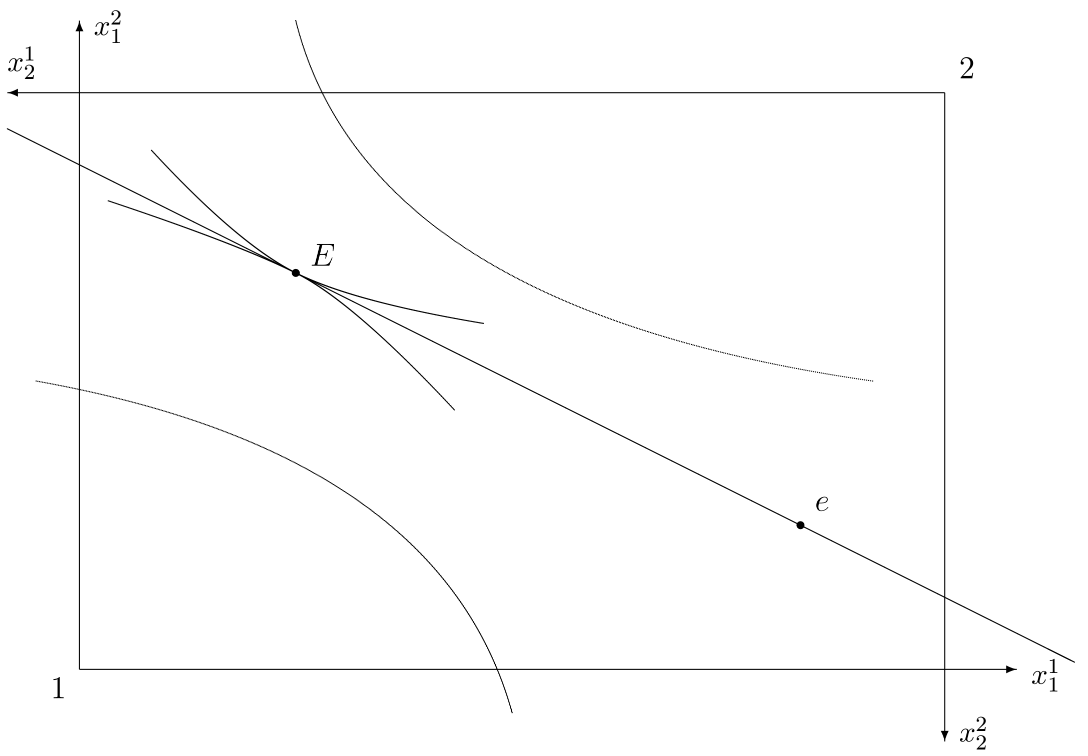
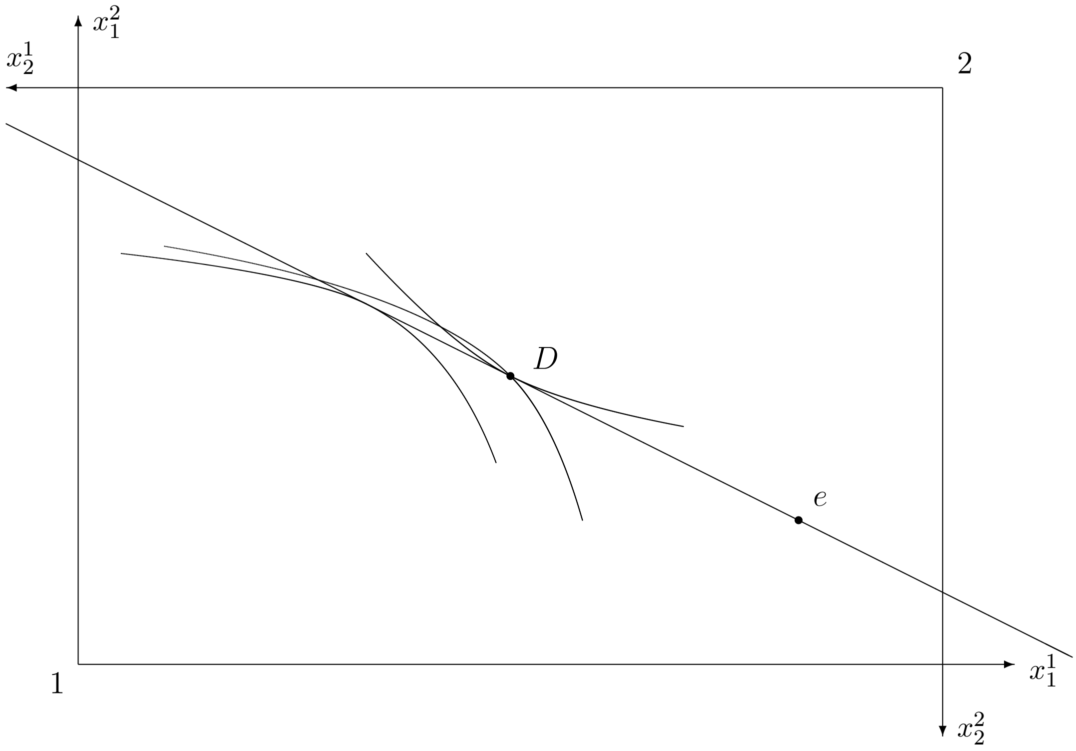


Fig. 6.8: Une situation de déséquilibre



d'équilibre n'est toutefois pas toujours vraie, comme nous le verrons dans la suite du chapitre.

6.3.3 La loi de Walras

Nous avons défini l'équilibre comme étant un système de prix et une allocation de biens tels que les agents maximisent leur utilité sous contrainte budgétaire et les marchés sont apurés. Cette définition est en un sens trop forte, dans la mesure où si le marché du bien 1 est apuré et que les agents maximisent leur utilité sous la contrainte budgétaire, alors le marché du bien 2 est également soldé. Ce résultat est la conséquence directe d'une propriété connue sous le nom de loi de Walras. Celle-ci implique en effet que si tous les marchés sauf un sont à l'équilibre et que les agents sont sur leur contrainte budgétaire, alors le dernier marché est également à l'équilibre.

Analytiquement, cette loi (que nous avons déjà vue dans le chapitre 2) est une propriété de la valeur de la fonction d'excès de demande agrégée. Dans le cadre présent, elle prend la forme suivante :

Proposition : *Soit $x_h(p)$ la fonction de demande du consommateur h. Alors,* $p\sum_{h=1}^{2}(x_h(p) - e_h) = 0$

> **Démonstration** : $x_1(p)$ étant la demande du premier consommateur, elle vérifie la contrainte budgétaire et donc : $p(x_1(p) - e_1) = 0$. De même pour le second consommateur : $p(x_2(p) - e_2) = 0$. En additionnant ces deux égalités, nous obtenons $p\sum_{h=1}^{2}(x_h(p) - e_h) = 0$.

Il vient alors de manière immédiate que si $x_1^1 + x_2^1 = e_1^1 + e_2^1$, alors la loi de Walras implique que $p^2(x_1^2 + x_2^2 - e_1^2 - e_2^2) = 0$, ce qui implique, si $p^2 > 0$, que le marché pour le second bien est à l'équilibre.

Il est important de souligner que cette propriété est valable même en dehors de l'équilibre et ne repose que sur le fait que les agents sont sur leur contrainte budgétaire. En effet, nous avions déjà établi la loi de Walras dans le chapitre 2 avant même de parler d'équilibre.

6.3.4 Les prix relatifs

Le résultat précédent pose un problème. Nous avions a priori deux équations d'équilibre qui nous permettaient de calculer les deux prix d'équilibre. Or, la loi de Walras nous dit que ces deux équations ne sont pas indépendantes, et que lorsque l'une est satisfaite, l'autre l'est aussi si les prix sont strictement positifs. Il ne nous reste donc qu'une seule équation pour déterminer deux prix, ce qui pourrait sembler problématique.

La solution à ce problème est qu'en fait nous ne déterminons pas deux prix p^1 et p^2, mais bien un seul, le prix relatif p^1/p^2. Le système des prix absolus n'est donc pas déterminé, et seuls les prix relatifs le sont.

En d'autres termes, si $(p^{1\star}, p^{2\star})$ est un système de prix d'équilibre, alors $(\lambda p^{1\star}, \lambda p^{2\star})$ est également un système de prix d'équilibre pour tout $\lambda > 0$. Ceci provient simplement de l'homogénéité des fonctions de demande : $x_h(p) = x_h(\lambda p)$, et donc si $x_1(p^\star) + x_2(p^\star) = e$ alors $x_1(\lambda p^\star) + x_2(\lambda p^\star) = e$.

Il apparaît donc qu'il existe une infinité de prix d'équilibre dès lors qu'il en existe un. Cependant, l'allocation d'équilibre associée à chaque prix d'équilibre du type $\lambda p^\star$ est la même. L'indétermination du niveau absolu de chaque prix n'a aucune influence sur l'allocation réelle (c'est-à-dire l'allocation des biens) à l'équilibre.

La propriété d'homogénéité des fonctions de demande permet de "normaliser" les prix. Normaliser les prix revient à choisir un vecteur parmi tous les vecteurs de prix d'équilibre $\lambda p^\star$, ou, en d'autres termes, de choisir un λ particulier. Economiquement, cela revient à choisir un panier de biens qui sera le numéraire, c'est-à-dire en termes duquel les prix de tous les biens seront exprimés. Tous les choix de normalisation sont bien s–r possibles. Toutefois, il existe deux normalisations "standard" alternatives.

La première consiste à fixer le prix d'un bien (par exemple le premier bien) à un : ceci revient à choisir comme représentant des vecteurs de prix d'équilibre $\lambda p^\star$ celui correspondant à $\lambda = 1/p^{1\star}$. Nous obtenons alors le vecteur d'équilibre $\overline{p} = (1, p^{2\star}/p^{1\star})$. L'avantage de cette normalisation est que le prix $\overline{p}^2$ s'interprète directement comme le nombre d'unités de bien 1 qu'il faut donner pour obtenir une unité de bien 2. Le bien 1 est alors le numéraire.

La seconde consiste à contraindre la somme des composantes du vecteur de prix d'équilibre à être égale à un. Ceci revient à choisir $\lambda = 1/\left(p^{1\star} + p^{2\star}\right)$, de manière à ce que le prix d'équilibre $\overline{p}$ possède la caractéristique que $\overline{p}^1 + \overline{p}^2 = 1$. Le numéraire est alors le panier de biens comportant une unité de chaque bien.

Le fait que seul le rapport des prix p^1/p^2 est déterminé à l'équilibre était déjà visible graphiquement. En effet, dans la boîte d'Edgeworth, le système de prix d'équilibre est donné par la pente de la droite budgétaire qui rend compatible les demandes des deux agents. Or, cette pente est précisément égale au rapport des prix. Economiquement, cela signifie qu'en présence de deux biens, la seule quantité qu'il faille déterminer est le rapport d'échange entre ces deux biens, c'est-à-dire combien d'unités du bien 1 il faut pour acheter une unité du bien 2. En d'autres termes, les prix ne sont pas exprimés dans une unité "abstraite" telle que le franc, mais en termes d'un bien (dans le cas de la première normalisation discutée) ou d'un panier de biens (dans le cas de la seconde normalisation).

De manière plus générale, cette discussion souligne l'absence de la monnaie dans ce modèle. Nous avons affaire à des échanges se faisant par le troc, ne nécessitant pas d'intermédiaire des échanges tel que la monnaie. Il suffit de connaître combien vaut chaque bien en fonction d'un numéraire (un bien ou un panier de biens) pour pouvoir mener à bien toutes les transactions nécessaires. L'introduction de la monnaie dans le modèle d'équilibre général statique suppose une forme plus élaborée des échanges (comme nous l'avons discuté dans le chapitre **??**), et ne sera pas étudiée ici.

6.3.5 Existence et unicité de l'équilibre

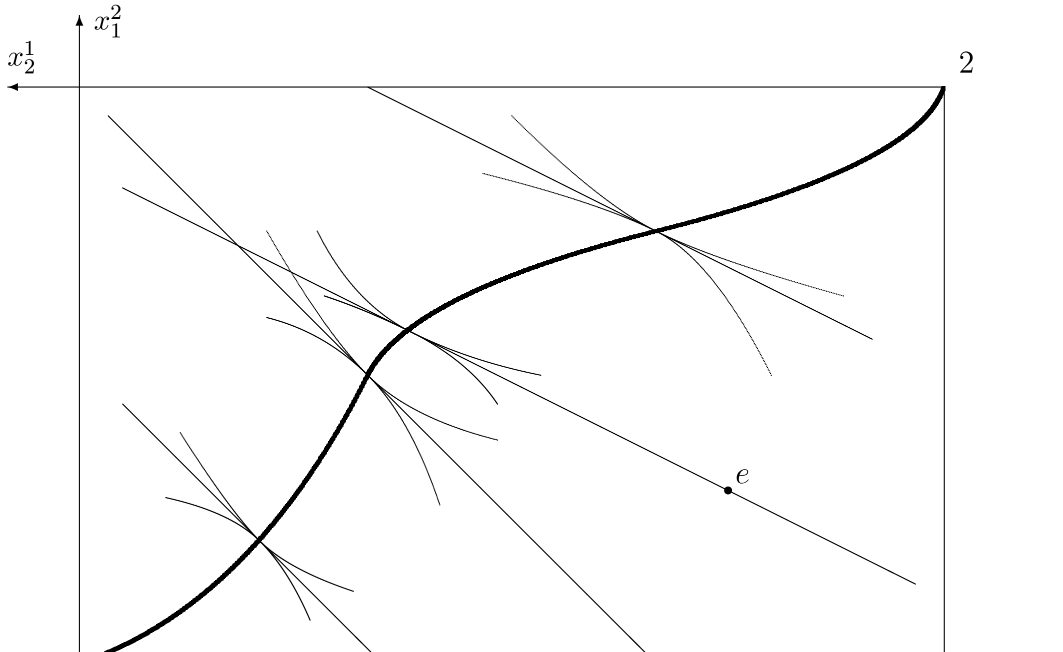
Jusqu'à présent, nous avons simplement défini et représenté graphiquement l'équilibre. Nous n'avons cependant pas répondu aux questions, existe-t-il un équilibre ?, et si oui, est-il unique ?

La première est essentielle dans la mesure où il ne sert à rien d'étudier les propriétés d'un équilibre si celui-ci n'existe pas. La seconde est importante en ce qui concerne le pouvoir prédictif du modèle.

6.3.5.1 Existence

Nous étudierons la question de l'existence de manière plus approfondie dans le chapitre suivant. Toutefois, il est possible de développer une intuition graphique (ce qui n'est évidemment pas une démonstration rigoureuse) dans le cadre de la boîte d'Edgeworth. Nous avons vu que l'équilibre est caractérisé, dans les illustrations graphiques simples faites jusqu'à présent, par la tangence des courbes d'indifférence entre elles, et par le fait que cette tangente commune passe par le point de dotations initiales. Traçons donc, sur le graphique 6.9, le lieu de tous les points de tangence entre les courbes d'indifférence des agents, ainsi que les tangentes elles-mêmes.

Fig. 6.9: Existence d'un équilibre

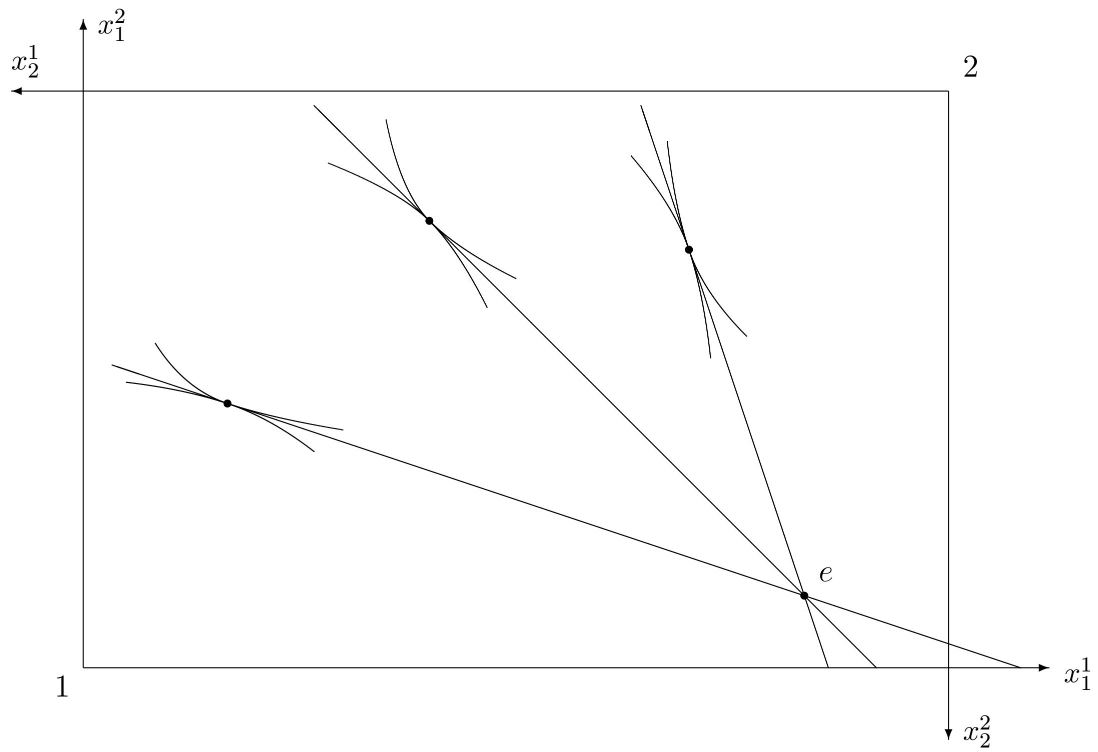


Intuitivement, en se déplaçant le long de la courbe reliant tous les points de tangence, la tangente va balayer l'ensemble de la boîte d'Edgeworth. Si ce balayage est continu, c'est-à-dire s'il ne se produit aucun "saut" dans la pente de la tangente lorsque nous nous déplaçons le long de cette courbe, alors il existe au moins une tangente qui passera par le point de dotation initiale e. La pente de cette droite est alors le rapport des prix d'équilibre. Cet argument suggère que la continuité des fonctions de demande joue un rôle essentiel dans l'obtention d'un équilibre. Ceci sera confirmé dans le chapitre suivant.

6.3.5.2 Unicité

L'argument d'existence ci-dessus montre également qu'il n'y a aucune raison pour que l'équilibre soit unique. Il est en effet possible qu'au cours du balayage les tangentes associées à des allocations différentes se coupent, comme sur le graphique 6.10. Sur ce graphique, il existe trois équilibres. Un exemple analytique correspondant à ce cas de figure est développé dans le chapitre suivant.

FIG. 6.10: Une multiplicité d'équilibres



Toutefois, il est possible de montrer (nous reviendrons également sur ce point dans le chapitre suivant), qu'il ne peut pas, en général, exister un continuum d'équilibres lorsque les fonctions d'utilité sont différentiables. En d'autres termes, les équilibres sont, pour la plupart des économies, localement "isolés", ou encore localement uniques (il n'existe pas d'autres équilibres dans un voisinnage d'un équilibre donné). Remarquons que nous parlons ici de l'unicité locale des allocations de biens à l'équilibre et non des prix d'équilibre, ceux-ci n'étant localement uniques qu'une fois une normalisation opérée.

6.4 Exemples

6.4.1 Le cas de fonctions d'utilité Cobb-Douglas

Calculons et représentons graphiquement l'équilibre de l'économie suivante :

- le premier consommateur a une fonction d'utilité qui s'écrit $u_1(x_1^1, x_1^2) = (x_1^1)^{1/4} (x_1^2)^{3/4}$ et des dotations initiales $(e_1^1, e_1^2) = (1, 1)$
- le second consommateur a une fonction d'utilité qui s'écrit $u_2(x_2^1, x_2^2) = (x_2^1)^{3/4} (x_2^2)^{1/4}$ et des dotations initiales $(e_2^1, e_2^2) = (1, 1)$

Un calcul simple nous donne les fonctions de demande suivantes (voir la section 2.5 du chapitre 2) :

$$\begin{array}{ll} x_1^1 (p^1, p^2) = \frac{1}{4}\frac{p^1+p^2}{p^1} & x_1^2 (p^1, p^2) = \frac{3}{4}\frac{p^1+p^2}{p^2} \\ x_2^1 (p^1, p^2) = \frac{3}{4}\frac{p^1+p^2}{p^1} & x_2^2 (p^1, p^2) = \frac{1}{4}\frac{p^1+p^2}{p^2} \end{array}$$

Vérifions que la loi de Walras s'applique bien :

$$\begin{aligned} p^1 (x_1^1 + x_2^1) + p^2 (x_1^2 + x_2^2) &= p^1 \left(\tfrac{1}{4}\tfrac{p^1+p^2}{p^1} + \tfrac{3}{4}\tfrac{p^1+p^2}{p^1} \right) + p^2 \left(\tfrac{3}{4}\tfrac{p^1+p^2}{p^2} + \tfrac{1}{4}\tfrac{p^1+p^2}{p^2} \right) \\ &= 2p^1 + 2p^2 \end{aligned}$$

La valeur de la demande agrégée est donc égale à la valeur des dotations globales ; autrement dit, la valeur de la demande nette agrégée est égale à zéro.

Afin de calculer l'équilibre, il suffit, du fait de la loi de Walras, de s'intéresser à l'équilibre sur le marché pour le bien 1 par exemple.

L'équation d'équilibre est :

$$\frac{1}{4}\frac{p^1 + p^2}{p^1} + \frac{3}{4}\frac{p^1 + p^2}{p^1} = 2$$

soit : $$\frac{p^1}{p^2} = 1$$

Remarquons que nous n'avons pas trouvé le prix d'équilibre de chaque bien mais uniquement le prix relatif p^1/p^2 d'équilibre. Ceci est bien évidemment lié au fait que les fonctions de demande étant homogènes de degré zéro, nous pouvons choisir de normaliser les prix comme nous l'entendons. Les deux normalisations standards discutées ci-dessus donnent les résultats suivants :

- Si nous posons $p^1 = 1$ alors le prix d'équilibre du second bien est $p^{2\star} = 1$ et (par définition) celui du premier bien est $p^{1\star} = 1$.
- Si nous posons que les prix doivent toujours s'additionner à 1, c'est-à-dire $p^1+p^2 = 1$, alors les prix d'équilibre sont $p^{1\star} = p^{2\star} = 1/2$.

Quelle que soit la normalisation adoptée l'allocation d'équilibre demeure inchangée et est égale à :

$$x_1^1 = \frac{1}{2} \quad x_1^2 = \frac{3}{2} \qquad x_2^1 = \frac{3}{2} \quad x_2^2 = \frac{1}{2}$$

Dans cet exemple, nous n'avons trouvé qu'un seul équilibre. L'allocation d'équilibre est ici unique. Ceci est vrai de manière générale lorsque toutes les fonctions d'utilité sont de type Cobb-Douglas, comme nous le verrons dans le chapitre 7.

6.4.2 Le cas des fonctions "min"

Soit une économie d'échange à deux biens et deux agents. Les préférences des agents sont représentées par la fonction d'utilité :

$$u_h(x_h^1, x_h^2) = \min(x_h^1, x_h^2) \quad \text{pour} \quad h = 1, 2$$

Cette fonction n'est pas différentiable au point $x_h^1 = x_h^2$: l'hypothèse de différentiabilité, qui rappelons-le permet de trouver les fonctions de demande en dérivant le lagrangien (lorsque les conditions de second ordre sont vérifiées) n'est pas satisfaite. Nous pouvons cependant mener l'analyse à bien, c'est-à-dire trouver les fonctions de demande et l'équilibre de l'économie.

Les dotations initiales sont données par :

$$(e_1^1, e_1^2) = (3, 7) \quad \text{et} \quad (e_2^1, e_2^2) = (7, 3)$$

Il y a donc un même montant global (égal à dix) de bien un et de bien deux dans cette économie.

Observons que les préférences sont convexes (tous les paniers entre deux points sur une même courbe d'indifférence sont préférés ou indifférents à ces points) :

$$\min(\lambda x^1 + (1-\lambda)y^1, \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2) \geq \lambda \min(x^1, x^2) + (1-\lambda)\min(y^1, y^2)$$

mais pas strictement convexes : considérons les points A et B sur le graphique 6.11 et remarquons que tous les points sur le segment AB sont indifférents à A ou B.

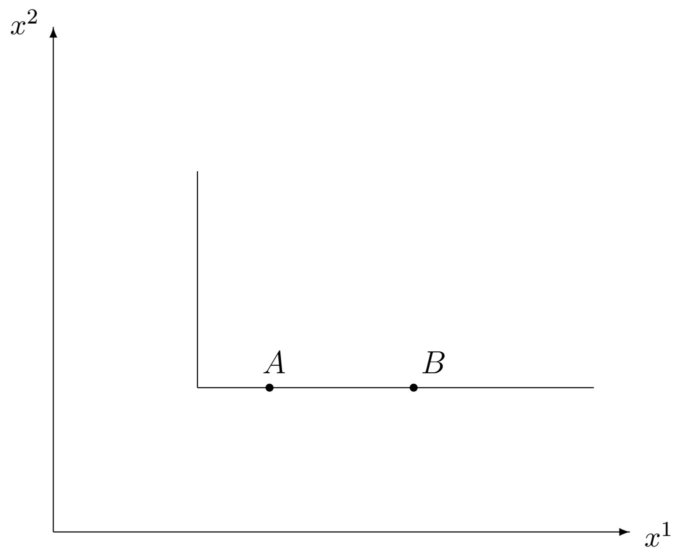
Les préférences sont monotones (si la consommation des deux biens augmente, l'utilité augmente également) mais pas strictement monotones : lors du passage de A à B, la quantité de bien 1 augmente, mais l'utilité est inchangée.

Afin de déterminer les fonctions de demande, nous montrons dans un premier temps que le consommateur a toujours intérêt à demander le même montant de chaque bien. Supposons que l'agent 1 demande une quantité différente de chaque bien, par exemple $x_1^1 < x_1^2$. Son utilité est égale à x_1^1. Montrons maintenant qu'il peut faire mieux : il peut acheter un peu plus de bien 1 en achetant moins de bien 2, tout en satisfaisant toujours sa contrainte budgétaire, soit :

$$\widetilde{x}_1^1 = x_1^1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad \widetilde{x}_1^2 = x_1^2 - \frac{p^1}{p^2}\varepsilon \quad \text{avec} \quad \varepsilon > 0$$

en supposant $p^2 > 0$. Ce nouveau panier de biens a la même valeur que l'ancien (aux mêmes prix) et procure une utilité égale à $\widetilde{x}_1^1$. En effet, pour ε suffisamment petit, $\widetilde{x}_1^1$ reste plus petit que $\widetilde{x}_1^2$. Maintenant puisque $\widetilde{x}_1^1 > x_1^1$, l'utilité atteinte est supérieure au point $(\widetilde{x}_1^1, \widetilde{x}_1^2)$ à celle obtenue au point (x_1^1, x_1^2). En conclusion, ceci démontre (par contradiction) qu'à l'optimum du consommateur, nous avons nécessairement égalité de la consommation des deux biens (lorsque qu'aucun prix n'est nul) : $x^1 = x^2$.

FIG. 6.11: Une courbe d'indifférence dans la cas "min"



Le programme de maximisation du premier consommateur s'écrit :

$$\max \quad \min(x_1^1, x_1^2) \quad \text{s.c.} \quad p^1 x_1^1 + p^2 x_1^2 = 3p^1 + 7p^2$$

Sachant que $x^1 = x^2$, nous pouvons remplacer x^1 par x^2 dans la contrainte budgétaire, ce qui nous donne :

$$x_1^1\left(p^1, p^2\right) = x_1^2\left(p^1, p^2\right) = \frac{3p^1 + 7p^2}{p^1 + p^2}$$

De manière similaire, nous obtenons :

$$x_2^1\left(p^1, p^2\right) = x_2^2\left(p^1, p^2\right) = \frac{7p^1 + 3p^2}{p^1 + p^2}$$

Normalisons les prix de manière à ce que $p^1 + p^2 = 1$, et calculons la demande globale pour les deux biens :

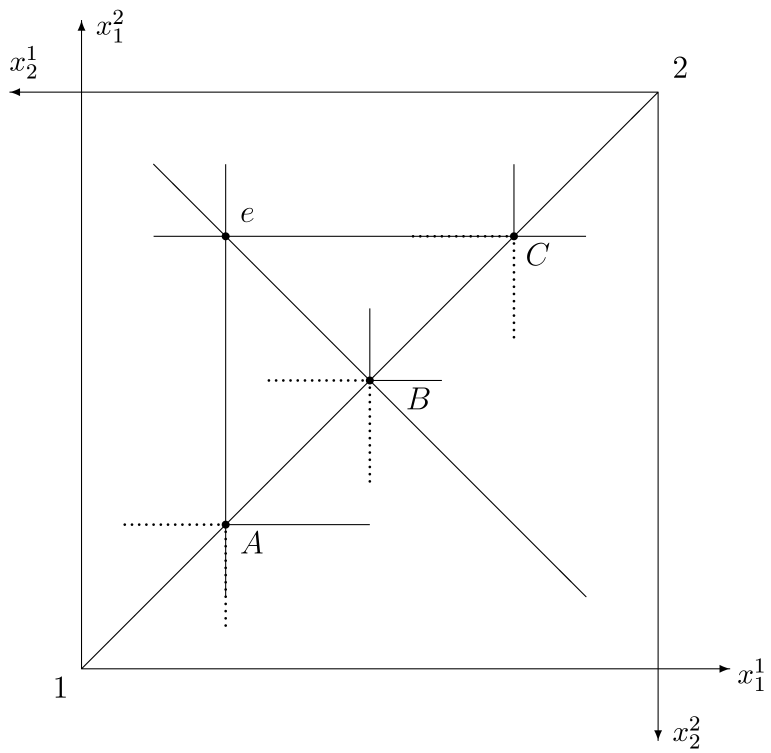
$$\begin{aligned} x_1^1\left(p^1, p^2\right) + x_2^1\left(p^1, p^2\right) = 3p^1 + 7p^2 + 7p^1 + 3p^2 = 10 \\ x_1^2\left(p^1, p^2\right) + x_2^2\left(p^1, p^2\right) = 3p^1 + 7p^2 + 7p^1 + 3p^2 = 10 \end{aligned}$$

Il se produit ici un phénomène très particulier : la demande globale pour chacun des deux biens est indépendante des prix, et est toujours égale aux dotations gloabales de biens dans l'économie. Les marchés s'apurent pour n'importe quel système de prix strictement positif, vérifiant $p^1 + p^2 = 1$. Il existe donc une infinité de prix d'équilibre normalisés. A chaque prix correspond une allocation d'équilibre donnée par les fonctions de demande évaluées à ces prix :

$$(3p^1 + 7p^2, 3p^1 + 7p^2) \quad \text{pour} \quad h = 1, \qquad (7p^1 + 3p^2, 7p^1 + 3p^2) \quad \text{pour} \quad h = 2$$

La propriété d'unicité locale de l'équilibre est invalidée ici, du fait de la non-différentiabilité des fonctions d'utilité. Représentons cette situation sur le graphique 6.12. La boîte d'Edgeworth est carrée, puisque les dotations globales de bien 1 et de bien 2 sont toutes deux égales à 10. Nous avons représentés 3 équilibres sur ce graphique. Il est cependant clair que tous les points sur la diagonale et compris entre les deux équilibres extrêmes A et C sont des allocations d'équilibre.

FIG. 6.12: Un continuum d'équilibres



Il est également intéressant de refaire l'analyse dans le même cadre en changeant simplement les dotations du premier consommateur et en posant, par exemple, $e_1 = (5, 5)$. Sans traiter ce cas explicitement, mentionnons qu'il pose d'autres problèmes : le prix du bien 1 est nul à l'équilibre. En effet, il existe maintenant dans l'économie 12 unités du bien 1 et seulement 8 du bien 2. Chaque consommateur ayant des préférences de type min n'a que faire de consommer plus de bien 1 que de bien 2. Le bien 1 ainsi essentiellement un bien "libre" puisque la demande pour ce bien est toujours inférieur à l'offre, sauf si son prix est nul.

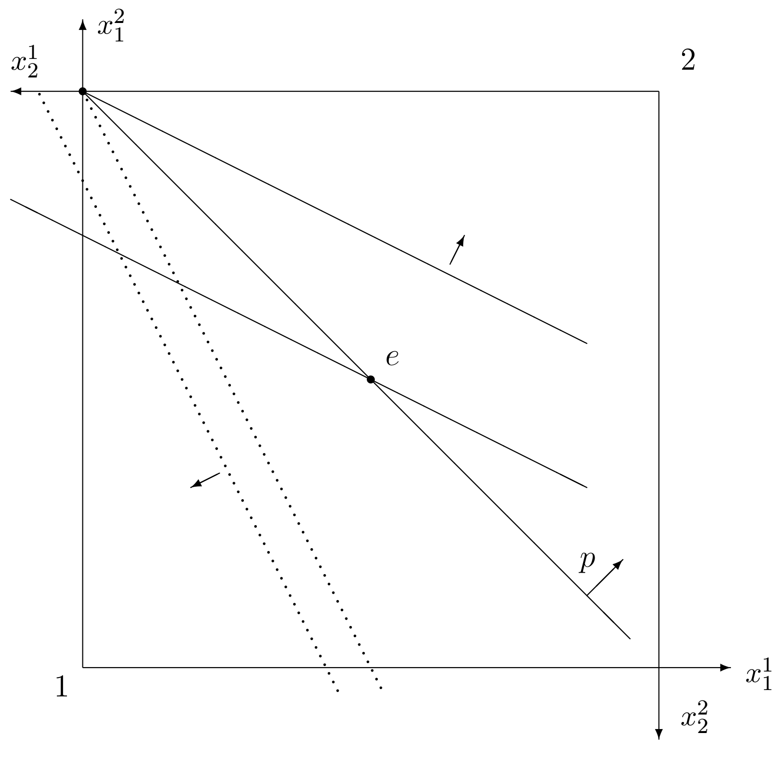
6.4.3 Le cas de fonctions d'utilité linéaires

Nous supposons ici que le premier consommateur a une fonction d'utilité qui s'écrit : $u_1(x_1^1, x_1^2) = ax_1^1 + x_1^2$, où a est un paramètre positif plus petit que un. Les courbes d'indifférence sont donc des droites de pente $-a$. Le second consommateur a une fonction d'utilité qui s'écrit : $u_2(x_2^1, x_2^2) = x_2^1 + ax_2^2$. Ces courbes d'indifférence ont une pente égale à $-1/a$ (dans son système d'axes propre, qui n'est pas le même que celui du premier consommateur). Observons que ces préférences sont convexes mais ne sont pas strictement convexes, ou encore, de manière équivalente, que les fonctions d'utilité associées sont quasi-concaves mais pas strictement quasi-concaves.

Les fonctions de demande obtenues sont d'un type particulier. En effet, pour le premier consommateur, une unité du bien 1 rapporte (en termes d'utilité) $a < 1$ tandis qu'une unité de bien 2 rapporte 1, et ce quel que soit le niveau de la consommation de ces deux biens. En conséquence, si p^2 n'est pas trop supérieur à p^1 (plus rigoureusement si $p^2 < p^1/a$), alors le consommateur préfère dépenser tout son revenu en bien 2. Un raisonnement similaire nous permet de conclure que si $p^2 > ap^1$, alors le second consommateur désire acheter uniquement du bien 1.

Nous supposons enfin que chaque consommateur possède une unité de chacun des deux biens. Cette économie est représentée sur le graphique 6.13.

FIG. 6.13: Un équilibre en coin



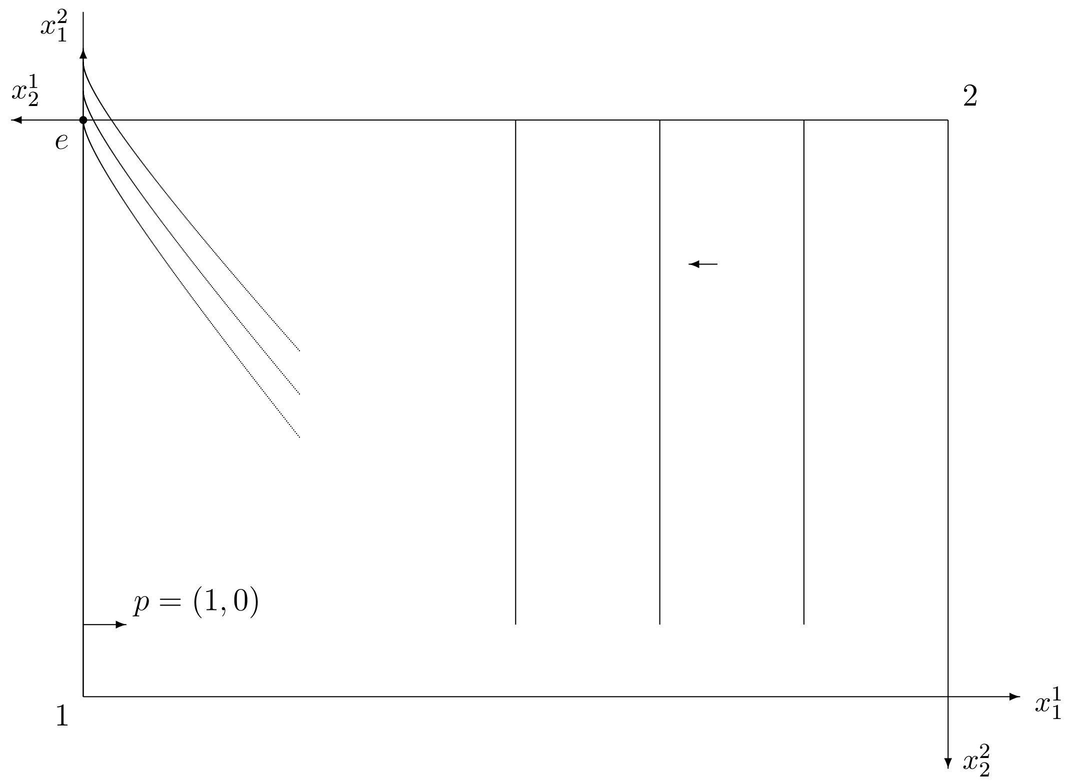
Graphiquement, nous voyons que le seul rapport de prix d'équilibre est un prix relatif $p^1/p^2 = 1$. L'allocation d'équilibire correspondante est celle en laquelle le premier consommateur consomme l'ensemble des dotations en bien 2, tandis que le second consommateur consomme l'intégralité des dotations en bien 1.

Cet exemple illustre le fait que lorsque l'équilibre se situe sur un axe de la boîte d'Edgeworth, alors il n'y a pas nécessairement égalité entre le TMS des agents et le rapport de prix d'équilibre. Dans l'exemple étudié, le TMS du premier consommateur est a et celui du second est $1/a$. Ils sont donc constants, indépendants du niveau de la consommation des deux biens. En conséquence, ils ne peuvent pas être égaux (sauf si $a = 1$ ce qui est exclu ici), et l'équilibre se situe en un point où le rapport de prix est compris entre ces TMS.

6.4.4 Non-existence d'un équilibre

Le dernier exemple que nous présentons ici est un exemple de non-existence de l'équilibre et est représenté sur le graphique 6.14.

FIG. 6.14: Inexistence d'un équilibre



Les dotations des agents sont sur la frontière de la boîte. Le premier agent possède toute la dotation en bien 2, tandis que le second possède toute la dotation en bien 1. Le premier consommateur a des préférences représentées par les courbes d'indifférence sur le graphique 6.14. En particulier la tangente de la courbe d'indifférence de cet agent au point e_1 a une pente infinie. De son côté, le second consommateur a des préférences qui ne dépendent que de sa consommation de bien 1. Ces courbes d'indifférence sont donc des droites verticales.

Montrons maintenant qu'il n'existe pas d'équilibre. Raisonnons par l'absurde et supposons dans un premier temps que le prix relatif p^1/p^2 est strictement positif, c'est-à-dire que la droite budgétaire des agents a une pente finie. Dans ce cas de figure, le premier agent demande un montant positif de bien 2. Le second consommateur, pour sa part, préfère consommer sa dotation initiale de bien 1 (ceci est en fait vrai quelque soit le prix relatif des biens). Ceci nous permet de conclure qu'un prix relatif p^1/p^2 strictement positif n'est pas un prix équilibre.

Supposons maintenant que p^1/p^2 soit nul. Dans ce cas, la droite budgétaire est une droite verticale (confondue avec l'axe). Le premier consommateur demande alors une quantité infinie de bien 2, ce qui ne peut constituer un équilibre, l'offre étant en tout état de cause finie. Ainsi, nous avons établi que dans cet exemple, il n'existe pas d'équilibre. Observons que deux des hypothèses énoncées au début de ce chapitre ne sont pas vérifiées : tout d'abord les agents ne possèdent pas une dotation strictement positive de chaque bien, et en second lieu, les préférences du second consommateur ne sont pas strictement monotones (les fonctions d'utilité les représentant ne sont pas strictement croissantes, puisqu'elles ne dépendent pas de la consommation en bien 2). Nous étudierons un autre cas dans lequel l'équilibre n'existe pas (à cause de préférences non convexes) dans le chapitre suivant.

6.5 Optimalité de l'équilibre

Nous cherchons dans cette section à caractériser les propriétés normatives de l'équilibre. Est-il possible de "faire mieux" que l'équilibre ? dans quel sens ?...

6.5.1 La notion d'optimum de Pareto

6.5.1.1 Définition

Le critère d'optimalité le plus fréquemment utilisé en économie est celui défini par Pareto. En préalable de la définition de cette notion, définissons une allocation réalisable : une allocation (x_1, x_2) est réalisable si $x_1 + x_2 = e$ (*i.e.* si $x_1^c + x_2^c = e_1^c + e_2^c$ pour $c = 1, 2$).

Définition : *Une allocation réalisable (x_1, x_2) est un optimum de Pareto (ou est Pareto optimale) s'il n'existe pas d'autre allocation réalisable $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ telle que $u_1(\widetilde{x}_1) \geq u_1(x_1)$ et $u_2(\widetilde{x}_2) \geq u_2(x_2)$, avec une inégalité stricte au moins.*

Ainsi, l'allocation x est Pareto optimale s'il n'est pas possible d'augmenter l'utilité d'un agent sans diminuer celle de l'autre. En d'autres termes, une allocation est optimale au sens de Pareto s'il n'est pas possible d'augmenter l'utilité des deux agents à la fois. Cette notion d'optimalité appelle quelques remarques.

- Le concept d'optimum de Pareto est totalement indépendant de celui d'équilibre. Dans la définition, il n'est jamais fait référence à un prix ou à la maximisation de l'utilité par les agents.

– Si $u_1(\widetilde{x}_1) \geq u_1(x_1)$ et $u_2(\widetilde{x}_2) \geq u_2(x_2)$ avec une inégalité stricte au moins, alors nous dirons que l'allocation $\widetilde{x}$ Pareto domine l'allocation x. En revanche si $u_1(\widetilde{x}_1) \geq u_1(x_1)$ et $u_2(\widetilde{x}_2) \leq u_2(x_2)$, il n'est pas possible de comparer ces deux allocations selon le critère de Pareto. Celui-ci ne permet pas de comparer toutes les allocations entre elles. En ce sens, il constitue donc un concept d'optimalité assez faible.
– Une autre interprétation de l'optimalité au sens de Pareto consiste à remarquer qu'à un optimum de Pareto, il n'existe plus d'échange mutuellement avantageux. Tout échange qui amènerait l'économie à se déplacer de ce point causerait une perte de bien-être pour au moins un agent.
– La notion d'optimum de Pareto est indépendante de la répartition des dotations initiales. A ce titre, deux économies ne différant que par la répartition des dotations initiales (et non par le montant de celles-ci) ont le même ensemble d'optima de Pareto. En effet, un optimum de Pareto peut être interprété de la manière suivante : c'est une allocation que serait susceptible de choisir un planificateur bienveillant (c'est-à-dire dont le seul objectif est le bien-être des agents privés). Dans cette optique, ce planificateur dispose de toutes les dotations de l'économie et peut les redistribuer comme bon lui semble. La question de savoir quels agents détiennent quelles dotations est donc ici sans importance.
– Ce concept ne comporte aucune notion de justice, ou d'équité. Le point où un agent possède tout et l'autre rien est un optimum de Pareto car améliorer la situation de l'agent démuni nécessiterait de prendre des biens à l'agent possédant tout, ce qui diminuerait l'utilité de ce dernier (si ses préférences sont strictement monotones).
– Le point précédent permet de préciser que le concept d'opimalité au sens de Pareto ne fait pas appel à une quelconque comparaison inter-personnelle du bien-être des agent. Ce problème de la comparaison de l'utilité que retire chaque agent d'une situation donnée est au cœur de toute théorie de la répartition et n'a pas de solution simple. Le fait est que pour pouvoir comparer des notions aussi subjectives que l'utilité de différents agents, il faut avoir recours à une évaluation monétaire de celle-ci, ce qui n'est pas toujours facile.

6.5.1.2 Exemple

Illustrons maintenant cette notion à l'aide d'un exemple.

Soit une économie disposant de 10 unités de chaque bien, 1 et 2. Les deux consommateurs sont identiques et ont des préférences représentées par la fonction d'utilité $u(x^1, x^2) = (x^1)^{1/2} (x^2)^{1/2}$.

Essayons de comparer les allocations suivantes selon le critère de Pareto.

$$\begin{aligned}
A_1 &: \Big((x_1^1, x_1^2) ; (x_2^1, x_2^2)\Big) = \Big((10, 10) ; (0, 0)\Big) \\
A_2 &: \Big((x_1^1, x_1^2) ; (x_2^1, x_2^2)\Big) = \Big((0, 0) ; (10, 10)\Big) \\
A_3 &: \Big((x_1^1, x_1^2) ; (x_2^1, x_2^2)\Big) = \Big((5, 5) ; (5, 5)\Big) \\
A_4 &: \Big((x_1^1, x_1^2) ; (x_2^1, x_2^2)\Big) = \Big((3, 7) ; (7, 3)\Big) \\
A_5 &: \Big((x_1^1, x_1^2) ; (x_2^1, x_2^2)\Big) = \Big((4, 6) ; (6, 4)\Big) \\
A_6 &: \Big((x_1^1, x_1^2) ; (x_2^1, x_2^2)\Big) = \Big((4, 4) ; (6, 6)\Big)
\end{aligned}$$

Toutes ces allocations sont réalisables et procurent les utilités :

$$\begin{array}{ll} A_1: & u_1(10,10)=10 \quad \text{et} \quad u_2(0,0)=0 \\ A_2: & u_1(0,0)=0 \quad \text{et} \quad u_2(10,10)=10 \\ A_3: & u_1(5,5)=5 \quad \text{et} \quad u_2(5,5)=5 \\ A_4: & u_1(3,7)=4.58 \quad \text{et} \quad u_2(7,3)=4.58 \\ A_5: & u_1(4,6)=4.9 \quad \text{et} \quad u_2(6,4)=4.9 \\ A_6: & u_1(4,4)=4 \quad \text{et} \quad u_2(6,6)=6 \end{array}$$

Nous pouvons donc observer que A_3 domine au sens de Pareto les allocations A_4 et A_5. Ces deux dernières constituent donc une manière inefficace d'allouer les ressources de l'économie. L'allocation A_1 est un optimum de Pareto : s'en écarter signifie nécessairement retirer d'au moins un des deux biens au premier consommateur, qui verrait ainsi son utilité chuter. De même, A_2 est optimale au sens de Pareto. Nous remarquons donc qu'aucun critère d'équité n'entre en ligne de compte dans l'évaluation de l'optimalité d'une allocation. Enfin, A_3 et A_6 sont également des optima de Pareto, mais nous n'avons pas encore les moyens nécessaires pour vérifier cela (il faudrait, pour l'instant, comparer ces allocations à toutes les autres allocations possibles). Remarquons finalement que A_3 et A_6 ne sont pas comparables selon le critère de Pareto. Lorsque l'économie passe de A_3 en A_6, l'utilité du second consommateur augmente, mais celle du premier diminue. Le critère de Pareto ne permet pas d'ordonner ces deux situations.

6.5.2 La courbe des contrats

Ayant défini ce qu'est une allocation Pareto optimale, nous nous demandons maintenant comment les identifier dans le cadre de la boîte d'Edgeworth. Par exemple, le point A du graphique 6.15 est-il un optimum de Pareto ?

Traçons les courbes d'indifférence des deux agents passant par le point A et considérons le point B, qui se trouve à l'intérieur de la lentille définie par ces courbes d'indifférence. En B, le premier agent a une utilité supérieure à celle qu'il avait en A, ce qui est également le cas pour le second consommateur. B Pareto domine A, et ce dernier n'est donc pas un optimum de Pareto.

Dans ce cas, B est-il un optimum de Pareto ? Répétons l'argument ci-dessus, et traçons les courbes d'indifférence passant par le point B (graphique 6.16). Considérons maintenant le point C. Evidemment celui-ci Pareto domine B, qui n'est donc pas non plus un optimum de Pareto.

Il est clair que nous pouvons répéter l'argument jusqu'au moment où la lentille définie par les courbes d'indifférence n'existe plus, c'est-à-dire (en supposant, ce que nous ferons ici, que les fonctions d'utilité sont différentiables) en un point de tangence entre ces courbes d'indifférence. Cette situation est représentée sur le graphique 6.17.

Il n'est pas possible de s'éloigner du point P sans diminuer l'utilité d'au moins un des deux agents. Si nous nous déplaçons vers le Nord-Ouest ou le Sud-Est, nous diminuons simultanément l'utilité des deux agents ; si nous nous déplaçons vers le Nord-Est, nous diminuons l'utilité du second agent tout en augmentant celle du premier ; si nous nous déplaçons vers le Sud-Ouest, nous détériorons l'utilité du premier agent

Fig. 6.15: La notion de dominance au sens de Pareto

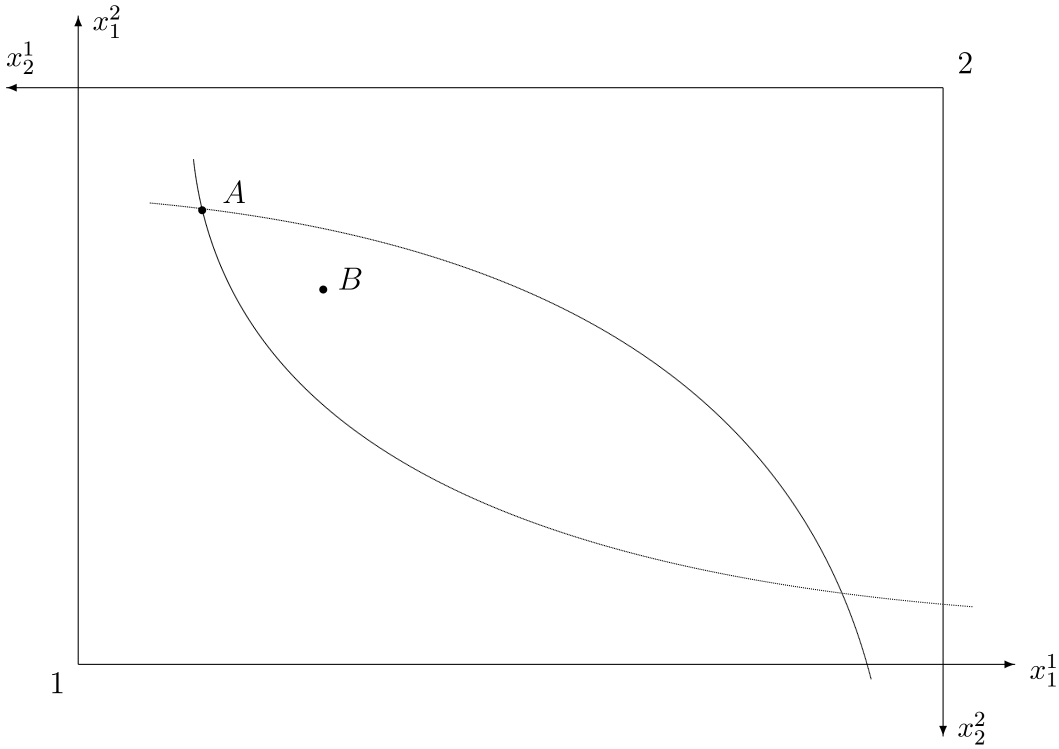


FIG. 6.16: Une allocation non optimale en dominant une autre

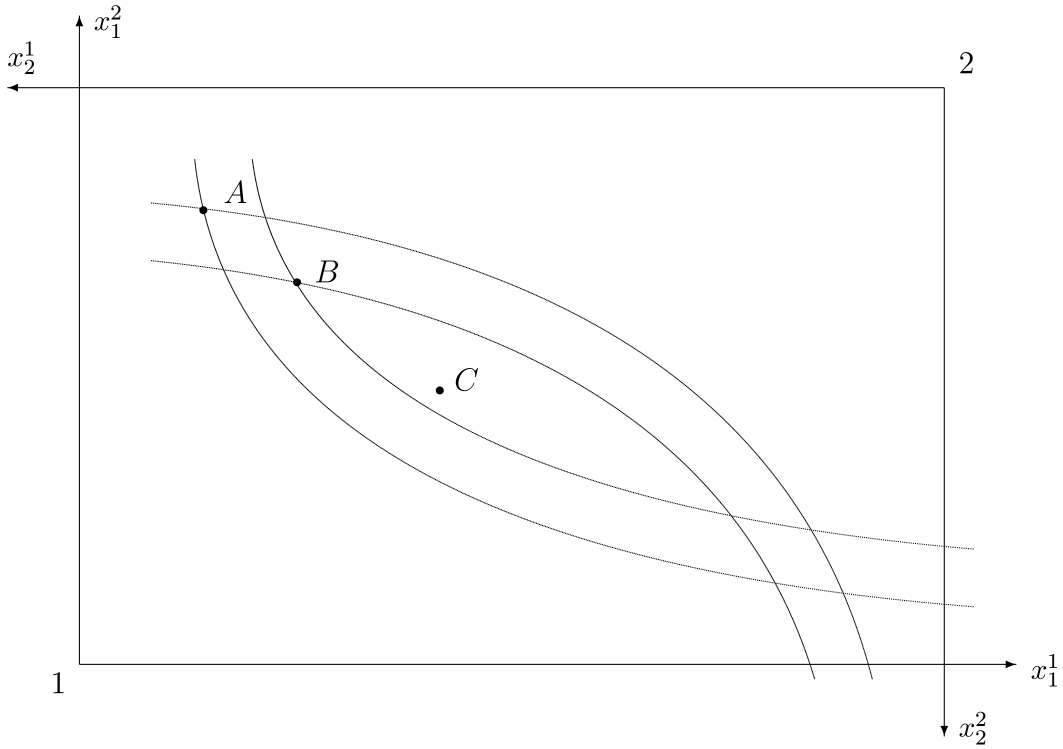
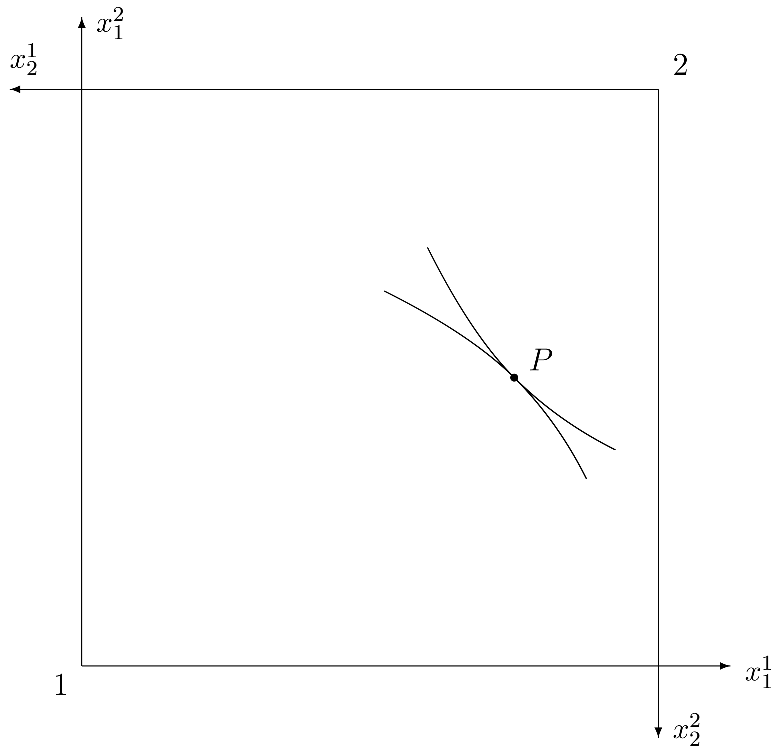


FIG. 6.17: Optimum de Pareto intérieur et tangence des courbes d'indifférence

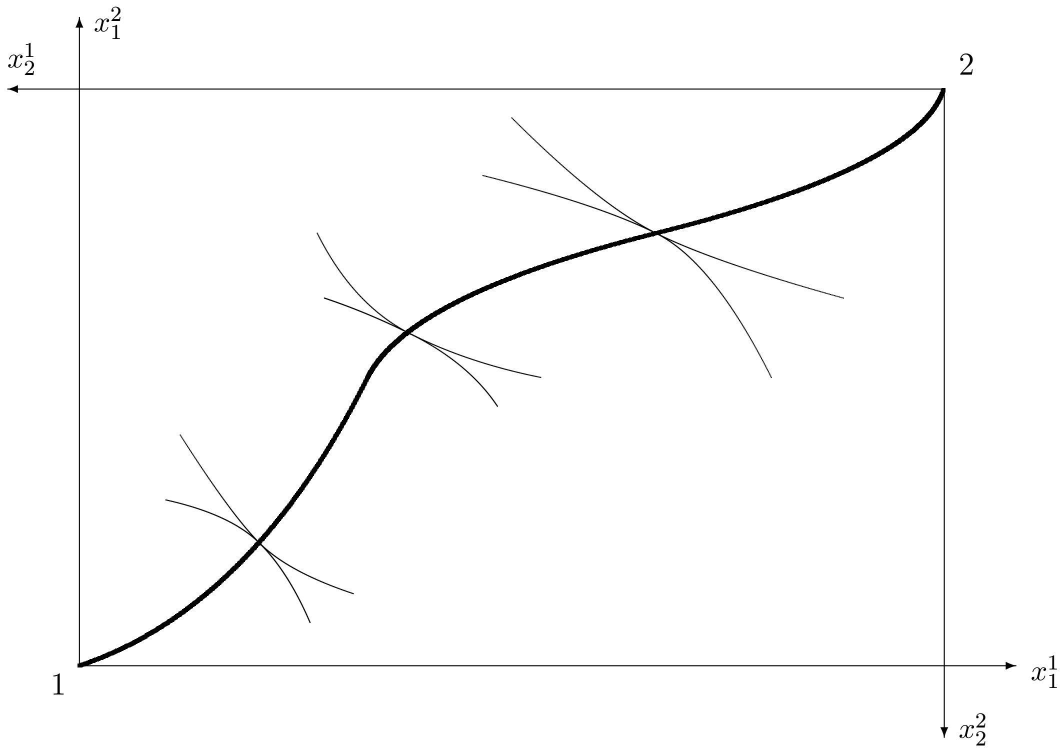


tout en améliorant celle du second.

Le fait qu'il y ait tangence entre les courbes d'indifférence a une interprétation simple : la pente d'une courbe d'indifférence en un point est égale au TMS en ce point ; le fait que les courbes soient tangentes signifie que le TMS des deux consommateurs sont égaux. Une allocation est Pareto optimale si les TMS des agents sont égaux (cette affirmation qui n'est pas totalement exacte comme nous allons le voir plus bas sera affinée dans le chapitre 8). Ainsi, nous disposons maintenant d'un moyen pour affirmer que les allocations A_3 et A_6 de la page **??** sont optimales. En effet dans cet exemple, le TMS de chaque agent est égal à x^2/x^1 et il est aisé de vérifier que cette quantité vaut 1 pour chaque agent en ces deux allocations.

Le lieu de tous les points de tangence des courbes d'indifférence, et donc le lieu de tous les optima de Pareto est appelé courbe des contrats. Celle-ci est représentée sur le graphique 6.18.

FIG. 6.18: La courbe des contrats

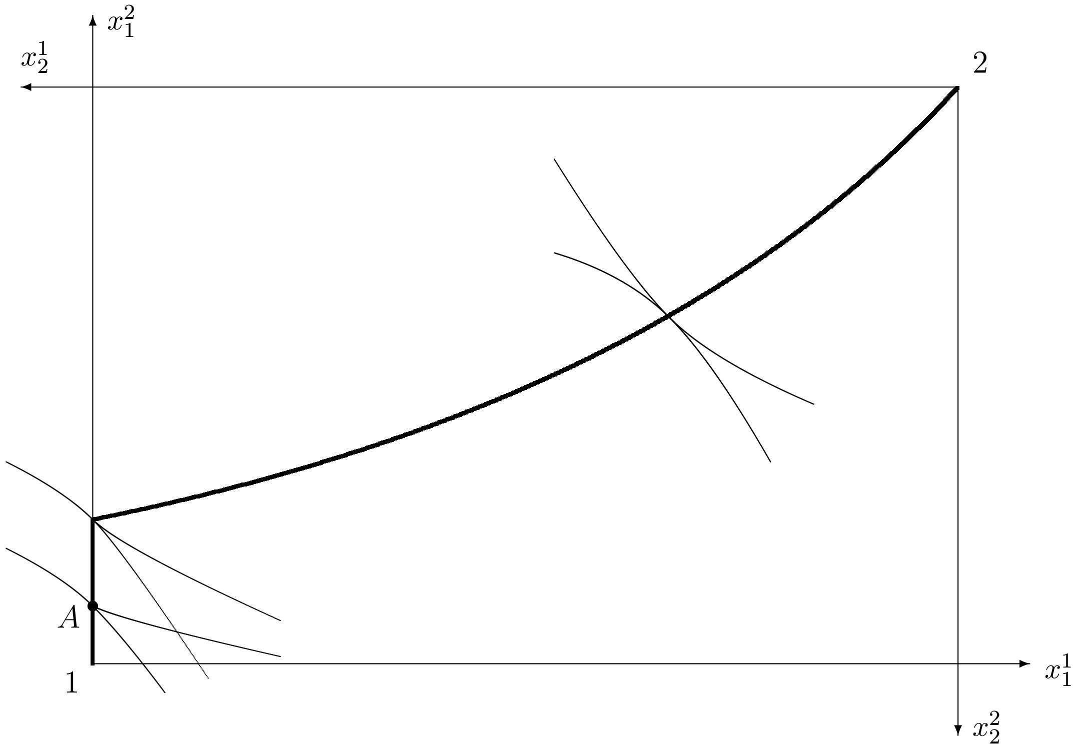


En conclusion, nous remarquerons qu'il doit s–rement exister un lien entre la notion d'équilibre concurrentiel et celle d'optimum de Pareto, puisque tous les deux ont en commun d'être caractérisés (entre autres choses) par la tangence des courbes d'indifférence des deux agents.

Avant de poursuivre, il est bon de remarquer qu'il faut se garder de généraliser ceci à des cas plus "tordus". Par exemple, la courbe des contrats dans l'exemple de la section 6.4.3, où les fonctions d'utilité sont linéaires, n'est pas donné par les points de tangence entre les courbes d'indifférence, pour la simple raison que de tels points n'existent pas. Dans cet exemple, la courbe des contrats est en fait constituée des côtés Ouest et Nord de la boîte d'Edgeworth. Lorsque les fonctions d'utilité sont différentiables, l'égalité des TMS ne définit bien la courbe des contrats que dans le cas d'optima "intérieurs" (c'est-à-dire lorsque les deux agents consomment un montant strictement positif des deux biens).

Il est toutefois possible que certains optima de Pareto se situent sur une frontière de la boîte d'Edgeworth. Dans ce cas, la propriété d'égalité des TMS n'est évidemment plus une condition d'optimalité, comme nous le constatons sur le graphique 6.19, où A est un optimum bien que le TMS des agents y soit différents.

FIG. 6.19: Optima de Pareto "sur les bords" de la boîte d'Edgeworth



Une condition pour éviter ce genre de cas de figure est que les courbes d'indifférence des agents ne touchent pas les axes, ce qui revient à dire, en termes plus techniques, que pour tout $a \in \mathbb{R}^2_{++}$, l'ensemble des x tel que $u_h(x) = u_h(a)$ est inclus dans $\mathbb{R}^2_{++}$.

6.5.3 Les théorèmes du bien-être : une première approche

Ce paragraphe est consacré à l'examen des liens entre équilibre et optimum de Pareto que nous soupçonnions dans le paragraphe précédent.

6.5.3.1 Le premier théorème du bien-être

Ce théorème, dont nous donnerons un énoncé précis dans le chapitre 8, dit que tout équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto.

A l'équilibre, tous les gains de l'échange sont épuisés ; il ne reste aucun échange qui soit mutuellement bénéfique. La concurrence aboutit donc à une situation dans laquelle n'existe aucun gaspillage. Ce théorème met ainsi en forme les idées d'A. Smith et de ses successeurs, telles que nous les avons, brièvement, exposées en introduction. En effet, il existe *a priori* de multiples manières d'arriver à une situation Pareto optimale (la plus directe étant qu'un planificateur omniscient alloue autoritairement des paniers de biens à chaque consommateur). Toutefois, nous venons d'en étudier une, à savoir l'échange sur des marchés en concurrence parfaite, particulièrement économe en information. Les agents individuels ne connaissent que leurs caractéristiques propres et le prix d'équilibre sur le marché, et ceci suffit pour arriver à une situation optimale. Les prix résument à eux seuls toute l'information dont ont besoin les consommateurs pour arriver à un équilibre et donc, par conséquent, à un optimum de Pareto.

Ce théorème généralise ce que nous avions vu en équilibre partiel. En effet, en équilibre partiel, le surplus global est maximum à l'équilibre concurrentiel du marché. Ici, c'est l'équilibre général, sur tous les marchés, de concurrence parfaite qui est efficace.

Graphiquement, ce théorème nous dit simplement que l'allocation d'équilibre est sur la courbe des contrats. Nous pouvons vérifier sur l'exemple du paragraphe 6.4.1 que l'équilibre calculé est bien un optimum :

$$TMS_1 = \frac{1/4}{3/4}\frac{x_1^2}{x_1^1} = \frac{1}{3}\frac{3/2}{1/2} = 1$$
$$TMS_2 = \frac{3/4}{1/4}\frac{x_2^2}{x_2^1} = 3\frac{1/2}{3/2} = 1$$

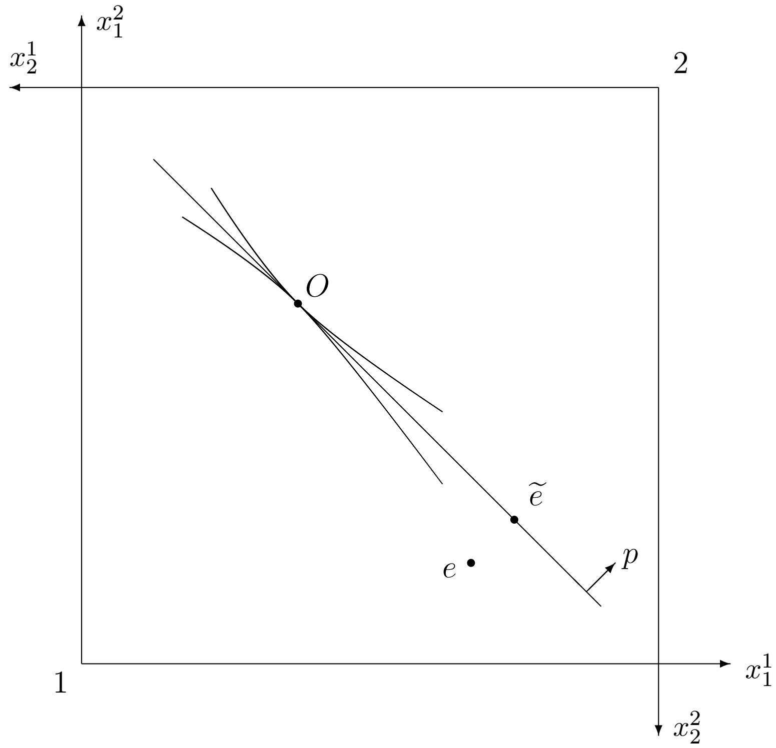
6.5.3.2 Le second théorème du bien-être

Nous nous posons ici la question inverse, à savoir "est-il possible d'obtenir n'importe quel optimum de Pareto par le libre jeu des marchés ?". En d'autres termes, étant donné un optimum de Pareto, est-il possible de trouver des prix tels que cette allocation soit une allocation d'équilibre associée à ces prix, pour une certaine répartition des dotations initiales ? Nous qualifierons cette opération de "décentralisation de l'optimum".

Le second théorème du bien-être, que nous étudierons plus en détail dans le chapitre 8, nous dit que tout optimum de Pareto peut être supporté comme équilibre concurrentiel par un système de prix, si les préférences sont convexes. Examinons pour l'instant le problème graphiquement (graphique 6.20).

Soit une allocation Pareto optimale O. Est-il possible que les agents atteignent cette allocation au travers d'un processus d'échange concurrentiel ? La réponse que donne le second théorème du bien-être est affirmative : en O les courbes d'indifférence sont tangentes. La pente de cette tangente va définir le système de prix d'équilibre concurrentiel. Il suffit alors, pour que les agents atteignent l'allocation d'équilibre O à ces prix, de distribuer les dotations initiales de manière à ce qu'elles se trouvent précisément au point O. En ce point, les agents ne désireront pas échangés et la situation correspond bien à un équilibre. Une redistribution moins radicale des ressources consisteraient à redistribuer les dotations de manière à ce qu'elles se trouvent sur la tangente des courbes d'indifférence au point O, par exemple en $\widetilde{e}$. En effet, si nous donnons aux

FIG. 6.20: Décentralisation d'un optimum de Pareto



agents les dotations $\widetilde{e}$ et que nous les laissons échanger aux prix définis par la pente de la tangente, alors ils aboutiront à l'allocation d'équilibre O, qui est l'optimum que nous souhaitions "décentraliser"[52].

La redistribution des dotations initiales est nécessaire à l'obtention de ce résultat. Celle-ci doit se faire au moyen de transferts forfaitaires, c'est-à-dire indépendants des décisions des agents. Il faut toutefois se demander si, en permettant la redistribution des dotations, nous ne vidons pas le théorème de toute signification : il suffirait de redistribuer les dotations de manière à se trouver directement au point O et les échanges observés seraient alors nuls.

Le graphique 6.21 montre que, même si les dotations sont redistribuées de manière à se trouver en O (qui est bien un optimum de Pareto), il se peut que cet optimum ne soit tout de même pas décentralisable : les agents ne voudront pas rester, étant donnés les prix en vigueur, au point O. Dans ce cas de figure en effet, le premier agent demanderait le point A, qui se situe sur la même droite budgétaire mais sur une courbe d'indifférence plus élevée que O. L'hypothèse du théorème qui n'est pas vérifiée ici est bien s–r la convexité des préférences. Celui-ci n'est donc pas trivial et nécessite un certain nombre d'hypothèses pour être vérifié. Nous reviendrons plus en détails sur les conditions de validité de ce théorème dans le chapitre 8.

Quelle interprétation donner à ce théorème ? Reprenons le graphique 6.20. Celui-ci nous dit que si l'économie se trouve initialement en e, mais qu'un planificateur veut, pour une raison (politique) quelconque, atteindre l'optimum O, alors le planificateur ou autorité centrale, doit redistribuer de manière forfaitaire les dotations initiales en O, et laisser ensuite les agents échanger aux prix définis par la pente de la tangente aux courbes d'indifférence en O[53]. Les prix ne doivent pas être utilisés à des fins redistributives. Ils doivent se contenter de refléter la rareté relative des biens, la redistribution des richesses devant s'effectuer indépendamment du système de marchés, au moyen de transferts forfaitaires.

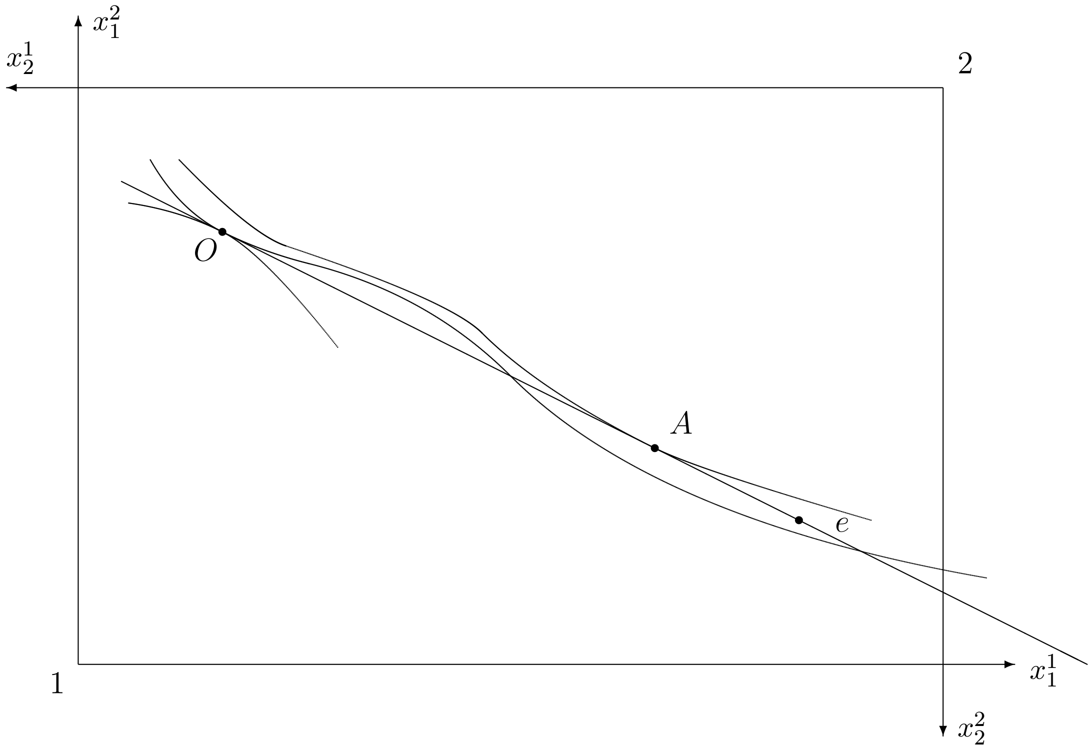
6.6 Conclusion

Ce chapitre constitue une introduction, dans un cadre d'équilibre général, aux thèmes que nous allons revoir par la suite, à savoir l'existence, l'unicité, et l'optimalité de l'équilibre. L'intuition géométrique donnée par la boîte d'Edgeworth permet de rendre un peu plus concret nombre de raisonnements formels que nous verrons dans les deux chapitres suivants. Si cette étude permet de mettre en évidence les principaux mécanismes économiques à l'œuvre dans une économie (certes restreinte pour l'instant au cadre statique), elle ne saurait toutefois constituer une démonstration formelle des résultats évoqués. C'est cependant en gardant en mémoire cette étude géométrique, qu'il faut maintenant aborder l'analyse formelle des principales propriétés énoncées ici.

[52] Ceci n'est pas vrai en toute rigueur, puisqu'il peut exister plusieurs équilibres associés aux dotations $\widetilde{e}$. En l'absence d'un mécanisme de sélection, nous ne pouvons pas affirmer que l'économie atteindra effectivement le point O plutôt qu'un autre équilibre. Ce problème ne se pose pas lorsque les dotations se situent précisément à l'optimum, au point O. Dans ce cas en effet, O est l'unique équilibre de l'économie.

[53] Comme nous l'avons déjà remarqué, les agents ne désirent plus échanger en ce point.

FIG. 6.21: Préférences non convexes et impossibilité de décentraliser l'optimum



Chapitre 7

Economie d'échange (II) : Existence, Unicité, Stabilité

7.1 Introduction

Nous entreprenons dans ce chapitre l'étude formelle de l'existence, unicité et stabilité de l'équilibre dans une économie d'échange pur, mais qui n'est plus limitée cette fois à deux biens et deux agents. L'analyse, nécessairement plus abstraite que celle du chapitre précédent s'appuie toutefois sur l'intuition graphique donnée dans ce dernier. Nous ne chercherons pas à présenter les arguments les plus généraux, ceux-ci nécessitant des techniques quelque peu ardues. Nous essaierons donc d'obtenir, dans ce chapitre comme dans le suivant, un équilibre entre la généralité des résultats et la sophistication des techniques utilisées pour les démontrer.

Le problème de l'existence d'un équilibre a été historiquement l'un des points les plus étudiés. Au delà de l'aspect purement technique, le problème économique est le suivant : l'interaction (selon un mode particulier) d'un grand nombre d'agents peut-elle conduire à une situation d'équilibre, c'est-à-dire une situation dans laquelle les actions des agents sont toutes compatibles entre elles ? A l'évidence le sujet n'est pas simple. L'un des points remarquables de la théorie de l'équilibre général est précisément de montrer que cette coordination des actions peut être obtenue, lorsque les agents sont égo‹stes et rationnels. Ainsi, les demandes d'une multitude d'agents, déterminées selon une logique de maximisation du bien-être individuel, seront rendues compatibles, et ce au moyen du seul système de prix.

Le résultat d'existence établi, il s'agit de savoir si un tel équilibre est unique. L'unicité de l'équilibre est requise pour que l'analyse possède un pouvoir prédictif. Autrement dit, toute théorie qui prévoit l'existence de plusieurs équilibres est nécessairement incomplète, puisqu'elle ne spécifie pas le mode de sélection de celui-ci. Malheureusement, nous allons établir que l'équilibre n'est unique que sous des hypothèses très fortes sur la demande agrégée, hypothèses qui ne découlent pas directement de la rationalité individuelle. Ainsi, la multiplicité des équilibres est la règle, l'unicité l'exception. Nous pourrons toutefois suggérer un argument permettant de montrer que les équilibres sont localement uniques (ou localement isolés).

Le problème de la stabilité de l'équilibre pose de nombreuses questions. Si le fonctionnement de l'économie à l'équilibre est maintenant bien maîtrisé, cela n'est pas le cas du fonctionnement de l'économie hors de l'équilibre. Nous présentons dans ce chapitre une manière d'aborder le problème, à l'aide du mécanisme dit du "tâtonnement walrasien", que nous avons déjà présenté dans le chapitre 5. Nous donnerons une condition pour que ce mécanisme de tâtonnement converge vers l'équilibre. Cette condition se trouve être la même que celle assurant l'unicité de l'équilibre.

7.2 Définitions, hypothèses

Nous considèrons dans ce chapitre et le suivant, une économie d'échange pur à C biens et H consommateurs. Chaque consommateur possède un vecteur de dotations initiales e_h. Les préférences de chaque consommateur sont représentées par une fonction d'utilité continue, strictement quasi-concave, strictement monotone, de manière à ce que leur fonction de demande $x_h(p)$ soit continue.

Définition : *Un équilibre concurrentiel est un vecteur de prix* $p^\star$ *et une allocation* $x^\star \in \mathbb{R}_+^{CH}$ *tels que :*

- *Etant donné* $p^\star$, $x_h^\star$ *est une solution au programme* $\max_{x_h} \ u_h(x_h)$ *sous la contrainte* $p^\star(x_h - e_h) = 0$ *quel que soit* h, *et*
- $\sum_{h=1}^{H} (x_h^\star - e_h) = 0$

Nous adoptons des notations semblables à celles des chapitres précédents : $z_h(p) = x_h(p) - e_h$ et $z(p) = \sum_h z_h(p)$. La loi de Walras s'écrit ainsi :

$$pz(p) = 0$$

et se démontre de la même manière que dans une économie à deux biens et deux agents comme celle étudiée au chapitre précédent. Rappelons que la loi de Walras est une identité et n'est pas uniquement valable à l'équilibre.

Enfin, l'homogénéité des fonctions de demande nous amène à normaliser le vecteur de prix, tout comme dans le chapitre précédent. Nous adopterons ici la normalisation suivante :

$$p \in S = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^C \mid \sum_{c=1}^{C} p^c = 1 \right\}$$

Cet ensemble est appelé le simplexe de dimension $C - 1$.

7.3 Existence

Avant d'énoncer et de démontrer un théorème d'existence, nous avons besoin d'un théorème de point fixe, qui est le pendant mathématique du raisonnement que nous menions en introduction au chapitre précédent, où nous avions vu que trouver un équilibre général revient à trouver un point fixe d'un certain processus.

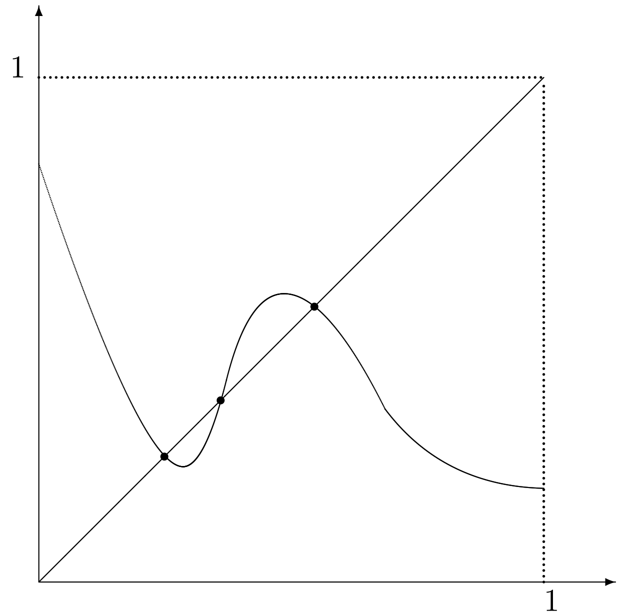
7.3.1 Un théorème de point fixe

Toutes (ou presque toutes) les démonstrations d'existence reposent sur l'utilisation d'un théorème de point fixe. Nous donnons ici le plus simple d'entre eux.

Théorème de Brouwer : *Soit* $f : E \to E$ *une fonction continue d'un ensemble compact, convexe dans lui même, alors il existe* $x \in E$ *tel que* $x = f(x)$.

Rappelons qu'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il est fermé et borné.

FIG. 7.1: La notion de point fixe



L'interprétation graphique se lit sur le diagramme 7.1. Nous choisissons ici $E = [0,1]$, qui est un ensemble fermé et borné, inclus dans $\mathbb{R}$, et donc compact. Il est par ailleurs convexe. Sur ce graphique, nous voyons qu'une fonction continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$, coupe toujours la droite à 45^o, qui est le lieu des points dont l'abscisse est égal à l'ordonnée, soit $x = f(x)$. Il est également évident que le point d'intersection n'a aucune raison d'être unique.

La continuité de la fonction est essentielle comme le montre le graphique 7.2.

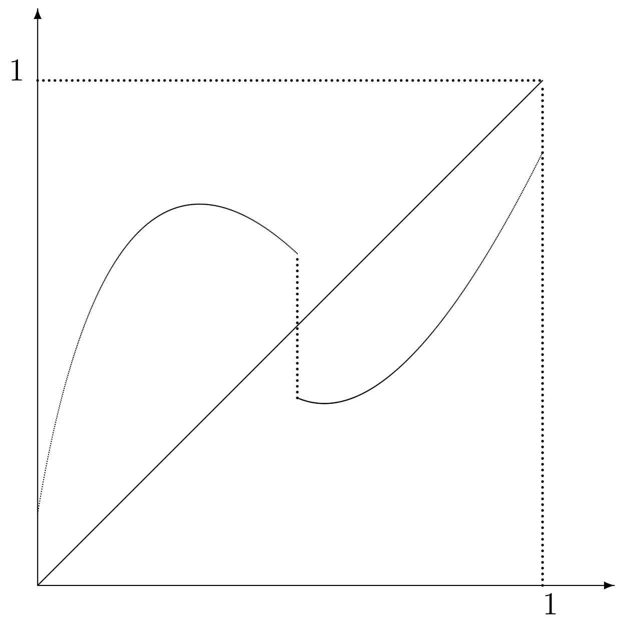
7.3.2 Un théorème d'existence

Nous donnons ici un théorème d'existence d'un vecteur de prix tel qu'à ce prix la demande excédentaire est négative ou nulle pour tous les biens. Nous montrons alors dans un second temps, que ceci implique, lorsque les préférences sont monotones, que la demande excédentaire est en fait nulle pour tous les biens.

Théorème : *Si $z : S \to \mathbb{R}^C$ est une fonction continue qui satisfait la loi de Walras ($pz(p) = 0$), alors il existe $p^\star \in S$ tel que $z(p^\star) \leq 0$*

Démonstration : Définissons pour commencer une fonction $g : S \to S$

FIG. 7.2: La continuité est nécessaire pour le théorème de Brouwer



par :

$$g^c(p) = \frac{p^c + \max(0, z^c(p))}{1 + \sum_c \max(0, z^c(p))} \quad c = 1, ..., C$$

et $g(p) = \big(g^1(p), ..., g^C(p)\big)$.

g est continue puisque les fonctions $z(.) = \sum_h z_h(.)$ et $\max(.,.)$ le sont. De plus $\sum_{c=1}^{C} g^c(p) = 1$, et $g^c(p) \geq 0$ et nous avons donc bien $g(p) \in S$. Le vecteur $g(p)$ peut donc être interprété comme un vecteur de prix. Cette fonction a de plus une interprétation économique que nous développerons dans le paragraphe 7.3.3.

Remarquons enfin que S est un ensemble convexe et compact. Ainsi, par le théorème de Brouwer, nous savons que la fonction g a un point fixe, *i.e.* il existe $p^\star$ tel que $p^\star = g(p^\star)$.

Nous voulons maintenant montrer que $z^c(p^\star) \leq 0$ pour tout c. $p^\star$ étant un point fixe de g, nous avons l'égalité suivante :

$$p^{c\star} = \frac{p^{c\star} + \max(0, z^c(p^\star))}{1 + \sum_c \max(0, z^c(p^\star))} \quad c = 1, ..., C$$

soit

$$p^{c\star} \sum_c \max(0, z^c(p^\star)) = \max(0, z^c(p^\star)) \quad c = 1, ..., C$$

En multipliant par $z^c(p^\star)$ nous obtenons :

$$p^{c\star} z^c(p^\star) \left[\sum_c \max(0, z^c(p^\star))\right] = z^c(p^\star) \max(0, z^c(p^\star)) \quad c = 1, ..., C$$

puis, en additionnant ces C équations :

$$\sum_c [p^{c\star} z^c(p^\star)] \left[\sum_c \max(0, z^c(p^\star))\right] = \sum_c z^c(p^\star) \max(0, z^c(p^\star))$$

Par la loi de Walras, nous savons que :

$$\sum_c [p^{c\star} z^c(p^\star)] = 0$$

et nous obtenons donc

$$\sum_c z^c(p^\star) \max(0, z^c(p^\star)) = 0$$

Ceci implique que $z^c(p^\star) \leq 0$ pour tout c. En effet, chaque terme de cette somme est supérieur ou égal à zéro puisqu'il est soit égal à 0, soit à $(z^c(p^\star))^2$. Pour que cette somme soit nulle, il faut donc que chaque terme soit égal à zéro, c'est-à-dire $z^c(p^\star) \max(0, z^c(p^\star)) = 0$ quel que soit c. Il faut donc que $z^c(p^\star) \leq 0$.

Nous venons ainsi de montrer qu'il existe un système de prix tel que l'excès de demande n'est positif sur aucun marché. Il est possible de montrer que l'excès de demande est en fait nul si la fonction $z(.)$ possède en plus la propriété que si $p^c = 0$ alors $z^c(p) > 0$. Ceci est le cas si les préférences des agents sont strictement monotones (u_h strictement croissante), puisque dans ce cas, si un bien était "libre" (son prix est nul) alors la demande pour ce bien est infinie, le consommateur n'étant jamais rassasié.

Théorème : *Si $z : S \rightarrow \mathbb{R}^C$ est une fonction continue qui satisfait la loi de Walras ($pz(p) = 0$), et telle que $p^c = 0$ implique $z^c(p) > 0$, alors il existe $p^\star \in S$ tel que $z(p^\star) = 0$*

Démonstration : Nous avons déjà démontré qu'il existe $p^\star$ tel que $z(p^\star) \leq 0$. Supposons maintenant que $z^c(p^\star) < 0$. Il faut alors que $p^{c\star} = 0$ car sinon la loi de Walras ne pourrait pas être satisfaite : en effet si nous avions $p^{c\star} > 0$ et $z^c(p^\star) < 0$, alors nous obtiendrions $p^\star z(p^\star) < 0$ puisque tous les termes de la somme sont négatifs ou nul, et qu'un des termes est strictement négatif.

Puisque $p^{c\star} = 0$, nous savons par l'hypothèse de monotonie des préférences que $z^c(p^\star) > 0$. Nous obtenons donc une contradiction, et il n'est pas possible que $z^c(p^\star) < 0$, et donc, $z(p^\star) = 0$.

7.3.3 Commentaires

On aura remarqué que l'idée de la démonstration du théorème, et en particulier la construction de la fonction g, suit l'idée du tâtonnement walrasien : le prix (relatif) des biens dont la demande excédentaire est positive est augmenté. Le prix d'équilibre est alors un point fixe de ce mécanisme. Plus précisément supposons que l'excès de demande est positif pour le bien c, *i.e.* $z^c(p) > 0$, et négatif pour le bien c', *i.e.* $z^{c'}(p) < 0$. Nous voulons montrer que dans ce cas, la fonction g conduit à augmenter le prix relatif du bien c par rapport à celui du bien c'. En effet, en supposant que $p \gg 0$, ce qui, rappelons-le, signifie que toutes les composantes du vecteur de prix sont positives, nous avons :

$$\frac{g^c(p)}{g^{c'}(p)} = \frac{p^c + \max(0, z^c(p))}{p^{c'} + \max(0, z^{c'}(p))} = \frac{p^c + z^c(p)}{p^{c'}} > \frac{p^c}{p^{c'}}$$

La démonstration suggère donc un moyen explicite de calculer le prix d'équilibre : partons d'un prix $p(0)$ quelconque et appliquons-lui l'application $g(.)$ pour obtenir un nouveau prix $p(1)$, auquel nous appliquons à nouveau la fonction $g(.)$, et ainsi de suite. Si ce procédé converge, il convergera vers un prix d'équilibre. Nous avons donc un moyen de trouver le prix d'équilibre d'une économie. Il convient cependant de se méfier de cette interprétation trop optimiste. Nous verrons en effet plus loin dans ce chapitre que le tâtonnement walrasien ne converge pas nécessairement.

Il faut également relever une petite "incohérence" dans l'énoncé du théorème, ou plutôt dans l'interprétation de z, comme étant une fonction de demande excédentaire. En effet, nous avons supposé que $z(.)$ est continue sur S tout entier. Cependant, il n'est pas raisonnable de penser que $z(.)$ est définie lorsqu'un prix (au moins) est égal à zéro, puisque dans ce cas, si les préférences sont strictement monotones, la demande pour ce bien explose et est infinie. Ce type de discontinuité, à la "frontière" de S, n'est pas de nature à remettre en cause le résultat d'existence. Il suffit de techniques un peu plus sophistiquées pour en venir à bout[54].

Enfin, se concentrer sur des fonctions de demande (ce qui, rappelons-le, renvoie à l'hypothèse de préférences strictement convexes) évite également le recours à des méthodes plus compliquées (notamment un théorème de point fixe sur des correspondances plutôt que des fonctions). Toutefois, ces difficultés techniques ne sont pas de nature à remettre en cause l'existence d'un équilibre (sous l'hypothèse de continuité des correspondances, elle-même conséquence de la continuité et de la convexité des préférences).

Nous avons présenté dans le chapitre précédent un exemple de non-existence de l'équilibre lorsque les dotations se trouvent sur la frontière de la boîte d'Edgeworth (graphique **??**). Nous pouvons nous demander pourquoi le théorème énoncé ici ne s'applique pas à ce cas de figure. En fait, il est assez facile de constater que la demande du premier consommateur n'est pas continue lorsque p^2 tend vers zéro. En effet, tant que p^2/p^1 est strictement positif, la demande du premier consommateur en bien 2 est toujours inférieure à e^2, tandis que pour $p^2/p^1 = 0$, sa demande pour ce bien est infinie. Le problème provient bien de cette discontinuité de la demande pour un prix nul, discontinuité due au fait que les dotations en bien 1 du premier consommateur sont nulles. Supposer que les dotations sont intérieures suffit à évacuer ce problème.

[54] En particulier, il faut travailler avec des "correspondances". Le lecteur intéressé pourra se référer à A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995.

Pour conclure cette discussion sur l'existence de l'équilibre, il convient de faire le lien entre les hypothèses faites sur la fonction de demande agrégée dans les théorèmes ci-dessus et l'hypothèse de rationalité individuelle, qui impose certaines restrictions sur les demandes individuelles.

Les seules hypothèses dont nous ayons besoins pour établir l'existence d'un équilibre sont, la loi de Walras, la continuité des préférences et l'homogénéité des fonctions de demande. Plus précisément, ces hypothèses permettent d'établir l'existence d'un système de prix tel que la demande nette pour chaque bien est négative ou nulle. Or, ces hypothèses correspondent aux seules propriétés qu'il est possible de déduire, au niveau agrégé, de l'hypothèse de rationalité individuelle, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2 (théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu, page 51). Une hypothèse suffisante pour démontrer que les demandes nettes sont en fait nulles est celle de stricte monotonie des préférences.

Une hypothèse supplémentaire dont nous nous sommes servi implicitement est la stricte convexité des préférences, qui permet d'obtenir des fonctions de demande. Il est aisé d'abandonner cette hypothèse (au prix d'une complication technique) en faveur de celle, plus générale, de convexité des préférences. Toutefois, une non-convexité dans les préférences pourrait induire des discontinuités de nature à remettre en cause l'existence de l'équilibre. Cependant, comme nous le développerons dans le prochain paragraphe, même si les fonctions de demande individuelles ne sont pas continues, il est possible de restaurer l'existence de l'équilibre s'il existe suffisamment d'agents dans l'économie.

7.3.4 Non-convexité des préférences et non-existence de l'équilibre

Nous présentons maintenant un exemple de non-existence d'un équilibre due à une non-convexité des préférences, impliquant une discontinuité de la demande excédentaire, celle-ci n'étant d'ailleurs plus une fonction.

Soit une économie à deux biens et deux agents, que nous pouvons donc représenter dans une boîte d'Edgeworth (graphique 7.3).

Sur ce graphique, nous pouvons constater que, du fait de la non-convexité des préférences du premier consommateur, celui-ci est indifférent, au prix $p^\star$ représenté, entre deux paniers de biens, $\widetilde{x}_1$ et $\overline{x}_1$. Le second consommateur quant à lui a des préférences convexes, et le panier qu'il choisit au prix $p^\star$ en vigueur, est $x_2^\star$. Au prix $p^\star$, la demande globale peut donc prendre deux valeurs : $\widetilde{x}_1 + x_2^\star$ ou $\overline{x}_1 + x_2^\star$. Cette demande agrégée pour le bien 1 est représentée sur le graphique 7.4.

Au prix $p^\star$, la demande totale pour le bien 1 est soit trop élevée ($\widetilde{x}_1^1 + x_2^{\star 1}$) soit trop faible ($\overline{x}_1^1 + x_2^{\star 1}$). La non-convexité des préférences du premier consommateur induit un "saut" dans la fonction de demande agrégée, et il n'existe pas d'équilibre.

Toutefois, ce problème de non-existence peut être résolu en considérant un nombre plus élevé d'agents. Supposons qu'il y ait maintenant dans l'économie deux consommateurs analogues au premier consommateur de notre exemple et deux consommateurs analogues au second. Nous avons donc répliqué, à l'identique, l'économie. Il se trouve que le prix $p^\star$ est maintenant un prix d'équilibre dans cette économie.

Les consommateurs ayant des préférences non-convexes sont indifférents, au prix $p^\star$, entre $\widetilde{x}$ et $\overline{x}$ Nous pouvons donc supposer que l'un va choisir le panier $\widetilde{x}$ tandis que

FIG. 7.3: Non-existence de l'équilibre et non-convexité des préférences

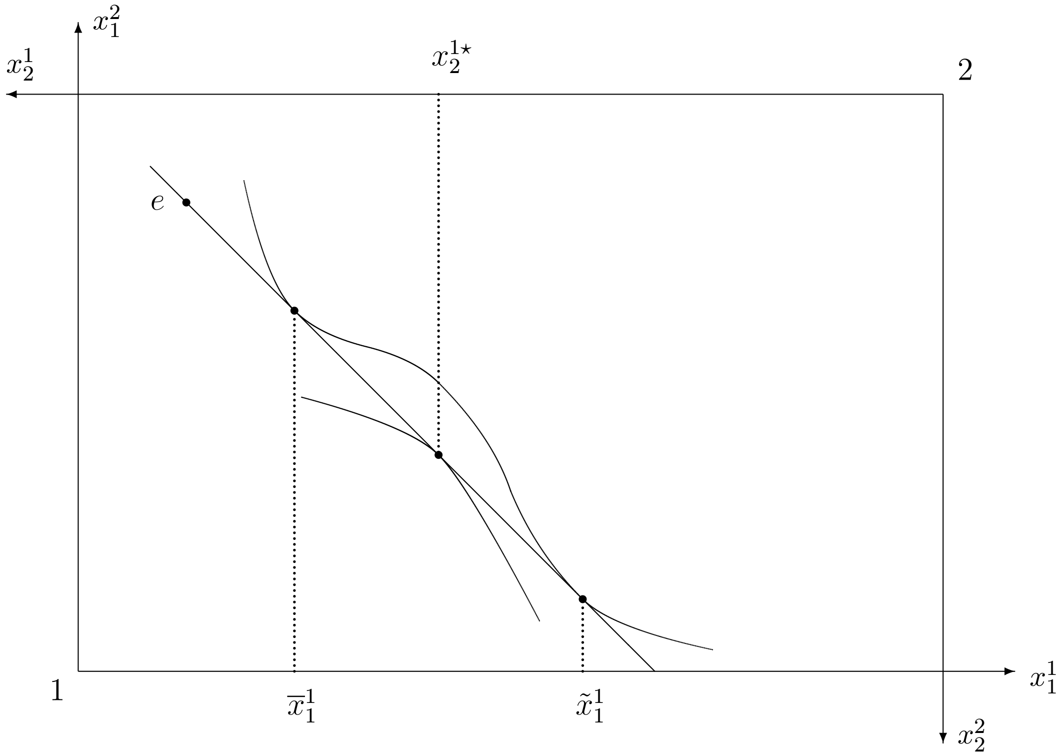
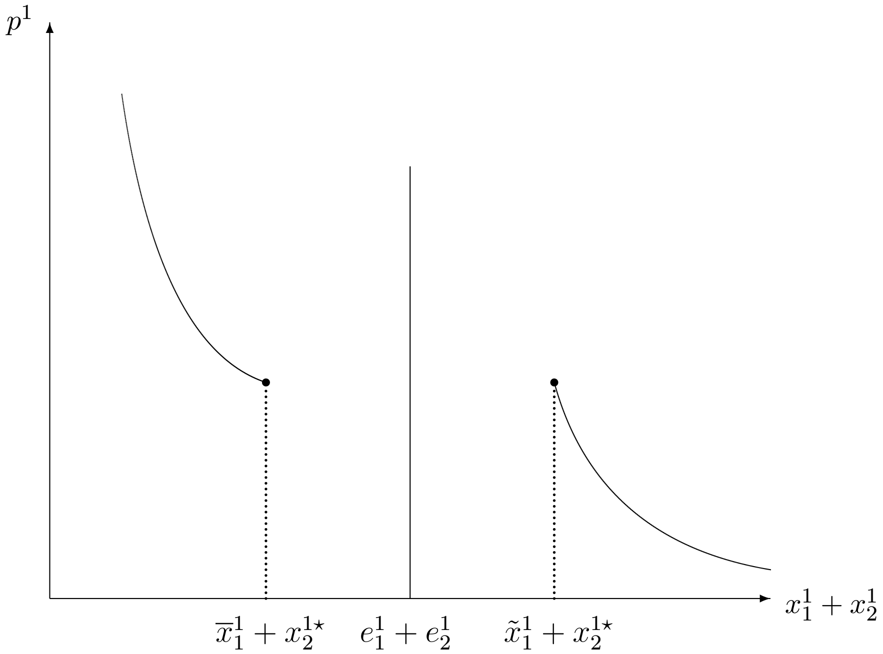


FIG. 7.4: Non-convexité des préférences et discontinuité de la demande



l'autre choisira le panier $\overline{x}$. Supposons en outre que, comme cela est représenté sur le graphique 7.4, l'offre de bien 1 (c'est-à-dire la somme des dotations initiales) se situe précisément au milieu de $\widetilde{x}_1^1 + x_2^{\star 1}$ et de $\overline{x}_1^1 + x_2^{\star 1}$.

Dans ce cas de figure, nous obtenons l'équation suivante :

$$\widetilde{x}_1^1 + \overline{x}_1^1 + 2x_2^{\star 1} = 2(e_1^1 + e_2^1)$$

c'est-à-dire que le prix $p^\star$ est un prix d'équilibre.

Cet argument est en fait valable quelle que soit la place de l'offre entre les différentes demandes possibles au prix $p^\star$ (nous avons supposé qu'elle se trouvait à mi-chemin afin de simplifier l'argument), la seule incidence de cette place concernant le nombre de réplications de l'économie nécessaire à l'obtention d'un équilibre.

Illustrons cette discussion par un exemple numérique. Normalisons les prix de telle sorte que $p^1 + p^2 = 1$. Les dotations de chaque agent sont de une unité de chaque bien. La premier consommateur possède une fonction d'utilité de type Cobb-Douglas, $u_1(x_1^1, x_1^2) = (x_1^1)^{1/2}(x_1^2)^{1/2}$, qui donne les fonctions de demande suivantes :

$$x_1^1(p) = \frac{p^1 + p^2}{2p^1} \qquad \text{et} \qquad x_1^2(p) = \frac{p^1 + p^2 1}{2p^2}$$

Le second consommateur a pour sa part des fonctions de demande données par les formules suivantes :

$$x_2^1(p) = \begin{cases} \frac{3(p^1+p^2)}{4p^1} & \text{si} \quad p^1 \leq p^2 \\ \frac{p^1+p^2}{4p^1} & \text{si} \quad p^1 \geq p^2 \end{cases} \qquad \text{et} \quad x_2^2(p) = \begin{cases} \frac{p^1+p^2}{4p^2} & \text{si} \quad p^1 \leq p^2 \\ \frac{3}{4p^2} & \text{si} \quad p^1 \geq p^2 \end{cases}$$

Nous pouvons vérifier que la demande est homogène de degré zéro par rapport aux prix et que la contrainte budgétaire est saturée dans tous les cas de figure. De plus, la demande explose lorsque le prix d'un bien tend vers 0.

La loi de Walras étant également satisfaite, trouver un prix d'équilibre revient à trouver une solution à :

$$x_1^1(p) + x_2^1(p) = 2$$

c'est-à-dire une solution au système suivant (puisque, du fait de la normalisation, l'inégalité $p^1 \leq p^2$ peut se réécrire $p^1 \leq 1/2$) :

$$\begin{cases} \frac{1}{2p^1} + \frac{3}{4p^1} & = & 2 \text{ si } \; p^1 \leq 1/2 \\ \frac{1}{2p^1} + \frac{1}{4p^1} & = & 2 \text{ si } \; p^1 \geq 1/2 \end{cases} \iff \begin{cases} p^1 & = & \frac{5}{8} \text{ si } \; p^1 \leq 1/2 \\ p^1 & = & \frac{1}{8} \text{ si } \; p^1 \geq 1/2 \end{cases}$$

système qui n'a évidemment pas de solution. Il n'existe pas d'équilibre concurentiel dans cette économie.

Supposons maintenant qu'il existe deux agents de "type" 1, c'est-à-dire ayant toutes les caractéristiques du premier consommateur, et deux agents de "type" 2. Vérifions que dans cette économie, il existe un équilibre concurrentiel et que les prix d'équilibre sont $p^1 = p^2 = 1/2$.

A ces prix, la demande des deux agents de type 1 vaut 1, soit une demande totale égale à 2. Aux prix en vigueur, à savoir $p^1 = p^2 = 1/2$, les consommateurs de type 2 sont indifférents entre demander $x_2^1(p) = 1/2$ et $x_2^1(p) = 3/2$. Supposons que le premier consommateur de type 2 demande 1/2, tandis que le second consommateur de type 2 demande 3/2. Tous les deux sont bien sur leur "fonction" de demande, c'est-à-dire qu'ils maximisent bien leur utilité. Vérifions pour terminer que la demande est égale à l'offre. L'offre est égale à quatre unités de chaque bien (il y a maintenant quatre agents dans l'économie, chacun détenant une unité de chaque bien). La demande de bien 1 s'élève à $1 + 1 + 1/2 + 3/2$, c'est-à-dire 4 : l'allocation et le prix proposés constituent bien un équilibre concurrentiel.

Nous avons établi un principe relativement général, à savoir que s'il existe suffisamment d'individus dans l'économie (ce qui correspond bien à la notion de concurrence), alors un équilibre existe, même si les préférences individuelles ne sont pas convexes.

Enfin, une autre source de non-convexités est l'indivisibilité des biens. Si nous prenons le marché de l'automobile par exemple, il est peu raisonnable de garder l'hypothèse de parfaite divisibilité faite jusqu'à présent. Le résultat d'existence que nous avons démontré n'est donc plus valable. Toutefois, en adoptant une approche similaire à celle développée pour le cas de préférences non-convexes, il est possible de montrer qu'un équilibre existe dans un modèle où le nombre d'agents est suffisamment élevé. Ainsi, dans ce cadre aussi, l'hypothèse d'un grand nombre d'agents permet de recouvrir l'existence de l'équilibre . Nous verrons ultérieurement que ce principe ne s'applique pas toujours aussi bien aux économies avec production lorsque les non-convexités proviennent des techniques de production.

7.4 Unicité globale et unicité locale

Nous avons vu dans le cas de l'équilibre partiel, ainsi que dans le chapitre consacré à l'étude de l'équilibre général dans le cadre de la boîte d'Edgeworth, qu'il est possible d'obtenir des équilibres multiples. Cette section traite du problème de l'unicité de l'équilibre général. Nous y établissons que l'unicité globale de l'équilibre ne peut être obtenue qu'au moyen d'hypothèses très restrictives.

Nous supposerons tout au long de cette section que $z(.)$ est une fonction différentiable.

7.4.1 Unicité globale de l'équilibre

Nous donnons ici deux conditions impliquant l'unicité de l'équilibre. Il est bien entendu que nous parlons ici de l'unicité du vecteur de prix, à une normalisation près. En d'autres termes, nous cherchons à trouver des conditions telles que, étant donnée une normalisation (par exemple $\sum_c p^c = 1$), le vecteur de prix d'équilibre est unique. Les conditions que nous donnons sont des hypothèses directement faites sur la fonction de demande agrégée. En ce sens, elles ne portent pas sur les données de base de l'économie, à savoir les préférences et les dotations des agents.

7.4.1.1 L'axiome faible des préférences révélées

Une première condition assurant l'unicité de l'équilibre est que la fonction de demande excédentaire agrégée satisfasse l'axiome faible des préférences révélées.

Rappelons qu'au niveau de la demande individuelle, cet axiome s'écrit :

$$\forall p,\ \forall p',\ px_h(p') \leq px_h(p) \Longrightarrow p = p' \text{ ou } p'x_h(p) > p'x_h(p')$$

et est toujours vérifié pour un consommateur rationnel. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, il n'y a cependant pas de raison qu'il soit vrai au niveau agrégé. L'addition de H fonctions de demande satisfaisant toutes l'axiome faible des préférences révélées ne donne pas nécessairement une fonction agrégée satisfaisant cet axiome. Cependant, si jamais c'était le cas, alors l'équilibre serait unique.

Rappelons que si la fonction de demande agrégée satisfait l'axiome faible des préférences révélées, alors une certaine loi de la demande est vérifiée. Plus précisément, la demande pour un bien dont le prix a augmenté diminue si on considère des variations de prix compensées par une variation appropriée du revenu.

Formalisons ceci : la fonction de demande agrégée excédentaire satisfait l'axiome faible des préférences révélées si :

$$\forall p,\ \forall p',\ pz(p') \leq pz(p) \Longrightarrow p = p' \text{ ou } p'z(p) > p'z(p')$$

Puisque $z(p) = \sum_h (x_h(p) - e_h)$, nous pouvons réécrire cet axiome :

$$\forall p,\ \forall p',\ p\sum_h x_h(p') \leq p\sum_h x_h(p) \Longrightarrow p = p' \text{ ou } p'\sum_h x_h(p) > p'\sum_h x_h(p')$$

Le théorème suivant établit que cette condition est suffisante pour obtenir un équilibre unique.

Théorème : *Si la fonction de demande excédentaire agrégée vérifie l'axiome faible des préférences révélées, alors l'équilibre (s'il existe) est unique.*

Démonstration : Soient p et p' deux équilibres. Par la loi de Walras, nous savons que $pz(p) = p'z(p') = 0$. L'axiome faible des préférences révélées implique donc que :

$$pz(p') \leq 0 \Longrightarrow p = p' \text{ ou } \; p'z(p) > 0$$

Maintenant, p et p' étant deux vecteurs de prix d'équilibre, nous obtenons $z(p) = z(p') = 0$ et l'implication ci-dessus se réécrit :

$$0 \leq 0 \Longrightarrow p = p' \text{ ou } \; 0 > 0$$

Nous obtenons donc $p = p'$: les deux équilibres sont en fait les mêmes.

Nous avons établi dans la démonstration du thèoréme précédent que l'axiome faible des préférences révélées peut se réécrire, lorsqu'il est appliqué à des fonctions de demande excédentaire et que $p^\star$ est un prix d'équilibre :

$$0 \leq 0 \Longrightarrow p = p^\star \text{ ou } p^\star z(p) > 0$$

soit, $p = p^\star$ ou $p^\star z(p) > 0$, puisque la condition $0 \leq 0$ est bien sûr toujours vérifiée. Cette remarque nous sera utile par la suite, lors de l'étude de la stabilité de l'équilibre.

Enfin, nous pouvons déduire du théorème précédent que dans un modèle à agent représentatif, l'équilibre est unique. En effet, dans un tel modèle, la fonction de demande excédentaire provient de la maximisation d'une fonction d'utilité, et donc satisfait l'axiome faible des préférences révélées. Ceci n'est évidemment pas surprenant puisque, dans le modèle développé, l'existence d'un agent représentatif signifie que le seul équilibre possible est le point de dotations initiales.

7.4.1.2 L'hypothèse de substituabilité brute

La seconde hypothèse assurant l'unicité globale de l'équilibre porte sur le degré de substitution entre les biens.

Définition : *Deux biens c et c' sont des substituts bruts au prix p si :*

$$\frac{\partial z^c(p)}{\partial p^{c'}} > 0 \quad et \quad \frac{\partial z^{c'}(p)}{\partial p^c} > 0 \qquad c \neq c'$$

Deux biens sont des substituts bruts si une augmentation du prix de l'un entraîne une augmentation de la demande excédentaire de l'autre et *vice versa*.

Théorème : *Supposons les préférences des agents strictement monotones. Si tous les biens sont des substituts bruts pour tous les prix, et si $p^\star$ est un vecteur de prix d'équilibre, alors c'est l'unique prix d'équilibre.*

Démonstration : Normalisons $p^\star$ de telle manière que $\sum_c p^{c\star} = 1$, et supposons qu'il existe un autre vecteur de prix d'équilibre $\overline{p}$ tel que $\sum_c \overline{p}^c = 1$.

Puisque les préférences sont monotones, $p^\star \gg 0$. Définissons alors $m = \max_c \frac{\overline{p}^c}{p^{c\star}}$. Clairement, $m \neq 0$, et donc, par homogénéité des fonctions de demande et du fait que $p^\star$ est un prix d'équilibre, nous avons : $z(mp^\star) = z(p^\star) = 0$.

Nous savons que pour un bien, par exemple (pour simplifier les notations) le bien 1, l'égalité suivante est vérifiée : $mp^{1\star} = \overline{p}^1$ et que $mp^{c\star} \geq \overline{p}^c$ quel que soit c (avec une inégalité stricte pour au moins un bien). Le passage du vecteur $\left(mp^{1\star}, mp^{2\star}, \ldots, mp^{C\star}\right)$ au vecteur $\left(mp^{1\star}, \overline{p}^2, \ldots, \overline{p}^C\right) = \overline{p}$ nécessite donc de baisser tous les prix sauf celui du premier bien.

Diminuons donc, pour tous les biens sauf le premier, chaque prix $mp^{c\star}$ jusqu'à $\overline{p}^c$. Le prix de chaque bien, autre que le premier, diminuant, la demande pour le bien 1 doit également diminuer, du fait de l'hypothèse de substituabilité brute. En conséquence, $z^1(\overline{p}) < 0$, et le prix $\overline{p}$ ne peut pas être un prix d'équilibre.

L'hypothèse de substituabilité brute est assez contraignante. Nous montrons ici qu'elle est vérifiée lorsque les agents ont des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas.

Supposons donc que le consommateur h a des préférences représentées par une fonction d'utilité s'écrivant :

$$u_h(x_h) = \Pi_c \left(x_h^c\right)^{\alpha_h^c}$$

avec $0 < \alpha_h^c < 1$ et $\sum_c \alpha_h^c = 1$ pour tout h, où Π est l'opérateur "produit".

Nous avons déjà établi que pour ce type de préférences la fonction de demande du consommateur pour le bien 1 est donnée par :

$$x_h^1(p) = \alpha_h^1 \frac{pe_h}{p^1}$$

ce qui donne :

$$x_h^1(p) - e_h^1 = \alpha_h^1 \sum_{c \neq 1} \frac{p^c e_h^c}{p^1} \; - \; (1 - \alpha_h^1) e_h^1$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que $\frac{\partial z_h^1(p)}{\partial p^c} > 0$ pour tout $c \neq 1$ et tout p. En additionnant les demandes excédentaires individuelles, nous obtenons alors une fonction de demande excédentaire possédant cette même propriété. L'argument peut évidemment être répété pour tout bien autre que le bien 1, et ceci démontre qu'une économie dans laquelle les agents auraient des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas satisfait la propriété de substituabilité brute. L'équilibre y est donc unique.

7.4.1.3 Un exemple de multiplicité d'équilibres

Illustrons sur un exemple la source potentielle d'équilibres multiples. Considèrons une économie (deux biens et deux agents) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{cases} u_1(x_1^1, x_1^2) = \Big(\alpha(x_1^1)^\rho + (x_1^2)^\rho\Big)^{1/\rho} & e_1 = (1,0) \\ u_2(x_2^1, x_2^2) = \Big((x_2^1)^\rho + \alpha(x_2^2)^\rho\Big)^{1/\rho} & e_2 = (0,1) \end{cases}$$

Ces fonctions d'utilité font partie de la classe de fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante, dite *CES* (pour *constant elasticity of substitution*) que nous avons déjà rencontrées dans le chapitre 2. Rappelons qu'elles admettent comme cas particuliers (lorsque $\rho = 0$) les fonctions de type Cobb-Douglas.

Posons $q = p^1/p^2$ le prix relatif des deux biens dans cette économie. Un calcul simple mais un peu long (transformer les fonctions d'utilité en les composant avec la fonction *Log* simplifie quelque peu les calculs) permet de trouver les fonctions de demande, qui s'écrivent :

$$x_1^1(q) = \left[1 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} q^{\frac{\rho}{1-\rho}}\right]^{-1} \quad \text{et} \quad x_2^1(q) = \left[q + \alpha^{\frac{1}{1-\rho}} q^{\frac{1}{1-\rho}}\right]^{-1}$$

Si nous écrivons maintenant l'équation d'équilibre sur le marché du bien 1, nous obtenons (en réarrangeant) :

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} q^{\frac{1}{1-\rho}} + q^{\frac{1+\rho}{1-\rho}} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\rho}} q^{\frac{\rho}{1-\rho}} - 1 = 0$$

Trouver le prix q d'équilibre de cette économie revient à résoudre l'équation ci-dessus, ce qui est *a priori* assez compliqué. Posons $\rho = -2$. L'équation d'équilibre est alors une équation au troisième degré que nous pouvons écrire :

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} k^3 - k^2 + k - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} = 0$$

où $k = q^{1/3}$. Les racines de cette équation au troisième degré sont les prix d'équilibre. Il est évident que seules les racines réelles positives nous intéressent, mais il est quand même possible que cette équation en admette plusieurs. En effet, si $\alpha = 30$, il existe trois solutions réelles positives, à l'équation ci-dessus (1 est solution évidente), qui nous donne finalement les trois prix relatifs d'équilibre $q = 0.376$, $q' = 1$, et $q'' = 2.66$.

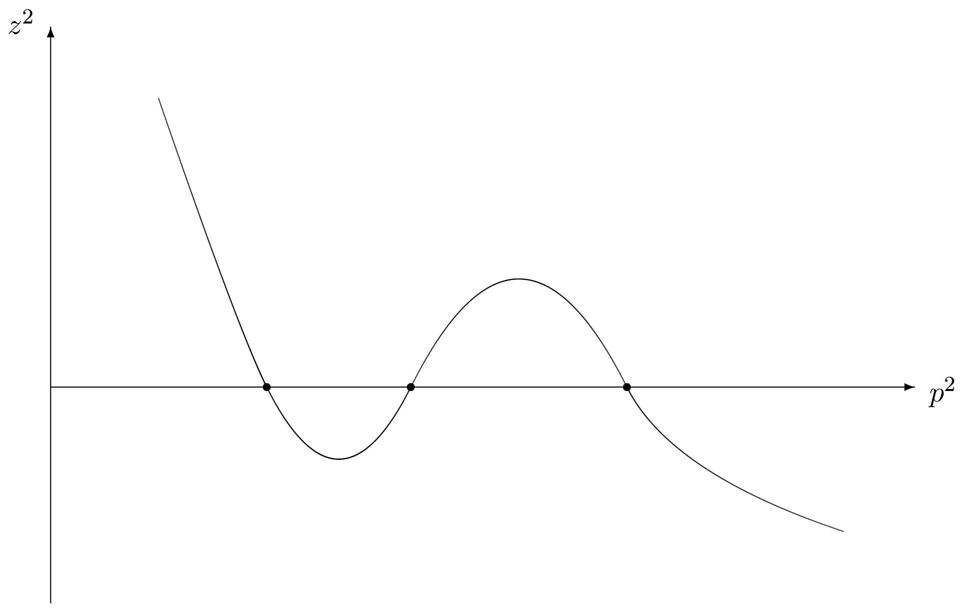
Cet exemple aura donc montré qu'en général, l'équation ou le système d'équations qu'il faut résoudre pour trouver le ou les prix d'équilibre n'a aucune raison de n'admettre qu'une seule solution (comme c'est le cas pour les fonctions d'utilité Cobb-Douglas). S'il existe plusieurs solutions réelles positives, il existe plusieurs équilibres.

7.4.2 Unicité locale

Les deux théorèmes démontrés dans le paragraphe précédent nous disent qu'il faut imposer des conditions très fortes sur la fonction de demande agrégée pour obtenir l'unicité globale de l'équilibre. Ceci nous conduit à nous demander s'il n'existe pas de résultat concernant une forme plus faible d'unicité, à savoir l'unicité locale. Un équilibre est localement unique s'il existe un voisinage de cet équilibre dans lequel il n'existe pas d'autres équilibres.

Rappelons qu'une économie est définie par les préférences et les dotations des agents la peuplant. Nous allons maintenant montrer que pour presque toutes les économies, les équilibres de celles-ci sont localement uniques. Nous ne ferons pas la démonstration formelle de ce résultat ici, car il nécessite l'utilisation de méthodes mathématiques assez avancées. En revanche, il est aisé de comprendre le principe de cette démonstration dans le cadre d'une économie à deux biens. Choisissons le premier bien comme numéraire, c'est-à-dire que nous fixons $p^1 = 1$. Traçons alors (graphique 7.5) l'excès de demande pour le second bien en fonction de son propre prix.

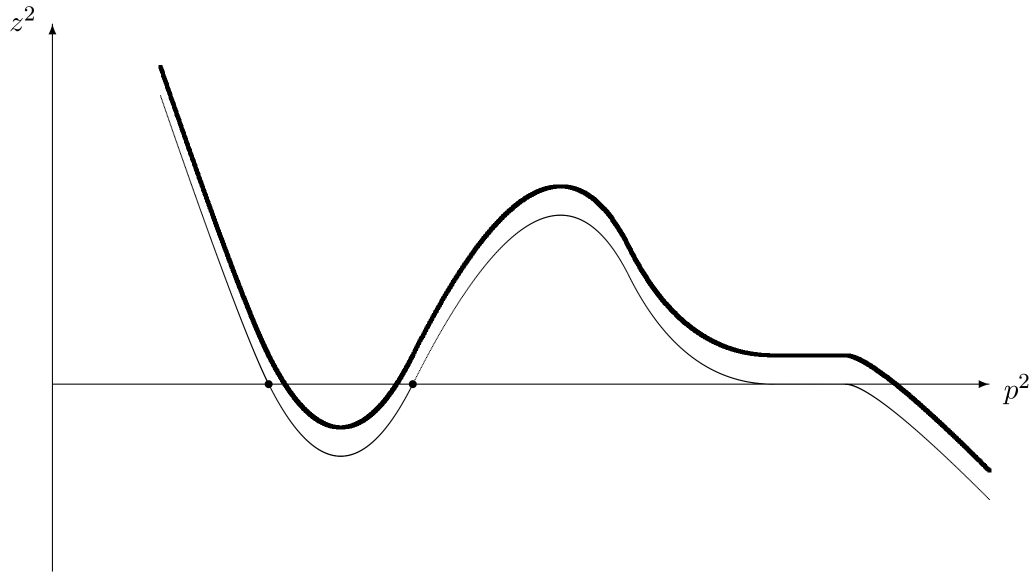
FIG. 7.5: Une multiplicité d'équilibres



Un équilibre correspond à un prix $p^{2\star}$ tel que $z^2\left(1, p^{2\star}\right) = 0$. En effet, la loi de Walras nous permet d'établir que si le marché du bien 2 est à l'équilibre, alors celui du bien 1 l'est aussi. Supposons que $z^2(.)$ soit une fonction continue, et que $z^2(1, p^2) < 0$ lorsque p^2 est élevé, alors que $z^2(1, p^2) > 0$ lorsque p^2 est proche de zéro.

Le graphique 7.5 représente une économie dans laquelle existent trois équilibres, par conséquent tous localement uniques. Il est cependant possible de tracer une fonction de demande excédentaire agrégée qui aurait une infinité d'équilibres, comme c'est le cas sur le graphique 7.6. Toutefois, ce cas est dégénéré, comme nous allons le montrer maintenant.

FIG. 7.6: Un équilibre est en général localement unique



Auparavant, observons que pour l'instant, lorsque nous avons écrit la fonction de demande excédentaire, nous avons écrit $z^2(p)$. Il était alors entendu que seuls les prix étaient considérés comme des variables. Supposons maintenant que les dotations initiales puissent également être modifiées. La fonction de demande excédentaire s'écrit $z^2(p\,;e)$, et la fonction représentée sur le graphique 7.6 correspond à un vecteur de dotations initiales donné, par exemple $\widetilde{e}$. De même que la fonction z^2 est continue par rapport aux prix, il est possible de démontrer qu'elle est en général continue par rapport aux dotations initiales : lorsque les dotations des agents sont légèrement modifiées, leur demande ne change pas radicalement.

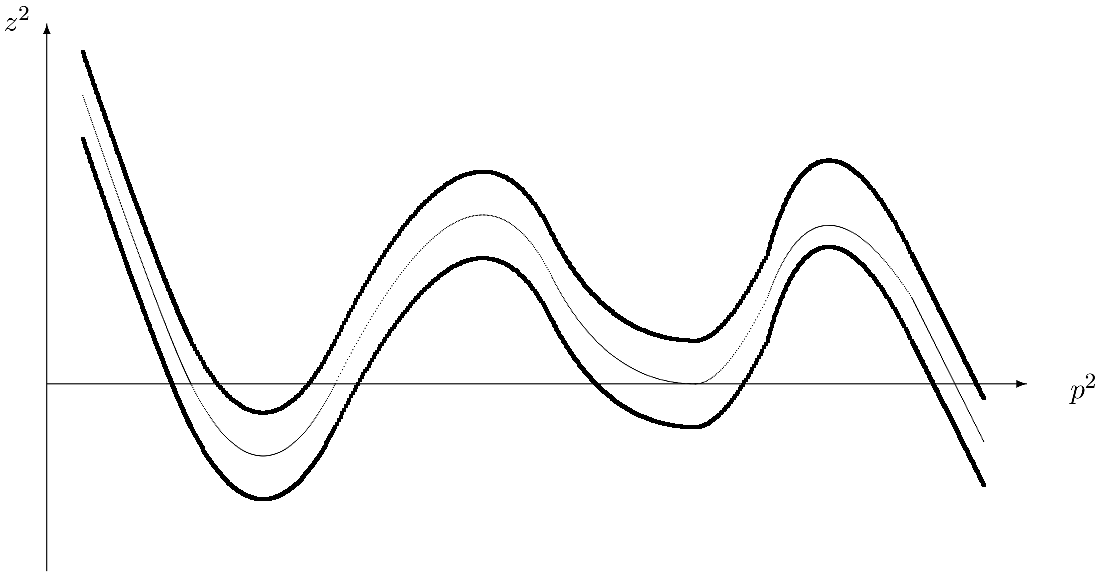
Imaginons donc de modifier un tant soit peu les dotations, de $\widetilde{e}$ en $\overline{e}$. La fonction de demande excédentaire dans cette nouvelle économie s'écrit $z^2(.\,;\overline{e})$ et est représentée en gras sur le graphique 7.6. Cette courbe ne coupe plus l'axe horizontal qu'un nombre fini de fois (en l'occurrence 3 fois).

La conclusion est ainsi que si, cas extraordinaire, il existait un continuum d'équilibres dans une économie donnée, alors il suffirait de perturber un peu les dotations initiales des agents pour se retrouver dans une économie dont les équilibres sont localement uniques. C'est en ce sens que pour presque toutes les économies, les équilibres concurrentiels sont localement uniques.

Enfin, et de manière un peu accessoire, le même argument permet d'établir que le nombre d'équilibre est en général impair, comme le représente le graphique 7.7.

Ce résultat permet de montrer l'existence d'un équilibre selon une approche différente de celle empruntée dans la section précédente. En effet, 0 étant un nombre pair, le cas de zéro équilibre ne peut se produire qu'exceptionnellement.

FIG. 7.7: Il existe en général un nombre impair d'équilibres



7.5 Stabilité de l'équilibre

Nous nous interrogeons ici sur la stabilité de l'équilibre lorsque la dynamique imposée est celle dite du tâtonnement walrasien. Cette règle est une généralisation de celle étudiée en équilibre partiel, à savoir augmenter le prix en cas d'excès de demande et, à l'inverse, le diminuer en cas d'excès d'offre. Avant de formaliser cette règle, il est important de comprendre que cette dynamique ne s'effectue pas en "temps réel". En particulier, les échanges ne sont effectués qu'une fois un prix d'équilibre trouvé. Il ne s'agit donc pas d'un cheminement de l'économie vers l'équilibre, selon lequel l'économie à chaque date serait en "déséquilibre" (la demande et l'offre ne seraient pas compatibles). Un tel processus nécessiterait l'imposition de règles de fonctionnement très différentes, et notamment l'introduction d'un schéma de rationnement en cas d'inégalité entre l'offre et la demande.

Supposons que le commissaire priseur ajuste les prix selon la règle suivante :

$$\dot{p}^c = G^c\left(z^c(p)\right) \quad \text{pour tout} \quad c$$

où $G^c(.)$ est une fonction préservant le signe de son argument, c'est-à-dire $G^c(x) > 0$ si $x > 0$ et $G^c(x) < 0$ si $x < 0$, et la notation $\dot{p}$ représente la dérivée du prix par rapport au temps.

Cette règle impose bien d'augmenter le prix d'un bien si l'excès de demande sur le marché pour ce bien est positif et de le diminuer sinon.

Est-il possible de déduire des propriétés de stabilité de ce système dynamique ? Afin de simplifier l'analyse nous nous concentrerons sur une fonction G^c particulière, la fonction identité. Nous nous intéressons donc à la règle $\dot{p} = z^c(p)$.

Par ailleurs, nous savons que pour tout p, $pz(p) = 0$. Ceci va nous permettre de déduire une propriété de notre système dynamique. Pour cela calculons $\frac{d}{dt}\left(\sum_c (p^c)^2(t)\right)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\sum_c (p^c)^2(t)\right) &= \sum_c 2p^c(t)\dot{p}^c(t) \\
&= \sum_c 2p^c(t)z^c(p(t)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nous venons donc d'établir que $\left(\sum_c (p^c)^2(t)\right)$ reste constant le long de la trajectoire des prix. Adoptons alors la normalisation, inhabituelle mais néanmoins admissible, $\left(\sum_c (p^c)^2(t)\right) = 1$. La trajectoire des prix est contrainte à rester sur la surface de la sphère unitaire (tout en restant dans l'espace $\mathbb{R}^C_+$). De plus, $\dot{p}^c > 0$ lorsque $p^c = 0$ puisque dans ce cas, $z^c(p) > 0$. Ces deux propriétés sont les seules que nous puissions déduire de ce système dynamique sans imposer de forme particulière aux fonctions de demande excédentaire (rappelons que toute fonction continue, homogène, vérifiant la loi de Walras peut être une fonction de demande excédentaire). Il est donc peu probable que l'algorithme du tâtonnement walrasien converge systématiquement.

Graphiquement, nous pouvons résumer cette dynamique dans le cas de deux biens par les graphiques 7.8 et 7.9. Les flèches représentent le sens de variation des prix (nous n'avons indiqué sur les graphiques que la dynamique de p^1, mais il est clair que p^2 s'ajuste simultanément). Sur le graphique 7.8, l'équilibre, supposé unique, est globalement stable : d'où que nous partions, la dynamique du tâtonnement walrasien nous conduira à l'équilibre.

Sur le graphique 7.9 sont représentés trois équilibres, dont deux sont localement stables (si nous partons d'un voisinage de l'équilibre, l'économie y revient) et un (l'équilibre E_2) est instable. Si l'économie n'est pas à l'équilibre E_2, le tâtonnement walrasien ne l'y conduira jamais.

La situation est plus complexe en dimension trois ; dans ce cas, il est en effet possible que l'algorithme ne converge pas vers un équilibre, mais au contraire vers un cycle limite. Dans ce cas, la méthode adoptée par le commissaire priseur ne lui permet pas de trouver un équilibre.

L'absence de restrictions sur la forme de la demande excédentaire globale ne permet donc pas de dégager de conclusions générales quant à la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre concurrentiel.

Il est cependant un cas où l'équilibre est stable. C'est la cas, déjà rencontré lors de l'étude de l'unicité de l'équilibre, où la fonction de demande agrégée satisfait l'axiome faible des préférences révélées. Dans ce cas, qui inclut celui où il existe un agent réprésentatif, l'équilibre est unique et stable.

Théorème : *Soit une économie dont la fonction de demande excédentaire agrégée $z(p)$ est contin–ment différentiable. Si la fonction de demande excédentaire agrégée vérifie l'axiome faible des préférences révélées, alors l'équilibre est unique et globlament stable.*

FIG. 7.8: Un équilibre unique et stable

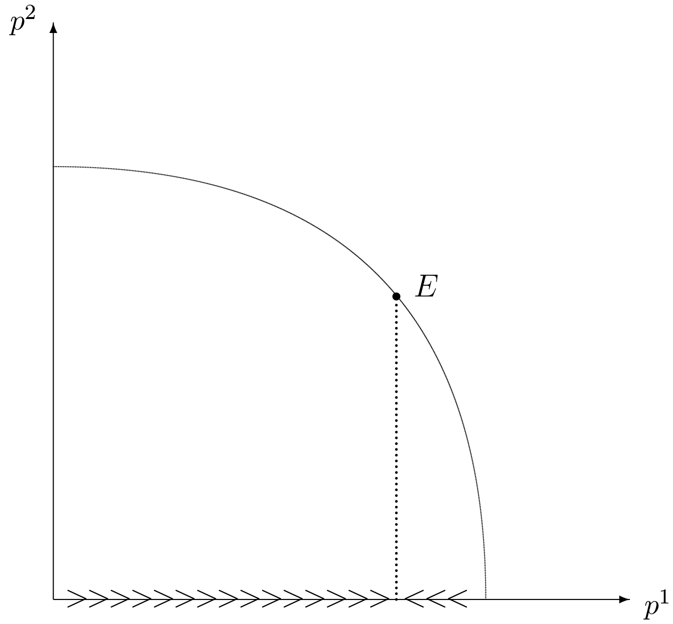
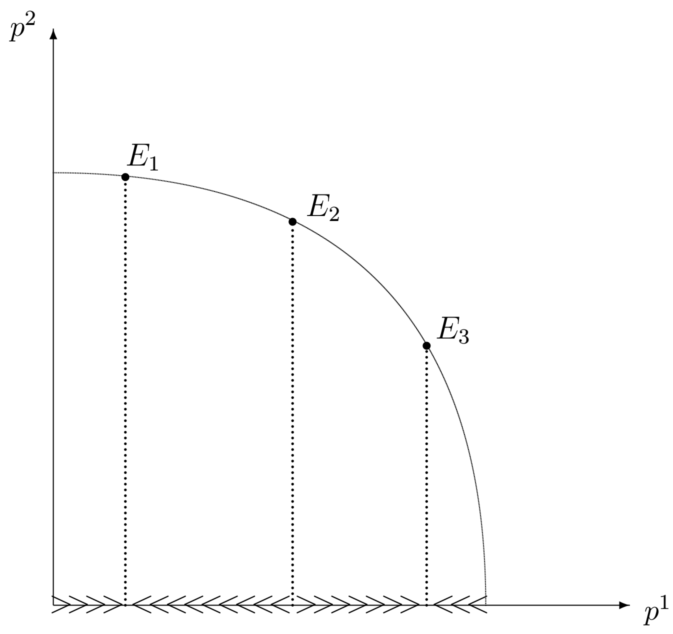


FIG. 7.9: Trois équilibres dont un instable et deux localement stables



Démonstration : Nous avons déjà établi que sous l'hypothèse que la fonction de demande excédentaire agrégée vérifie l'axiome faible des préférences révélées, l'équilibre $p^\star = \left(p^{1\star}, p^{2\star}, \ldots, p^{C\star}\right)$ est unique.

Considérons maintenant le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{p}^1(t) & = & z^1\left(p^1(t), p^2(t), \ldots, p^C(t)\right) \\ \dot{p}^2(t) & = & z^2\left(p^1(t), p^2(t), \ldots, p^C(t)\right) \\ & \vdots & \\ \dot{p}^C(t) & = & z^C\left(p^1(t), p^2(t), \ldots, p^C(t)\right) \end{array}\right.$$

avec une condition initiale quelconque $p(0)$.

Montrons que la distance entre $p(t)$ et $p^\star$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini, *i.e.* que :

$$L(p(t)) = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{C}\left(p^c(t) - p^{c\star}\right)^2 \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty$$

Calculons $\frac{d}{dt}L(p(t))$:

$$\frac{d}{dt}L(p(t)) = \sum_{c=1}^{C}\left(p^c(t) - p^{c\star}\right)\frac{d}{dt}p^c(t)$$

$p(t)$ étant une solution du système ci-dessus, nous avons :

$$\begin{array}{lll} \frac{d}{dt}L(p(t)) & = & \sum_{c=1}^{C}\left(p^c(t) - p^{c\star}\right)z^c(p(t)) \\ & = & -p^\star z(p(t)) \quad \text{par la loi de Walras} \end{array}$$

Maintenant, $z(p)$ vérifie l'axiome faible des préférences révélées, qui, rappelons-le, prend la forme suivante lorsque $p^\star$ est un prix d'équilibre (voir page **??**) : $p^\star z(p) > 0$ ou $p = p^\star$.

Ici, $p(t)$ étant différent de $p^\star$, l'axiome faible des préférences révélées nous permet d'établir que $p^\star z^c(p(t)) > 0$ et donc :

$$\frac{d}{dt}L(p(t)) < 0$$

Cette distance diminue donc lorsque t augmente. Ainsi, étant donné que $\frac{d}{dt}L(p(t)) < 0$ et $L(p(t)) \geq 0$, il existe une suite (sans perte de généralité la suite elle-même) telle que $\frac{d}{dt}L(p(t)) \to 0$.

La suite $\Big(p(t)\Big)_t$ est bornée (car $L(p(t))$ est décroissante) et il existe une sous-suite (sans perte de généralité la suite elle-même) qui converge vers une limite $\overline{p}$.

Finalement, puisque $\frac{d}{dt}L(p(t)) = -p^\star z(p(t))$ nous obtenons, lorsque t tend vers l'infini :

$$0 = p^\star z(\overline{p})$$

Or l'axiome faible des préférences révélées implique que $p^\star z(\overline{p}) > 0$ si $p^\star \neq \overline{p}$. Ainsi, ceci nous permet de conclure que $\overline{p} = p^\star$. En conclusion, quel que soit le vecteur de prix $p(0)$, si nous lui appliquons la dynamique définie ci-dessus et si la fonction de demande nette agrégée vérifie l'axiome faible des préférences révélées, le prix converge vers l'équilibre unique de l'économie.

L'axiome faible des préférences révélées –qui est au niveau individuel une caractérisation minimale de la rationalité des agents, mais qui n'a pas de raison d'être valable au niveau agrégé–, permet donc de démontrer à la fois l'unicité et la stabilité de l'équilibre. En fait, ceci est vrai de manière plus générale : les conditions permettant d'établir l'unicité globale de l'équilibre permettent également d'établir que celui-ci est globalement stable (en particulier, l'hypothèse de substitution brute est également suffisante pour démontrer la stabilité[55]).

7.6 Conclusion

Résumons succintement les leçons qu'il faut tirer de ce chapitre. Nous avons établi qu'un équilibre concurrentiel existe, dans une économie d'échanges, sous des hypothèses relativement faibles (en particulier, nous avons vu comment il était possible de surmonter d'éventuelles difficultés liées à des préférences non convexes). Nous nous sommes alors interrogés sur l'unicité de l'équilibre, et avons obtenu une réponse plutôt négative : l'équilibre n'est unique que sous certaines hypothèses très fortes sur la demande agrégée. Une forme plus faible d'unicité, l'unicité locale, est toutefois vérifée par presque toutes les économies. Enfin, nous avons montré que la stabilité de l'équilibre, lorsque la dynamique "fictive" qu'on lui applique est celle du tâtonnement walrasien n'est assurée que sous une hypothèse également assez forte.

[55] Voir A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995.

Chapitre 8

Economie d'échange (III) : Les théorèmes du bien-être

8.1 Introduction

Nous cherchons dans ce chapitre à généraliser les deux théorèmes du bien-être rencontrés dans le chapitre 6. Le premier théorème, qui indique que tout équilibre est un optimum, se démontre à l'aide d'un nombre minimal d'hypothèses (la seule hypothèse nécessaire étant en fait la monotonie des préférences). Ainsi, l'efficacité de l'équilibre de concurrence de parfaite, lorsqu'il existe, est une propriété assez générale (nous qualifierons cette affirmation dans les chapitres suivants). Le second théorème du bien-être, qui énonce que toute allocation d'équilibre peut être décentralisée au moyen d'un système de prix et de transferts forfaitaires est pour sa part plus difficile à démontrer et nécessite la convexité des préférences des agents. Sa signification est également plus difficile à saisir mais est d'une grande importance dans une perspective normative.

Après avoir établi ces deux théorèmes fondamentaux de la théorie de l'équilibre général, nous nous attacherons à caractériser les optima de Pareto, ce qui permettra une interprétation précise de la notion de prix.

8.2 Optimum de Pareto

Nous définissons ici la notion d'optimum de Pareto, dans une économie à H consommateurs et C biens. Commençons par la notion d'allocation réalisable.

Définition : *Une allocation* $(x_1, \ldots, x_H)$ *est réalisable si* $x_h \geq 0$ *pour tout* h, *et* $\sum_h x_h = \sum_h e_h$.

Une allocation réalisable correspond donc à une répartition de l'ensemble des dotations initiales entre les agents de l'économie.

L'optimalité au sens de Pareto peut être définie de deux manières, qui sont équivalentes lorsque les préférences sont strictement monotones.

Définition 1 : *Une allocation réalisable* x *est un optimum de Pareto s'il n'existe pas d'autre allocation réalisable* x' *telle que chaque agent préfère strictement l'allocation* x' *à l'allocation* x.

Définition 2 : *Une allocation réalisable* x *est un optimum de Pareto s'il n'existe pas d'autre allocation réalisable* x' *telle que chaque agent préfère l'allocation* x' *à l'allocation* x *et un agent au moins la préfère strictement.*

Ces deux définitions sont en fait équivalentes si les fonctions d'utilité des consommateurs sont continues et strictement croissantes. En effet, un optimum au sens de la définition 2 est évidemment un optimum au sens de la définition 1. Supposons maintenant qu'une allocation x ne soit pas un optimum au sens de la définition 2. Retirons un peu d'un bien à l'agent qui est strictement mieux en x' (par continuité, si nous lui retirons suffisamment peu, il préfèrera toujours le panier $x'_h - \varepsilon$ à x_h) et redistribuons-le uniformément à tous les autres agents. Ces derniers, qui étaient au moins indifférents entre x_h et x'_h, préfèrent strictement la nouvelle allocation (après redistribution de ε) puisque leur fonction d'utilité est strictement croissante. L'allocation x n'est donc pas un optimum au sens de la définition 1. En prenant la contraposée, nous obtenons qu'un optimum au sens de la définition 1 est un optimum au sens de la définition 2.

Rappelons ici que la notion d'optimum de Pareto est une notion assez faible d'optimalité, ne permettant pas de comparer toutes les allocations entre elles. De plus, elle ne comporte aucun élément de justice ou d'équité.

8.3 Le premier théorème du bien-être

Nous démontrons maintenant le premier théorème du bien-être, qui constitue l'un des fondements du libéralisme économique.

Théorème : *Supposons u_h croissante pour tout h. Si (p, x) est un équilibre concurrentiel, alors x est un optimum de Pareto.*

> **Démonstration** : Supposons que x ne soit pas un optimum de Pareto, au quel cas il existe une allocation réalisable x' telle que $u_h(x'_h) \geq u_h(x_h)$ pour tout h avec une inégalité stricte pour au moins un h. Ceci implique que $px'_h \geq pe_h$ pour tout h, avec une inégalité stricte pour au moins un h. En effet, si $px'_h \leq pe_h$, x_h ne peut être une solution au problème de maximisation du ménage, qui préfèrerait alors le panier x'_h. En sommant ces H inégalités (dont au moins une stricte), nous obtenons $p\sum_h x'_h > p\sum_h e_h$. Maintenant, puisque x' est une allocation réalisable, $\sum_h x'_h = \sum_h e_h$, et donc $p\sum_h x'_h = p\sum_h e_h$. Au total, nous obtenons $p\sum_h e_h > p\sum_h e_h$, ce qui constitue une contradiction. L'allocation x est donc Pareto optimale.

Ce théorème appelle quelques remarques.

- Il exprime le fait que la concurrence conduit à une situation optimale au sens de Pareto, et donc qu'il n'y a aucun gaspillage de ressources à l'équilibre. Ce dernier dépend cependant de la répartition initiale des dotations et peut donc engendrer de fortes inégalités entre les individus. Cet aspect d'équité n'est pas pris en compte dans la notion d'optimalité au sens de Pareto.
- Il est remarquable que seul un nombre restreint de signaux (les prix) assure la coordination des actions des agents. Les agents observent uniquement les prix, et sur la base de ceux-ci, parviennent à une situation optimale. Cette économie de moyens pour arriver à une allocation optimale a souvent été mise en avant pour arguer de la supériorité d'une économie décentralisée (et concurrentielle) sur une économie dont le fonctionnement serait beaucoup plus centralisé. Toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre **??**, le mode d'organisation des marchés de la théorie est hautement centralisé puisque, implicitement, tous les échanges se font sur un seul et même marché gigantesque.

- Il semble qu'un nombre minimum d'hypothèses soit nécessaire pour démontrer ce résultat (il suffit qu'à l'équilibre, les agents soient sur leur contrainte budgétaire, ce qui est une conséquence de la monotonie des préférences). Cependant, ce théorème n'aurait que peu de sens si un équilibre n'existait pas. Les hypothèses nécessaires à l'existence d'un équilibre doivent donc également être prises en compte. Dans le même ordre d'idée, il faut souligner que ce théorème ne s'applique qu'à un équilibre concurrentiel tel que nous l'avons défini. C'est donc uniquement si l'économie est en situation de concurrence parfaite, que l'information est également parfaite, qu'il n'existe aucun bien public ou externalité, etc...que ce théorème s'applique. Nous verrons dans le chapitre **??** qu'en présence d'externalités par exemple, l'optimalité de l'équilibre concurrentiel n'est plus assurée. Nous verrons également plus loin dans cet ouvrage (chapitre **??**) que l'absence de certains marchés (on parle alors de marchés incomplets) invalide ce théorème.
- Enfin, nous avons fait implicitement l'hypothèse qu'il existait un nombre fini de biens et d'agents dans l'énoncé de ce théorème. Il n'est en effet pas nécessairement vrai dans le cas d'une infinité de biens ou d'agents. Cette remarque technique a une certaine importance : le théorème n'est pas toujours vrai dans une économie dont l'horizon est infini, comportant un nombre infini d'agents, comme par exemple une économie à générations imbriquées. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre **??**.

8.4 Le second théorème du bien-être

La question que nous nous posons ici est de savoir s'il est possible d'utiliser un système de marchés concurrentiels afin de décentraliser une allocation Pareto optimale quelconque. Ce théorème constitue donc la réciproque du premier théorème du bien-être, en ce sens qu'il nous dit que tout optimum de Pareto peut être obtenu comme équilibre concurrentiel, éventuellement après certains transferts forfaitaires entre les agents.

8.4.1 Un théorème de séparation

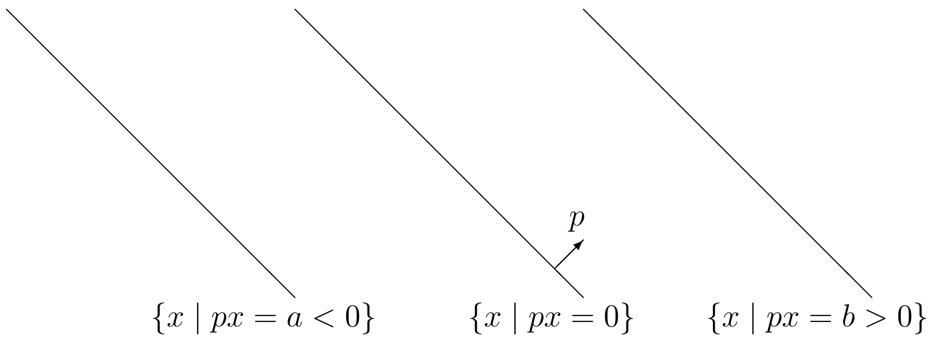
Afin de démontrer le second théorème du bien-être, nous avons besoin d'un théorème, dit théorème de séparation.

Théorème : *Soit C un ensemble convexe inclus dans $\mathbb{R}^n$ et $x \notin C$. Alors, il existe $p \in \mathbb{R}^n, p \neq 0$ tel que pour tout $z \in C$, $pz \geq px$.*

Pour mieux comprendre ce théorème, illustrons-le graphiquement. Soit p un élément de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des x tels que le produit scalaire de p et de x soit nul est donné par la droite orthogonale au vecteur p (passant par le point d'origine), comme cela est représenté sur le graphique 8.1.

Sur ce graphique nous représentons aussi deux autres droites. L'une est l'ensemble des x tels que $px = a$, avec a un scalaire négatif ; l'autre est l'ensemble des x tels que $px = b$, avec b scalaire positif. Ces deux ensembles sont des droites parallèles à la droite d'équation $px = 0$. Nous voyons ainsi que la droite $px = 0$ partage le plan en deux : d'un côté les vecteurs qui, lorsqu'on prend leur produit scalaire avec p donne un

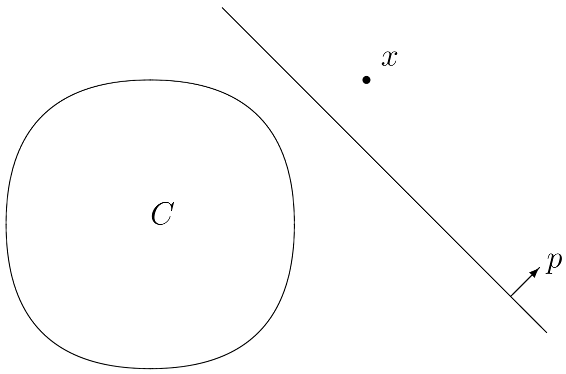
FIG. 8.1: La droite $px = 0$ sépare le plan en deux



résultat négatif, et de l'autre côté ceux qui donnent un résultat positif. La droite $px = 0$ sépare le plan en deux "demi-plans", celui au-dessus de la droite et celui en-dessous..

Venons-en maintenant au théorème lui-même. Il nous dit que si l'ensemble C est convexe et x n'appartient pas à C, il est possible de séparer l'espace en deux de manière à ce que l'ensemble C soit d'un côté de cette séparation et le point x de l'autre côté. Ceci est illustré par le graphique 8.2.

FIG. 8.2: Séparation d'un ensemble convexe et d'un point

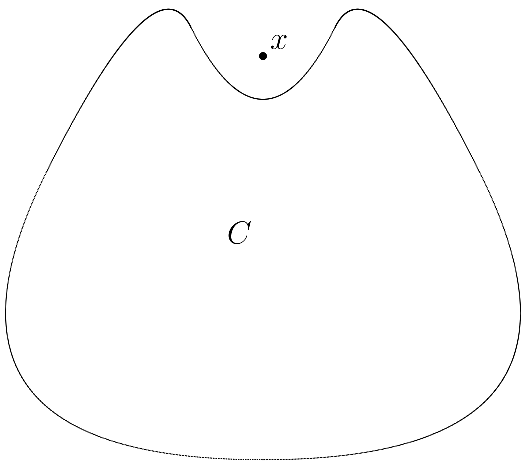


Le graphique 8.3 pour sa part illustre le rôle joué par la convexité de l'ensemble C, qui est nécessaire à l'obtention de ce résultat. En effet, dans ce cas de figure, il n'est pas possible de séparer (par une "droite") l'ensemble C et le point x.

8.4.2 Le second théorème du bien-être

Nous donnons ici deux versions du second théorème du bien-être. Les interprétations sont reportées au paragraphe suivant.

FIG. 8.3: La séparation n'est pas possible lorsque l'ensemble n'est pas convexe



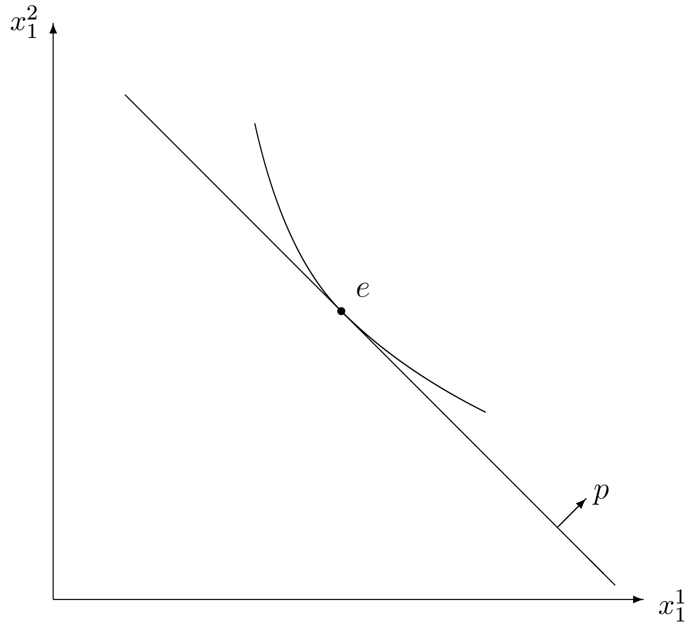
Théorème : *Soit $x^\star$ un optimum de Pareto avec $x_h^\star \gg 0$ pour tout h*[56]*. Supposons que les fonctions d'utilité des agents sont quasi-concaves, continues et strictement croissantes. Alors, $x^\star$ est une allocation d'équilibre de l'économie dont les dotations initiales sont $e_h = x_h^\star$.*

Avant de démontrer ce théorème, essayons d'en avoir une intuition graphique. Pour cela, plaçons-nous dans un cadre simplifié à l'extrême : il n'existe qu'un seul consommateur et deux biens. La situation Pareto optimale est bien évidemment celle dans laquelle le consommateur consomme l'intégralité des deux biens. Cette situation peut-elle être obtenue comme un équilibre ? Dans le cadre très particulier de cet exemple (il n'existe qu'un seul consommateur), il est possible de reformuler cette question : est-il possible de trouver un système de prix tel que, à ces prix, le consommateur demande exactement ses dotations initiales ? La réponse est positive si les courbes d'indifférence du consommateur sont convexes, ce qui, rappelons-le, est une conséquence directe de la convexité de ses préférences. Graphiquement, nous voyons qu'il est possible de faire passer par le point e une droite d'équation $px = pe$, qui sépare le plan en deux (graphique 8.4). D'un côté les vecteurs x tels que $px \leq pe$, de l'autre ceux tels que $px > pe$. L'ensemble des paniers strictement préférés à e se situe tout entier dans cette partie du plan. Le vecteur p est le vecteur de prix qui permet de "décentraliser" l'optimum de Pareto. Si le consommateur fait face à ces prix, il demande précisément e.

L'idée de la démonstration est donc de trouver un vecteur p qui permette de séparer le point e, optimum de Pareto, de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid u(x) > u(e)\}$, c'est-à-dire l'ensemble des points strictement préférés à e. Cet ensemble est convexe si les préférences sont convexes, c'est-à-dire si u est quasi-concave (voir les chapitres 2 et 16), et

[56]Rappelons que $x \gg 0$ signifie que toutes les composantes de x sont strictement positives.

FIG. 8.4: Un premier exemple du second théorème du bien-être



e n'y appartient pas. Nous pouvons donc appliquer notre théorème de séparation, ce qui nous fournit notre système de prix.

Après avoir donné l'idée de la démonstration et de l'utilisation du théorème de séparation, nous démontrons maintenant le second théorème du bien être.

Démonstration : Soit P_h l'ensemble des paniers de biens strictement préférés par le consommateur h à $x_h^\star$: $P_h = \left\{x_h \in \mathrm{I\!R}_+^C \,|\, u_h(x_h) > u_h(x_h^\star)\right\}$. Cet ensemble est convexe du fait de la quasi-concavité de u_h. En effet, soient x et x' deux vecteurs appartenant à P_h. Par définition de la quasi-concavité, $u_h(\lambda x + (1-\lambda)x') \geq \min(u_h(x), u_h(x'))$ pour tout $\lambda \in [0,1]$. Or $\min(u_h(x), u_h(x')) > u_h(x_h^\star)$ et donc $u_h(\lambda x + (1-\lambda)x') > u_h(x_h^\star)$, *i.e.*, $(\lambda x + (1-\lambda)x') \in P_h$, ce qui démontre la convexité de P_h.

Considérons mainteant l'ensemble P des paniers agrégés qui peuvent être redistribués aux agents de telle manière que chacun d'entre eux ait une utilité strictement supérieure à $u_h(x_h^\star)$:

$$P = \sum_h P_h \equiv \left\{x \in \mathrm{I\!R}_+^C \,|\, x = x_1 + \cdots + x_H,\ x_h \in P_h\ \forall\, h = 1, \ldots, H\right\}$$

La somme d'ensembles convexes étant convexe, P est convexe.

Soit $E = \sum_h x_h^\star$. Puisque $x^\star$ est optimal, il n'existe pas d'allocation réalisable qui procurerait à tous les agents une utilité (strictement) supérieure. Ceci établit que $E \notin P$. Par le théorème de séparation, nous savons qu'il existe un vecteur $p \neq 0$ tel que, pour tout $z \in P$, $pz \geq pE = p\sum_h x_h^\star$.

Ceci donne $p\,(z - \sum_h x_h^\star) \geq 0$ pour tout $z \in P$. Nous montrons maintenant que p est un prix d'équilibre et $x^\star$ une allocation d'équilibre.

(i) $p > 0$: Soit $\widetilde{E}_c = E + (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, où le 1 est placé en $c^{\text{ième}}$ position. Puisque les fonctions d'utilité sont strictement croissantes, $\widetilde{E}_c \in P$. Il est en effet possible de redistribuer l'unité de bien c à tous les agents de manière à augmenter leur satisfaction. Nous avons alors $p\left(\widetilde{E}_c - E\right) \geq 0$ pour tout c, et donc $p^c \geq 0$ pour tout c. Nous savons par ailleurs que $p \neq 0$ et donc $p > 0$ (c'est-à-dire que $p^c \geq 0$ pour tout c, et $p^c > 0$ pour au moins un bien).

(ii) Si $u_h(x_h) > u_h(x_h^\star)$ alors $px_h \geq px_h^\star$: Rapppelons d'abord que si tous les agents préfèrent x_h à $x_h^\star$ alors $p\sum_h x_h \geq p\sum_h x_h^\star$. Supposons maintenant que le premier consommateur préfère strictement x_1 à $x_1^\star$, et construisons l'allocation ζ suivante :

$$\begin{cases} \zeta_1 &= (1-\theta)x_1 \\ \zeta_h &= x_h^\star + \frac{\theta x_1}{H-1} \quad h = 2, \dots, H \end{cases}$$

Pour θ suffisamment petit, la continuité et la monotonie des fonctions d'utilité impliquent que $(\zeta_1, \dots, \zeta_H)$ est préférée à $x^\star$ par tous les agents. Donc $\sum_h \zeta_h \in P$, et, par conséquent, en appliquant le théorème de séparation, $p\sum_h \zeta_h \geq p\sum_h x_h^\star$. Ceci s'écrit :

$$p\left((1-\theta)x_1 + \sum_{h=2}^{H} x_h^\star + \theta x_1\right) \geq p\left(x_1^\star + \sum_{h=2}^{H} x_h^\star\right)$$

soit $px_1 \geq px_1^\star$.

En répétant le même raisonnement pour tous les agents, nous pouvons conclure que si h préfère strictement x_h à $x_h^\star$, alors x_h doit coûter, aux prix p, au moins aussi cher que $x_h^\star$.

(iii) Si $u_h(x_h) > u_h(x_h^\star)$ alors $px_h > px_h^\star$: Nous venons d'établir que $px_h \geq px_h^\star$. De plus, puisque $x_h^\star \gg 0$ et que $p > 0$, nous avons nécessairement $px_h^\star > 0$.

Supposons que $px_h = px_h^\star$. Par continuité de u_h, nous pouvons trouver $\theta \in (0,1)$ proche de 0 tel que $(1-\theta)x_h$ est préféré à $x_h^\star$. Appliquons le résultat précédent ici : $p(1-\theta)x_h \geq px_h^\star$. Cependant $px_h = px_h^\star > 0$ implique que $(1-\theta)px_h < px_h^\star$, ce qui constitue une contradiction.

Récapitulation : Nous avons trouvé un vecteur $p > 0$ tel que si $u_h(x_h) > u_h(x_h^\star)$ alors $px_h > px_h^\star$. En d'autres termes, $x_h^\star$ maximise u_h sous la contrainte budgétaire $px_h = px_h^\star$, c'est-à-dire, en posant $e_h = x_h^\star$, sous la contrainte $px_h = pe_h$. De plus, $\sum_h e_h = \sum_h x_h^\star$. $(p, x^\star)$ est donc bien un équilibre concurrentiel de l'économie dont les dotations initiales sont $e_h = x_h^\star$.

Il est possible de donner une démonstration très simple d'un résultat ressemblant beaucoup au second théorème du bien-être, mais qui suppose l'existence d'un équilibre.

Théorème : *Soit $x^\star$ une allocation Pareto optimale. Supposons que les préférences sont monotones et qu'il existe un équilibre concurrentiel dans l'économie dont les dotations initiales sont $e_h = x_h^\star$. Soit (p', x') cet équilibre. Alors, $(p'^\star)$ est un équilibre.*

Démonstration : Puisque chaque agent a comme dotations initiales $x_h^\star$, $u_h(x_h') \geq u_h(x_h^\star)$ pour tout h. $x^\star$ étant un optimum de Pareto, ceci implique

que $u_h(x'_h) = u_h(x^\star_h)$. $x^\star_h$ est donc une solution au problème de maximisation de l'utilité sous la contrainte $p'x_h = p'^\star_h$. $(p'^\star)$ est donc un équilibre concurrentiel.

8.4.3 Interprétation

Supposons qu'un planificateur central désire réaliser l'allocation $x^\star$, optimum de Pareto. Le théorème nous dit que, si le planificateur peut distribuer librement les dotations entre les agents, alors il lui suffit, pour atteindre son but, de donner $x^\star_h$ à chacun, tout en les laissant libres d'échanger aux prix p. En effet, aucun agent ne désirera échanger à ces prix et pour ces dotations initiales[57].

Comme nous l'avons déjà indiqué, ce théorème n'est pas trivial, et dépend crucialement de l'hypothèse de convexité des préférences. Ce point a déjà été illustré sur le graphique 6.21. Par ailleurs, l'exemple de non-existence d'un équilibre développé dans la section 6.4.4 du chapitre 6, permet d'illustrer pourquoi l'hypothèse d'intériorité de l'optimum de Pareto est nécessaire. En effet, si nous reprenons le graphique 6.14, nous pouvons constater que le point de dotations initiales e est un optimum de Pareto (il n'est pas possible d'en bouger sans diminuer le bien-être du second consommateur). Nous avons également vu que ce point ne pouvait pas être un équilibre. Il nous faut donc conclure que cet optimum de Pareto n'est pas décentralisable au moyen d'un système de prix. L'hypothèse du théorème qui n'est pas vérifiée ici est bien entendu $x^\star \gg 0$, c'est-à-dire que toutes les composantes de ce vecteur sont strictment positives.

D'un point de vue économique, ce théorème nous dit que les problèmes de répartition et d'efficacité peuvent (dans le monde idéalisé de l'équilibre walrasien) être complètement séparés : quelle que soit l'allocation optimale désirée par le planificateur, ou toute autre autorité gouvernementale, elle peut être obtenue au travers du mécanisme de marchés. En d'autres termes, le fonctionnement des marchés est neutre en ce qui concerne la distribution des richesses : s'il est décidé, par exemple pour des raisons de justice sociale, que la situation désirable pour l'économie est l'optimum de Pareto entraînant le moins d'inégalités possibles entre les agents, alors cette allocation peut être atteinte, après redistribution des dotations initiales, en laissant les agents échanger librement sur des marchés concurrentiels.

Une autre manière de comprendre la signification de ce théorème est d'observer que le système de prix joue deux rôles dans une économie de marché. Il possède en premier lieu, un rôle d'indicateur de rareté relative des biens. Il permet également l'évaluation de la richesse des agents. Le second théorème du bien-être nous dit que ces deux rôles peuvent être séparés. Il faut redistribuer les dotations initiales des agents afin de fixer leur richesse au niveau voulu, et utiliser le système de prix uniquement dans le but d'indiquer la rareté relative de chaque bien.

Le bon moyen d'atteindre une allocation optimale est que chaque agent fasse face aux "bons prix", indiquant le degré de rareté de chaque bien, lorsqu'ils prennent leur décision de consommation. Le montant de la consommation de chaque individu dépend alors de ses dotations, qui, d'un point de vue théorique, peuvent être manipulées par l'autorité centrale.

L'Etat peut en effet théoriquement taxer un consommateur sur la base de la valeur de ses dotations, et redistribuer le produit de cette taxe à un autre consommateur,

[57]Si l'on fait abstraction du problème de la multiplicité possible des équilibres (voir page 140), le planificateur n'a en fait pas besoin de donner exactement $x^\star_h$ à chaque agent. Toute allocation e telle que $pe_h = px^\star_h$ et $\sum_h e_h = \sum_h x^\star_h$ conduira également les agents au point $x^\star$ désiré.

ce qui correspond bien à un transfert de richesse entre les agents. Ce transfert doit cependant se faire de manière forfaitaire, c'est-à-dire qu'il doit être indépendant du comportement des agents.

Taxer les consommateurs aux yeux bleus, imposer à chaque agent de travailler (gratuitement) 10 heures pour la collectivité,. . .sont des exemples de taxes forfaitaires : le consommateur ne peut pas altérer leur montant par son comportement. En revanche, une taxe sur la consommation d'un bien particulier n'est pas une taxe forfaitaire puisque le consommateur a un certain contrôle sur le montant de la taxe qu'il paiera, au travers de son choix de consommation. Ainsi, la TVA est une taxe par essence non forfaitaire puisqu'elle dépend du choix de consommation de l'agent.

Le second théorème du bien-être peut donc être résumé de la manière suivante :

– les prix doivent refléter la rareté relative des biens,
– la redistribution des richesses doit se faire au moyen de taxes forfaitaires.

Ce théorème constitue un résultat théorique important. Il convient maintenant de s'interroger sur sa portée pratique. En effet, ce théorème a des implications normatives fortes. Il nous dit par exemple que, dans un monde walrasien, la carte vermeil est un mauvais moyen de redistribuer du revenu aux personnes agées : il vaudrait mieux leur donner directement un revenu supplémentaire, tout en les laissant le dépenser comme elles l'entendent, mais en faisant face au “bon” système de prix, plutôt que de subventionner uniquement leurs déplacements, ou leur billet de cinéma.

Nous abordons ici le problème de la faisabilité de tels transferts. En effet, un planificateur désirant décentraliser un optimum de Pareto doit posséder une information particulièrement complète sur les caractéristiques de l'économie. Il doit tout d'abord pouvoir identifer l'optimum de Pareto qu'il souhaite voir se réaliser et calculer le prix qui supporte cette allocation. Pour effectuer cette opération, il doit connaître (au moins) la distribution jointe des dotations et des préférences dans l'économie. Toutefois son action ne s'arrête pas à ce calcul. Il doit ensuite effectuer les transferts forfaitaires nécessaires. Or, ceci nécessite la connaissance des caractéristiques de chaque individu, puisque le planificateur ne doit pas baser le système de transfert sur les actions des agents, mais bien sur leur préférences et leurs dotations. Supposer qu'une autorité centrale dispose de toute cette information est bien évidemment extrême. C'est pour répondre à cette objection que s'est développée la théorie dite du second rang, où il est explicitement tenu compte des limites informationnelles qui ne permettent pas la mise en place de transferts forfaitaires et qui pèsent sur l'action du planificateur.

8.5 La détermination des optima de Pareto

Nous n'avons pas encore présenté de méthode permettant de trouver les optima de Pareto d'une économie. C'est ce que nous faisons ici, en donnant deux moyens de les caractériser.

8.5.1 Caractérisation des optima de Pareto

La première proposition que nous énonçons donne une condition nécessaire et suffisante d'optimalité.

Proposition : *Une allocation réalisable $x^\star$ est un optimum de Pareto si et seulement si $x^\star$ est une solution des problèmes suivants, pour $h = 1, \ldots, H$:*

$$\begin{array}{ll} \max_x & u_h(x_h) \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{h'} x_{h'} & \leq & \sum_{h'} e_{h'} & \\ u_{h'}(x^\star_{h'}) & \leq & u_{h'}(x_{h'}) & \forall h' \neq h \\ x_{h'} & \geq & 0 & \forall h' \end{array} \right. \end{array}$$

Démonstration : Supposons que $x^\star$ soit une solution de tous les problèmes mais ne soit pas Pareto optimale. Il existerait alors une allocation réalisable x' qui augmente l'utilité de tous les agents. Mais dans ce cas, $x^\star$ n'est solution d'aucun de ces problèmes.

Réciproquement, supposons que $x^\star$ soit Pareto optimale mais ne soit pas la solution d'un des problèmes. Dans ce cas, il est possible d'augmenter l'utilité d'un des agents (celui pour qui $x^\star$ n'est pas solution de "son programme") sans diminuer celle des autres. Ceci constitue une contradiction au fait que $x^\star$ est un optimum de Pareto.

L'idée de cette proposition est relativement simple, même si formellement le programme de maximisation peut apparaître assez complexe : il s'agit de maximiser l'utilité d'un agent donné sous deux types de contraintes. Les premières sont les contraintes de ressources. Les secondes expriment le fait qu'il faut donner aux autres agents une utilité au moins aussi élevée que celle qu'ils obtiennent en $x^\star$. Si la solution de ce programme, résolu pour tout agent, est $x^\star$, alors il s'agit d'un optimum de Pareto.

Une manière très proche de trouver les optima de Pareto d'une économie est de résoudre le problème **P** suivant :

$$\begin{array}{ll} \max_x & u_1(x_1) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_h x_h & \leq & \sum_h e_h & \\ \overline{u}_h & \leq & u_h(x_h) & \forall h \neq 1 \\ x_h & \geq & 0 & \forall h \end{array} \right. \end{array}$$

Ce programme exprime l'idée qu'il faut maximiser l'utilité de l'agent 1 sous les contraintes de ressources et la contrainte que chaque agent (autre que 1) doit obtenir une utilité minimale $\overline{u}_h$. En faisant varier cette utilité minimale, il est possible de trouver tous les optima de Pareto.

Nous adoptons maintenant une approche quelque peu différente, et essayons de trouver les optima de Pareto en maximisant une "fonction de bien-être social", à savoir ici une somme pondérée des fonctions d'utilité des agents.

Proposition : *Soit $a = (a_1, \ldots, a_H) \in \mathbb{R}^H_{++}$. Si $x^\star$ est une solution au problème de maximisation* $\mathbf{P'}$ *suivant :*

$$\begin{array}{ll} \max_x & \sum_{h=1}^H a_h u_h(x_h) \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{h=1}^H x_h & \leq & \sum_{h=1}^H e_h & \\ x_h & \geq & 0 & \forall h \end{array} \right. \end{array}$$

alors $x^\star$ est un optimum de Pareto.

Démonstration : Si $x^\star$ n'était pas Pareto optimale, alors il existerait une allocation réalisable x' telle que $u_h(x'_h) > u_h(x^\star_h)$ pour tout h. Mais, dans ce cas, $x^\star$ ne serait pas une solution au problème de maximisation.

Nous voyons ainsi que si nous trouvons une solution à la maximisation d'une somme pondérée des utilités des agents sous la contrainte de ressources, alors c'est un optimum de Pareto. Le paramètre a_h représente le poids attribué à l'individu h dans la fonction objectif (ou fonction de bien-être social). La solution au problème précédent, si elle existe, dépend bien évidemment du vecteur $a = (a_1, \ldots, a_h)$. Ainsi, cette méthode nous permet de trouver un optimum de Pareto particulier. Remarquons enfin qu'elle constitue une condition suffisante mais pas nécessaire d'optimalité.

La réciproque de cette proposition est un peu plus complexe, et requiert de nouvelles hypothèses. Sous ces hypothèses, tous les optima de Pareto peuvent être obtenus en maximisant une fonction linéaire des utilités des agents, dans laquelle les poids des agents prennent une valeur particulière.

Proposition : *Soit $x^\star$ un optimum de Pareto tel que $x^\star \gg 0$. Supposons les fonctions d'utilité concaves, continues et croissantes. Alors, il existe $a^\star = (a_1^\star, \ldots, a_H^\star) \in \mathbb{R}^H_{++}$ tel que $x^\star$ est une solution au problème de maximisation :*

$$\begin{array}{ll} \max_x & \sum_{h=1}^H a_h^\star u_h(x_h) \\ s.c. & \left\{ \begin{array}{rcll} \sum_{h=1}^H x_h & \leq & \sum_{h=1}^H e_h & \\ x_h & \geq & 0 & \forall h \end{array} \right. \end{array}$$

Le paramètre $a_h^\star$ représente le poids attaché à l'individu h à l'optimum $x^\star$.

Notons que cette proposition fait une hypothèse nouvelle sur les fonctions d'utilité, à savoir que celles-ci doivent maintenant être concaves, ce qui est plus fort que la quasi-concavité supposée jusqu'à présent[58]. Cette hypothèse est nécessaire pour que les optima puissent être obtenus en maximisant une somme pondérée des utilités des agents. Or, si nous supposons u_h concave, la fonction d'utilité est définie qu'à une fonction affine croissante près et non plus simplement à une fonction croissante près[59]. Cette remarque n'est pas essentiellement technique. Elle signifie que l'on abandonne l'idée que la fonction d'utilité est une notion ordinale ne faisant que classer les paniers de biens, sans fournir de renseignements sur l'intensité des préférences pour adopter une utilité cardinale. Supposer maintenant que u n'est définie qu'à une fonction affine croissante près, signifie que la phrase “je préfère de 50% une orange à une banane” a maintenant un sens et peut être représentée par la fonction d'utilité puisque cette propriété est préservée lorsque l'on prend une transformation affine de la fonction d'utilité.

Cette restriction supplémentaire sur la fonction d'utilité des agents ne conditionne cependant pas le reste de l'analyse. En effet, l'approche alternative, basée sur le programme **P** donne des résultats sensiblement équivalents et ne requiert que la quasi-concavité des fonctions d'utilité. Seul le résultat du paragraphe 8.5.3.3 dépend de l'approche adoptée ici.

---

[58] Pour plus de d,tails sur le lien entre la concavit, et la quasi-concavit,, le lecteur peut se reporter au chapitre 16.

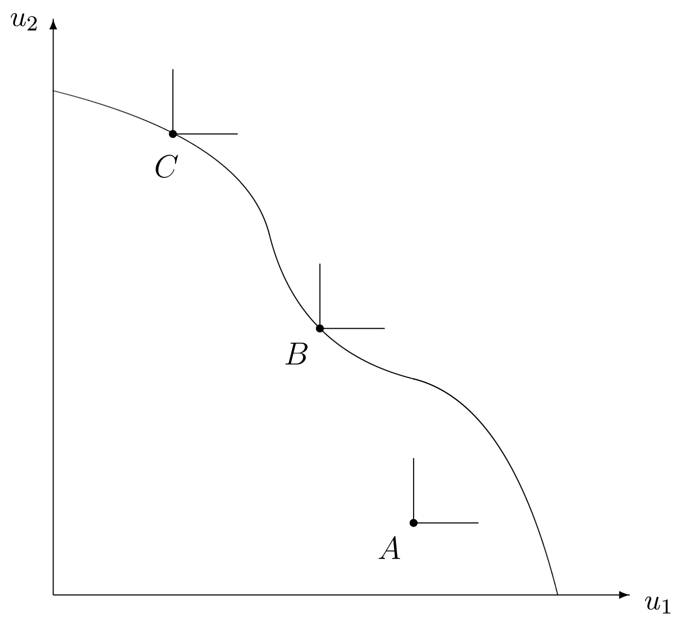
[59] En effet, la transformée d'une fonction concave par une fonction croissante quelconque n'est pas nécessairement concave, sauf si cette transformation est affine. Voir le chapitre 16.

8.5.2 Représentation graphique

Afin de bien comprendre la différence entre les deux dernières propositions, envisageons une économie composée uniquement de deux agents, ce qui permet une représentation graphique simple. Traçons dans le plan des utilités (u_1, u_2) l'ensemble des utilités possibles (graphique 8.5).

Cet ensemble représente l'utilité de chaque agent associée à une allocation réalisable quelconque. La forme de cet ensemble est *a priori* quelconque. Les optima de Pareto correspondent aux allocations telles qu'aucune autre allocation réalisable ne procure une utilité supérieure aux deux agents. Graphiquement, cela signifie qu'un point (u_1, u_2) de l'ensemble des utilités possibles correspond à un optimum de Pareto si l'intersection de cet ensemble et de l'ensemble $\{(u_1, u_2)\} + \mathbb{R}^2_+$ est réduit à $\{(u_1, u_2)\}$. Ainsi le point A n'est pas un optimum de Pareto, tandis que B et C le sont.

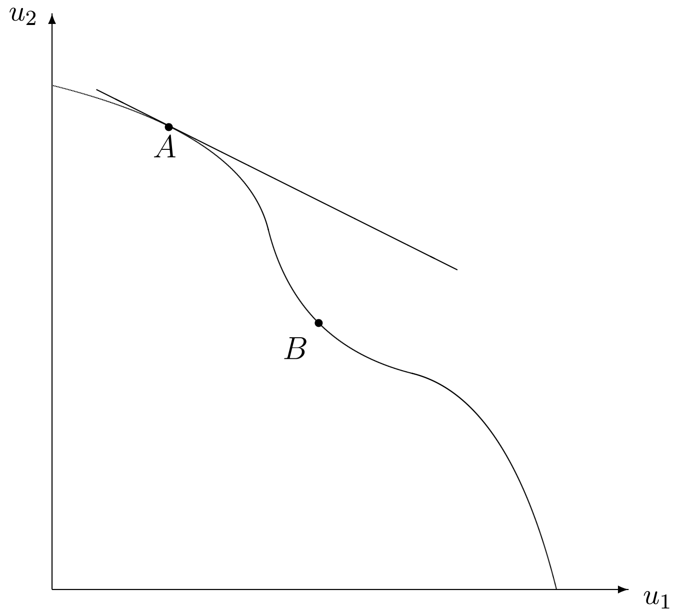
FIG. 8.5: Un ensemble des utilités possibles



Maintenant, maximiser une somme pondérée des utilités signifie trouver le point de contact le plus "élevé" possible entre l'ensemble des utilités possibles et une droite dont la pente reflète le poids relatif du premier agent par rapport au second. Nous voyons sur le graphique 8.6 que cette opération permet en effet de trouver un optimum de Pareto, par exemple le point A. Toutefois, il est également aisé de voir que ceci ne permet pas de trouver tous les optima de Pareto. Par exemple, le point B est un optimum de Pareto mais n'est pas une solution du programme $\max a_1 u_1(x_1) + a_2 u_2(x_2)$ sous la contrainte de ressources, et ce quel que soit le système de poids (a_1, a_2).

En revanche, et c'est là toute la force de l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité, si celles-ci sont concaves, l'ensemble des utilités possibles est convexe (comme

FIG. 8.6: Optimum et maximisation d'une somme pondérée des utilités



sur le graphique 8.7). Dans ce cas, tout point de la frontière de l'ensemble peut être obtenu comme point de contact le plus élevé entre cet ensemble et une droite de pente $-a_1/a_2$, pour des coefficients bien choisis. Ainsi, la maximisation d'une combinaison linéaire des utilités sous la contrainte de ressources est nécessaire et suffisante pour trouver les optima de Pareto intérieurs d'une économie dont les fonctions d'utilité sont concaves. Sur le graphique 8.7, le point A est un optimum correspondant à des poids définis par la pente de la tangente en ce point. De même, B est également un optimum de Pareto, correspondant à un système de poids différent.

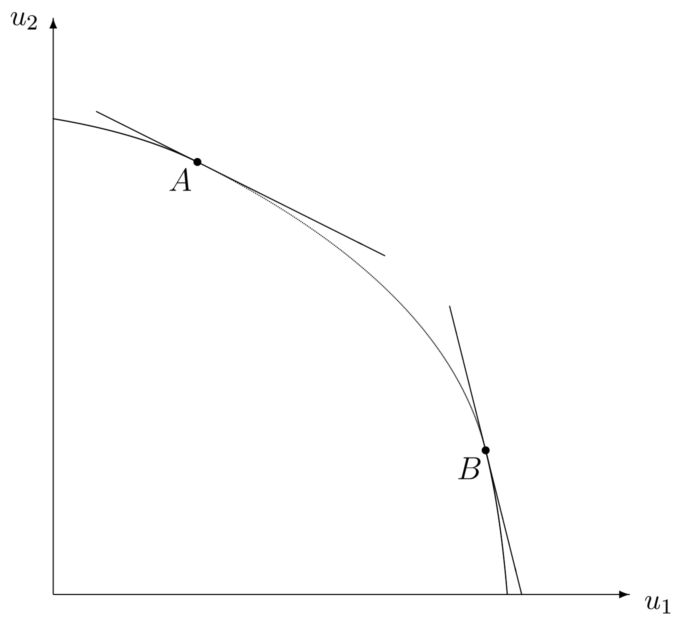
8.5.3 Les conditions d'optimalité et l'interprétation des prix

8.5.3.1 Les conditions d'optimalité

Les deux approches de l'optimalité (résumées par les deux problèmes $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}'$) permettent de trouver les conditions d'optimalité d'une allocation et de donner une interprétation du système de prix d'équilibre. Nous développons dans cette section l'approche basée sur le programme $\mathbf{P}'$. Toutefois, il est possible de développer les conditions de premier ordre du problème $\mathbf{P}$ et de retrouver essentiellement les mêmes conclusions, notamment en ce qui concerne l'interprétation des prix dans la théorie de l'équilibre général.

Nous avons vu que, en général, le TMS d'un agent entre deux biens doit être égal au rapport du prix de ces biens à l'équilibre concurrentiel (rappelons toutefois que ceci n'est pas toujours vrai, par exemple, lorsque à l'équilibre, un agent ne consomme

FIG. 8.7: Optimum et convexité de l'ensemble des utilités possibles



pas d'un bien). Or, si nous résolvons le programme $\mathbf{P}'$ de maximisation de la somme pondérée des utilités des agents sous contrainte de ressources, nous pouvons écrire les conditions de premier ordre, en supposant les fonctions d'utilité différentiables et que $x^\star \gg 0$, de la manière suivante :

$$a_h \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c} = \lambda^c \qquad \text{pour tout} \;\; c \;\; \text{et} \;\; h$$

où λ^c est le multiplicateur associé à la contrainte de rareté sur le bien c. Ces conditions sont suffisantes sous l'hypothèse (forte) de concavité des fonctions d'utilité.

En faisant le rapport de ces conditions, pour tout c et c', et tout consommateur h, nous voyons que l'optimum (sous réserve qu'il soit intérieur, c'est-à-dire que $x^\star \gg 0$) est caractérisé par l'égalité du TMS avec le rapport des multiplicateurs :

$$\frac{\partial u_h(x_h)/\partial x_h^c}{\partial u_h(x_h)/\partial x_h^{c'}} = \frac{\lambda^c}{\lambda^{c'}}$$

Le lecteur pourra se convaincre que cette égalité est également vraie dans la première approche évoquée ci-dessus - celle basée sur le programme $\mathbf{P}$ - et ce sous l'hypothèse plus faible de quasi-concavité des fonctions d'utilité. Deux remarques peuvent être faites, concernant cette égalité.

- Le rapport $\lambda^c/\lambda^{c'}$ est indépendant de h. Ceci signifie qu'à un optimum (intérieur) les TMS des agents sont tous égaux entre eux.
- Cette condition est la "même" que celle obtenue à l'équilibre concurrentiel si nous identifions les prix d'équilibre aux multiplicateurs du problème du "planificateur central". Les prix constituent donc une mesure de la valeur marginale (sociale)

d'un bien, ou encore de combien le bien-être collectif s'accroîtrait si une unité de plus du bien était disponible.

8.5.3.2 Qu'est-ce qu'un prix d'équilibre ?

Donnons dans ce paragraphe un contenu formel à la dernière remarque du paragraphe précédent. Montrons en effet que λ^1 est bien égal à l'augmentation du bien-être collectif induit par l'augmentation des dotations globales en bien 1, e^1, d'une unité. Pour ce faire, plaçons-nous à l'optimum $x^\star$, solution du problème de maximisation $\mathbf{P}'$ et différentions la fonction objectif par rapport à e^1.

$$\frac{\mathrm{d}\left(\sum_{h=1}^H a_h u_h(x_h^\star)\right)}{\mathrm{d}e^1} = \sum_{h=1}^H a_h \sum_{c=1}^C \frac{\partial u_h(x_h^\star)}{\partial x_h^c} \frac{\mathrm{d}x_h^c}{\mathrm{d}e^1}$$

$x_h^\star \gg 0$ est solution du programme de maximisation et satisfait donc la condition de premier ordre :

$$a_h \frac{\partial u_h(x_h^\star)}{\partial x_h^c} = \lambda^c, \quad \text{soit} \quad \frac{\partial u_h(x_h^\star)}{\partial x_h^c} = \frac{\lambda^c}{a_h}$$

De plus, les contraintes de rareté sont saturées, ce qui donne, en les différentiant :

$$\sum_{h=1}^H \frac{\mathrm{d}x_h^c}{\mathrm{d}e^1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad c = 1 \\ 0 & \text{si} \quad c \neq 1 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi, en remplaçant :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\sum_{h=1}^H a_h u_h(x_h^\star))}{\mathrm{d}e^1} &= \sum_{h=1}^H a_h \sum_{c=1}^C \frac{\lambda^c}{a_h} \frac{\mathrm{d}x_h^c}{\mathrm{d}e^1} \\ &= \sum_{c=1}^C \lambda^c \sum_{h=1}^H \frac{\mathrm{d}x_h^c}{\mathrm{d}e^1} \\ &= \lambda^1 \end{aligned}$$

Le raisonnement mené ci-dessus est connu sous le nom de théorème de l'enveloppe. Il exprime simplement le fait que, dans un problème d'optimisation sous contrainte, le multiplicateur associé à la contrainte est égal à l'accroissement de la fonction objectif consécutif à un relâchement (infinitésimal) de la contrainte.

Ainsi, le multiplicateur λ^1 reflète de combien augmenterait le "bien-être social", c'est-à-dire la somme pondérée des utilités des individus composant l'économie, si une unité supplémentaire de bien 1 était disponible. Or, nous venons de voir que ce multiplicateur pouvait être assimilé, grâce au second théorème du bien-être, au prix du bien à l'équilibre. Ainsi, le prix d'équilibre d'un bien reflète la rareté relative d'un bien, le concept de rareté étant subjectif ici puisque dépendant des préférences (de l'utilité marginale) des agents.

8.5.3.3 Poids social et utilité marginale du revenu

Interrogeons-nous maintenant sur le paramètre qui caractérise le poids d'un agent à un optimum $x^\star \gg 0$ que nous voulons décentraliser. En d'autres termes que vaut le paramètre $a_h^\star$ à un optimum donné ?

Remarquons tout d'abord que $x^\star$ est décentralisable (par le second théorème du bien-être) et est donc une allocation d'équilibre de marché. En conséquence, l'égalité suivante, dans laquelle μ_h est le multiplicateur associé à la contrainte budgétaire et $p^\star$ le prix d'équilibre, est vérifiée pour tout c et tout h :

$$\frac{\partial u_h(x_h^\star)}{\partial x_h^c} = \mu_h p^{\star c}$$

Nous voulons trouver le paramètre $a_h^\star$ correspondant, c'est-à-dire celui qui vérifie :

$$a_h^\star \frac{\partial u_h(x_h^\star)}{\partial x_h^c} = \lambda^c$$

Nous avons vu qu'il est en fait possible d'assimiler multiplicateurs associés aux contraintes de rareté dans le problème du planificateur et prix d'équilibre. En conséquence, $p^{\star c} = \lambda^c$ et ceci donne :

$$a_h^\star = \frac{1}{\mu_h}$$

ou, en d'autres termes, $a_h^\star$ est l'inverse de "l'utilité marginale du revenu" de h. Plus cette dernière est élevée (plus μ_h est élevé) plus le poids de l'individu à l'optimum est faible. Ceci n'est pas surprenant puisque μ_h décroît avec la richesse de h. Un individu ayant une forte utilité marginale du revenu (au point d'équilibre, qui est aussi un optimum) est un individu pauvre, ce qui est reflété par le fait que son poids est faible dans le bien-être social, c'est-à-dire que l'optimum atteint fait peu de cas de son utilité.

8.6 Exemple

Considérons une économie à deux agents et deux biens. Les consommateurs ont la même fonction d'utilité : $u_h\left(x_h^1, x_h^2\right) = 2\left(x_h^1\right)^{1/2} + 2\left(x_h^2\right)^{1/2}$. Remarquons que ces fonctions sont concaves, ce qui nous permet d'utiliser les propositions de la section précédente.

Nous supposons dans un premier temps que le premier consommateur possède 1/2 unité du premier bien et 1 unité du second tandis que le second consommateur possède 3/2 unités du premier bien et 1 unité du second.

Il est aisé de trouver les fonctions de demande :

$$x_h^1 = \frac{p^1 e_h^1 + p^2 e_h^2}{p^1 + \frac{(p^1)^2}{p^2}} \quad \text{et} \quad x_h^2 = \frac{p^1 e_h^1 + p^2 e_h^2}{p^2 + \frac{(p^2)^2}{p^1}}$$

Afin de déterminer l'équilibre, il est possible de se restreindre au marché du bien 1, du fait de la loi de Walras. L'équation d'équilibre s'écrit alors :

$$\left(\frac{1}{2}p^1 + p^2\right) + \left(\frac{3}{2}p^1 + p^2\right) = 2\left(p^1 + \frac{(p^1)^2}{p^2}\right)$$

Normalisons $p^1 = 1$, et résolvons l'équation ci-dessus, ce qui donne $p^2 = 1$. L'allocation d'équilibre est alors égale à :

$$x_1^1 = \frac{3}{4} \quad x_1^2 = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad x_2^1 = \frac{5}{4} \quad x_2^2 = \frac{5}{4}$$

Illustrons maintenant les différentes manières de caractériser un optimum de Pareto, ainsi que le second théorème du bien-être. Nous avons vu dans la section précédente que, compte tenu de la concavité des fonctions d'utilité, x est un optimum de Pareto (intérieur) si et seulement s'il existe des poids (a_1, a_2) tels que c'est la solution du problème :

$$\begin{array}{ll} \max_x & a_1 u_1(x_1) + a_2 u_2(x_2) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{lcl} x_1^1 + x_2^1 & = & 2 \\ x_1^2 + x_2^2 & = & 2 \end{array} \right. \end{array}$$

Une condition d'optimalité d'une allocation est l'égalité des TMS (qui provient des conditions de premier ordre du problème ci-dessus), soit ici :

$$\frac{(x_1^1)^{-1/2}}{(x_1^2)^{-1/2}} = \frac{(x_2^1)^{-1/2}}{(x_2^2)^{-1/2}}$$

Compte tenu du fait que $x_1^1 + x_2^1 = 2$ et que $x_1^2 + x_2^2 = 2$, cette équation se réécrit (en l'élevant au carré) :

$$\frac{x_1^2}{x_1^1} = \frac{2 - x_1^2}{2 - x_1^1} \quad \text{soit} \quad x_1^1 = x_1^2$$

Cette dernière équation est l'équation de la courbe des contrats : toutes les allocations donnant le même montant de bien 1 et de bien 2 au premier consommateur (et le reste au second) constitue un optimum de Pareto. L'optimum particulier associé aux poids a_1 et a_2 est, quant à lui, déterminé par les conditions de premier ordre du problème qui fournissent (en plus de l'égalité des TMS) :

$$a_1(x_1^1)^{-1/2} = \lambda^1 = a_2(x_2^1)^{-1/2}$$

c'est-à-dire, compte tenu du fait que $x_1^1 + x_2^1 = 2$:

$$x_1^1 \left[1 + \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 \right] = 2$$

Ainsi plus a_1 est élevé par rapport à a_2 (c'est-à-dire plus le premier consommateur est avantagé par rapport au second) plus la consommation du premier consommateur, à l'optimum correspondant, est élevée.

Nous pouvons vérifier que l'allocation d'équilibre est optimale :

$$TMS_1 = \frac{(x_1^1)^{-1/2}}{(x_1^2)^{-1/2}} = 1 = \frac{(x_2^1)^{-1/2}}{(x_2^2)^{-1/2}} = TMS_2$$

Nous pouvons également trouver à quel poids relatif a_1/a_2 elle correspond. En effet, puisque à l'équilibre $x_1^1 = 3/4$ l'équation suivante doit être vérifiée :

$$1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = 2 \times \frac{4}{3}$$

soit $a_1/a_2 = \sqrt{3/5}$.

Concentrons-nous maintenant sur un optimum de Pareto particulier, par exemple celui où l'utilité du premier consommateur est égale à 4. Puisque cette allocation est optimale, elle doit se situer sur la courbe des contrats, *i.e.* $x_1^1 = x_1^2$. De plus, $2\left(x_1^1\right)^{1/2} + 2\left(x_1^2\right)^{1/2} = 4$, soit $\left(x_1^1\right)^{1/2} = 1$, ou encore $x_1^1 = x_1^2 = 1$.

L'allocation optimale donnant une utilité de 4 au premier agent consiste donc à lui donner une unité de chaque bien. Comment pouvons nous décentraliser cette allocation ? Notons tout d'abord que le second théorème du bien-être nous dit que cette opération est réalisable. De plus, nous savons qu'il est possible de donner les dotations initiales $(1, 1)$ à chaque consommateur. Reste à trouver le prix d'équilibre. Nous avons vu que le rapport de ceux-ci doit être égal au rapport des multiplicateurs du programme déterminant les allocations optimales, ce rapport étant lui-même égal au TMS des agents à l'optimum. Le TMS dans le cas que nous considérons ici est égal à 1, et le rapport des prix doit donc être égal à 1.

Ainsi, si nous voulons décentraliser l'allocation donnant une unité de chaque bien à chaque agent, il suffit de donner cette allocation comme dotation aux agents, et de fixer les prix de manière à ce que $p^1 = p^2$. Ce système de prix et cette allocation constituent alors un équilibre concurrentiel de l'économie.

8.7 Conclusion

Au terme de ce chapitre, nous ne pouvons qu'insister à nouveau sur la portée des deux théorèmes du bien-être. Le premier théorème précise que l'allocation des ressources obtenues par le fonctionnement concurrentiel des marchés est optimale. Le second théorème donne une réciproque, à savoir que n'importe quel optimum de Pareto peut être obtenu comme équilibre de marché. Ceci requiert, outre l'hypothèse de convexité des préférences, la possibilité de mettre en œuvre des transferts forfaitaires. En revanche, le système de prix ne doit pas être utilisé (dans ce monde idéal de la concurrence parfaite) à des fins redistributives. En effet, la caractérisation des optima de Pareto nous a permis de conclure que les prix devaient refléter la rareté relative et subjective des biens. Le niveau d'utilité atteint par chaque agent, et donc les problèmes de répartition de la richesse entre les agents, doit quant à lui être contrôlé au moyen de transferts forfaitaires, non distorsifs.

Chapitre 9

Economie d'échange (IV) : Le noyau d'une économie

9.1 Introduction

Nous avons vu que l'équilibre concurrentiel existe et possède certaines propriétés normatives. Toutefois, l'utilisation d'un système de prix dans le processus d'échange, telle que nous l'avons formalisée dans le cadre de l'équilibre concurrentiel est une manière très particulière d'allouer des biens. Il est donc important de savoir si l'allocation d'équilibre concurrentiel est "robuste" lorsque le processus d'échange est modifié. Nous introduisons dans ce chapitre une autre forme de processus d'échange, de type coopératif, et examinons ses liens avec le processus concurrentiel étudié dans les chapitres précédents.

En d'autres termes et pour reprendre la discussion du chapitre 4, nous désirons savoir si le modèle d'équilibre concurrentiel est bien une forme réduite d'un modèle dans lequel la manière dont se font les échanges serait "mieux représentée".

Le but de ce chapitre est donc d'étudier l'allocation résultant d'échanges se faisant par négociations entre des coalitions d'individus. Dans cette économie, chacun cherche à échanger directement avec d'autres individus, au besoin en formant des coalitions permettant d'avoir un plus fort pouvoir de négociation, sans faire référence à un quelconque système de prix.

La notion implicite de concurrence à laquelle cette théorie renvoie est assez diffuse. En effet, l'idée à la base de la notion de noyau d'une économie est simplement que tout échange mutuellement avantageux doit être effectué. Il n'est donc fait référence à aucune institution particulière qui serait en charge d'organiser ou de structurer cette concurrence[60].

9.2 Le noyau dans la boîte d'Edgeworth

Nous introduisons ici le concept de noyau d'une économie dans le cadre de la boîte d'Edgeworth. Il s'agit donc d'une économie à deux agents et deux biens, chaque agent possédant une dotation initiale des deux biens. Imaginons maintenant que les individus, au lieu d'échanger anonymement sur un marché, à un prix fixé, négocient directement entre eux les échanges qu'ils souhaitent réaliser. Ils essaient donc de se mettre d'accord sur une allocation autre que l'allocation initiale.

[60]Nous renvoyons le lecteur au chapitre 4 pour une discussion des modélisations alternatives du processus de concurrence.

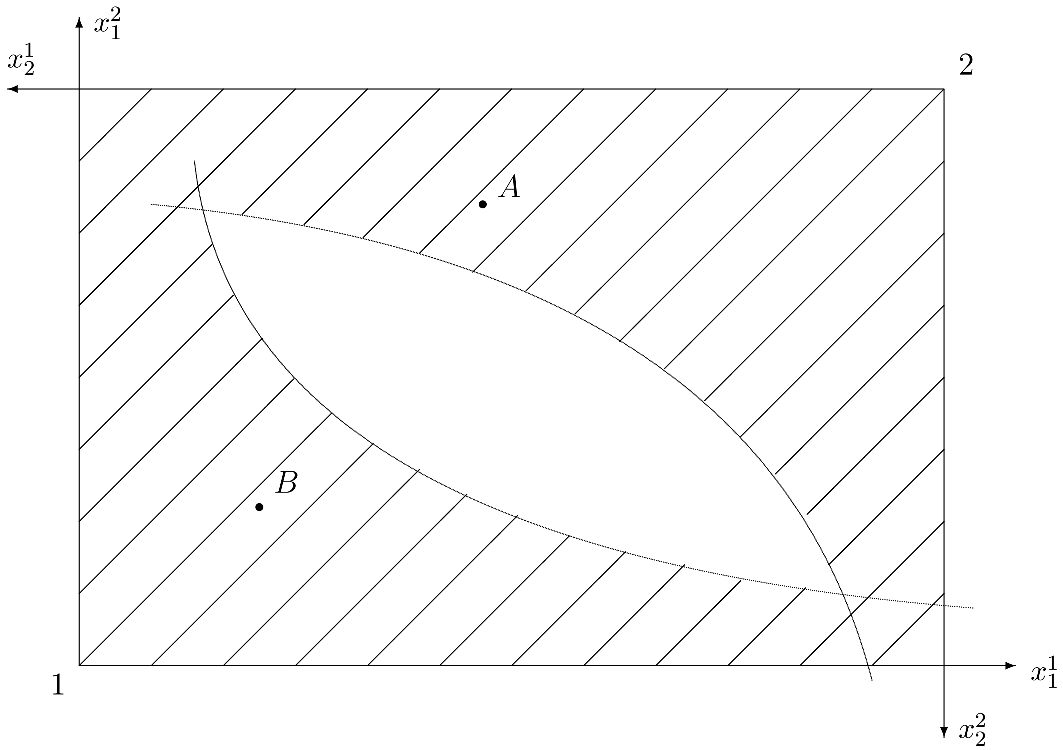
Ce processus d'échange est un processus coopératif qui doit cependant préserver une certaine liberté individuelle. Chaque agent est libre de rompre les négociations quand il le veut. Quels sont les cas de figure dans lesquels un agent refusera l'échange qui lui est proposé ?

Il "refusera l'échange" si

(i) l'échange proposé dégrade son utilité par rapport à celle qu'il obtiendrait s'il consommait ses dotations initiales, ou
(ii) il existe un autre échange (acceptable par l'autre partie) qui lui procure une utilité supérieure à l'échange proposé.

Le noyau est l'ensemble des échanges non refusés selon ces deux critères. Illustrons ces deux possibilités au moyen de la boîte d'Edgeworth. Le cas *(i)* correspond au graphique 9.1.

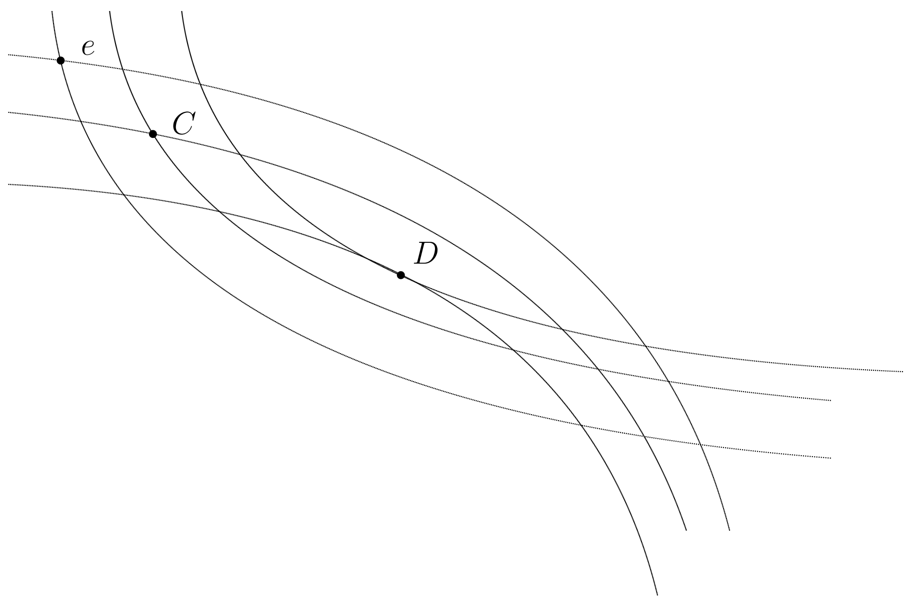
FIG. 9.1: Echanges déteriorant le bien-être d'au moins un consommateur



Sur ce graphique sont représentés les dotations initiales des agents, e, les courbes d'indifférence des agents passant par ces dotations et deux points, A et B, correspondant à deux échanges possibles. Le premier consommateur refuse de prendre part à l'échange qui l'amènerait en B, puisque ce point se situe sous la courbe d'indifférence passant par les dotations initiales. Le premier consommateur préfère donc ne pas échanger. Nous dirons qu'il bloque l'allocation B. De manière similaire, le second consommateur bloque l'allocation A, car il préfère consommer ses propres dotations plutôt que d'accepter un échange le conduisant au point A. Les points figurant dans la zone hachurée, c'est-à-dire hors de la lentille définie par les courbes d'indifférence des deux agents passant par le point de dotations initiales, correspondent donc à des échanges qui sont bloqués par au moins un des deux consommateurs.

Le cas *(ii)* est représenté sur le graphique 9.2. Un échange conduisant au point C serait profitable pour les deux consommateurs à la fois, puisque chacun serait sur une courbe d'indifférence plus élevée que celle passant par le point de dotations initiales. Toutefois, cet échange va être bloqué cette fois-ci par la coalition des deux agents. En effet, ceux-ci peuvent atteindre une utilité supérieure en un point tel que D. Nous dirons donc que l'allocation C est bloquée par la coalition des deux agents, car il existe une allocation qui leur procure à tout deux un bien-être supérieur. D est un point qui possède la caractéristique d'être "acceptable" par les deux agents dans la mesure où chacun des agents y a une utilité supérieure à celle qu'il aurait s'il n'échangeait pas, et de n'être dominé par aucune autre allocation, puisqu'il n'existe pas d'échanges qui amélioreraient simultanément le bien-être des deux consommateurs par rapport à celui qu'ils ont en D : D appartient au noyau de l'économie.

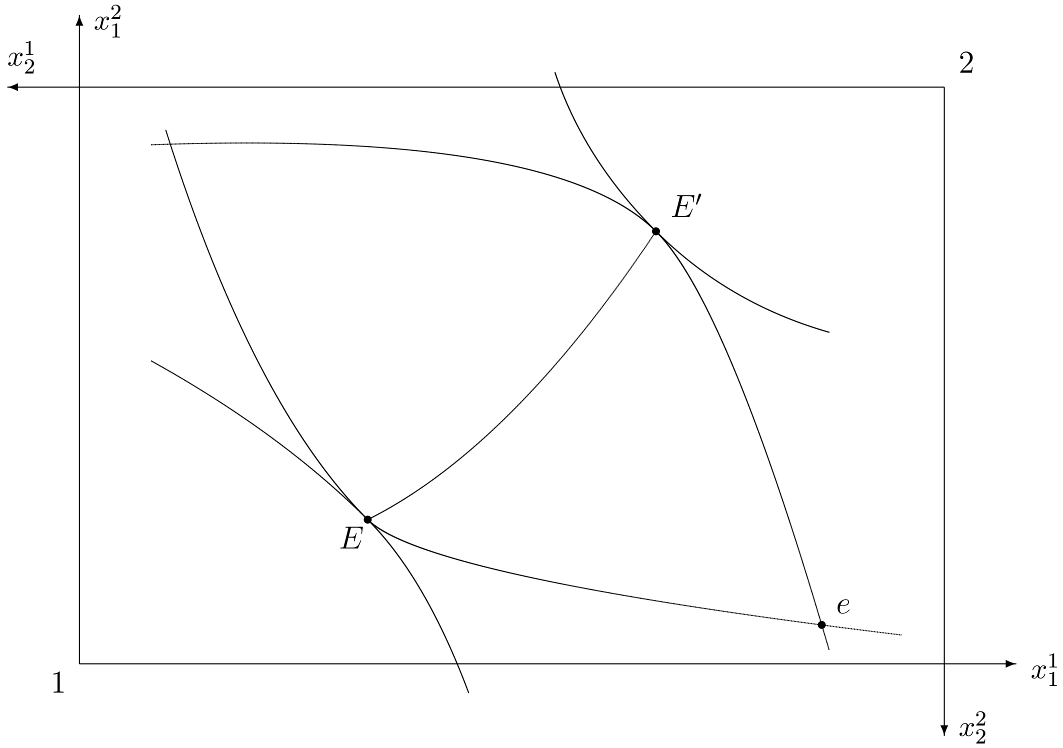
Fig. 9.2: Une allocation ne pouvant être bloquée par aucune coalition



Un raisonnement similaire fait apparaître que tous les points de tangence des courbes d'indifférence se situant dans la lentille définie par les courbes d'indifférence passant par le point de dotations initiales appartiennent au noyau : ils ne sont bloqués par aucun agent ou coalition d'agents. La multiplicité des allocations appartenant au noyau d'une économie fait ressortir une faiblesse de ce concept. Nous ne savons pas *a priori* en quel point du noyau l'économie va s'établir. Selon les rapports de force entre les coalitions (ici selon que l'un des deux agents est plus apte à s'approprier le surplus lié à l'échange), l'économie aboutira en un point ou en un autre.

Le noyau de l'économie représentée sur le graphique 9.3 est donc la partie de la courbe des contrats se situant entre les points E et E'.

FIG. 9.3: Le noyau d'une économie



Le noyau de cette économie est ainsi inclus dans l'ensemble des optima de Pareto. Or nous savons qu'optimum de Pareto et équilibre concurrentiel entretiennent des liens étroits. Il faudra donc s'interroger sur les liens existant entre le noyau et l'ensemble des équilibres concurrentiels d'une économie.

Remarquons à ce stade que l'équilibre fait toujours partie du noyau. En effet, dans la boîte d'Edgeworth, l'équilibre appartient à la portion de la courbe des contrats comprise entre E et E', et appartient donc au noyau. Nous montrerons dans les sections suivantes que lorsque l'économie devient "infinie" (c'est-à-dire que le nombre d'individus la peuplant devient infini, ce qui correspond bien à la notion de concurrence), le noyau se réduit à l'ensemble des équilibres concurrentiels. Ce résultat permet donc de considérer le modèle walrasien comme un cas limite d'un processus d'échanges coopératif.

9.3 Définitions

Afin de généraliser le raisonnement intuitif de la section précédente, nous avons besoin de définir formellement l'idée qu'une coalition bloque une allocation, définition qui permettra à son tour de définir formellement le noyau d'une économie.

Définition : *Une coalition d'agents S améliore une allocation x s'il existe une allocation x' telle que*

– $\sum_{h\in S} x'_h = \sum_{h\in S} e_h$ *et,*
– x'_h *est préféré à* x_h *par tous les membres de la coalition* S*, c'est-à-dire pour tout* $h \in S$*.*

Nous dirons également que la coalition S *bloque l'allocation* x*.*

La coalition d'agents S bloque une allocation lorsqu'elle peut faire mieux en s'isolant, et en n'organisant des échanges qu'à l'intérieur même de la coalition. En particulier, la coalition ne se soucie pas de ce que les consommateurs non membres de la coalition obtiendront.

Définition : *Une allocation réalisable* x *appartient au noyau de l'économie si elle ne peut être bloquée par aucune coalition* S*, ou, de manière équivalente s'il n'existe aucune coalition qui puisse améliorer* x*. Notons* $\mathcal{C}(e)$ *le noyau de l'économie dont les dotations initiales sont données par le vecteur* e*.*

A ce stade, faisons quelques remarques sur ces définitions.

– Si $x \in \mathcal{C}(e)$ alors x est une allocation Pareto optimale. En effet, si tel n'était pas le cas, la coalition formée de tous les agents pourrait bloquer l'allocation x. Autrement dit, le noyau est inclus dans l'ensemble des optima de Pareto.
– Le noyau d'une économie dépend de la répartition des dotations initiales dans l'économie, à l'inverse de l'ensemble des optima de Pareto.
– Les agents possèdent implicitement une quantité d'information considérable : ils sont informés de toutes les possibilités de coalitions. De plus, il n'existe aucun coût à la formation de celles-ci.

9.4 Propriétés du noyau

Nous avons vu dans le cadre de la boîte d'Edgeworth que le noyau d'une économie était une partie de la courbe des contrats, et dans les remarques du paragraphe précédent, qu'il était toujours inclus dans l'ensemble des optima de Pareto. Nous pouvons maintenant préciser la relation existant entre la notion de noyau et celle d'équilibre concurrentiel.

9.4.1 Noyau et équilibre concurrentiel

Nous établissons ici qu'un équilibre concurrentiel appartient toujours au noyau de l'économie.

Proposition : *Supposons* u_h *strictement croissante pour tout* h*. Si* $x^\star$ *est une allocation d'équilibre associée au prix* $p^\star$ *de l'économie dont les dotations sont* e*, alors* $x^\star \in \mathcal{C}(e)$*.*

Démonstration : Supposons $x^\star \notin \mathcal{C}(e)$. Il existe alors une coalition S et une allocation x' telles que tous les agents $h \in S$ préfèrent x'_h à $x^\star_h$ et un membre de la coalition préfère strictement x'_h à $x^\star_h$ et telles que $\sum_{h\in S} x'_h = \sum_{h\in S} e_h$. Par définition de l'équilibre de marché : $p^\star x'_h \geq p^\star e_h$ pour tout $h \in S$ et $p^\star x'_h > p^\star e_h$ pour au moins un h, sinon h aurait préféré acheter le panier x'_h aux prix d'équilibre. En additionnant ces inégalités nous obtenons : $p^\star \sum_{h\in S} x'_h > p^\star \sum_{h\in S} e_h$, ce qui est en contradiction avec le fait que $\sum_{h\in S} x'_h = \sum_{h\in S} e_h$ (puisque $p^\star$, étant un prix d'équilibre, est popsitif et différent de 0).

La démonstration de cette proposition est très proche de celle du premier théorème du bien-être. Pour retrouver celui-ci, il suffit de considérer la coalition englobant tous les agents, *i.e.* $S = \{1, \ldots, H\}$, dans la proposition précédente.

Cette proposition a un corollaire immédiat : puisque les équilibres concurrentiels sont inclus dans le noyau et que nous avons démontré qu'un équilibre concurrentiel existe sous des conditions assez générales, nous pouvons en déduire que, sous ces mêmes conditions, $\mathcal{C}(e) \neq \emptyset$. Le noyau n'est pas vide et étudier ses propriétés a donc un sens. Enfin, nous voyons sur le diagramme d'Edgeworth que le noyau ne se réduit pas, en général, à l'ensemble des équilibres concurrentiels.

9.4.2 Un exemple

Pour illustrer les relations qu'entretiennent équilibre concurrentiel, optima de Pareto et noyau, nous développons maintenant un exemple[61].

Soit une économie consistant en deux biens (x et y) et deux agents ($h = 1, 2$). Les fonctions d'utilité du consommateur h sont de type Cobb-Douglas :

$$u_h(x_h, y_h) = x_h^{1/2} y_h^{1/2} \quad \text{pour } h = 1, 2$$

Les dotations initiales sont égales à $(3, 1)$ pour le premier consommateur et $(1, 3)$ pour le second. Les prix sont normalisés de manière à ce que leur somme soit égale à un. Si p est le prix du bien x, le prix du bien y est alors égal à $1 - p$. La richesse du premier agent est égale à $p.3 + (1 - p).1 = 2p + 1$ tandis que celle du second agent est de $p + (1 - p).3 = 3 - 2p$.

Il est aisé de dériver les fonctions de demande de chaque agent :

$$x_1(p) = (2p + 1)/2p \quad \text{et} \quad y_1(p) = (2p + 1)/2(1 - p)$$

$$x_2(p) = (3 - 2p)/2p \quad \text{et} \quad y_2(p) = (3 - 2p)/2(1 - p)$$

L'équilibre concurrentiel est donné par la solution de l'équation d'équilibre sur le marché du bien x du fait de la loi de Walras. Cette dernière équation nous donne $p^\star = 1/2$. L'allocation d'équilibre associée est $(x_1^\star, y_1^\star) = (x_2^\star, y_2^\star) = (2, 2)$.

Calculons maintenant l'ensemble des optima de Pareto. Pour cela, calculons le taux marginal de substitution de chaque agent.

$$TMS_1 = y_1/x_1 \quad \text{et} \quad TMS_2 = y_2/x_2$$

Dans le cas de fonctions d'utilité différentiables et quasi-concaves, la tangence des courbes d'indifférence est une condition nécessaire pour l'optimalité d'une allocation (si celle-ci est une allocation intérieure, *i.e.* $x \gg 0$), comme nous l'avons vu au chapitre

[61] Voir B. Ellickson *Competitive equilibrium*, éditions Cambridge University Press, 1993.

précédent. Pour qu'une allocation soit optimale, il faut donc que

$$y_1/x_1 = y_2/x_2$$

L'allocation doit par ailleurs être réalisable :

$$x_1 + x_2 = 4 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 = 4$$

En rempla‡ant x_2 par $4 - x_1$ et y_2 par $4 - y_1$ dans la condition d'égalité des TMS, nous obtenons l'équation de la courbe des contrats : $y_1 = x_1$. L'ensemble des optima de Pareto est donc la diagonale de la boîte d'Edgeworth associée à notre économie. Nous notons en particulier que l'équilibre walrasien satisfait bien la condition $y_1 = x_1$.

Calculons maintenant le noyau de l'économie. Le noyau est la portion de la courbe des contrats se trouvant entre deux points qu'il nous faut déterminer. Ces points sont les points d'intersection de la courbe des contrats et de la courbe d'indifférence de chaque agent passant par son point de dotations initiales. Avant qu'il échange, le premier consommateur, comme le second, a une utilité $u_1(3,1) = u_2(1,3) = \sqrt{3}$. Le noyau de l'économie est donc, dans le plan (x_1, y_1) le segment de la courbe des contrats compris entre le point $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ et le point $(4 - \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3})$, puisque lorsque le second agent obtient $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, le premier obtient le reste soit $(4 - \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3})$.

9.4.3 Noyau et réplication de l'économie

Nous venons de voir que l'ensemble des équilibres concurrentiels est inclus dans le noyau. Est-il également vrai que l'ensemble des équilibres est inclus dans le noyau, auquel cas les deux concepts seraient identiques ? La réponse à cette dernière interrogation est évidemment négative, comme nous l'avons vu sur l'exemple précédent, où le noyau comportait des allocations différentes de l'allocation d'équilibre.

Toutefois, l'exemple précédent, même s'il nous dit qu'en général noyau et ensemble des équilibres sont différents n'épuise pas tout ce que nous pouvons dire sur le lien entre ces deux concepts. En effet, nous allons maintenant voir que si nous faisons croître la taille de l'économie (dans un sens bien précis), alors nous allons réduire le nombre d'allocations appartenant au noyau. L'intuition de ce résultat est assez simple : en augmentant le nombre d'agents dans l'économie, nous augmentons le nombre de coalitions possibles. Puisque plus de coalitions sont possibles, il va être de plus en plus facile de bloquer une allocation particulière. Il est donc probable que le noyau se réduise au cours de cette opération. Nous montrons ici que cette intuition se trouve vérifiée, et que le noyau tend vers l'ensemble des équilibres concurrentiels lorsque le nombre d'agents tend vers l'infini.

Notre première tâche est de définir précisément ce que nous entendons par “accroître” la taille de l'économie. Nous nous limiterons à une forme d'expansion particulièrement simple. Deux agents ayant les mêmes préférences et les mêmes dotations sont dits être de même type. Le processus d'expansion que nous allons considérer consiste en la réplication, à l'identique, des types d'agents de l'économie initiale. Une économie est la $r^{\text{ième}}$ réplique de l'économie initiale si elle comporte r agents de chaque type. Le processus de réplication consiste donc à “cloner” chaque agent présent dans l'économie un certain nombre de fois. De cette manière, la proportion de chaque type d'agents reste constante dans chaque réplique d'une même économie, ce qui simplifie l'analyse.

Nous appelons “r-noyau” le noyau de l'économie répliquée r fois. Dans les deux propositions suivantes, nous supposerons qu'il n'existe que deux types d'agents, le type a et le type b. Nous noterons x_h^a la consommation du $h^{\text{ième}}$ agent de type a.

Proposition : *Supposons que les préférences des agents sont strictement convexes, strictement monotones et continues. Alors, si l'allocation x appartient au r-noyau, deux agents de même type re‡oivent le même panier de biens, c'est-à-dire $x_h^t = x_{h'}^t$ pour $t = a, b$.*

Démonstration : Si tous les agents de chaque type ne re‡oivent pas le même panier, il existe un agent qui obtient l'utilité la plus faible de tous les agents de son type. Supposons que cet agent est le premier de chaque type et que pour l'un des deux types, a par exemple, le premier agent re‡oit effectivement un panier différent de celui des autres.

Soit $\overline{x}^a = \frac{1}{r}\sum_{h=1}^r x_h^a$ et $\overline{x}^b = \frac{1}{r}\sum_{h=1}^r x_h^b$, la moyenne de ce que chaque type d'agent re‡oit. Par définition, nous avons :

$$\sum_{h=1}^r x_h^a + \sum_{h=1}^r x_h^b = re^a + re^b$$

et donc $\overline{x}^a + \overline{x}^b = e^a + e^b$. L'allocation $\left(\overline{x}^a, \overline{x}^b\right)$ est une allocation réalisable pour une coalition consistant en un agent de type a et un de type b.

Le premier agent de type a, qui re‡oit un panier lui procurant l'utilité la plus faible de tous les agents de ce type, préfère strictement le panier $\overline{x}^a$ au sien. En effet, $\overline{x}^a$ est une combinaison linéaire convexe de paniers tous préférés à x_1^a. Le premier agent de type b, quant à lui, possède un panier de biens qui lui procure au mieux la même utilité que le panier $\overline{x}^b$.

Imaginons maintenant que le premier agent de type a propose au premier de type b de former une coalition et propose la répartition des ressources suivante :

- l'agent de type a obtient $\overline{x}^a - \varepsilon$, où ε est un vecteur positif tel que $u^a\left(x_1^a\right) < u^a\left(\overline{x}^a - \varepsilon\right)$ et
- l'agent de type b obtient $\overline{x}^b + \varepsilon$.

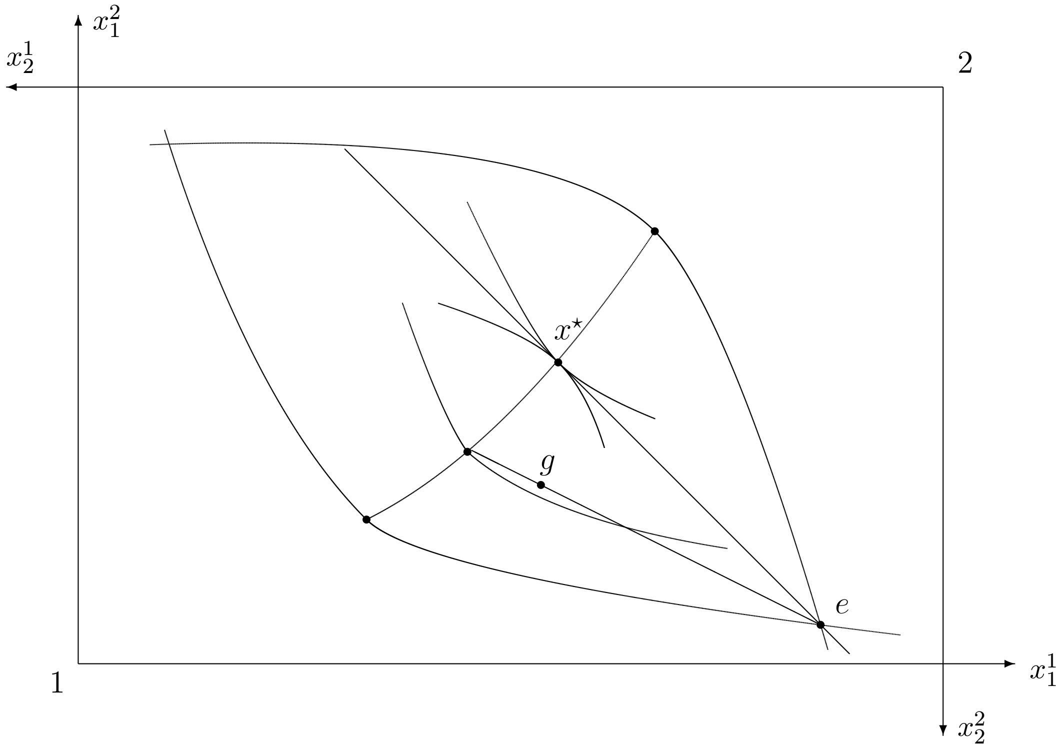
Le vecteur ε existe bien du fait de la stricte monotonie des préférences des agents. Cette allocation est réalisable pour la coalition, puisque $\overline{x}^a - \varepsilon + \overline{x}^b + \varepsilon = e^a + e^b$, et elle procure aux deux agents une utilité strictement supérieure à celle qu'ils avaient initialement. Nous avons donc trouvé une allocation réalisable qui bloque l'allocation x, qui ne pouvait par conséquent pas être dans le noyau.

Puisque deux agents de même type doivent consommer le même panier dans le noyau, nous pouvons étudier le noyau de la réplique d'une économie à deux agents au moyen de la boîte d'Edgeworth. C'est ce que nous faisons dans la proposition suivante, où il est démontré que lorsque $r \to \infty$, le noyau se réduit jusqu'à se confondre avec l'ensemble des équilibres concurrentiels.

Proposition : *Supposons que les préférences sont strictement convexes, strictement monotones, continues et qu'il existe une unique allocation d'équilibre $x^\star$ de l'économie dont les dotations sont e. Alors, si y n'est pas une allocation d'équilibre, il existe r tel que y n'est pas un élément du r-noyau.*

Démonstration : Représentons la situation sur la boîte d'Edgeworth du diagramme 9.4.

Fig. 9.4: Réplication et noyau



Soit y une allocation n'étant pas un équilibre mais appartenant au noyau de l'économie initiale (non répliquée). Le segment de e à y doit couper la courbe d'indifférence de l'agent de type a, passant par y. Ceci est une conséquence de la stricte convexité des préférences. Il existe donc un point tel que g, préféré par le consommateur de type a à y. Par continuité des préférences, nous pouvons choisir g tel que $g = \lambda e + (1 - \lambda)y$ où λ est un nombre rationnel compris entre 0 et 1. Soit $\lambda = N/M$, avec $N < M$. Nous avons donc $g^a = (N/M)e^a + (1 - N/M)y^a$.

Supposons maintenant que l'économie a été répliquée M fois et formons la coalition consistant en M agents de type a et $M - N$ de type b. Considérons l'allocation où les agents re‡oivent g^a s'ils sont de type a et y^b s'ils sont de type b. Cette allocation est (au moins) préférée à y par tous les membres de la coalition, et strictement préférée par les consommateurs de type a.[62]

De plus :

$$\begin{aligned}
Vg^a + (M-N)y^b &= M\left[\frac{N}{M}e^a + \left(1 - \frac{N}{M}\right)y^a\right] + (M-N)y^b \\
&= Ne^a + (M-N)y^a + (M-N)y^b \\
&= Te^a + (M-N)(e^a + e^b) \quad \text{car } y^a + y^b = e^a + e^b \\
&= Ve^a + (M-N)e^b
\end{aligned}$$

[62] Il serait même possible de donner un peu plus aux agents de type b de manière à ce qu'ils soient strictement mieux qu'en y, mais ceci alourdirait quelque peu les notations.

c'est-à-dire que l'allocation est réalisable pour la coalition. Celle-ci va bloquer l'allocation y, qui en conséquence n'appartient pas au M-noyau.

Nous venons ainsi de montrer qu'en répliquant un nombre suffisant de fois l'économie (M fois ici), il était possible d'éliminer du noyau toute allocation qui n'est pas un équilibre concurrentiel.

Cette proposition, qui se généralise au cas de plus de deux types d'agents et d'équilibres multiples[63], établit ainsi que l'équilibre concurrentiel est le seul point "stable" (c'est-à-dire auquel personne ne veut renégocier) d'un processus d'échanges coopératif, dans lequel aucune notion de prix ou de marché n'est présente. Elle permet d'ailleurs de proposer une définition alternative de l'équilibre concurrentiel :

Une allocation est une allocation d'équilibre d'une économie si et seulement si elle appartient au noyau pour toute réplication de cette économie.

Il pourrait paraître tentant de dire que le noyau étant une solution coopérative (c'est-à-dire qu'aucun individu ou groupe d'individus ne peut améliorer sa situation), l'allocation atteinte est "démocratique" ou socialement acceptable. Cette interprétation donnerait une justification, normative, supplémentaire à l'équilibre walrasien. Il convient toutefois de rappeler que le noyau dépend de la répartition initiale des dotations. Il est donc "socialement" juste *étant données* ces dotations. Mais celles-ci peuvent être, à l'origine, distribuées de manière injuste.

Enfin, il faut souligner que le noyau et l'ensemble des équilibres concurrentiels ne co‹ncident que dans le cas limite où il y a un nombre infini d'agents. Ceci correspond donc bien à la notion d'économie concurrentielle, dans laquelle chaque agent est "insignifiant". Ainsi, le processus d'échange implicite dans la définition du noyau, et qui correspond à l'idée d'une concurrence entre agents parfaitement informés des caractéristiques des autres agents, donne la même solution, lorsque le nombre d'agents est élevé, que le processus d'échange walrasien.

Terminons ce chapitre en reprenant l'exemple de la section 9.4.2, afin d'illustrer numériquement le fait que le noyau se réduit. Pour cela, montrons que l'un des points délimitant le noyau dans une économie à deux agents n'appartient plus au noyau de l'économie répliquée une fois. Nous considérons donc l'économie de la section 9.4.2 répliquée une fois et dans laquelle existent deux agents de chaque type. Montrons que l'allocation consistant à donner $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ aux agents de type 1 et $(4-\sqrt{3}, 4-\sqrt{3})$ aux agents de type 2 n'appartient pas au noyau.

Considérons la coalition formée de deux agents de type 1 et un agent de type 2. Les ressources dont elle dispose sont égales à $(3,1)+(3,1)+(1,3)=(7,5)$. Allouons $(4-\sqrt{3}+1/100, 4-\sqrt{3}+1/100)$ à l'agent de type 2, qui préfère participer à la coalition, puisque son utilité augmente. Allouons à chaque agent de type un le panier $\left(\frac{3+\sqrt{3}-1/100}{2}, \frac{1+\sqrt{3}-1/100}{2}\right)$. Son utilité est alors de

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}-1/100}{2}\right)^{1/2}\left(\frac{1+\sqrt{3}-1/100}{2}\right)^{1/2} = 1.7926 > \sqrt{3} = 1.7321$$

Les trois consommateurs parties prenantes à la coalition peuvent améliorer leur bien-être, et vont donc bloquer l'allocation consistant à donner $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ aux agents de type

[63]Le lecteur intéressé par une approche plus générale du noyau d'une économie pourra consulter le manuel, avancé, de W. Hildenbrand et A. Kirman, *Equilibrium Analysis*, éditions North-Holland, 1988.

1 et $(4-\sqrt{3}, 4-\sqrt{3})$ aux agents de type 2. Celle-ci n'appartient pas au noyau de l'économie répliquée alors qu'elle faisait partie du noyau de l'économie d'origine.

9.5 Conclusion

Le concept de noyau d'une économie représente la processus d'échange comme un marchandage gigantesque entre tous les acteurs économiques. L'idée de base, qui se comprend bien dans le cadre d'un marchandage bilatéral, est que les agents arriveront à conclure un échange mutuellement avantageux. La transposition de cette idée à une économie peuplée d'un grand nombre d'agents donne toutefois une vue peu structurée du processus concurentiel, les agents devant disposer d'une information considérable pour savoir quelles coalitions former.

Toutefois, le résultat positif établi dans ce chapitre est que le noyau d'une économie peuplée d'un grand nombre d'agents est proche de l'ensemble de ces équilibres concurrentiels. Ce théorème, démontré par G. Debreu et H. Scarf[64], "réconcilie" deux approches du fonctionnement d'une économie, l'une développée originellement par F.Y. Edgeworth (sous sa forme moderne, la théorie du noyau) et l'autre par L. Walras (sous sa forme moderne, la théorie de l'équilibre général). Avant de refermer ce chapitre, il faut tout de même mentionner que le résultat obtenu ici ne se généralise pas nécessairement à une économie avec production. De même, des économies plus complexes, avec asymétrie d'information par exemple, peuvent très bien avoir un noyau vide. Ainsi, il faut se garder de généraliser abusivement le résultat de convergence du noyau vers l'ensemble des équilibres concurrentiels.

[64] "A limit theorem on the core of an economy", *International Economic Review*, 1963, p. 235-246.

Chapitre 10

Equilibre général avec production

10.1 Introduction

Nous avons étudié jusqu'à présent l'équilibre général d'une économie dans laquelle le montant des biens disponibles était donné *a priori*. Dans ce chapitre, nous élargissons l'analyse au cas où ces biens sont produits. La quantité disponible de chaque bien va donc dépendre du système de prix en vigueur.

Nous allons voir au cours de ce chapitre que l'introduction de la production dans le modèle ne pose pas de problèmes conceptuels particuliers, ce qui tendrait à suggérer que la théorie de l'équilibre général est principalement une théorie de l'échange, qui s'accomode bien de l'introduction du secteur productif.

Il faut cependant apporter une qualification à ce constat lorsque l'ensemble de production d'une entreprise est à rendements croissants. Nous verrons en effet que le cadre concurrentiel développé n'est plus satisfaisant dans ce cas.

10.2 Une première approche

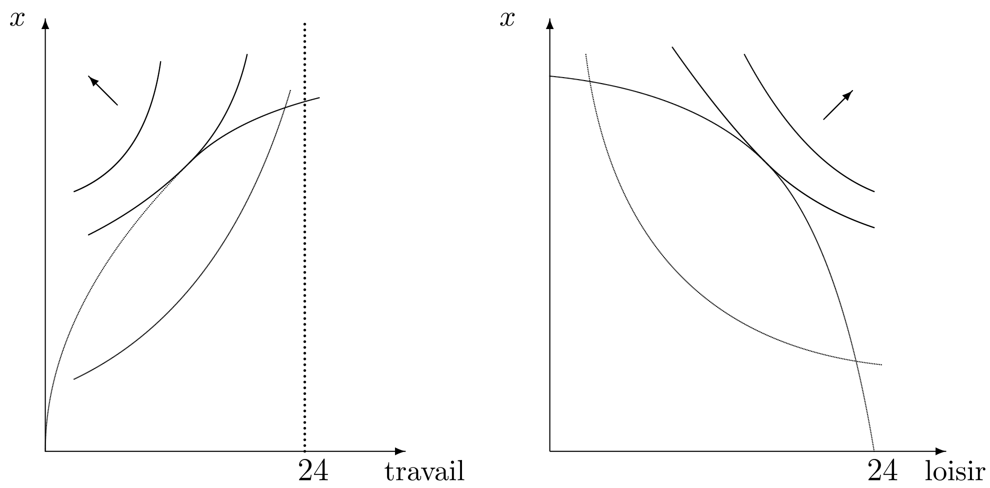
Nous avions commencé l'étude de l'équilibre général dans une économie d'échange pur par l'examen d'un modèle avec deux biens et deux agents. L'analogue de ce modèle pour la production est un modèle comportant une entreprise, un consommateur et deux biens. Dans un premier temps, nous considérons le modèle dans lequel firme et consommateur sont en fait la même personne. Cette économie est souvent qualifiée d'"économie de Robinson Crusoe". Ce cadre d'analyse est le plus simple qui soit, permettant d'illustrer l'idée de la séparation possible des décisions de production et de consommation ainsi que la coordination réalisée par le système de prix entre ces deux sphères de l'économie.

10.2.1 L'économie de Robinson Crusoe

Robinson a un double rôle : il est à la fois consommateur et producteur. En tant que producteur, son travail lui permet de récolter des noix de coco, qu'il peut consommer par la suite. Son choix concerne donc le nombre d'heures de travail (ou, ce qui revient au même, le nombre d'heures de loisir) qu'il doit fournir et le nombre de noix de coco qu'il désire manger. Plus il travaille, plus il peut consommer de noix de coco, mais moins il a de loisir (moins il profite de la plage).

Les deux biens de l'économie sont donc les noix de coco et le loisir. Représentons sur un graphique (graphique 10.1) le choix de Robinson. Deux représentations alternatives sont possibles selon que nous portons le loisir ou le travail en abscisse. Ces deux représentations sont bien s–r équivalentes puisque le nombre d'heures de loisir plus le nombre d'heures travaillées est égal à une constante, par exemple 24 heures.

FIG. 10.1: Deux représentations du choix de Robinson



La fonction de production représentée est concave, et donne le nombre de noix de coco que Robinson peut récolter s'il travaille L heures, ou alternativement s'il prend ℓ heures de loisir (et travaille alors $24 - \ell$ heures). La concavité de la fonction exprime le fait que la première heure de travail est plus productive que la dixième.

Les préférences respectent les hypothèses traditionnelles et peuvent être représentées par une fonction d'utilité croissante par rapport au nombre de noix de coco et d'heures de loisir, c'est-à-dire décroissante par rapport au nombre d'heures de travail, ce qui explique la forme des courbes d'indifférence dans le plan (travail, noix de coco).

Le point que Robinson va choisir est bien sûr le point réalisable (c'est-à-dire se situant sur la fonction de production) qui lui procure l'utilité maximale : il s'agit dans ce cas de figure du point de tangence entre la fonction de production et une courbe d'indifférence. Le point optimal est donc caractérisé par l'égalité du taux marginal de substitution au taux marginal de transformation.

10.2.2 Un premier modèle d'équilibre : le cas de rendements décroissants

Compliquons maintenant un peu le modèle : Robinson devient schizophrène et il faut distinguer ses activités de producteur (dont s'occupe Robinson-firme) de son activité de consommateur (laissée à Robinson-consommateur). Supposons par ailleurs que Robinson-firme paie un salaire à Robinson-consommateur, qui, avec ce salaire, achète des noix de coco à Robinson-firme.

10.2.2.1 Le problème de Robinson-firme

Nous faisons maintenant l'hypothèse que Robinson-firme se comporte comme une entreprise concurrentielle et maximise son profit aux prix du marché. Notons p le prix des noix de coco, x la quantité vendue de celles-ci, w le salaire horaire versé et L le nombre d'heures de travail. Le profit s'écrit alors $\pi = px - wL$. Le nombre de noix de coco produites est une fonction du nombre d'heures travaillées : $x = g(L)$. Cette fonction est supposée concave, ce qui correspond, avec l'hypothèse supplémentaire $g(0) = 0$ à des rendements décroissants[65]. Nous pouvons ainsi représenter la maximisation du profit sur le graphique 10.2, sur lequel le loisir ($\ell = 24 - L$) est porté en abscisse. Les droites représentées sur ce graphique sont des droites d'iso-profit : elles correspondent à des plans de production assurant un profit donné. L'équation de l'une d'entre elles (correspondant au montant de profit π_0) s'obtient aisément dans le plan $(24 - L, x)$:

$$\pi_0 = px - wL + 24w - 24w \Longleftrightarrow x = -\frac{w}{p}(24 - L) + 24w + \pi_0$$

Robinson-firme fait donc un profit, qu'il redistribue alors à son unique actionnaire, Robinson-consommateur.

10.2.2.2 Le problème de Robinson-consommateur

Robinson-consommateur reçoit un salaire horaire w de Robinson-firme, et lui achète les noix de coco au prix p. De plus, il reçoit le profit que lui verse Robinson-firme. Sa décision porte sur le nombre d'heures de travail qu'il va offrir et le nombre de noix de coco qu'il désire consommer.

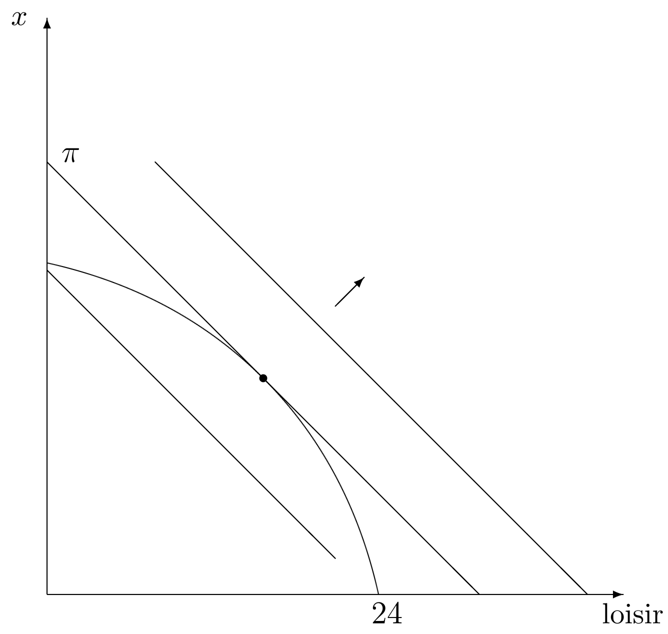
Il a une fonction d'utilité définie sur le loisir et les noix de coco : $u(x, \ell)$ qui peut s'écrire $u(x, 24 - L)$. Nous observons alors que la fonction d'utilité est décroissante par rapport au nombre d'heures travaillées, ce qui exprime la désutilité du travail.

Son programme de maximisation s'écrit :

$$\begin{array}{rl} \max_{x,L} & u(x, 24 - L) \\ \text{s.c.} & px = wL + \pi \end{array}$$

[65] Voir le chapitre 3.

FIG. 10.2: La maximisation du profit



soit

$$\begin{array}{rl} \max_{x,L} & u(x, 24-L) \\ \text{s.c.} & px + (24-L)w = 24w + \pi \end{array}$$

et est représenté sur le graphique 10.3.

Etant donné que Robinson-consommateur considère le profit que Robinson-firme lui verse comme donné, il suppose que ce profit est indépendant de son propre choix d'offre de travail. En conséquence, même lorsqu'il décide de n'offrir aucun travail, il pense obtenir un revenu sous forme de profit versé par Robinson-firme (cette situation, cependant, ne sera bien s–r pas un équilibre).

Le choix de Robinson-consommateur se situe au point de tangence entre sa contrainte budgétaire et une de ses courbes d'indifférence.

10.2.2.3 Equilibre

Si nous représentons sur un même graphique les décisions des "deux Robinson", nous nous apercevons (graphique 10.4) que le point d'équilibre est exactement le même que celui que Robinson "sain d'esprit" avait choisi : c'est le point de tangence entre la fonction de production et une courbe d'indifférence. En d'autres termes, le taux marginal de substitution est égal à la productivité marginale du travail à l'équilibre.

L'utilisation d'un système de marchés donne ainsi le même résultat que si Robinson

Fig. 10.3: Le choix de Robinson-consommateur

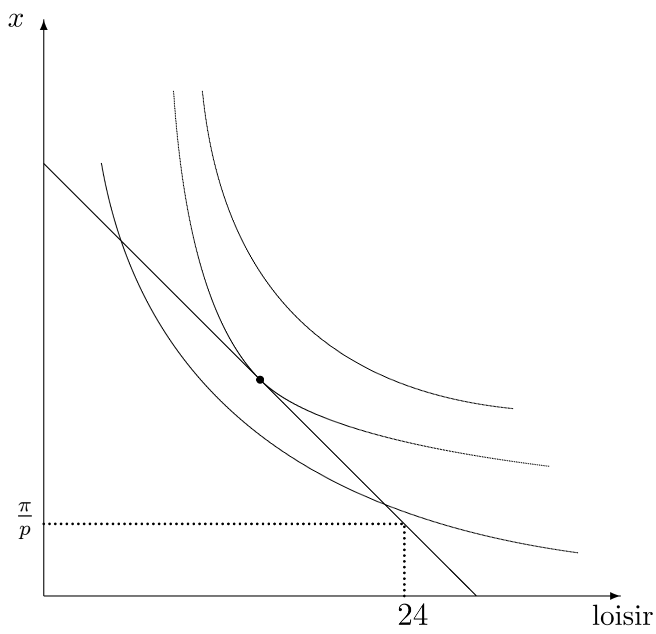
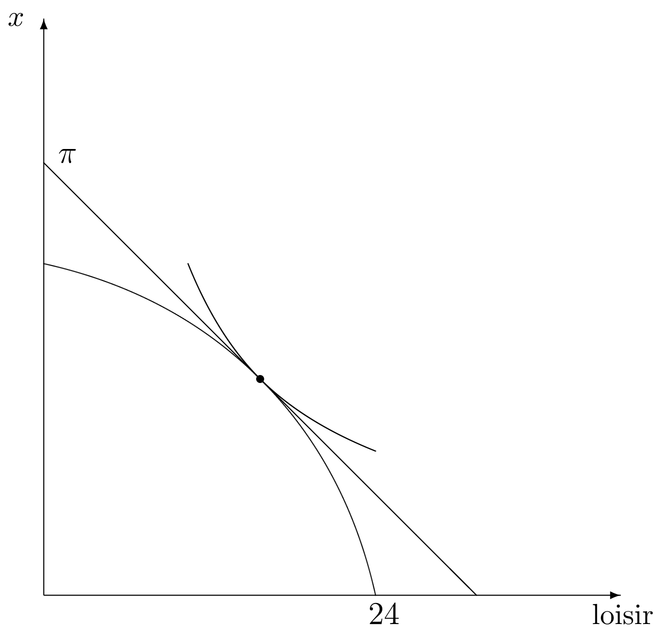


Fig. 10.4: L'équilibre dans l'économie de Robinson



avait directement choisit son plan de production et sa consommation. Une première conclusion qu'il est possible de tirer de cet exemple est que le marché (concurrentiel) semble bien coordonner les décisions de production et les décisions de consommation.

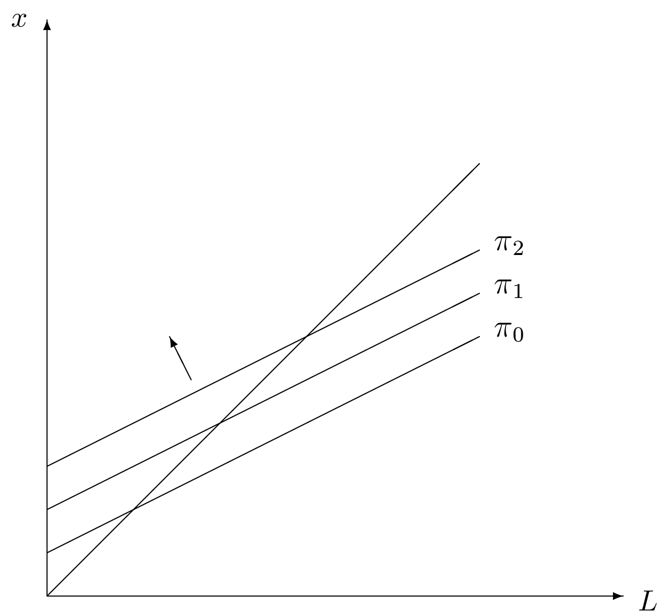
Remarquons aussi, en termes plus techniques, qu'un équilibre concurrentiel existe, et est Pareto optimal. Nous généraliserons ce résultat dans les sections à venir, mais pour l'instant examinons, toujours dans le cadre de cet exemple très simple, quelques problèmes qui pourraient se poser si la fonction de production n'était pas (strictement) concave.

10.2.3 Rendements constants

Que se passe-t-il si la technologie de production n'est pas à rendements décroissants comme nous l'avons supposé ci-dessus ?

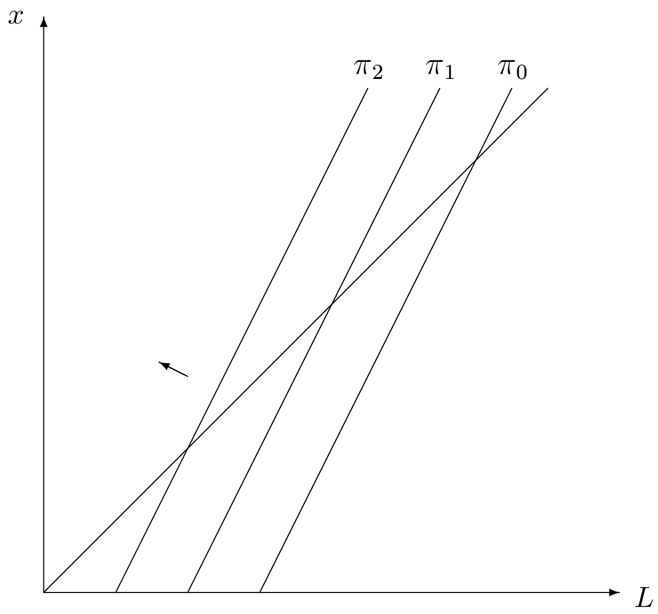
Si les rendements sont constants, nous savons alors qu'à l'équilibre le profit doit être nul (sinon, il n'y aurait pas de solution au problème de maximisation du profit, comme nous l'avons établi dans le chapitre 3). En d'autres termes, les prix d'équilibre sont déterminés par la technique de production. En effet, sur le graphique 10.5, il est clair que si jamais la pente de la fonction de production (qui est ici une droite) est supérieure au prix relatif w/p (qui est la pente de la droite d'isoprofit), alors il n'existe pas de solution au problème de maximisation : le producteur a toujours intérêt à produire plus.

FIG. 10.5: Rendements constants conduisant à une production infinie



Le graphique 10.6 quant à lui montre que si la pente de la fonction de production est inférieure à w/p, alors le producteur a intérêt à ne rien produire, ce qui ne peut constituer un équilibre dans le cadre présent si nous supposons que Robinson-consommateur a une utilité marginale de la première noix de coco très élevée. En effet, dans ce cas, le prix des noix augmentera par rapport au salaire, ce qui fera baisser w/p jusqu'au moment où une production positive devient possible.

FIG. 10.6: Rendements constants conduisant à une production nulle



Ainsi, la pente des courbes d'iso-profit, c'est-à-dire le prix w/p doit, à l'équilibre et si le bien est effectivement produit, être égale à la pente de la droite de production, c'est-à-dire la productivité moyenne (et marginale puisque les rendements sont constants) du travail. Cette situation est représentée sur le graphique 10.7.

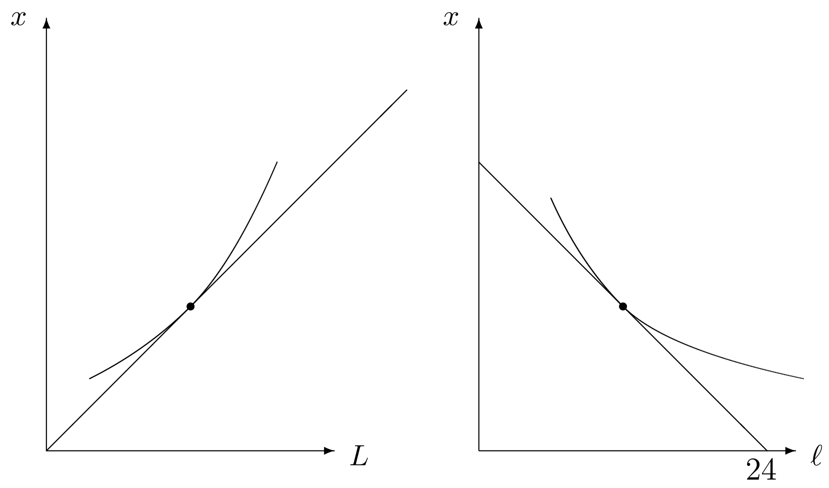
Il apparaît sur ce graphique que la fonction de production est linéaire et confondue avec la contrainte budgétaire. En effet, la droite budgétaire a pour pente w/p, tout comme la droite d'iso-profit, confondue avec la fonction de production. De plus, la droite budgétaire passe également par l'origine : le profit reversé par la firme étant nul, si Robinson-consommateur ne travaille pas, il ne perçoit aucun revenu et ne peut donc rien consommer.

En conclusion, même si dans le cas de rendements constants l'analyse est quelque peu modifiée, les résultats "forts" demeurent : un équilibre existe et correspond à un optimum de Pareto.

10.2.4 Rendements croissants

Lorsque la technologie est à rendements croissants, c'est-à-dire que la fonction de production est convexe, il est toujours possible de définir un optimum de Pareto. En

FIG. 10.7: L'équilibre dans un cas de rendements constants



d'autres termes, il existe une solution au problème "unifié" de Robinson. Ceci est illustré sur le graphique 10.8, sur lequel la fonction de production est tracée en gras.

En revanche, le problème survient lorsque nous essayons de trouver un vecteur de prix qui supporte cette situation comme point de profit maximal. Si Robinson-firme faisait face au prix donné par la pente de la tangente de la courbe d'indifférence et de la fonction de production au point optimal (c'est-à-dire si le rapport des prix est égal au TMS de Robinson-consommateur, lui-même égal au TMT de Robinson-firme), alors il réaliserait un profit négatif s'il produisait la quantité Paareto-optimale. En effet, la droite d'iso-profit π_0 se situe en dessous de celle passant par l'origine et correspond donc à un profit négatif. Dans ce cas, Robinson-firme préfère ne rien produire, ce qui lui rapporte un profit nul.

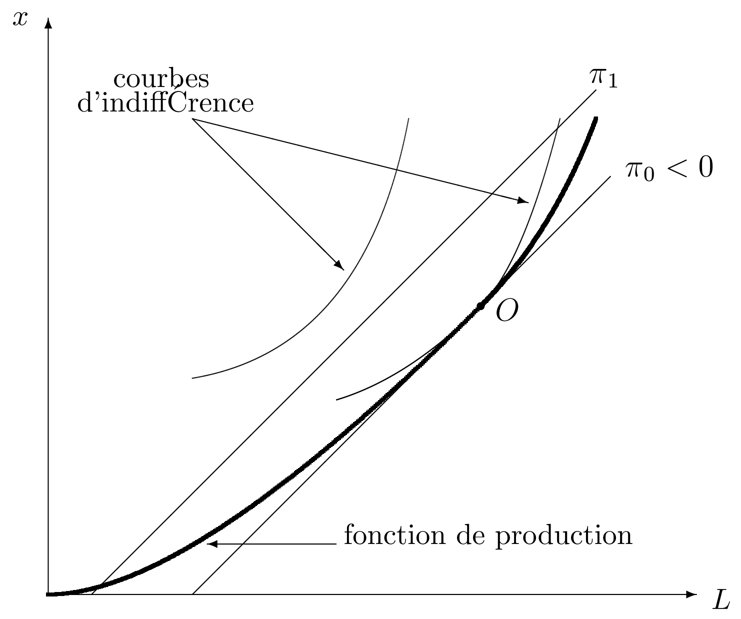
En fait, dans le cas de figure représenté sur le graphique 10.8, si Robinson-firme fait face au système de prix donné par la pente des droites d'iso-profit, il désirera produire une quantité infinie, ce qui ne peut évidemment mener à une situation d'équilibre.

Intuitivement, la situation est facile à comprendre lorsqu'on considère le cas d'une technologie induisant des coûts fixes, telle que celle envisagée dans le chapitre 3 (graphique 3.7). Dans cette situation, la décentralisation d'un optimum exige que le prix de vente du bien produit par l'entreprise soit égal au coût marginal au point optimum de Pareto. Ce prix est toutefois insuffisant pour couvrir les coûts fixes de l'entreprise, et celle-ci préfèrera ne rien produire. L'optimum de Pareto n'est pas décentralisable. Une autre manière de voir le problème, est de constater que dans ce cas (comme dans le cas illustré sur le graphique 10.8), l'entreprise, lorsqu'elle considère les prix comme donnés, aura toujours intérêt à produire un montant infini.

Ce problème de non-existence est dû à la non-convexité de l'ensemble de production de Robinson-firme. Alors qu'il était possible de résoudre ces problèmes de non-convexité chez le consommateur en considérant une économie avec plus d'agents, ils posent de plus graves difficultés dans le cas de la production.

Dans le cas d'ensembles de production à rendements croissants, les agents ont besoin

FIG. 10.8: Rendements croissants et impossibilité de décentraliser un optimum



de signaux autres que les signaux prix pour prendre leurs décisions. Ainsi, une voie possible pour décentraliser l'optimum ci-dessus serait de "forcer" l'entreprise à produire le montant optimal, d'instaurer le système de prix correspondant au TMS en ce point, et d'opérer des transferts du consommateur vers l'entreprise pour dédommager celle-ci des pertes encourues. Nous voyons toutefois que cette décentralisation ne se fait plus uniquement à l'aide des prix, mais également à l'aide de "signaux-quantité", à savoir la quantité que l'entreprise en rendements croissants doit produire. Le "marché" n'est plus un mécanisme satisfaisant d'allocation des ressources, du moins si nous maintenons l'hypothèse de concurrence parfaite en présence de rendements croissants.

10.2.5 Exemples

Nous développons ici trois exemples (correspondant aux trois hypothèses sur les rendements d'échelle) qui illustrent la discussion des paragraphes précédents.

10.2.5.1 Rendements décroissants

Soit une économie dans laquelle l'unique consommateur a la fonction d'utilité suivante, portant sur le bien x et le loisir ℓ : $u(x, \ell) = x^{\alpha}\ell^{1-\alpha}$. Sa dotation en bien est 0 et celle en "loisir" est 24 heures. Notons L le travail, $L = 24 - \ell$. Il existe une entreprise qui produit du bien x avec du travail selon la technique $x = L^{1/2}$. Enfin, nous fixerons le prix du bien à 1, et nous noterons w le prix du loisir (et du travail).

L'entreprise maximise son profit : $\pi = L^{1/2} - wL$, ce qui donne les fonctions d'offre de bien et de demande de travail suivantes :

$$x^o(w) = \frac{1}{2w} \quad \text{et} \quad L^d(w) = \frac{1}{(2w)^2}$$

Le profit réalisé est égal à : $\pi(w) = \frac{1}{2w} - w\frac{1}{(2w)^2} = \frac{1}{4w}$.

Le consommateur pour sa part cherche à maximiser son utilité, qui peut se réécrire $u(x, L) = x^\alpha(24 - L)^{1-\alpha}$ sous une contrainte budgétaire qui s'exprime de la manière suivante :

$$x + w(24 - L) = 24w + \pi(w)$$

Nous trouvons alors les fonctions de demande de bien et d'offre de travail suivantes ($\pi(w)$ a été remplacé par sa valeur $1/4w$) :

$$x^d(w) = \alpha\left(24w + \frac{1}{4w}\right) \quad \text{et} \quad L^o = \frac{1-\alpha}{w}\left(24 - \frac{1}{4w}\right)$$

Cherchons maintenant l'équilibre de ce modèle. Remarquons tout d'abord que la loi de Walras est vérifiée dans cette économie. Nous pouvons le vérifier par le calcul, à savoir :

$$(x^d(w) - x^o(w)) + w(L^d(w) - L^o(w)) = 0$$

ou simplement remarquer que la contrainte budgétaire du consommateur peut s'écrire :

$$x^d(w) + w(24 - L^o(w)) = 24w + (x^o(w) - wL^d(w))$$

puisque le profit $\pi(w)$ est égal à $x^o(w) - wL^d(w)$. Nous retrouvons immédiatement la loi de Walras.

Puisque la loi de Walras est vérifiée, il nous suffit de considérer l'équilibre sur un marché, par exemple le marché du bien, puisque si ce dernier est à l'équilibre alors le marché du travail sera également à l'équilibre.

En posant $\alpha\left(24w + \frac{1}{4w}\right) = x^o(w) = \frac{1}{2w}$, nous obtenons :

$$w^\star = \left(\frac{1}{24}\frac{2-\alpha}{4\alpha}\right)^{1/2}$$

10.2.5.2 Rendements constants

Reprenons l'économie précédente en modifiant simplement la technique de production qui devient : $x = aL$, c'est-à-dire une technique à rendements constants.

Nous savons que le salaire d'équilibre (nous gardons la normalisation $p = 1$) est alors donné par : $w^\star = a$. Le profit fait par l'entreprise est nul, son offre de bien et sa demande de travail indéterminées. Il faut donc résoudre le programme de maximisation du ménage pour trouver les quantités produites et échangées à l'équilibre.

Le consommateur ne perçoit aucun profit de la firme, et sa demande de bien et son offre de travail d'équilibre sont données en conséquence par :

$$x(w^\star) = 24a\alpha \quad \text{et} \quad L(w^\star) = 24\alpha$$

qui sont les quantités d'équilibre. Le modèle a donc été résolu de façon dichotomique : le côté production nous a donné le prix d'équilibre, le côté consommation nous a fourni les quantités d'équilibre.

10.2.5.3 Rendements croissants

Supposons maintenant que la technique de production est à rendements croissants : $x = L^2$. La situation Pareto optimale est la solution du problème suivant :

$$\begin{array}{rl} \max_{x,L} & u(x, 24 - L) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & L^2 \\ L & \leq & 24 \end{array} \right. \end{array}$$

Ce programme est équivalent à simplement maximiser $L^{2\alpha}(24 - L)^{1-\alpha}$ sous la contrainte $L \leq 24$, ou, si nous prenons le logarithme de la fonction objectif (ce qui donne évidemment la même solution), maximiser $2\alpha \log(L)(1 - \alpha)\log(24 - L)$ sous la contrainte $L \leq 24$. En supposant un optimum intérieur, nous obtenons comme condition de premier ordre :

$$\frac{2\alpha}{L} = \frac{1 - \alpha}{24 - L}$$

soit $L^\star = \frac{2\alpha}{1+\alpha}24$. Cette solution est bien intérieure, c'est-à-dire $L^\star < 24$, car $\frac{2\alpha}{1+\alpha} < 1$ si $\alpha < 1$. En reportant dans la fonction de production, nous obtenons une production $x^\star$ égale à $\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha}24\right)^2$.

Notons qu'égaliser le TMS de l'agent au TMT du producteur, comme le suggèrait le graphique 10.8, aurait donné bien s–r ici la même solution :

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha}\frac{24 - L}{x} = 2L$$

Essayons de décentraliser cette allocation au moyen d'un système de marchés. Le consommateur possède toutes les dotations initiales de cette économie, à savoir le travail. Sa contrainte budgétaire s'écrit donc (rappelons que dans cette économie le prix du bien est normalisé à 1) :

$$x + w(24 - L) = 24w + \pi$$

où π est le profit de l'entreprise.

La résolution du problème de maximisation de Robinson-consommateur dans l'économie concurentielle permet de trouver très simplement que son offre de travail est égale à $\alpha(24w + \pi)/w$.

Si nous égalisons l'offre de travail de Robinson-consommateur à $L^\star$, c'est-à-dire la quantité de travail optimale, nous voyons que, pour que cette égalité soit possible, il faut que $\pi \leq 0$. Ainsi, l'optimum de Pareto n'est décentralisable que si l'entreprise "admet" de faire des profits négatifs, ce qui n'est bien s–r pas le cas. Il nous faut ainsi en conclure que l'optimum n'est pas décentralisable au moyen du seul système de prix.

10.3 Un modèle d'équilibre général avec production

Nous généralisons maintenant les résultats de la section précédente à un modèle à plusieurs biens et plusieurs agents.

10.3.1 Les acteurs économiques

Nous rappelons rapidement ici certains résultats établis dans les chapitres 2 et 3. Commençons par le secteur productif. Chaque entreprise f a une fonction d'offre continue : $y_f(p)$. Soit $y_g(p) = \sum_{f=1}^{F} y_f(p)$ la fonction d'offre agrégée et $Y_g = \sum_{f=1}^{F} Y_f$ l'ensemble de production agrégé. Rappelons que la fonction d'offre provient de la maximisation du profit sous la contrainte que le plan de production optimal appartienne à l'ensemble des productions possibles. Le comportement d'offre (lorsque la maximisation du profit a une solution) d'une entreprise peut être décrit par une fonction lorsque l'ensemble de production est strictement convexe.

Enfin, il est possible d'agréger les entreprises, ce qui nous donne en particulier le résultat que le profit global dégagé par les producteurs est maximal lorsque chaque producteur maximise son profit. Cette propriété nous servira dans la démonstration du premier théorème du bien-être.

Dans notre étude des économies d'échange, nous avions supposé que les consommateurs disposaient de dotations initiales en biens. Dans le cas d'une économie avec production traité ici, nous maintenons cette hypothèse tout en en donnant une interprétation plus large. En particulier, un consommateur vend son travail aux entreprises. Afin de garder les mêmes conventions de signe qu'auparavant, nous supposerons que le travail est un "bien négatif" : c'est un input pour la firme, sa quantité étant donc comptabilisée négativement. Il possède une désutilité pour le consommateur, pour qui le travail n'est que le complément du loisir, qui, lui, intervient positivement dans la fonction d'utilité.

Les autres facteurs de production sont traités de la même manière, à savoir qu'ils sont comptabilisés négativement dans les plans de production dans lesquels ils sont utilisés et positivement lorsqu'ils sont détenus par les ménages. Si le bien 1 est par exemple le blé, nous noterons $x_h^1 \geq 0$ la consommation de bien par un ménage et y_f^1 la production nette de blé dans l'économie, à savoir la production moins le blé utilisé dans le processus de production (les semences). y_f^1 peut être positif ou négatif selon que la récolte est supérieure ou inférieure au blé utilisé comme semences. Au total, la condition d'équilibre sur le marché du blé s'écrira : $\sum_h x_h^1 = \sum_h y_h^1 + \sum_h e_h^1$, où e_h^1 est la dotation initiale en blé du consommateur h.

Un autre élément nouveau concerne la redistribution des profits des entreprises aux consommateurs. Nous supposons que chaque consommateur h détient une part θ_{hf} de l'entreprise f, qui lui donne droit à une partie des profits de cette dernière. Nous obtenons évidemment : $\sum_{h=1}^{H} \theta_{hf} = 1$ pour tout f, ce qui signifie simplement que toute entreprise est détenue à 100% par les ménages.

Le programme du consommateur h s'écrit alors :

$$\begin{array}{rl} \max_{x_h} & u_h(x_h) \\ \text{s.c.} & p\,(x_h - e_h) = \sum_{f=1}^{F} \theta_{hf}\pi_f(p) \end{array}$$

La solution de ce programme, sous les hypothèses étudiées dans le chapitre 2, est une fonction de demande continue $x_h(p)$.

Comme nous l'avons rappelé plus haut, le vecteur x_h inclut le loisir $\ell = 24 - L$. Le consommateur a une dotation initiale de loisir de 24 heures. Alternativement, nous pouvons écrire la fonction objectif et la contrainte budgétaire en $24 - L$ $(L > 0)$, avec une dotation initiale de travail égale à zéro.

10.3.2 L'équilibre

La notion d'équilibre est similaire à celle développée dans le cadre d'une économie d'échange : il s'agit d'un système de prix et d'une allocation tels que les agents maximisent leur fonction objectif respectives, et l'allocation en découlant est réalisable.

Définition : *Un équilibre concurrentiel est un vecteur de prix* $p^\star$ *et une allocation* $\left(x^\star, y^\star\right) \in \mathbb{R}_+^{CH} \times \mathbb{R}^{CF}$ *tels que :*

- *Etant donné* $p^\star$, $y_f^\star$ *est une solution au problème de maximisation* $\max_{y_f} \pi(p^\star) \equiv p^\star y_f$ *s.c.* $y_f \in Y_f$ *pour tout* f.
- *Etant donné* $p^\star$, $x_h^\star$ *est une solution au problème de maximisation* $\max_{x_h} u_h(x_h)$ *s.c.* $p^\star(x_h - e_h) = \sum_{f=1}^{F} \theta_{hf}(p^\star y_f^\star)$ *pour tout* h.
- $\sum_{h=1}^{H} x_h^\star(p) = \sum_{h=1}^{H} e_h + \sum_{f=1}^{F} y_f^\star(p)$

La fonction de demande excédentaire, $z(p)$, s'écrit maintenant :

$$z(p) = \sum_h x_h(p) - \sum_h e_h - \sum_f y_f(p)$$

Cette fonction est continue et satisfait la loi de Walras :

$$pz(p) = 0$$

En effet, $p\,(x_h - e_h) = \sum_{f=1}^{F} \theta_{hf}\pi_f(p)$ pour tout h. En sommant sur h nous obtenons :

$$\sum_{h=1}^{H} p\,(x_h(p) - e_h) = \sum_{h=1}^{H}\sum_{f=1}^{F} \theta_{hf}\pi_f(p)$$

soit, puisque $\sum_{h=1}^{H} \theta_{hf} = 1$,

$$\sum_{h=1}^{H} p\left(x_h(p) - e_h\right) = \sum_{f=1}^{F} \pi_f(p)$$

ce qui donne alors :

$$\sum_h p x_h(p) - \sum_h p e_h - \sum_f p y_f(p) = 0$$

ce qui est bien l'expression de la loi de Walras.

La fonction de demande excédentaire étant continue et satisfaisant la loi de Walras, nous pouvons appliquer un raisonnement similaire à celui fait dans le cadre d'une économie d'échange pour démontrer l'existence d'un équilibre, c'est-à-dire l'existence de (p, x, y) tel que étant donné p, x_h est une solution au problème du consommateur pour tout h et y_f est une solution au problème du producteur pour tout f, et $z(p) = 0$.

La seule hypothèse implicite qui soit vraiment problématique est celle de stricte convexité des ensembles de production faite pour obtenir des *fonctions* de production continues. Cette hypothèse exclut notamment les rendements constants. En effet, dans le cas de rendements constants, nous avons vu dans le chapitre 3 que le comportement d'offre ne pouvait être décrit au moyen d'une fonction[66]. Il est cependant possible de démontrer un résultat d'existence plus général :

Théorème : *Supposons que :*

(i) u_h *est strictement quasi-concave, strictement croissante, et continue pour tout* h,
(ii) $e_h \gg 0$ *pour tout* h,
(iii) $0 \in Y_f$ *pour tout* f,
(iv) Y_f *est fermé et convexe pour tout* f,
(v) $Y_f \cap (-Y_f) = \{0\}$ *pour tout* f,
(vi) $\left(-\mathbb{R}_+^C\right) \subset Y_f$ *pour tout* f

alors il existe un équilibre concurrentiel.

Les hypothèses (i) et (ii) sont utilisées pour démontrer la continuité des fonctions de demande. L'hypothèse (iii) signifie qu'il est toujours laissé à la firme la possibilité de ne rien produire avec un coût nul. L'hypothèse (iv) assure la continuité des correspondances d'offre, et n'exclut pas la possibilité de rendements constants (cas où Y_f n'est pas strictement convexe). La notion de correspondance est plus générale que celle de fonction : elle inclut la possibilité que pour un vecteur de prix donné, il y ait plusieurs solutions au problème de maximisation du profit. L'hypothèse (v) sert à démontrer que l'ensemble des allocations réalisables est borné. Elle signifie qu'il est impossible de produire un vecteur y, puis d'en utiliser les outputs comme inputs afin de produire les inputs nécessaires à la production de y. Enfin, l'hypothèse (vi) est celle de libre disposition des biens.

Ce théorème couvre donc le cas des rendements constants. Il se trouve qu'une

[66] Dans le cas d'un bien produit à l'aide d'un unique facteur de production, nous avions montré que l'offre était indéterminée lorsque le prix relatif du facteur de production et du bien produit est égal à la productivité de ce même facteur.

économie à rendements constants exhibe certaines propriétés qui lui sont propres et que nous étudions dans le paragraphe suivant.

10.3.3 Economies à rendements constants

Dans un modèle d'équilibre général, la détermination des prix d'équilibre dépend à la fois de la technologie de production et des caractéristiques de la demande, et cela sans qu'il soit possible d'expliciter cette dépendance de manière détaillée.

Par exemple, à l'équilibre, chaque entreprise égalise la productivité marginale d'un input au rapport du prix de cet input avec celui de l'output. Cependant, la productivité marginale d'un facteur de production dépend, en général, du niveau de la production, et donc de la demande.

Ceci n'est cependant pas le cas si les rendements d'échelle sont constants. Dans ce cas, la productivité marginale des facteurs de production est constante, et ne dépend donc pas de la demande. Les prix relatifs des biens sont alors fixés par la technologie, indépendamment de toute considération de demande.

Supposons que les C biens produits le sont à partir de P facteurs primaires, non produits (tels que le travail, la terre,...), et des biens produits eux-mêmes (ceux-ci sont alors des biens intermédiaires). Supposons par ailleurs qu'il n'existe pas de production jointe (chaque firme ne produit qu'un bien), et que chaque facteur primaire est utilisé pour produire chaque bien.

Soient $C_f(.)$ la fonction de coût de l'entreprise f, $p = (p^1, ..., p^C)$ le vecteur de prix des biens finals ou intermédiaires, et $q = (q^1, ..., q^P)$ le vecteur de prix des biens primaires.

Le fait que la technique de production de l'entreprise f est à rendements constants s'exprime au moyen de l'hypothèse suivante :

$$C_f(p, q, y_f) = \gamma_f(p, q)y_f$$

$\gamma_f(p, q)$ est donc le coût unitaire (ou coût moyen) de production, égal bien s–r au coût marginal, puisque nous sommes en rendements constants. C'est évidemment une fonction homogène de degré un : si tous les prix sont multipliés par un scalaire, le coût unitaire augmente proportionnellement.

Supposons qu'à l'équilibre, $y_f > 0$. Dans ce cas, nous avons établi que, en présence de rendements constants, le profit de la firme f doit être nul. Nous avons donc, en notant p^f le prix du bien produit par la firme f :

$$p^f y_f - \gamma_f(p, q)y_f = 0$$

soit, pour tout f :

$$p^f = \gamma_f(p, q) \quad (*)$$

.

Nous avons ainsi F relations entre les prix, provenant uniquement de considérations techniques (il n'a été fait allusion à la demande nulle part pour le moment). Il convient également d'observer que notre hypothèse qu'une firme produit un seul bien, à laquelle nous ajoutons celle que tout bien n'est produit que par une entreprise, implique $F = C$. Il existe C relations entre les prix des biens.

Si le système composé des C équations $(*)$ a une solution, alors p peut s'exprimer en fonction de q. La structure de la demande n'intervient que pour déterminer le niveau d'équilibre des prix q. Elle n'a d'influence que sur les prix relatifs des différents facteurs non produits.

De plus, les relations $(*)$ déterminent p de manière unique, une fois q donné. Ce résultat provient de l'homogénéité de degré un des fonctions γ_f et du fait qu'elles sont croissantes par rapport à (p, q).

Plus rigoureusement, supposons que pour une même valeur de q, le système $(*)$ détermine deux vecteurs de prix différents, p et p'. Il existe alors $\bar{f}$ tel que $p^{\bar{f}} \neq p'^{\bar{f}}$. Soit $\lambda = \frac{p^n}{p'^n} = \max_f \frac{p^f}{p'^f}$. Nous obtenons donc :

$$p^n = \lambda p'^n = \lambda \gamma_n(p', q) = \gamma_n(\lambda p', \lambda q) > \gamma_n(p, q) = p^n$$

En effet, λ est supérieur à un, γ_n est strictement croissante et $(\lambda p', \lambda q) > (p, q)$, d'où l'inégalité ci-dessus et la contradiction. Le prix p est donc défini de manière unique pour un vecteur q donné.

Nous ajoutons maintenant l'hypothèse que $P = 1$, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un seul facteur de production primaire (par exemple le travail). Les fonctions de coût étant homogènes de degré un, nous pouvons normaliser le vecteur (p, q) en posant $q = 1$, c'est-à-dire en prenant l'unique facteur primaire comme numéraire. Dans ce cas, le vecteur de prix $(p, 1)$ est entièrement déterminé par les relations $(*)$, qui ont une solution puisque nous savons par le théorème du paragraphe précédent qu'il existe un équilibre. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, dit théorème de non-substitution de Samuelson :

Proposition (théorème de non-substitution) : *Dans une économie à rendements constants, sans production jointe et à un seul facteur de production primaire utilisé dans toutes les branches, les prix de tous les biens effectivement produits sont entièrement déterminés par la technologie ; plus précisément, le vecteur d'équilibre p est l'unique solution des relations : $p_f = \gamma_f(p, 1)$ pour tout f.*

Le prix de chaque bien est alors entièrement déterminé par son contenu, direct et indirect, en facteur primaire de production.

10.4 Optimalité de l'équilibre

Nous montrons dans cette section que les deux théorèmes du bien-être que nous avons démontrés dans le cadre d'une économie d'échange se généralisent naturellement au cas d'une économie avec production si les rendements ne sont pas croissants.

10.4.1 Le premier théorème du bien-être

Il nous faut tout d'abord définir la notion d'optimum de Pareto dans le cadre d'une économie avec production.

Une allocation (x, y) est réalisable si $\sum_h x_h - \sum_h e_h - \sum_f y_f = 0$.

Définition : *Une allocation réalisable (x, y) est Pareto optimale s'il n'existe pas d'autre allocation réalisable (x', y') telle que $u_h(x'_h) \geq u_h(x_h) \quad \forall h$, avec une inégalité stricte pour au moins un h.*

Le premier théorème du bien-être s'énonce alors ainsi :

Théorème : *Supposons les fonctions d'utilité croissantes. Si (p, x, y) est un équilibre concurrentiel walrasien, alors (x, y) est Pareto optimale.*

Démonstration : Supposons que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire qu'il existe une allocation réalisable (x', y') telle que $u_h(x'_h) \geq u_h(x_h)$ pour tout h, avec une inégalité stricte pour au moins un h. Nous avons alors :

$$\begin{array}{ll} px'_h \geq px_h = pe_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf}\pi_f & \text{pour tout } h \\ px'_h > px_h = pe_h + \sum_{f=1}^F \theta_{hf}\pi_f & \text{pour au moins un } h \end{array}$$

En additionnant, nous obtenons :

$$\sum_h px'_h > \sum_h pe_h + \sum_h \sum_f \theta_{hf} p y_f$$

soit, puisque $\sum_h \theta_{hf} = 1 \quad \forall f$:

$$p \sum_h x'_h > p \sum_h e_h + p \sum_f y_f$$

L'allocation (x', y') étant réalisable, ceci donne :

$$p\left(\sum_h e_h + \sum_f y'_f\right) > p\left(\sum_h e_h + \sum_f y_f\right)$$

c'est-à-dire :

$$p \sum_f y'_f > p \sum_f y_f$$

Le profit agrégé serait donc supérieur pour l'allocation (x', y'). Mais ceci contredit le fait que y_f est la solution au problème de maximisation du profit pour tout f, comme nous l'avons démontré dans le chapitre 3. (x, y) est donc un optimum de Pareto.

Comme pour le cas de pur échange, ce théorème n'a de sens que si un équilibre concurrentiel existe ; il n'est donc pas pertinent pour les économies à rendements croissants, et ne s'applique que dans le cas de rendements décroissants et constants.

Le premier théorème du bien-être nous dit donc, dans ce cadre, que le système de prix est un bon signal non seulement pour l'allocation des ressources entre les ménages à des fins de consommation (ce que nous savions déjà par l'étude des économies d'échange) mais également pour l'allocation des ressources à des fins de production.

Les entreprises n'ont besoin de connaître que les prix pour guider leur choix de production. Les prix de marché suffisent à eux seuls à bien coordonner la production et la consommation dans une économie concurrentielle.

10.4.2 Le second théorème du bien-être

Le second théorème du bien-être est également vrai dans une économie avec production, sous l'hypothèse de convexité des préférences et des ensembles de production :

Théorème : *Soit* $(x^\star, y^\star)$ *une allocation Pareto optimale telle que* $x^\star \gg 0$. *Supposons que les fonctions d'utilité sont quasi-concaves, continues et strictement croissantes, et que tous les ensembles de production sont convexes. Alors, il existe des prix* $p^\star$ *tels que :*

(i) *si* $u_h(x'_h) > u_h(x^\star_h)$ *alors* $p^\star x'_h > p^\star x^\star_h \quad \forall h$, *et*
(ii) *si* $y'_f \in Y_f$ *alors* $p^\star y^\star_f \geq p^\star y'_f \quad \forall f$.

La condition (i) nous dit que $x^\star_h$ maximise l'utilité de h au prix $p^\star$, tandis que la condition (ii) exprime le fait que les firmes maximisent leur profit.

Toute allocation Pareto optimale peut donc être obtenue comme un équilibre de marché, après redistribution des dotations initiales (qui incluent maintenant les parts de chaque firme détenues par chaque agent).

Démonstration : Nous ne faisons que donner l'idée générale guidant la démonstration. Comme dans le cas d'une économie d'échange pur, notons P l'ensemble des paniers strictement préférés à $x^\star$.

Soit $F = \left\{ e + \sum_{f=1}^{F} y_f \,; y_f \in Y_f \;\; \forall f \right\}$ l'ensemble des allocations x réalisables.

P et F sont convexes, et puisque $(x^\star, y^\star)$ est un optimum de Pareto, disjoints. Nous pouvons alors appliquer un théorème de séparation entre ensembles convexes (semblable à celui entre un ensemble convexe et un point appliqué dans le cas d'échange pur), et trouver un vecteur $p^\star \neq 0$ tel que :

$$p^\star z'^\star z'' \quad \forall z' \in P \text{ et } \forall z'' \in F$$

Le fait que les fonctions d'utilité soient croissantes permet de démontrer que $p > 0$. Une construction similaire à celle faite dans le cas d'échange pur montre que, à ce prix, la solution du problème de maximisation des consommateurs est $x^\star$, et que la solution à celui des producteurs est $y^\star$.

Ainsi, l'adjonction d'un secteur productif ne remet pas en cause le fait que tout optimum est décentralisable par un système de marchés. Nous avions vu qu'une hypothèse essentielle, dans le cas d'économies d'échange, était la convexité des préférences. Cette idée, à savoir que la convexité est nécessaire pour établir le second théorème du bien-être, se retrouve ici. Il faut en effet que les ensembles de production soient convexes pour que ce résultat soit vrai. Ainsi, la décentralisation d'un optimum de Pareto au seul moyen d'un système de prix peut ne pas être possible en présence de rendements croissants, comme nous l'avions déjà observé dans l'économie de Robinson.

Remarquons également que le théorème n'indique pas comment le planificateur s'y prend pour redistribuer de la richesse à certains agents. Il suffit qu'il trouve des transferts (forfaitaires) tels que chaque agent puisse s'acheter $x_h^\star$ au prix $p^\star$. Le théorème nous dit simplement que de tels transferts existent, à défaut de donner un moyen de les calculer.

10.4.3 Caractérisation de l'optimum

Il est possible de caractériser une allocation optimale au sens de Pareto un peu plus avant, en suivant un raisonnement similaire à celui de la section **??** du chapitre 8 pour une économie d'échange.

Afin d'essayer de garder le maximum de généralité (et notamment de ne pas spécifier *a priori* quels sont les biens produits par chaque producteur), nous adoptons la représentation suivante des ensembles de production. Soit F_f une fonction, supposée différentiable, de $\mathbb{R}^C$ dans $\mathbb{R}$ qui décrit l'ensemble des plans de production de l'entreprise f. $F_f\left(y^1,\ldots,y^C\right) \leq 0$ signifie que le plan de production $\left(y_f^1,\ldots,y_f^C\right)$ est réalisable. La convexité de l'ensemble de production se traduit par la convexité de F_f[67]. Enfin, $F_f\left(y^1,\ldots,y^C\right) = 0$ signifie que le plan de production $\left(y_f^1,\ldots,y_f^C\right)$ est efficace. Nous supposerons par ailleurs que $F_f(0) \leq 0$.

Un optimum de Pareto intérieur (*i.e.* tel que $x \gg 0$) est alors une solution au problème de maximisation suivant[68] :

$$\max_{x,y} \quad \sum_h a_h u_h(x_h)$$
$$\text{s.c.} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} F_f\left(y^1,\ldots,y^C\right) & = & 0 \quad \forall f \\ \sum_h (x_h^1 - e_h^1) & = & \sum_f y_f^1 \\ & \vdots & \\ \sum_h (x_h^C - e_h^C) & = & \sum_f y_f^C \end{array} \right.$$

Remarquer que nous avons posé le problème en saturant la contrainte de production de chaque entreprise, ce qui signifie que chaque entreprise produit sur sa frontière de production. En notant μ_f le multiplicateur associé à la fonction de production de l'entreprise f et λ^c le multiplicateur associé à la contrainte de ressource sur le bien c, les conditions de premier ordre de ce problème sont :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_h \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c} - \lambda^c & = & 0 \quad \forall c, \ \forall h \\ \mu_f \frac{\partial F_f(y_f)}{\partial y_f^c} - \lambda^c & = & 0 \quad \forall c, \ \forall f \end{array} \right.$$

[67] Noter que la représentation est quelque peu différente de celle adoptée dans le chapitre 3, où la convexité de l'ensemble de production équivalait à la concavité de la fonction de production. Pour plus de détails sur le lien entre la convexité ou la concavité d'une fonction et la convexité de l'ensemble situé au-dessus ou au-dessous de cette fonction, voir le chapitre 16.

[68] Un exercice intéressant est de développer la méthode alternative utilisée dans le chapitre 8 – basée sur le programme **P** de la section 8.5.1–, permettant de caractériser les optima de Pareto dans ce contexte. En particulier, tous les résultats énoncés ci-après peuvent également être obtenus en suivant cette méthode.

ce qui donne finalement :

$$\frac{\partial u_h(x_h)/\partial x_h^c}{\partial u_h(x_h)/\partial x_h^{c'}} = \frac{\partial F_f(y_f)/\partial y^c}{\partial F_f(y_f)/\partial y^{c'}} \quad \forall c, c', \quad \forall h, f$$

Nous obtenons ainsi le résultat que le taux marginal de substitution de chaque agent entre deux biens quelconques doit être égal au taux marginal de transformation de chaque entreprise entre ces deux biens.

La condition mise en évidence ci-dessus implique que les TMS des agents sont égaux entre eux, condition d'efficacité allocative que nous avons déjà rencontrée dans une économie d'échange : étant donné un certain montant produit, la répartition optimale de ce montant doit être telle que les TMS des agents sont égaux entre eux. S'ajoute à cette condition une condition d'efficacité productive, qui dit que le plan de production doit être efficace et que le TMT doit être égal au TMS des agents. Ceci n'est que la généralisation de ce qui a été vu lors de l'étude de l'économie de Robinson Crusoe. L'optimum était alors caractérisé par la tangence de la fonction de production avec une courbe d'indifférence.

Enfin, nous retrouvons ici aussi l'interprétation du prix comme indicateur de rareté (subjective) des biens. En effet, le multiplicateur associé à la contrainte de ressource sur un bien donné est égal à l'augmentation du bien-être social si cette contrainte était relâchée (il suffit d'appliquer le théorème de l'enveloppe, comme nous l'avions développé dans le chapitre 8). Ainsi, l'interprétation donnée dans le cadre d'une économie d'échange reste valable ici.

10.5 Un exemple

Soit une économie à deux biens, x^1 et x^2. Il existe deux consommateurs possédant tout deux la même fonction d'utilité, $u_h(x_h^1, x_h^2) = (x_h^1)^{1/2}(x_h^2)^{1/2}$ pour $h = 1, 2$. Il existe également une entreprise qui produit du bien 1 à partir du bien 2 selon la technique $y^1 = 2(z^2)^{1/2}$, où y^1 est la production de bien 1 et z^2 l'input en bien 2.

Le premier consommateur détient intégralement l'entreprise. Par ailleurs, il possède le vecteur de dotations initiales $(10, 20)$. Le second consommateur pour sa part détient un vecteur de dotations initiales égal à $(10, 32)$.

La firme résout le problème :

$$\text{Max}_{y^1, z^2} \;\; p^1 y^1 - p^2 z^2 \qquad \text{s.c.} \;\; y^1 = 2\left(z^2\right)^{1/2}$$

En remplaçant y^1 dans la fonction objectif par la valeur donnée par la contrainte, nous obtenons :

$$\text{Max}_{z^2} \;\; p^1 2\left(z^2\right)^{1/2} - p^2 z^2$$

ce qui donne (π est le profit de la firme) :

$$z^2 = \left(\frac{p^1}{p^2}\right)^2 \quad y^1 = 2\frac{p^1}{p^2} \quad \pi = \frac{(p^1)^2}{p^2}$$

Le problème de maximisation du premier agent s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}&\max\,(x_1^1)^{1/2}\,(x_2^1)^{1/2}\\ &\text{s.c.}\quad p^1x_1^1+p^2x_2^1=p^1e_1^1+p^2e_2^1+\pi\end{aligned}$$

La solution de ce problème est :

$$x_1^1=\frac{10p^1+20p^2+\frac{(p^1)^2}{p^2}}{2p^1}\qquad x_1^2=\frac{10p^1+20p^2+\frac{(p^1)^2}{p^2}}{2p^2}$$

De même, la résolution du programme du second consommateur donne :

$$x_2^1=\frac{10p^1+32p^2}{2p^1}\qquad x_2^2=\frac{10p^1+32p^2}{2p^2}$$

Nous pouvons maintenant calculer l'équilibre du modèle (nous normaliserons $p^2=1$). L'équilibre est donné par le système suivant :

$$\begin{aligned}&x_1^1+x_2^1=e_1^1+e_2^1+y^1\\ &x_1^2+x_2^2+z^2=e_1^2+e_2^2\end{aligned}$$

En remplaçant les x, y et z par leurs valeurs, nous arrivons à l'équation finale (grâce à la loi de Walras, il suffit d'étudier une des deux équations) :

$$20p^1+3\frac{(p^1)^2}{p^2}-52p^2=0$$

soit si $p^2=1$, $p^1=2$, $x_1^1=11$, $x_1^2=22$, $x_2^1=13$, $x_2^2=26$, $z^2=4$ et $y^1=4$.

Le TMS de chaque consommateur à l'équilibre est égal à :

$$TMS_h=\frac{\partial u_h/\partial x_h^1}{\partial u_h/\partial x_h^2}=\frac{x_h^2}{x_h^1}=2=\frac{p^1}{p^2}\quad h=1,2$$

Le TMT à l'équilibre s'écrit quant à lui :

$$TMT=\frac{1}{\partial y/\partial z}=\frac{1}{(z^2)^{(-1/2)}}=(z^2)^{1/2}=2=\frac{p^1}{p^2}$$

Nous obtenons l'égalité des TMS et du TMT ; l'allocation d'équilibre est donc Pareto optimale.

10.6 Conclusion

Ce chapitre aura permis de constater que, hormis le cas de rendements croissants, l'introduction de la production dans le modèle d'échange ne pose pas de problème, et conduit aux mêmes conclusions. Ainsi, un équilibre existe et est optimal. De plus, chaque agent n'a besoin de connaître que le prix d'équilibre pour prendre ses décisions. Ceci est une conséquence de l'hypothèse de concurrence. En effet, si nous avions cherché à introduire une structure productive différente, basée sur l'idée que la concurrence entre les entreprises est en général imparfaite, ce résultat ne serait plus vrai. En effet, tout modèle de concurrence imparfaite repose sur l'idée qu'une firme lorsqu'elle prend sa décision de production doit se faire une idée précise des décisions de chacun des autres agents. Le vecteur de prix ne résume plus toutes ces informations si la concurrence n'est pas parfaite.

Enfin, le cas qui pose problème est celui des rendements croissants. Dans ce cas, le message "la concurrence est optimale" n'est plus vrai et le fonctionnement des marchés ne conduit plus à un optimum, puisqu'un équilibre n'existe plus nécessairement. Le planificateur qui voudrait décentraliser un optimum particulier doit alors avoir recours à d'autres instruments que la simple manipulation des dotations et l'établissement du bon système de prix, comme par exemple l'imposition de contraintes quantitatives sur la production des entreprises en rendements croissants.

Chapitre 11

Externalités et biens publics

11.1 Introduction

Commence avec ce chapitre l'étude de plusieurs extensions du modèle étudié jusqu'à présent. Nous avons établi, dans les chapitres précédents un certain nombre de propriétés, valables dans un cadre donné, bien défini. Nous nous interrogeons maintenant sur la robustesse de ces résultats lorsque les hypothèses fondamentales du modèle sont modifiées. Le présent chapitre introduit la possibilité d'effets externes. Nous verrons que la présence de tels effets invalident les théorèmes du bien-être. Nous traiterons ensuite d'économies temporelles, avec ou sans incertitude sur le futur. Nous verrons alors que le modèle statique peut s'adapter très simplement, mais au prix d'une interprétation assez insoutenable de la notion de marchés. Nous serons alors contraints de modifier le cadre institutionnel, ce qui nous amènera à nous concentrer sur le mode de formation des anticipations des agents. Nous étudierons également un cas non traité par la théorie que nous avons développée pour l'instant, le cas d'asymétries d'information entre les agents. Enfin, nous terminerons par une analyse dynamique dans laquelle les théorèmes du bien-être ne sont plus valables non plus. Ainsi, après avoir élaboré la théorie sous sa forme la plus simple, nous l'enrichissons dans différentes directions. Afin de nous concentrer sur les problèmes économiques sous-jacents à ces différentes extensions, nous traiterons essentiellement de cas simples. Ainsi, nous abandonnons l'approche relativement générale menée précédemment et traitons dorénavant d'exemples représentatifs d'un certain nombre de difficultés. Nous commençons par les externalités et les biens publics.

La théorie de l'équilibre général traite de l'allocation des ressources rarers dans un cadre décentralisé. Dans le cadre de base que nous avons développé jusqu'à présent, les agents économiques n'interagissent qu'au travers de l'effet de chacune de leurs décisions sur les prix. Lorsque les actions d'un agent affectent un autre agent autrement que par leurs effets sur le vecteur de prix, c'est-à-dire lorsqu'il existe une *externalité* entre ces agents, les théorèmes du bien-être ne sont plus valables. La prise en compte de ces externalités modifie donc sensiblement les résultats de la théorie.

Un autre cas ignoré jusqu'à présent, mais qui mène à des résultats très différents, est celui des biens publics. Les biens que nous avons étudiés sont des biens privés, dans le sens où chaque unité d'un bien n'est consommée que par un unique agent. Il existe cependant des biens qui sont publics “par nature”, c'est-à-dire que le bien est consommé par tous les agents simultanément ; c'est le cas de l'éclairage public, de la défense nationale,... Ce chapitre traite de ces deux cas successivement.

11.2 Les externalités

11.2.1 La nature des externalités

Définition[69] : *Tout effet indirect d'une activité de production ou de consommation sur une fonction d'utilité, un ensemble de consommation, ou un ensemble de production est appelé externalité (ou effet externe). L'effet doit être indirect en ce sens qu'il est créé par un autre agent que celui qui est affecté, et qu'il n'agit pas par l'intermédiaire du système de prix.*

Des exemples d'externalités souvent cités sont le bruit que peut occasionner la chaîne hi-fi d'une personne chez son voisin, la fumée, la pollution d'une rivière qu'une entreprise "impose" aux utilisateurs de la rivière situés en aval...

Un point important, implicite dans cette définition, est qu'une externalité est contingente à la définition des agents économiques et à l'existence des marchés sur lesquels ces agents opèrent. En effet, si deux entreprises entre lesquelles existent des effets externes décident de fusionner, alors ces effets seront internalisés, c'est-à-dire qu'ils deviennent de simples contraintes techniques de l'entreprise fusionnée. De même, s'il existait un marché de droits de pollution, c'est-à-dire si les fumeurs devaient "acheter" le droit de fumer aux non-fumeurs, alors l'externalité disparaîtrait : l'allocation de la fumée se ferait au travers du système de prix.

La présence d'externalités dans l'économie invalide les théorèmes du bien-être. En particulier, un équilibre concurrentiel n'est plus un optimum de Pareto, comme nous allons le voir à l'aide de deux exemples.

11.2.2 Equilibre avec externalités : deux exemples

11.2.2.1 Une économie d'échange

Considérons une économie à deux biens et deux agents. La consommation de bien 1 par le second consommateur entraîne une perte d'utilité pour le premier consommateur. En conséquence, la fonction d'utilité de ce dernier dépend de x_2^1, et nous la prendrons égale à :

$$u_1(x_1\,;x_2) = \left(x_1^1\right)^{1/2}\left(x_1^2\right)^{1/2} - x_2^1$$

La fonction d'utilité du second consommateur est égale à :

$$u_2(x_2) = \left(x_2^1\right)^{1/2}\left(x_2^2\right)^{1/2}$$

Enfin, les dotations initiales des deux agents sont égales à :

$$e_1 = (1,0) \quad \text{et} \quad e_2 = (0,1)$$

[69] Cette définition est empruntée à J.J. Laffont, *Cours de théorie microéconomique*, éditions Economica, 1985.

Un équilibre concurrentiel de cette économie est un vecteur de prix p et une allocation x tels que :

- x_1 maximise l'utilité du premier consommateur sous sa contrainte budgétaire, x_2 maximise celle du second consommateur,
- les marchés s'apurent.

La définition d'un équilibre concurrentiel est donc la même que dans une économie sans externalité. Il faut en particulier remarquer que le second consommateur ne prend pas en compte, dans son problème de maximisation, le fait que la fonction d'utilité du premier consommateur dépend de sa consommation en bien 1.

En résolvant les deux problèmes de maximisation, nous obtenons les fonctions de demande suivantes :

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= \frac{(1/2)p^1}{p^1} \qquad \text{et} \qquad x_1^2 = \frac{(1/2)p^1}{p^2} \\
x_2^1 &= \frac{(1/2)p^1}{p^2} \qquad \text{et} \qquad x_2^2 = \frac{(1/2)p^2}{p^2}
\end{aligned}
$$

Les fonctions de demande sont les mêmes que dans l'économie concurrentielle sans externalité. Ceci n'est cependant que la conséquence de la manière très particulière dont nous avons introduit l'externalité dans la fonction d'utilité du premier consommateur. De manière générale, les fonctions de demande obtenues peuvent très bien dépendre directement du niveau de l'externalité.

Les relations d'équilibre s'écrivent donc :

$$1/2 + 1/2\left(p^1/p^2\right) = 1 \quad \text{et} \quad 1/2\left(p^1/p^2\right) + 1/2 = 1$$

Ces deux équations sont en fait identiques (ce qui n'est que la conséquence de la loi de Walras). En choisissant de normaliser le prix du premier bien à 1, $p^1 = 1$, nous obtenons alors $p^\star = (1,1)$, $x_1^\star = (1/2, 1/2)$ et $x_2^\star = (1/2, 1/2)$. L'utilité de chaque agent à l'équilibre est : $u_1(x_1^\star\,; x_2^\star) = 0$ et $u_2(x_2^\star) = 1/2$.

Montrons maintenant que cet équilibre n'est pas un optimum de Pareto. Pour cela considérons l'allocation suivante : $x_1 = ((2/3, 1/5)\,; (1/3, 4/5))$ et $x_2 = (1/3, 4/5)$. Cette allocation est réalisable, et en calculant les utilités obtenues par chaque agent, nous nous apercevons que chacun a une utilité supérieure à celle qu'il avait à l'équilibre : $u_1(2/3, 1/5) \simeq 0.03$ et $u_2(1/3, 4/5) \simeq 0.52$.

L'allocation ci-dessus Pareto domine l'équilibre concurrentiel, qui n'est donc pas un optimum de Pareto. A cette allocation, le second agent consomme moins de bien 1 qu'à l'équilibre. Ceci augmente l'utilité du premier consommateur, qui est prêt à compenser le second agent en lui "donnant" plus de bien 2 qu'à l'équilibre. En d'autres termes, le prix d'équilibre ne rend pas compte de la désutilité pour le premier consommateur de la consommation de bien 1 par le second agent. En effet, bien qu'intervenant dans sa fonction d'utilité, x_2^1 n'est pas une variable de choix pour le consommateur 1. Celui-ci serait prêt à payer (aux prix donnés par l'équilibre concurrentiel) le second consommateur pour qu'il réduise sa consommation de bien 1. Mais cette opération est impossible dans un cadre concurrentiel. L'équilibre conduit donc à une situation inefficace. Il existe ainsi une place pour une intervention publique, qui permettrait une réallocation optimale des ressources.

Il aura peut-être été observé que, dans cet exemple, à l'équilibre avec externalités, les TMS des agents sont égaux. Cependant, l'allocation atteinte est sous-optimale. Ceci signifie que les conditions d'optimalité d'une allocation ne sont pas les mêmes dans une économie avec externalités et dans une économie sans externalités. Nous reviendrons sur ce point dans la section 11.2.4

11.2.2.2 Une économie avec production

Reprenons l'exemple de la section 10.5 du chapitre 10 en supposant maintenant que le second consommateur subit une externalité de la part de l'entreprise. Sa fonction d'utilité s'écrit :

$$u_2(x_2^1, x_2^2\,; z^2) = \left(x_2^1\right)^{1/2}\left(x_2^2\right)^{1/2} - 2z^2$$

Dans cette nouvelle économie, les fonctions de demande des consommateurs ne sont pas modifiées : l'agent 1 ne change pas, tandis que l'agent 2 subit une externalité qui diminue son utilité mais n'affecte pas son comportement (z^2 n'est bien s–r pas une variable de contrôle du consommateur 2). De même le comportement de la firme ne s'est pas modifié : en conséquence l'équilibre concurrentiel reste le même qu'auparavant.

A l'équilibre les utilités des agents sont respectivement égales à :

$$u_1(11, 22) = 15.56 \quad u_2(13, 26\,; 4) = 18.35 - 8 = 10.35$$

Considèrons maintenant l'allocation suivante :

$$y^1 = 2 \;\; z^2 = 1 \;\; x_1^1 = 12 \;\; x_1^2 = 22 \;\; x_2^1 = 10 \;\; x_2^2 = 29$$

Cette allocation est réalisable puisque le système suivant est vérifié :

$$\begin{array}{l} x_1^1 + x_2^1 = e_1^1 + e_2^1 + y^1 \\ x_1^2 + x_2^2 + z^2 = e_1^2 + e_2^2 \\ y^1 = 2\left(z^2\right)^{1/2} \end{array}$$

L'utilité de chaque agent à cette allocation est :

$$u_1(12, 22) = 16.24 > 15.56 \quad \text{et} \qquad u_2(10, 29\,; 1) = 17.03 - 2 = 15.03 > 10.35$$

Nous avons donc trouvé une allocation réalisable qui augmente l'utilité des deux consommateurs par rapport à celle qu'ils avaient à l'équilibre concurrentiel. Nous pouvons en déduire que, dans une économie avec production, l'équilibre concurrentiel n'est pas un optimum de Pareto en présence d'externalités.

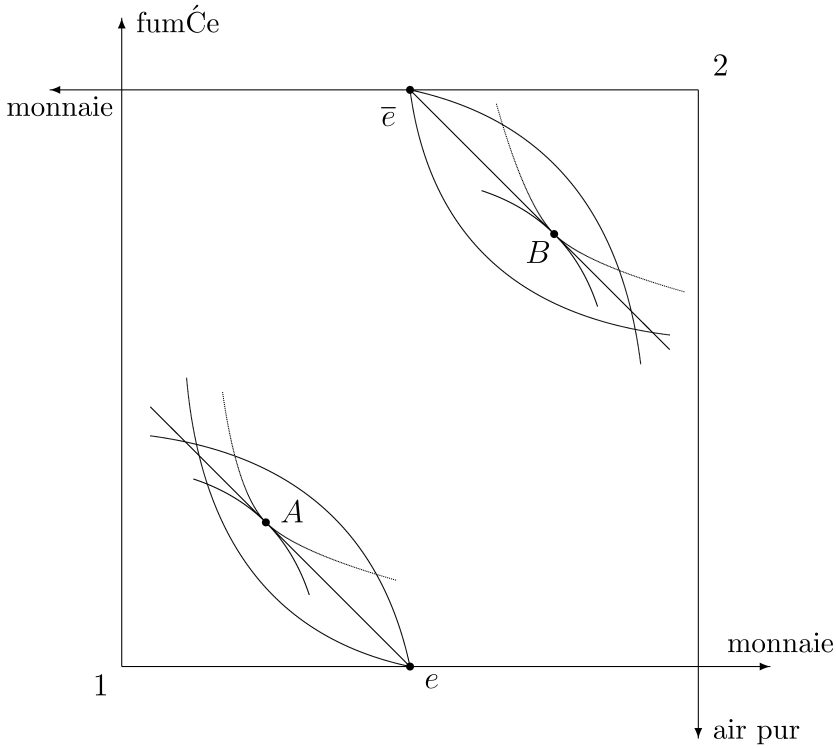
11.2.3 Externalités, droits de propriété et marchés

Est-il possible de restaurer l'efficacité de l'équilibre dans une économie où existent des externalités ? et si oui, comment ?

Une possibilité est la mise en place d'un système complet de marchés concurrentiels, qui "marchandisent" les effets externes. Une fois ces marchés créés, nous revenons dans le cadre du modèle concurrentiel élémentaire, dans lequel nous savons que l'équilibre est optimal.

Afin de comprendre en quoi consiste cette création, prenons un exemple simple[70] à deux agents et deux biens. Deux étudiants partagent un studio. L'un fume, l'autre pas. Les deux biens de l'économie sont la fumée (ou l'air pur) et la monnaie. Représentons la situation dans une boîte d'Edgeworth (diagramme 11.1). Le premier agent est le fumeur. Ses courbes d'indifférence dans le plan (monnaie, fumée) ont donc une forme classique. Le second agent subit la fumée du premier et a donc une fonction d'utilité décroissante par rapport à la fumée. L'axe (inversé) des ordonnées pour le second agent peut être interprété comme représentant l'air pur. Remarquons donc ici que les deux étudiants "consomment" la fumée du premier.

FIG. 11.1: Externalités et droits de propriété



Supposons que la dotation en monnaie soit identique pour les deux agents. Quel est alors l'équilibre concurrentiel de cette économie ? Si fumer est permis dans la chambre, l'équilibre correspond au point $\overline{e}$. En effet, s'il n'existe pas de marché de l'air pur, le premier étudiant peut fumer autant qu'il le désire, sans avoir à compenser le second pour la perte d'utilité que celui-ci subit. Aucun échange n'est donc possible, et chaque agent garde sa dotation en monnaie. S'il était interdit de fumer dans la chambre, alors

[70] Voir H. Varian, *Introduction à la microéconomie*, éditions De Boeck , 1994.

l'équilibre se situerait en $\widetilde{e}$, où chaque agent garde sa dotation en monnaie et le premier agent ne fume pas.

Les deux situations sont inefficaces : il existe des échanges mutuellement avantageux pour les deux consommateurs (les courbes d'indifférence des agents n'y sont pas tangentes). Au point $\overline{e}$, le second étudiant est prêt à payer (c'est-à-dire donner de sa dotation en monnaie) le premier pour que celui-ci fume moins, ce dernier étant d'ailleurs prêt à réduire sa consommation de tabac contre compensation monétaire ; en revanche, en $\widetilde{e}$, le premier agent est prêt à payer le second pour avoir le droit de fumer, et ce dernier est prêt à supporter un petit montant de fumée contre compensation monétaire.

Supposons maintenant qu'un marché de la fumée (ou marché de l'air pur) s'ouvre : pour pouvoir fumer, le premier étudiant doit payer le second. Cela revient à dire que la dotation en "droits sur l'air de la chambre" appartient en entier au second agent, et donc que le point de dotation initiale de l'économie est le point $\widetilde{e}$. Les échanges s'organisent, chaque mètre cube d'air pur ayant un prix en terme de monnaie. Chaque agent a donc une contrainte budgétaire dont la pente est donnée par ce prix. L'équilibre s'établit en A et est efficace.

La situation alternative est de donner au premier agent toute la dotation en "droits sur l'air de la chambre". Dans ce cas, c'est au second étudiant d'acheter des droits à l'air pur au premier, s'il veut respirer un air non vicié. Cette situation est représentée sur le graphique 11.1 par le point de dotations initiales $\overline{e}$. L'air vicié a un prix en termes monétaires, et chaque agent a donc une contrainte budgétaire dont la pente est donnée par ce prix. L'allocation d'équilibre s'établit alors au point B. Cette allocation est également optimale au sens de Pareto. Quelle que soit la répartition des droits de propriété sur l'air pur, l'allocation concurrentielle à laquelle nous arrivons est optimale. Ceci signifie que l'attribution des droits de propriétés suffit, en soi, à résoudre le problème de l'inefficacité de l'équilibre concurrentiel. En revanche, il est clair que le bien-être de chaque agent à l'équilibre dépend de la répartition des droits.

Une manière très simple de restaurer l'efficacité de l'équilibre est ainsi de créer un nombre approprié de marchés. Cette solution ne va cependant pas sans difficultés théoriques. La première est qu'il a été fait abstraction du coût de création de tels marchés. Si ce coût excède les inefficacités induites par le manque de ce marché, le créer déteriorerait le bien-être global. Ceci pose le problème théorique important de savoir quels marchés existent et pourquoi. La seconde est que, les externalités étant souvent très locales par nature (pollution d'une rivière, bruit dans un immeuble,...) supposer un comportement concurrentiel des agents sur le marché pour cette externalité semble être une hypothèse quelque peu problématique, comme le fait apparaître l'exemple précédent. Mais dans le cas où elle n'est pas faite, l'équilibre atteint ne possède plus nécessairement de propriétés d'optimalité. Nous reviendrons cependant sur ce point dans la section 11.2.6.

11.2.4 Caractérisation d'un optimum de Pareto en présence d'externalités

Nous avons vu au chapitre 8, qu'une manière de trouver les optima de Pareto (dans une économie d'échange) est de maximiser une somme pondérée des utilités sous les contraintes de rareté. Dans une économie sans externalité, les conditions de premier ordre permettaient d'établir que les TMS des agents sont égaux à une allocation optimale intérieure. Nous avons vu dans l'exemple du paragraphe 11.2.2.1 que, dans une économie où existent des externalités, cette condition peut être vérifiée sans que l'allocation soit optimale au sens de Pareto. Nous reprenons donc l'analyse des critères d'optimalité dans le cadre d'une économie d'échange à deux biens et deux agents. Nous mènerons l'analyse dans un cadre simplifié, qui se généralise aisément.

Nous supposons que l'utilité de chaque agent dépend de sa consommation propre des deux biens et de la consommation du bien 1 par l'autre agent ; l'externalité ne passe que par le premier bien. Le programme à résoudre s'écrit alors :

$$\begin{array}{ll} \max_x & a_1 u_1(x_1^1, x_1^2\,; x_2^1) + a_2 u_2(x_2^1, x_2^2\,; x_1^1) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} \sum_{h=1}^2 x_h^c \leq \sum_{h=1}^2 e_h^c \quad c = 1,2 \\ x \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Les conditions de premier ordre s'écrivent (λ^c, $c = 1,2$ est le multiplicateur associé à la contrainte de rareté sur le bien c), en omettant les contraintes de positivité –c'est-à-dire en ne considérant que des optima intérieurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1^1} + a_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1^1} = \lambda^1 \\ a_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2^1} + a_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2^1} = \lambda^1 \\ a_1 \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1^2} = \lambda^2 \\ a_2 \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2^2} = \lambda^2 \end{array} \right.$$

soit, en divisant les deux premières équations par λ^2 et en remplaçant cette dernière variable par son expression issue des deux dernières équations :

$$\frac{\partial u_1/\partial x_1^1}{\partial u_1/\partial x_1^2} + \frac{\partial u_2/\partial x_1^1}{\partial u_2/\partial x_2^2} = \frac{\lambda^1}{\lambda^2} = \frac{\partial u_1/\partial x_2^1}{\partial u_1/\partial x_1^2} + \frac{\partial u_2/\partial x_2^1}{\partial u_2/\partial x_2^2}$$

Cette équation signifie que la somme (sur les agents) des TMS doit être constante : lorsque, par exemple, la consommation en bien 1 du premier consommateur augmente, il faut tenir compte du fait que cela affecte également le bien-être du second consommateur. Nous pouvons à cet égard définir la quantité

$$\frac{\partial u_1/\partial x_1^1}{\partial u_1/\partial x_1^2} + \frac{\partial u_2/\partial x_1^1}{\partial u_2/\partial x_2^2}$$

comme étant le TMS social du bien 1 détenu par le premier consommateur. C'est ce TMS qui est déterminant dans l'allocation des ressources dans une économie avec externalités. Les prix d'équilibre concurrentiel, dans une économie où chacun ne tient pas compte du fait qu'il affecte, par ses décisions, le bien-être d'autrui, ne reflètent pas cette dimension "sociale" de la consommation de certains biens. L'inefficacité de l'équilibre provient précisément de ceci.

Si nous reprenons notre exemple numérique de la section 11.2.2.1 (page 215), à l'équilibre, nous avons :

$$\frac{\partial u_1/\partial x_1^1}{\partial u_1/\partial x_1^2} + \frac{\partial u_2/\partial x_1^1}{\partial u_2/\partial x_2^2} = \frac{1/2\,(x_1^1)^{-1/2}\,(x_1^2)^{1/2}}{1/2\,(x_1^1)^{1/2}\,(x_1^2)^{-1/2}} + 0 = 1$$

qui n'est pas égal à

$$\frac{\partial u_1/\partial x_2^1}{\partial u_1/\partial x_1^2}+\frac{\partial u_2/\partial x_2^1}{\partial u_2/\partial x_2^2}=\frac{-1}{1/2\,(x_1^1)^{1/2}\,(x_1^2)^{-1/2}}+\frac{1/2\,(x_2^1)^{-1/2}\,(x_2^2)^{1/2}}{1/2\,(x_2^1)^{1/2}\,(x_2^2)^{-1/2}}=-2+1=-1$$

Nous retrouvons bien ici, par l'étude des conditions d'optimalité, que l'équilibre concurrentiel n'est pas Pareto optimal, ce que nous avions établi directement, en construisant une allocation qui Pareto dominait l'allocation d'équilibre.

11.2.5 Une application macro-économique

Nous terminons cette section sur les externalités par une discussion d'un type d'externalité souvent rencontré en macro-économie, notamment dans les modèles dits de "croissance endogène". Concentrons-nous sur le secteur productif, sans spécifier tout l'environnement économique. Il existe un grand nombre de firmes qui produisent toutes le même bien à l'aide de capital. Elles bénéficient en plus d'une externalité positive provenant du stock agrégé de capital dans l'économie. Ainsi, nous pouvons écrire la fonction de production de l'entreprise f comme : $y_f = g_f(k_f, K)$, où k_f est le capital de l'entreprise et K est le stock agrégé dans l'économie ($K = \sum_f k_f$).

Cette modélisation de la fonction de production d'une entreprise constitue un "raccourci théorique" qui permet de prendre en compte le fait qu'une entreprise tire profit du "niveau de développement de l'économie", représenté par le stock total de capital de l'économie. Plus précisément, le stock agrégé K représenterait un stock de connaissances acquises. Plus l'économie est développée et plus ce stock est grand, ce qui entraine une productivité supérieure du capital privé.

En effet, si nous spécifions une fonction de production de type Cobb-Douglas (à rendements constants dans les deux facteurs, k_f et K), nous trouvons que la productivité marginale du capital est égale à :

$$\frac{\partial g_f(k_f,K)}{\partial k_f}=\alpha_f\left(\frac{K}{k_f}\right)^{1-\alpha_f}$$

qui est bien une fonction croissante de K.

Toutefois, les entrepreneurs ne réalisent pas qu'en accumulant plus individuellement, ils augmentent la productivité globale dans l'économie. En effet, une augmentation de k_f a bien s–r pour effet d'augmenter le stock de capital agrégé. La productivité sociale de l'investissement d'une entreprise serait donc sa productivité privée plus l'augmentation de la productivité de toutes les firmes grâce à l'acroissement du stock agrégé. Ainsi, si nous supposons toutes les fonctions de production de type Cobb-Douglas, le "rendement social" de l'investissement de la firme f est donné par :

$$\alpha_f\left(\frac{K}{k_f}\right)^{1-\alpha_f}+\sum_i(1-\alpha_i)\left(\frac{k_i}{K}\right)^{\alpha_i}$$

qui est bien évidemment supérieur au rendement privé.

Ainsi, si nous faisons l'hypothèse que l'investissement agrégé est bénéfique pour toutes les entreprises, par exemple parce que cet investissement va de pair avec un développement d'idées nouvelles, chaque entreprise sous-estime la valeur sociale de son investissement, et l'équilibre ne sera pas optimal.

Une situation similaire se produirait si nous introduisions du capital humain dans ce type de modèles. Dans ce cas, le niveau agrégé de capital humain a un impact positif sur la productivité des entreprises, reflétant ainsi l'idée que l'éducation d'une personne lui est certes profitable individuellement, mais est également profitable à la société dans son ensemble, ce qui justifierait alors qu'elle soit subventionnée.

Nous ne développerons pas ces modèles (ceci nécessiterait notamment de développer un cadre dynamique adéquate), mais insistons sur le fait que les externalités présentes dans ce type de modèle sont de même nature que celles développées tout au long de cette section.

11.2.6 Externalités et intervention de l'Etat

La présence d'externalités, qui entraine la sous-optimalité de l'équilibre concurrentiel, justifie l'intervention de l'Etat. En effet, celui-ci peut, en principe, identifier les optima de Pareto, et essayer de décentraliser celui qu'il juge souhaitable. Le planificateur possède plusieurs moyens pour opérer cette décentralisation.

Le premier consiste à fixer des quotas, limitant par exemple la pollution de certaines entreprises, afin de fixer le niveau de l'activité génératrice d'externalités à son niveau optimal.

Le second est de mettre en place un système de taxation optimale. Le planificateur peut instaurer une taxe sur l'activité génératrice d'externalité, de manière à ce que l'agent prenant la décision du niveau de cette externalité internalise le coût (ou le bénéfice) social de son activité. A l'opposé, le planificateur peut subventionner une réduction du montant d'externalités. Taxer ou subventionner sont, lorsque des transferts forfaitaires sont par ailleurs possibles, des outils totalement équivalents pour le planificateur.

Ainsi, la présence d'externalité justifierait l'action de l'Etat. Toutefois, il faut bien comprendre cette proposition. Afin de restaurer l'optimalité de l'équilibre, l'Etat doit disposer d'une information considérable, puisqu'il doit en particulier connaître le coût de l'externalité pour la société dans son ensemble. Or ce coût est souvent une information privée des agents économiques, qu'ils peuvent ne pas révéler "naïvement". Il est donc probable que, dans un grand nombre de cas, l'Etat n'ait pas l'information nécessaire pour mettre en œuvre le système optimal de taxation.

Il ne faut cependant pas s'arrêter à ce constat d'imperfection de l'information de l'Etat. Celui-ci, conscient de ce manque d'information, va chercher à en acquérir. Certes, il serait naîf de penser que les agents privés vont lui révéler l'information qu'il désire sans essayer de manipuler la décision prise en leur faveur. Toutefois, l'Etat peut mettre en place des mécanismes incitatifs, qui font que les agents trouveront qu'il est de leur intérêt de révéler leur information privée.

Au total, les problèmes rencontrés par l'Etat pour restaurer l'optimalité de l'équilibre sont essentiellement de nature informationnelle. Les agents possèdent une information que l'Etat ne possède pas, mais que, sous certaines conditions, celui-ci peut leur faire révéler. Le problème de la taxation optimale des externalités est donc plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord.

Enfin, une solution aux problèmes posés par les externalités, suggérée par R. Coase[71], est d'observer que si les droits de propriété sont bien définis, les agent arriveront, en marchandant entre eux, à opérer les transferts nécessaires à la restauration de l'optimalité de la situation atteinte. Nous pouvons, pour illustrer ceci, reprendre l'exemple de la section 11.2.3. Dans cet exemple, nous avions vu que si les droits de propriété à l'air pur étaient clairement définis, le marché résoudrait le problème de sous-optimalité de l'équilibre. Toutefois, il n'est pas besoin de supposer qu'un marché se crée pour arriver à une situation optimale. Si les agents marchandent directement entre eux sur le volume d'air que le fumeur peut polluer, la situation finale sera optimale. Ce processus de négociation est similaire à celui que nous avons développé dans le chapitre 9. Ainsi, pour R. Coase, le seul rôle que l'Etat doit remplir est de définir et de faire respecter les droits de propriété. Cette solution est effectivement optimale en l'absence d'asymétrie d'information. En revanche, si les parties concernées par l'externalité possèdent une information privée sur les coûts et avantages de cette externalité, alors le processus de négociation risquera fort d'aboutir à une situation sous-optimale.

11.3 Les biens publics

Nous nous tournons maintenant vers les problèmes posés par la présence de biens publics dans l'économie.

Définition : *Un bien est dit public si l'usage de ce bien par un agent n'empêche pas son usage par d'autres agents.*

La présence de biens publics modifie sensiblement l'analyse. Dans un premier temps, nous caractérisons les allocations Pareto optimales en présence d'un bien public. Nous montrerons alors qu'il peut y avoir de graves problèmes de sous-production du bien public à l'équilibre (qu'il nous faudra définir). Enfin, nous étudierons une solution normative au problème de l'allocation des biens publics.

11.3.1 Biens publics et allocations Pareto optimales

Nous étudierons les problèmes posés par la présence de biens publics dans un cadre très simple, qui se généralise aisément. Supposons qu'il y ait deux agents et deux biens dans l'économie. Le montant de bien public est noté y. Il est consommé par les deux agents. Il existe par ailleurs un bien privé, x, dont la consommation par l'agent h est notée x_h. La fonction d'utilité d'un agent h s'écrit donc : $u_h(x_h, y)$, $h = 1, 2$. Nous la supposerons strictement concave, différentiable et strictement croissante.

Le bien public peut être produit à partir du bien privé selon une technique de production représentée par la fonction g, strictement croissante et concave. Si z est l'input en bien privé, alors le bien public produit est : $y = g(z)$. Soit e la quantité initiale, donnée, de bien privé.

Conformément à ce que nous avons vu dans la section 8.5 du chapitre 8, nous pouvons, sous l'hypothèse de concavité des fonctions d'utilité, caractériser un optimum

[71] "The problem of social cost", *Journal of Law and Economics*, 1960.

de Pareto comme étant une solution du programme suivant :

$$\max_{x,y,z} \quad a_1 u_1(x_1, y) + a_2 u_2(x_2, y)$$
$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 + z = e & (\lambda) \\ g(z) = y & (\mu) \\ y \geq 0 \quad z \geq 0 \quad x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

où a_1 et a_2 sont des paramètres positifs, et λ et μ les multiplicateurs associés aux deux premières contraintes.

En supposant que l'optimum est un optimum intérieur (c'est-à-dire en omettant les contraintes de positivité), les conditions de premier ordre d'optimalité (qui sont nécessaires et suffisantes étant données les hypothèses faites ici) s'écrivent :

$$a_h \frac{\partial u_h(x_h, y)}{\partial x_h} = \lambda \qquad h = 1, 2$$
$$a_1 \frac{\partial u_1(x_1, y)}{\partial y} + a_2 \frac{\partial u_2(x_2, y)}{\partial y} = \mu$$
$$\mu g'(z) = \lambda$$

ou encore, en divisant la seconde équation par λ et en remplaçant λ par sa valeur de manière à éliminer les multiplicateurs :

$$\frac{\partial u_1(x_1, y)/\partial y}{\partial u_1(x_1, y)/\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_2, y)/\partial y}{\partial u_2(x_2, y)/\partial x_2} = \frac{1}{g'(z)}$$

Cette condition, dite de Bowen-Lindhal-Samuelson ou B-L-S, énonce qu'à un optimum de Pareto, la somme des taux marginaux de substitution entre le bien public et le bien privé est égale à (l'inverse de) la productivité marginale du bien privé. Ceci est à mettre en parallèle avec le résultat exposé dans le chapitre 10 : à l'optimum d'une économie sans bien public, le taux marginal de substitution entre biens privés de *chaque agent* est égal au taux marginal de transformation entre ces biens (ici égal à l'inverse de la productivité marginale), et celui de la section précédente, où nous avons vu, qu'en présence d'externalités, la condition d'optimalité s'écrivait en termes d'une somme de TMS.

Interprétons le taux marginal de substitution d'un agent comme étant le "prix" (en termes de bien privé) que cet agent est prêt à payer pour une unité du bien public. Ce prix est un prix individualisé, puisqu'il dépend des préférences de chacun. Il peut s'interpréter comme représentant le montant qu'il faudrait prélever (au moyen d'un impôt) à chaque consommateur afin de produire le bien public. La condition B-L-S nous dit ainsi qu'il faut produire du bien public jusqu'à ce que la somme des prix que chaque individu est prêt à payer pour augmenter la production d'une unité soit égale au coût de production de cette unité supplémentaire.

Pour l'instant, nous avons caractérisé les allocations Pareto optimale d'une économie comportant un bien public. Interrogeons-nous maintenant sur la notion d'équilibre pertinente dans ce cas de figure, en passant en revue deux concepts, celui d'équilibre avec souscription, et celui d'équilibre de Lindhal.

11.3.2 Equilibre avec souscription

Nous étudions ici l'économie de propriété privée correspondant à l'optimum analysé dans la section précédente. Le premier agent détient une dotation e_1 en bien privé, tandis que le second agent en détient e_2, avec $e = e_1 + e_2$.

Nous supposons que chaque consommateur souscrit de manière volontaire à la production du bien public. Il détermine donc le montant z_h de bien privé qu'il sacrifiera à la production du bien public, tout en prenant le comportement des autres consommateurs comme donné.

Le programme de maximisation que le premier consommateur doit résoudre est le suivant :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_1,z_1,y} & u(x_1,y) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = e_1 - z_1 \\ y = g(z_1+z_2) \\ z_1 \geq 0 \quad x_1 \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

En supposant que les contraintes de positivité ne sont pas saturées, les conditions de premier ordre s'écrivent (λ et μ sont les multiplicateurs associés aux première et deuxième contraintes respectivement) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u(x_1,y)}{\partial x_1} & = & \lambda \\ \dfrac{\partial u(x_1,y)}{\partial y} & = & \mu \\ \lambda & = & \mu g'(z_1+z_2) \end{array} \right.$$

Le premier consommateur considère que le montant souscrit par le second agent est donné, et détermine sa propre souscription en fonction de ce montant, –c'est-à-dire que la solution de ce programme nous donne une fonction $z_1(z_2)$.

Le second agent résout le problème symétrique, et détermine sa propre souscription en fonction de celle, qu'il considère comme donnée, du premier agent. Son comportement peut alors être résumé par une fonction $z_2(z_1)$, qui donne, pour chaque niveau de la souscription du premier agent, le montant optimal de la souscription du second. Est introduit ici un comportement stratégique de la part de chacun des consommateurs. Un équilibre avec souscription correspond à des décisions des deux agents qui sont cohérentes entre elles, c'est-à-dire à ce qui est appelé un équilibre de Nash en théorie des jeux. Plus précisément :

Définition : *Un équilibre avec souscription est un couple* $(z_1^\star, z_2^\star)$ *tel que* :

$$z_1(z_2^\star) = z_1^\star \quad et \quad z_2(z_1^\star) = z_2^\star$$

Les conditions d'optimalité du programme précédent, permettant de définir la souscription optimale du premier consommateur, impliquent que la condition suivante est vérifiée :

$$\frac{\partial u_1(x_1,y)/\partial y}{\partial u_1(x_1,y)/\partial x_1} = \frac{1}{g'(z)}$$

Cette égalité révèle que la condition de Bowen-Lindhal-Samuelson n'est pas satisfaite : l'équilibre avec souscription n'est pas optimal. La raison de cette sous-optimalité réside dans la sous-production du bien public. En effet, un consommateur contribue à la production du bien public jusqu'à ce que le coût marginal en bien privé de la production du bien public (c'est-à-dire $1/g'(z)$, étant données les souscriptions des autres agents), soit égal à son taux marginal de substitution. Ce faisant, il ne tient pas compte du fait que sa contribution profite également aux autres agents. Chaque consommateur faisant ce raisonnement, il contribue moins qu'il ne serait optimal de le faire. Nous sommes donc en présence d'un défaut de coordination entre les agents. S'ils pouvaient décider collectivement de la production de bien public, ils choisiraient un niveau supérieur à celui qu'ils choisissent dans un cadre décentralisé.

Formellement, le montant investi à l'équilibre avec souscription, z est tel que

$$\frac{1}{g'(z)} = \frac{\partial u_1(x_1,y)/\partial y}{\partial u_1(x_1,y)/\partial x_1} = \frac{\partial u_2(x_2,y)/\partial y}{\partial u_2(x_2,y)/\partial x_2} \leq \frac{\partial u_1(x_1,y)/\partial y}{\partial u_1(x_1,y)/\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_2,y)/\partial y}{\partial u_2(x_2,y)/\partial x_2} \equiv \frac{1}{g'^{opt})}$$

Puisque $\frac{1}{g'(z)}$ est croissant en z, cela signifie bien que le montant z d'équilibre est plus faible que le montant z^{opt} optimal.

11.3.3 Equilibre de Lindhal

Un moyen de résoudre le problème de l'optimalité de l'équilibre concurrentiel en présence d'un bien public est de supposer que chaque consommateur doit payer un prix personnalisé, p_h, pour chaque unité de bien produite. Il existerait ainsi une sorte de symétrie entre le bien privé, dont chacun consomme une quantité différente, mais en payant le même prix, et le bien public, dont chacun doit consommer la même quantité, mais en ayant un prix associé différent.

Le consommateur $h = 1$ résout ainsi le programme suivant (le prix du bien privé a été normalisé à 1) :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_1,y} & u_1(x_1,y) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{rcl} e_1 - x_1 - p_1 y & = & 0 \\ x_1 \geq 0, \ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

qui donne des fonctions de demande $x_1(p_1)$ et $y_1(p_1)$ de bien privé et de bien public.

Si nous supposons que les contraintes de positivité ne sont pas saturées, les conditions de premier ordre s'écrivent (λ est le multiplicateur associé à la première contrainte) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u_1(x_1,y)}{\partial x_1} & = & \lambda \\ \dfrac{\partial u_1(x_1,y)}{\partial y} & = & \lambda p_1 \end{array} \right.$$

Le second consommateur résout un programme similaire et détermine des fonctions de demande $x_2(p_2)$ et $y_2(p_2)$.

Supposons par ailleurs que la production du bien public est effectuée par une entreprise, à qui est annoncé un prix unitaire de l'output égal à la somme des prix personnalisés $p = p_1 + p_2$, et qui prend sa décision de production en considérant ce prix comme donné.

L'entreprise doit donc résoudre le programme suivant :

$$\begin{array}{rl} \max_y & (p_1 + p_2)\, y - z \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{c} g(z) = y \\ z \geq 0,\ y \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Toujours en omettant les contraintes de positivité, les conditions de premier ordre s'écrivent (ν est le multiplicateur associé à la première contrainte) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} p_1 + p_2 & = & \nu \\ \nu g'(z) & = & 1 \\ g(z) & = & y \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z & = & g'^{-1}\left(\frac{1}{p_1+p_2}\right) \\ y & = & g\left[g'^{-1}\left(\frac{1}{p_1+p_2}\right)\right] \end{array} \right.$$

La solution de ce problème détermine l'offre de bien public et la demande d'input (en bien privé) associée, en fonction de la somme des prix personnalisés :

$$y(p_1 + p_2) = g^{-1}\left[g'\left(1/(p_1 + p_2)\right)\right] \quad \text{et} \quad z(p_1 + p_2) = g'^{-1}\left(\frac{1}{p_1 + p_2}\right)$$

Un équilibre de Lindhal est défini de la manière suivante :

Définition : *Un équilibre de Lindhal est un système de prix personnalisés* $(p_1^\star, p_2^\star)$*, ainsi que les offres et les demandes correspondantes (issues des problèmes de maximisation de l'utilité et de maximisation du profit) tels que :*

$$y(p_1^\star + p_2^\star) = y_1(p_1^\star) = y_2(p_2^\star)$$

$$x_1(p_1^\star) + x_2(p_2^\star) + z(p_1^\star + p_2^\star) = e_1 + e_2$$

Montrons maintenant qu'il est possible de retrouver la condition de Bowen-Lindhal-Samuelson à partir des programmes de maximisation définis ci-dessus.

La condition du premier ordre du problème du consommateur h s'écrit :

$$\frac{\partial u_h(x_h, y)/\partial y}{\partial u_h(x_h, y)/\partial x_h} = p_h^\star$$

tandis que la condition d'optimalité pour le producteur s'écrit :

$$p_1^\star + p_2^\star = \frac{1}{g'(z)}$$

ce qui donne la condition de Bowen-Lindhal-Samuelson, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial u_1(x_1,y)/\partial y}{\partial u_1(x_1,y)/\partial x_1} + \frac{\partial u_2(x_2,y)/\partial y}{\partial u_2(x_2,y)/\partial x_2} = \frac{1}{g'(z)}$$

La solution donnée par l'équilibre de Lindhal est donc optimale au sens de Pareto. Il faut toutefois s'interroger sur la viabilité d'un tel mécanisme. En effet, de par la nature même du problème, le consommateur 1 se trouve le seul à "acheter" le bien public au prix $p_1^\star$. S'il réalise ceci, il ne va pas révéler sa vraie demande pour le bien public. En effet, il a tout intérêt à exprimer publiquement que le bien public ne lui procure que peu de satisfaction. Ainsi, le prix personnalisé qu'il devra payer (et qui est "calculé" à partir de ses préférences exprimées) sera moindre que le prix "normal" qu'il devrait payer s'il révélait ses vraies préférences.

Il apparaît finalement que ce type de solution au problème de sous-production du bien public mis en évidence lors de l'étude de l'équilibre avec souscription, ne présente qu'un intérêt théorique normatif, et qu'il semble difficile, voire impossible, à mettre en œuvre. D'autres moyens d'obtenir la coopération entre agents que nécessite la présence de biens publics (et qui n'est pas fournie par le mécanisme de marchés) sont la planification, des procédures de vote, et autres mécanismes étudiés en économie publique, mais que nous ne développerons pas ici.

11.4 Conclusion

Ce chapitre a considéré une première extension du modèle d'équilibre général statique, en l'occurence la prise en compte des externalités et des biens publics. Le problème associé aux externalités est l'absence de certains marchés. Plus précisément, nous avons vu qu'un effet externe était contingent à la définition des acteurs économiques et des marchés présents. Ainsi, un effet externe peut être internalisé en cas de fusion entre les parties concernées, ou au contraire "marchandisé" si le marché approprié est créé. Au total, une réflexion sur la nature des externalités nécessite de comprendre pourquoi certains marchés n'existent pas. La création de marchés n'est toutefois pas la solution absolue au problème posé par les externalités. En effet, il est probable, du moins dans le cas d'externalités "personnalisées", que les agents se comporteront de manière stratégique sur ces marchés, qui ne fonctionneront pas selon les canons de la concurrence parfaite. Ainsi, les dysfonctionnements associés à la présence d'effets externes (le premier théorème du bien-être n'est pas vérifié) ne disparaitraient probablement pas même si un nombre suffisant de marchés étaient créés.

La présence de biens publics pose de semblables problèmes. La souscription volontaire conduit à une sous-production du bien public, tandis que la solution de marché préconisée par Lindhal semble omettre la possibilité de comportements stratégiques de la part des agents économiques, qui feront le lien entre les préférences qu'ils affichent et le prix personnalisé qu'ils doivent payer. Il apparaît donc que seul l'Etat, par un système de taxation approprié, puisse résoudre ce problème de sous-production de biens publics. Toutefois, comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 8, l'Etat agit en fait sans posséder toute l'information nécessaire au calcul des optima de premier rang. L'étude de la taxation optimale dans ce cadre nous conduit vers les analyses de second rang, que nous n'entreprendrons pas ici.

Chapitre 12

Economies temporelles

12.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une extension du modèle statique au cas d'une économie à plusieurs périodes. Nous nous concentrerons dans un premier temps sur une réinterprétation du modèle à une seule période, avant de nous intéresser à une modélisation plus riche de la manière dont s'effectuent les échanges dans une économie à plusieurs périodes.

La généralité du modèle d'équilibre général développé par K. Arrow et G. Debreu permet de traiter l'introduction du temps sans problème : il suffit de redéfinir ce qu'est un bien et d'inclure la date de livraison dans la spécification de ses caractéristiques. Sous l'hypothèse que tous ces biens (redéfinis) sont échangeables librement les uns contre les autres, à un prix établi au début des temps, il est possible d'étendre tous les résultats établis dans les chapitres précédents. Toutefois, ce qui peut apparaître comme une force du modèle d'équilibre général, à savoir sa capacité à traiter des cas de plus en plus généraux sans difficulté, peut aussi s'interpréter comme une des limites du modèle : le fait qu'il existe un marché sur lequel tous les biens peuvent s'échanger signifie, dans le cadre d'une économie temporelle qu'il est possible d'échanger un bien disponible aujourd'hui contre un bien disponible dans le futur, et ce à un prix donné aujourd'hui. Le mode d'organisation des marchés supposée par une telle hypothèse souligne la difficulté qu'il y a à interpréter le mode d'échange sous-jacent dans la théorie de l'équilibre général (voir chapitre 4).

Mais, et c'est là aussi un avantage de ce cadre formel, le problème soulevé a suscité de nouveaux développements de la théorie de l'équilibre général. En particulier, un autre fonctionnement des marchés a été étudié (par K. Arrow lui-même, puis par R. Radner). Il s'agit d'une suite de marchés au comptant, s'ouvrant à chaque période, ces différentes périodes étant reliées entre elles par des marchés financiers. Ainsi, c'est tout un programme de recherche qui s'est développé à partir d'une limite du modèle de base. Au cœur de cette extension se trouve le problème de la formalisation des anticipations des agents.

12.2 Une réinterprétation du modèle statique

Le modèle d'équilibre que nous avons étudié ne fait pas intervenir directement la notion de temps. Cependant celle-ci est aisément introduite dans le modèle, sans en changer la structure, mais en en modifiant l'interprétation.

12.2.1 Marchés à terme

12.2.1.1 Une réinterprétation de la notion de bien

La notion de bien utilisée jusqu'à présent est très large. Il faut en spécifier la localisation, la qualité, etc... En particulier, nous pourrions penser que ce sont des contrats plutôt que des biens qui sont échangés. Ainsi, les agents échangent des contrats du type :

> "A la date t, je donnerai une unité du bien physique c au détenteur de ce contrat."

Ce contrat a un prix et peut être échangé aujourd'hui. Supposons que tous les contrats, quelle que soit la date d'exécution de ceux-ci soient échangés à la date initiale, $t = 0$. En nous basant sur cette réinterprétation de la notion de bien, nous allons voir que l'analyse statique des chapitres précédents s'applique à notre économie à plusieurs périodes.

Formellement, supposons que l'économie s'étende de la date $t = 0$ à la date T, soit $T + 1$ périodes. A chaque date C biens physiques sont disponibles. Le nombre total de biens, au sens économique, est donc $\ell = (T + 1)C$. Il y a autant de contrats, chaque contrat portant sur un bien à une date donnée. Les agents peuvent acheter ou vendre ces contrats. Le vecteur $x_h(t) = (x_h^1(t), ..., x_h^C(t))$ est le vecteur de contrats détenus par l'agent h et lui promettant le montant $x_h^c(t)$ du bien c à la date t. $x_h(t)$ peut donc également s'interpréter comme la consommation de h en t. Le contrat (ou le bien) $x^c(t)$ a un prix $p^c(t)$ aujourd'hui : c'est le prix qu'il faut payer aujourd'hui pour obtenir une unité de bien c à la date t. L'organisation des marchés est donc celle de marchés à terme : il faut payer aujourd'hui sa consommation future.

Chaque consommateur reçoit une dotation $e_h(t)$ en bien à chaque période, ce qui revient à dire qu'il a une dotation initiale aujourd'hui en contrats promettant le don de $e_h(t)$ biens en t. L'utilité du consommateur est définie sur l'ensemble des biens économiques, $\mathbb{R}_+^\ell$. L'utilité du consommateur dépend donc de toute la séquence de consommation, d'aujourd'hui à la date T. Elle représente l'évaluation présente d'un flux de consommation sur $T + 1$ périodes.

12.2.1.2 Utilité intertemporelle et utilité escomptée

Une hypothèse souvent faite, bien que non nécessaire ici, est l'existence d'une fonction d'utilité instantanée , statique, définie à chaque période : $v(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^C$, à laquelle est appliqué un coefficient d'escompte $\beta < 1$ représentant l'impatience du consommateur. La fonction d'utilité d'un agent prend alors la forme particulière suivante :

$$u(x(0), ..., x(T)) = v(x(0)) + \beta v(x(1)) + ... + \beta^T v(x(T))$$

L'utilité du flux de consommation $(x(0), ..., x(T))$ est la somme escomptée des utilités instantanées, statiques, $v(x(t))$. Cette hypothèse introduit une séparabilité dans l'évaluation de la consommation aux différentes périodes : l'utilité retirée, à la date t, de la consommation de $x(t)$ est indépendante des consommations aux autres dates.

Afin de mieux comprendre à quoi correspond le coefficient d'escompte (ou de préférence pour le présent) β, restreignons-nous à deux périodes, 0 et 1, et à un bien par période. L'hypothèse adoptée s'écrit dans ce cas : $u(x(0), x(1)) = v(x(0)) + \beta v(x(1))$. Le TMS entre le bien à la période 0 et le bien à la période 1 est donné par :

$$TMS = -\frac{\mathrm{d}x(0)}{\mathrm{d}x(1)} = \beta \frac{v'(x(1))}{v'(x(0))}$$

Ainsi, β est le TMS entre le présent et le futur aux points $x(0) = x(1)$, puisque en ces points $v'(x(1)) = v'(x(0))$. Il représente le montant de bien qu'il faut donner aujourd'hui au consommateur, en partant d'une situation dans laquelle il a autant de bien aujourd'hui que demain, pour le dédommager de la perte d'une unité de bien demain. Le fait que $\beta < 1$ représente l'impatience du consommateur, qui est prêt à abandonner un peu du bien pour le consommer plus tôt.

Nous devons, en adoptant cette approche, supposer la concavité (et non seulement la quasi-concavité) de v pour nous assurer de la concavité (et donc de la quasi-concavité) de u. En effet[72], la somme de fonctions quasi-concaves n'est pas nécessairement quasi-concave, alors que la somme de fonctions concaves est concave[73]. Cette remarque n'est pas uniquement technique. En effet, elle indique que l'utilité instantanée v n'est pas un concept purement ordinal mais fait bien référence à une utilité cardinale. Si cela était toujours le cas, dans cette formulation séparable, le choix de l'agent ne devrait pas être modifié si v était modifiée en $f \circ v$, où f est une fonction croissante. Afin de se convaincre du contraire, examinons l'exemple suivant : deux périodes, $t = 0, 1$, un bien, $e(0) = e(1) = 1$, et $v(x) = x^{1/2}$. Pour des prix $p(0) = p(1) = 1/2$, la maximisation de l'utilité $x(0)^{1/2} + \beta x(1)^{1/2}$ sous la contrainte budgétaire $1/2x(0) + 1/2x(1) = 1$ donne :

$$\frac{x(0)}{x(1)} = \frac{1}{\beta^2}$$

Transformons maintenant v en lui appliquant la fonction $f(z) = z^2$. La maximisation de l'utilité s'écrit ainsi : $\max x(0) + \beta x(1)$ sous la même contrainte budgétaire. Clairement, la solution à ce problème, tant que $\beta < 1$ est de ne rien consommer en $t = 1$: $x(1) = 0$, et de consommer le plus possible en $t = 0$: $x(0) = 2$. La solution au problème a changé, ce qui signifie que v et $f \circ v$ ne représentent pas les mêmes préférences.

L'utilité instantanée du consommateur, v, possède donc un aspect cardinal. En fait, les seules transformations que nous puissions lui faire subir sont des transformations affines croissantes ($f(z)$ est de la forme $az + b$ avec $a > 0$). En revanche, l'utilité totale u peut toujours être soumise à des transformations croissantes quelconques sans que cela ne change le résultat de la maximisation. En d'autres termes, si u représente les préférences d'un agent sur le flux de consommation $(x(0), \ldots, x(T))$, alors $g \circ u$ où g est croissante représente les mêmes préférences. Mais si v représente les préférences instantanées (*i.e.* représente les préférences sur $x(t)$), alors seules les fonctions de type $f \circ v$ avec f affine croissante représentent les mêmes préférences instantanées.

[72] Voir la discussion du chapitre 2 sur ce point.

[73] Voir le chapitre 16.

12.2.1.3 Equivalence entre marchés à terme et modèle statique

Revenons maintenant à la formulation générale. Le programme que doit résoudre le consommateur s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_h} & u_h(x_h(0), ..., x_h(T)) \\ \text{s.c.} & p(0)x_h(0) + ... + p(T)x_h(T) = p(0)e_h(0) + ... + p(T)e_h(T) \end{array}$$

Formellement, ce programme est le même que dans le cas d'une économie à une seule période. En effet, tous les échanges se font à la date initiale, la seule activité observée lors des périodes suivantes étant la livraison et la consommation des biens sur lesquels portaient les contrats échangés à la première période. Cette organisation des marchés, à savoir des marchés à terme, permet de garder le cadre formel d'une économie statique ; seule l'interprétation des biens change.

La notion d'équilibre est la même que dans le cas statique. Un équilibre est un vecteur de prix p et une allocation x tels que x_h est une solution au problème de maximisation du consommateur h étant donné p, et les marchés s'apurent (soit $\sum_h x_h(t) = \sum_h e_h(t)$ pour tout t).

Le modèle statique peut donc être réinterprété comme représentant une économie temporelle, dans laquelle tous les contrats pour les biens sont disponibles et échangeables aujourd'hui. En conséquence, nous pouvons appliquer les théorèmes étudiés dans les chapitres précédents, à savoir qu'il existe un équilibre, généralement localement unique et Pareto optimal. De plus, tout optimum de Pareto est décentralisable après redistribution des dotations initiales.

12.2.1.4 Marchés à terme et production

Le traitement du producteur dans ce cadre se fait de manière similaire : comme le consommateur, le producteur doit avoir la possibilité de conclure des contrats à terme pour tous les biens. Son profit s'écrit alors : $\sum_c \sum_t p^c(t)y^c(t)$. La contrainte technologique peut s'exprimer à l'aide d'un ensemble de production. Un plan de production y, sur les $T+1$ périodes est réalisable si $y \in Y$, où Y est un ensemble de production spécifiant l'ensemble des plans de production techniquement réalisables, sur la totalité de la période. Par exemple, si une entreprise peut produire du blé à la période $t+1$, à l'aide de blé (planté en t), et dans un rapport de deux pour un, le plan de production associé est $y = (0, \dots, 0, -1, 2, 0, \dots, 0)$ où les zéros correspondent à toutes les dates autres que t et $t+1$. Enfin, il faut spécifier les droits de propriétés des agents sur les entreprises. Les actionnaires d'une entreprise sont d'accord pour que celle-ci maximise son profit, comme c'était le cas dans le cadre statique.

La seule activité réellement économique du producteur a lieu uniquement en première période, où il passe tous les contrats nécessaires. Durant toutes les périodes suivantes, il ne fait qu'exécuter les contrats passés. De la même manière que les théorèmes d'existence et d'optimalité se généralisent pour une économie d'échanges, ils se généralisent pour une économie avec production.

Cette réinterprétation du modèle statique ne va cependant pas sans poser quelques problèmes que nous discutons maintenant.

12.2.2 Critique de cette réinterprétation

La critique principale de cette réinterprétation de la notion de bien concerne l'organisation des marchés qu'elle suppose. En effet, chaque consommateur peut, dans ce cadre, acheter aujourd'hui n'importe quel bien livrable dans 10 ans. Cela suppose un nombre de marchés extravagant, et même s'il existe des marchés à terme (par exemple le marché à terme des matières premières à Chicago), leur nombre reste limité.

De plus, cette organisation des marchés implique que, une fois la première période écoulée, les agents n'ont plus aucune décision économique à prendre. Ils se contentent d'exécuter les contrats signés en $t = 0$. Du point de vue des décisions prises par les agents, cette économie est donc totalement statique.

Ce point est important, car du fait de l'organisation des marchés et de l'unicité de la date de décision des agents, ceux-ci n'ont pas besoin d'anticiper les prix. Tout ce qu'ils ont besoin de savoir est observable aujourd'hui : ce sont les prix des différents contrats échangés. Un problème fondamental, celui du rôle des anticipations dans le fonctionnement de l'économie, se trouve ainsi évacué.

Une théorie dynamique plus satisfaisante se doit donc d'introduire une série de marchés au comptant, ouvrant à chaque période. Toutefois, pour que ce modèle soit plus qu'une simple succession d'équilibres statiques, il convient de donner aux consommateurs la possibilité de transférer du pouvoir d'achat d'une période sur l'autre, c'est-à-dire d'emprunter ou de prêter. C'est le rôle des actifs financiers, que nous introduisons maintenant.

12.3 Un modèle à deux périodes avec un actif financier

Nous nous restreignons, par souci de simplifier les notations au maximum, à une économie à deux périodes. L'analyse reste toutefois valable pour une économie s'étendant sur un nombre fini quelconque de périodes.

12.3.1 Le modèle

Il existe deux périodes, $t = 0$ et $t = 1$, ainsi que C biens à chaque période. Ces biens sont échangés sur des marchés au comptant. Ceci signifie qu'en première période, les agents achètent les biens qu'ils désirent consommer en première période ; en seconde période, ils achètent les biens qu'ils désirent consommer en seconde période. Cette organisation des marchés est donc différente de celle envisagée plus haut, puisque dans la structure avec marchés à terme, un agent achète aujourd'hui les biens qu'il va consommer sur les deux périodes.

Pour qu'un modèle avec marchés au comptant soit plus qu'une simple juxtaposition de deux modèles statiques, il faut introduire un lien entre les deux périodes. Un premier lien passe par la fonction d'utilité, puisque l'utilité retirée de la consommation de biens en seconde période peut dépendre de la consommation en première période. Un second lien, qui va nous intéresser plus particulièrement ici, est l'introduction d'un actif financier, qui permet de transférer de la richesse d'une période sur l'autre.

Introduisons donc un actif financier dans l'économie. Plusieurs spécifications de cet actif sont possibles. Nous en choisirons une, très simple, à savoir que la détention d'une unité de cet actif donne droit à une unité de bien 1 demain et coûte q unités de ce même bien aujourd'hui. Une autre possiblité aurait été de dire que l'actif rapporte 1 franc demain (*i.e.* de spécifier son rendement en termes d'une unité de compte abstraite, le franc). Une spécification alternative aurait également pu être développée, à savoir que l'actif pourrait rapporter un panier de bien plutôt qu'un seul bien. Les différentes spécifications des actifs conduisent à des propriétés parfois différentes ; nous ne chercherons cependant pas à être exhaustif et nous concentrerons sur le cas d'*actifs numéraire*, c'est-à-dire dont le paiement est spécifié en un bien, que nous choisirons comme numéraire. Dans ce qui suit, le prix du bien 1 est donc fixé à un en $t = 0$ et en $t = 1$.

Acheter cet actif signifie abandonner des ressources aujourd'hui afin d'en obtenir demain, c'est-à-dire que l'agent épargne ; tandis que vendre cet actif signifie emprunter. Dans la formulation adoptée, le fait qu'il existe un intérêt positif ou négatif sur le montant prêté ou emprunté dépend de q. Si $q < 1$ l'intérêt est positif ; si $q > 1$, il est négatif. En effet, nous pouvons définir un taux d'intérêt à partir du prix q de la manière suivante : $\frac{1}{1+r} \equiv q$: si nous investissons une unité de bien 1 dans l'achat du titre, nous obtenons $1/q$ unités de celui-ci (puisque le prix du bien 1 est fixé à l'unité), qui nous rapporte $1/q$ unités de bien 1 en seconde période. Ainsi une unité de bien 1 "rapporte" $1/q$ unités de bien 1. En traduisant ceci en termes de taux d'intérêt, nous trouvons bien que celui-ci, r, doit être tel que $1 + r = 1/q$, ce qui est équivalent à la formule donnée ci-dessus. Nous retrouvons également que $r > 0$ si $q < 1$.

Notons b_h le montant de l'actif détenu par h. Cet actif est assimilable à une reconnaissance de dette : le détenteur du titre reconnait devoir une certaine somme (un certain montant de bien 1) à l'émetteur du titre, qui est un autre agent privé. Ce type d'actif est qualifié d'actif interne car sa quantité agrégée (sur les agents privés) est nulle : ce que l'un détient a été émis par l'autre. Ce titre n'est donc pas assimilable à de la monnaie gouvernementale, qui elle, existe en quantité strictement positive lorsque nous sommons les encaisses monétaires de tous les consommateurs (en particulier, un consommateur ne peut détenir un montant négatif de monnaie gouvernementale -ou monnaie externe- puisqu'il ne peut émettre celle-ci).

Avant de passer à l'étude formelle du modèle, résumons-en la structure institutionnelle. En $t = 0$, les agents consomment et achètent ou vendent de l'actif financier. en $t = 1$, les agents honorent leur dette ou reçoivent leur épargne et consomment, en achetant les biens au comptant. Cette structure fait ressortir un fait marquant par rapport à la structure de marchés à terme ; les agents, lorsqu'ils forment leur plan de consommation et d'épargne en $t = 0$ ne connaissent pas les prix qui s'établiront en $t = 1$. En effet, ces derniers sont déterminés sur les marchés qui s'ouvrent seulement en $t = 1$. Les agents doivent donc anticiper ces prix lorsqu'ils décident du montant d'actifs qu'ils souhaitent détenir en première période.

12.3.2 Problème de maximisation et équilibre à anticipations rationnelles

Nous connaissons la fonction objectif du consommateur, $u_h(x_h(0), x_h(1))$, et il suffit donc de connaître les contraintes budgétaires auxquelles il fait face pour pouvoir résoudre son problème de maximisation.

La contrainte budgétaire en première période s'écrit :

$$p(0)e_h(0) = p(0)x_h(0) + qb_h$$

où $p(0)$, le vecteur du prix des biens de consommation disponibles en $t = 0$ est, d'après notre normalisation, tel que $p^1(0) = 1$. Le consommateur partage son revenu entre consommation immédiate et détention d'actif. Si b est positif, il consomme moins en première période que ses dotations ne lui en donnent la possibilité (il épargne), alors que si b est négatif, il peut consommer plus que son revenu courant (il emprunte).

La contrainte budgétaire en seconde période s'écrit :

$$p^1(1)b_h + p(1)e_h(1) = p(1)x_h(1)$$

L'actif rapportant du bien 1, il faut évaluer ce paiement à l'aide du prix du bien 1 en seconde période. Ainsi, si nous normalisons $p^1(1) = 1$, nous obtenons :

$$b_h + p(1)e_h(1) = p(1)x_h(1)$$

Le consommateur dépense tout son revenu (y compris son épargne si $b > 0$, ou moins sa dette si $b < 0$) en biens de consommation, puisque la seconde période est la dernière période de cette économie (il ne sert donc à rien d'épargner, et il est impossible d'emprunter lors de cette période).

Un nouveau problème, auquel nous avons fait allusion dans le paragraphe précédent, se pose lorsque nous écrivons cette contrainte budgétaire de seconde période. Les prix de seconde période ne sont pas connus aujourd'hui, puisqu'ils ne sont observables que lorsque les marchés au comptant de la seconde période ouvrent. Les consommateurs doivent donc les *anticiper*. Comment le font-ils ?

Une réponse théorique possible, qui a largement dominé dans la littérature des années 1970 et 1980, est de supposer que les agents sont capables d'anticiper parfaitement les prix d'équilibre de seconde période. Leur problème de maximisation s'écrit donc :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_h,b_h} & u_h(x_h(0), x_h(1)) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{l} p(0)(x_h(0) - e_h(0)) = -qb_h \\ p(1)(x_h(1) - e_h(1)) = b_h \\ x_h(0) \geq 0,\ x_h(1) \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Dans ce problème, $p(1)$ est le prix d'équilibre (normalisé) de seconde période. Il est donc quelque peu abusif de définir le problème du consommateur indépendamment du concept d'équilibre. En fait, si la notion d'équilibre à anticipations rationnelles (ou parfaites[74]) est adoptée, le problème du consommateur et l'équilibre sont déterminés simultanément.

Remarquons enfin qu'aucune contrainte n'est imposée sur le montant b_h détenu ou émis. Celui-ci peut être positif ou négatif, et d'un montant infini. Il n'existe donc aucune contrainte directement imposée sur b_h. En revanche, il est clair que les contraintes de positivité de la consommation ainsi que les contraintes budgétaires au comptant, vont

[74] Nous adopterons ici le vocable d'équilibre à anticipations rationnelles, même si, dans le cadre de ce modèle sans incertitude, cette notion d'équilibre est souvent appelée équilibre de prévisions parfaites. Nous voulons ainsi souligner l'unité du concept, à savoir qu'un équilibre à prévisions parfaites n'est qu'un cas particulier d'un équilibre à anticipations rationnelles, *i.e.*, l'équilibre à anticipations parfaites n'est que l'adaptation de la notion d'équilibre à anticipations rationnelles à un modèle sans incertitude.

imposer des rectrictions sur le montant du titre qu'un agent peut détenir ou émettre.

Une autre particularité du modèle est l'absence de "faillite". En effet, tel que nous avons écrit les contraintes budgétaires des agents, nous supposons que ceux-ci font toujours face à leurs engagements et ne font jamais défaut sur leur dette. Une justification possible serait de dire qu'il existe une "pénalité infinie" à ne pas honorer sa dette. Cette hypothèse est certes extrême et va à l'encontre de l'idée d'anonymat sur les marchés en concurrence parfaite, mais constitue une simplification appréciable. Ce problème de la faillite n'est cependant pas extrêmement intéressant en l'absence d'incertitude sur le futur. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant.

Nous pouvons maintenant définir un équilibre à anticipations rationnelles :

Définition : *Un équilibre à anticipations rationnelles (ou parfaites) est un vecteur* (p, q, x, b) *tel que :*

(i) *étant donné* (p, q), (x_h, b_h) *est une solution au problème du consommateur, pour tout* h,
(ii) *les marchés s'apurent :* $\sum_h b_h = 0$ *et* $\sum_h x_h(t) = \sum_h e_h(t)$ *pour* $t = 0, 1$.

Lorsque nous avons posé le problème de maximisation du consommateur, nous avons adopté deux normalisations, à savoir $p^1(0) = 1$ et $p^1(1) = 1$. Ceci est inhabituel : dans tous les modèles étudiés jusqu'à présent, seule une normalisation était possible. Les deux normalisations proviennent ici simplement du fait que le problème du consommateur comporte deux contraintes budgétaires, homogènes de degré un par rapport aux prix. La solution du problème de maximisation n'est pas modifiée si tous les prix de première période sont multipliés par un scalaire positif quelconque. De même, elle n'est pas modifiée si tous les prix de seconde période sont multipliés par un scalaire positif quelconque.

En regard de ces deux normalisations existent deux lois de Walras : si nous sommons les contraintes budgétaires de tous les agents à la date 0, nous obtenons le résultat suivant :

$$p(0) \sum_h z_h(0) + q \sum_h b_h = 0$$

et donc, si les marchés pour tous les biens sont à l'équilibre, alors le marché des titres est également à l'équilibre. Le même raisonnement permet d'établir qu'une loi de Walras est "vérifiée pour la seconde période".

Ainsi, *a priori*, il nous faut déterminer $2C$ prix de bien, plus un prix d'actifs, avec $2C$ équations d'équilibre sur les marchés des biens et 1 sur le marché des actifs. Deux lois de Walras nous disent qu'en fait seules $2C - 1$ équations sont indépendantes ; équations qu'il faut mettre en parallèle avec les $2C - 1$ variables (après normalisation) à déterminer. Nous avons autant de variables que d'équations indépendantes, ce qui laisse penser qu'un équilibre devrait exister, et être localement unique. Le résultat du paragraphe suivant permet de démontrer ceci à moindre frais.

12.3.3 Un résultat d'équivalence

Le modèle que nous venons de décrire peut paraître plus raisonnable de par la manière dont s'effectuent les échanges. Toutefois, nous montrons dans ce paragraphe que l'allocation d'équilibre à anticipations rationnelles est en fait la même que celle du modèle dans lequel tous les marchés à terme seraient ouverts en première période. Plus précisément, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème : $(p^\star, x^\star)$ *est un équilibre du modèle avec marchés à terme si et seulement si il existe* $(q^\star, b^\star)$ *tel que* $(p(0)^\star, p(1)^\star/q^\star, q^\star, x^\star, b^\star)$ *est un équilibre à anticipations rationnelles du modèle avec marchés au comptant et un actif financier.*

Démonstration : Il suffit de constater que les problèmes de maximisation des agents sont en fait les mêmes dans les deux modèles si b_h est choisi de manière adéquate.

En effet, le problème de maximisation dans le modèle avec actif financier peut s'écrire, en remplaçant dans la première contrainte b_h par sa valeur obtenue à l'aide de la seconde :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_h, b_h} & u_h(x_h(0), x_h(1)) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{rcl} p(0)(x_h(0) - e_h(0)) + qp(1)(x_h(1) - e_h(1)) & = & 0 \\ -p(0)(x_h(0) - e_h(0)) & = & qb_h \end{array} \right. \end{array}$$

Les deux problèmes sont strictement équivalents. Il suffit de définir $b_h^\star$ de telle manière que $q^\star b_h^\star = -p^\star(0)(x_h^\star(0) - e_h(0))$. De plus, par définition de $b_h^\star$, le marché de l'actif financier est à l'équilibre lorsque celui des biens en première période l'est aussi.

12.3.4 Commentaires

Le résultat d'équivalence établi ci-dessus nécessite quelques commentaires. Tout d'abord, l'équilibre étant le même que dans l'économie avec marchés à terme, tous les théorèmes d'existence et d'optimalité vus jusqu'à présent s'appliquent ici aussi. Ainsi, il n'est pas besoin de développer de nouveaux outils pour étudier le modèle dans sa version "marchés au comptant plus marché financier", puisque il suffit d'étudier le modèle "statique" correspondant.

Le théorème reste valable pour d'autres spécifications de l'actif. Nous avons supposé que le paiement auquel il donnait droit en seconde période était spécifié en bien 1. Nous aurions pu également nous intéresser à un actif dont le paiement est libellé dans une unité de compte abstraite, le franc. Sous cette hypothèse, la contrainte budgétaire de première période reste la même, tandis que celle de seconde période, avant normalisation, s'écrit :

$$p(1)(x_h(1) - e_h(1)) = b_h$$

Le résultat d'équivalence reste vrai dans ce cas de figure. Toutefois, il n'est plus possible de normaliser le prix du bien 1 en $t = 1$, puisque la contrainte budgétaire à cette date n'est pas homogène de degré un par rapport aux prix (la valeur du franc étant fixé à un par définition). De ce fait, nous avons maintenant $2C-1$ équations indépendantes, mais $2C$ variables à déterminer. Il existe donc en général un degré de liberté pour fixer un prix. Un examen du problème de maximisation permet de voir que ce degré de liberté sert à fixer le montant d'actifs détenu par les agents, mais n'affecte pas ici l'allocation réelle d'équilibre. Nous ne rentrerons pas dans le détail de ces modèles ici et renvoyons le lecteur intéréssé au manuel de A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green[75] pour une étude plus approfondie.

[75] *Microeconomic Theory*, éditions Oxford University Press, 1995.

Un autre point méritant un commentaire est la notion d'actualisation implicite dans l'analyse menée. En effet, dans la démonstration du théorème précédent, nous avons fait apparaître une contrainte budgétaire sur les deux périodes, s'écrivant :

$$p(0)(x_h(0) - e_h(0)) + qp(1)(x_h(1) - e_h(1)) = 0$$

Compte tenu du fait qu'il est possible de définir un taux d'intérêt r dans cette économie par $1 + r = 1/q$ (voir page 235), cette contrainte se réécrit :

$$p(0)(x_h(0) - e_h(0)) + \frac{1}{1+r}p(1)(x_h(1) - e_h(1)) = 0$$

où nous faisons apparaître explicitement le facteur d'actualisation $1/(1 + r)$. Ceci revient à dire qu'une unité de numéraire (un franc) aujourd'hui est équivalent à $(1 + r)$ unités demain, ou en d'autres termes, qu'une unité de numéraire (un franc) demain est équivalent à $1/(1+r)$ unités aujourd'hui. Pour un prix au comptant demain $p(1)$, nous pouvons ainsi définir un prix actualisé aujourd'hui $\frac{p(1)}{1+r}$.

Comme nous l'avons déjà observé, les prix qui rentrent dans le problème de maximisation des agents sont les prix d'équilibre. Comment l'agent est-il capable de les anticiper ? Il existe deux réponses à cette question. La première, informelle et que nous reprendrons dans la section suivante, consiste à dire que la notion d'équilibre à anticipations rationnelles est implicitement une notion à n'employer que dans le long terme, lorsque les agents ont “appris” la manière dont fonctionne l'économie, et sont en conséquence capables de parfaitement prévoir les prix d'équilibre futurs. Cette réponse, pour intuitive qu'elle soit n'est pas totalement rigoureuse, et, en particulier, il n'est pas du tout certain que toute la période d'apprentissage (qui est supposée avoir eu lieu auparavant mais n'est pas explicitement formalisée) n'ait pas d'influence sur l'équilibre finalement atteint.

La seconde réponse est que les agents connaissent le modèle, et sont en conséquence capables de calculer les prix d'équilibre. Sous cette hypothèse, et si tous les agents connaissent le modèle et savent que tout le monde connaît le modèle (et ainsi de suite), alors l'équilibre obtenu est bien un équilibre à anticipations rationnelles. Mais en faisant cette hypothèse, nous perdons beaucoup de la force de la notion d'équilibre concurrentiel (et du fait qu'il est optimal), ou pour les septiques, nous mettons à jour une de ses faiblesses récurrentes. En effet, la “beauté” de l'équilibre concurrentiel, comme nous l'avons déjà souligné, est qu'un nombre minimum de signaux (les prix) est nécessaire pour coordoner de manière efficace les actions des agents. Dans un modèle statique, les agents n'ont besoin de connaître que leurs préférences et leurs dotations et d'observer les prix qui s'établissent à l'équilibre sur les marchés pour que les actions qu'ils prennent soient compatibles entre elles. Dans notre modèle à deux périodes, pour que les prix remplissent leur fonction de signaux, il faut que tout le monde soit capable de les anticiper correctement, et donc que tous les agents connaissent les dotations et les préférences des autres agents (c'est ce que signifie “connaître le modèle” dans ce cadre). Ce que doit connaître un agent devient donc considérable, et il ne semble pas qu'un système de marchés concurrentiels soit si économe que cela quant à l'information dont chaque agent doit disposer.

En fait, ce que met en évidence cette discussion est que les prix ne sont fixés par personne dans ce modèle d'équilibre général. Lorsque le modèle est statique, l'observation des prix courants est suffisante pour que les agents formulent leurs demandes, même si demeure le problème de savoir qui annonce ces prix. Lorsque le modèle est dynamique, la notion d'équilibre à anticipations rationnelles ne spécifie pas comment les agents formulent leurs anticipations, mais suppose quand même qu'elles sont correctes.

Cette notion d'équilibre n'en demeure pas moins une notion essentielle et constitue une référence pour tout modèle dynamique, à savoir la situation dans laquelle aucun agent ne fait d'erreurs d'anticipations.

12.3.5 Equilibre à anticipations rationnelles et production

Nous avons fait abstraction, ci-dessus, du comportement du producteur dans une économie séquentielle. Nous allons voir brièvement comment celui-ci peut être inclus dans l'analyse. Les processus de production auxquels une entreprise f a accès sont représentés par un ensemble de production Y_f qui spécifie les plans de production techniquement et temporellement réalisables. Ainsi, un point dans cet ensemble correspond aux inputs et aux outputs des différents biens utilisés et produits à chaque période. Comment calculer le profit associé à un plan de production temporel ?

Si $y(0)$ est le plan de production en $t = 0$, et $y(1)$ celui en $t = 1$, le profit de première période est $p(0)y(0)$ et celui de seconde période est égal à $p(1)y(1)$. Cela n'est toutefois pas suffisant. Il faut pouvoir comparer le profit global rapporter par ce plan de production au profit associé à d'autres plans de production. Ceci est aisé. Il suffit de "tout ramener" à la date $t = 0$. Ainsi, une fois que les flux de profit seront exprimés dans une unité commune, il sera facile de comparer la valeur de différents plans de production. Décomposons donc l'évaluation du profit associé au plan $(y(0), y(1))$. Une unité du bien 1 (le bien numéraire) demain a un prix aujourd'hui : q. En effet, en achetant une unité de l'actif (au prix q) un agent économique a droit à une unité de bien 1 demain. Inversement, recevoir un profit $p(1)y(1)$ demain (exprimé en bien 1) équivaut à avoir $qp(1)y(1)$ aujourd'hui, ou encore, en utilisant la notion de taux d'intérêt développé ci-dessus, $\frac{1}{1+r}p(1)y(1)$.

Ainsi, nous obtenons l'évaluation suivante du profit actualisé dégagé par le plan de production $y = (y(0), y(1))$: $\pi = p(0)y(0) + \frac{1}{1+r}p(1)y(1)$ (en unité de bien 1 à la date $t = 0$). Si nous avons développé cette évaluation, c'est pour remarquer que les actionnaires d'une entreprise sont unanimes pour que celle-ci maximise son profit actualisé. En effet, peu importe le moment auquel le profit est effectivement réalisé. Ce qui compte pour le consommateur est que celui-ci soit le plus élevé possible. En effet, si le consommateur sait que l'entrerprise qu'il détient ne rapporte aucun profit aujourd'hui, mais réalisera un profit élevé demain, il peut s'endetter sur le marché de l'actif aujourd'hui et rembourser demain avec le profit effectivement réalisé. Ainsi, la structure temporelle du plan de production adopté par l'entreprise lui importe peu. Ce qui l'intéresse est uniquement le montant global des profits réalisés, ceux-ci étant comparables entre eux grâce au procédé de l'actualisation.

Formellement, ceci se voit lorsque nous écrivons les contraintes budgétaires d'un actionnaire en $t = 0$ et $t = 1$. Supposons que cet actionnaire détienne uniquement une part θ_f de l'entrerpise f. Ses contraintes budgétaires s'écrivent :

$$\begin{cases} p(0)(x_h(0) - e_h(0)) = -qb_h + \theta_f p(0)y_f(0) \\ p(1)(x_h(1) - e_h(1)) = b_h + \theta_f p(1)y_f(1) \end{cases}$$

Ces deux contraintes se "réduisent" à une seule (comme nous l'avons vu en présentant le résultat d'équivalence), en éliminant les titres :

$$p(0)(x_h(0) - e_h(0)) + qp(1)(x_h(1) - e_h(1)) = \theta_f p(0)y_f(0) + q\theta_f p(1)y_f(1)$$

Le consommateur-actionnaire désire bien évidemment que le terme de droite soit le plus élevé possible, soit, en d'autres termes, que l'entreprise maximise son profit actualisé.

12.4 Equilibre temporaire

Dans le modèle étudié ci-dessus, nous avons fait l'hypothèse que les agents anticipaient "parfaitement" ou "rationnellement" les prix d'équilibre de seconde période. Il existe cependant une vision alternative de l'équilibre dans une économie temporelle. C'est l'optique de l'équilibre temporaire, dans laquelle les anticipations jouent un rôle essentiel.

12.4.1 Le concept d'équilibre

Les prix sont toujours supposés s'ajuster afin d'équilibrer les marchés. Cependant, contrairement aux modèles étudiés précédemment, seul le prix de la période t s'ajuste pour équilibrer les marchés de la période t, les anticipations pour les prix futurs étant données a priori. A chaque instant, il y aura donc un prix d'équilibre des marchés au comptant, dépendant explicitement des anticipations des agents.

Pour fixer les idées, reprenons le modèle avec actif financier présenté dans la section précédente, mais cette fois sans avoir recours à la notion d'équilibre à anticipations rationnelles. Le prix de seconde période anticipé par l'agent h est écrit $p_h^a(1)$ (nous supposons que le bien 1 est le numéraire et donc que la première composante de ce prix anticipé est égale à 1), et son problème de maximisation s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_h,b_h} & u_h(x_h(0),x_h(1)) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{rcl} p(0)(x_h(0)-e_h(0)) & = & -qb_h \\ p_h^a(1)(x_h(1)-e_h(1)) & = & b_h \end{array} \right. \end{array}$$

La solution à ce programme définit des fonctions de demande dépendant du prix courant et de l'anticipation de prix en seconde période.

Un équilibre temporaire de ce modèle est alors un vecteur de prix $(p(0),q)$ et une allocation $(x(0),x(1),b)$ tels que :

(i) étant donnés $(p(0),q)$ et l'anticipation $p_h^a(1)$, $(x_h(0),x_h(1),b_h)$ est une solution au problème de maximisation,
(ii) les marchés de *première période* s'apurent : $\sum_h b_h = 0$ et $\sum_h x_h(0) = \sum_h e_h(0)$

Nous n'imposons aucune restriction *a priori* sur les anticipations des agents, mais, en "contrepartie", l'équilibre des marchés n'est pas assuré en seconde période. La demande globale qui pourrait être obtenue par agrégation des *intentions individuelles* $x_h^a(1)$ pour la seconde période n'a aucune raison d'être égale à la somme des dotations de seconde période : $\sum_h x_h(1)(p(0),p_h^a(1)) \neq \sum_h e_h(1)$.

Nous nous sommes restreints dans l'exemple ci-dessus à des anticipations ponctuelles : chaque agent anticipe un prix pour la seconde période. De manière plus réaliste, nous pouvons supposer que chaque agent anticipe plutôt une distribution de prix, sans que cela pose de problèmes conceptuels. $p_h^a(1)$ peut également dépendre des variables observées à la période zéro. Notons qu'un tel équilibre a peu de chances d'être Pareto optimal.

12.4.2 Equilibre temporaire, anticipations rationnelles, apprentissage

Nous proposons pour terminer ce chapitre, une discussion de phénomènes d'apprentisssage, dans un cadre un peu plus abstrait. Supposons que l'état de l'économie à la date t est représenté par un vecteur de prix d'équilibre $p(t)$ lui même fonction des anticipations des H agents pour la période suivante :

$$p(t) = f(p_1^a(t+1), ..., p_H^a(t+1))$$

f représente ainsi le processus par lequel le marché à la date t s'équilibre. C'est donc un "résumé" des préférences, des dotations, du fonctionnement du marché,...

Dans ce cadre, la notion d'anticipations rationnelles peut être définie par $p_h^a(t+1) = p(t+1)$. Toutefois, $p(t+1)$ dépendant lui même des anticipations des agents pour la période $t+2$, la notion d'équilibre à anticipations rationnelles nécessite la détermination simultanée de toute la séquence des prix et des anticipations de prix. Ainsi, toute la suite de prix d'équilibre est déterminée simultanément à un équilibre à anticipations rationnelles, et le temps ne joue plus de rôle particulier.

Si nous donnons une forme récurrente au système, nous obtenons $p(t) = F(p(t+1))$, en remplaçant $p_h^a(t+1)$ par $p(t+1)$ dans le système f : c'est le prix qui prévaudra en $t+1$ qui détermine celui qui équilibre les marchés aujourd'hui. Ainsi, l'interprétation "dynamique" du concept d'équilibre à anticipations rationnelles nous conduit à "inverser le sens du temps" : le futur ne peut être anticipé sur la base du passé, puisqu'ici c'est le futur qui détermine le présent[76] . Pour respecter l'idée selon laquelle les agents anticipent le prix futur à partir de l'observation de la suite des prix passés, il faut adopter la formulation suivante :

$$p_h^a(t+1) = \phi_h(p(t), p(t-1), ...)$$

La fonction ϕ_h est appelée fonction d'anticipation de l'agent h. Dans ce cas, nous obtenons en remplaçant $p_h^a(t+1)$ par son expression ci-dessus dans le système f :

$$p(t) = f\left(\phi_1(p(t), p(t-1), ...), ..., \phi_H(p(t), p(t-1), ...)\right) = G\left(p(t), p(t-1), ...\right)$$

Le prix d'équilibre aujourd'hui est déterminé par l'évolution passée des prix. Cette formulation permet également d'aborder le problème de l'apprentissage. En effet, la fonction ϕ_h peut dépendre des paramètres structurels du modèle, que les agents apprennent au cours du temps. Il est également possible de restreindre la classe à laquelle ces fonctions d'anticipations doivent appartenir, en supposant par exemple que les agents sont capables de "détecter" les suites constantes (c'est-à-dire un équilibre stationnaire) :

$$\phi_h(x, x, x, ...) = x$$

[76]Pour plus de détails sur cette approche, voir l'introduction de J.-M. Grandmont, *Temporary Equilibrium*, éditions Academic Press, 1988

ou encore sont capables de remarquer les cycles d'ordre deux par exemple :

$$\phi_h(x, y, x, y, x, y, ...) = y$$

Le problème de la convergence vers l'équilibre à anticipations rationnelles peut alors être posé rigoureusement, le fait que la suite d'équilibres temporaires converge ou non vers un équilibre à anticipations rationnelles dépendant notamment de la règle de révision des anticipations que les agents adoptent.

12.5 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre étendu l'analyse à un cadre intertemporel. Nous avons dans un premier temps constaté que le modèle statique pouvait, à l'aide d'une simple réinterprétation de la notion de bien, s'appliquer à un cadre dynamique. Toutefois, nous avons également critiqué cette réinterprétation, en constatant qu'elle supposait une organisation institutionnelle encore plus problèmatique que dans le cadre statique, et qu'elle ne permettait pas d'introduire la notion d'anticipations dans ce modèle.

Guidé par ces deux problèmes, nous avons alors présenté une organisation alternative des marchés, à savoir une suite de marchés au comptant doublée de marchés financiers, et un concept d'équilibre, l'équilibre à anticipations rationnelles, qui spécifie les anticipations des agents.

Un théorème d'équivalence nous a dispensé de nous livrer à l'étude de l'existence et de l'optimalité de ce nouveau type d'équilibre. Cependant, la présentation que nous avons faite d'un modèle dynamique et du concept de solution utilisé n'épuise bien évidemment pas le sujet. Nous n'avons par exemple par parlé de modèles dont l'horizon serait infini (ou aléatoire). Nous avons également omis une dimension importante lorsque le temps est introduit dans l'analyse : le fait que le futur est incertain. C'est ce que nous abordons dans le chapitre suivant.

Chapitre 13

Incertain

13.1 Introduction

Nous poursuivons ici l'étude d'une économie temporelle commencée dans le chapitre 12, en introduisant de l'incertitude dans le modèle. Il semble en effet raisonnable de considérer qu'une décision impliquant le futur comporte également un élément incertain. Lorsqu'un agent prend une décision telle que la durée et l'orientation de ses études, ce qui constitue d'un point de vue économique un investissement, il ne sait pas quelles seront les possibilités d'embauche à l'issue de cette formation.

Afin de prendre en compte cet aspect risqué des choix des agents, il nous faut développer un cadre stochastique suffisamment général pour englober diverses sources d'incertitude. En fait, comme pour l'aspect temporel dans le chapitre précédent, une première possibilité est de reprendre tout simplement le modèle d'Arrow-Debreu statique et de proposer une nouvelle dimension dans l'interprétation du concept de bien. Celui-ci serait également défini par les conditions sous lesquelles il est disponible. Ainsi, il n'existe plus un bien "pain", mais un bien "pain s'il fait beau demain" et un bien "pain s'il fait mauvais demain". A l'aide de cette interprétation de la notion de bien, le cadre statique et certain s'étend sans aucun problème à un modèle dynamique en environnement incertain. Toutefois, de même que dans le chapitre précédent, cette réinterprétation n'est pas totalement satisfaisante, et il nous faut développer des outils propres à la modélisation d'un environnement incertain. Le but de ce chapitre est de développer, le plus simplement possible, une approche spécialement adaptée pour l'étude d'une économie stochastique.

Avant de traiter le modèle d'équilibre général (d'échange pur) dans l'incertain, nous consacrons une section préliminaire à l'étude du choix d'un agent en univers incertain.

13.2 Préliminaires : choix en univers incertain

En théorie de la décision, il est habituel de distinguer le "risque" de "l'incertain", selon qu'il existe ou non une loi de probabilité objective sur les évènements futurs. Le traitement classique (Bayésien) de la théorie de la décision que nous présentons brièvement dans cette section ne fait pas de différences fondamentales entre ces deux cas, ce qui justifie que nous les traitions simultanément. De plus, cette distinction n'est pas toujours faite en théorie de l'équilibre général, comme nous le verrons ultérieurement.

La situation la plus simple impliquant un choix en univers risqué est celle de l'expérience suivante :

> Soit une pièce non truquée. Si pile tombe, le joueur gagne 100 francs ; si face tombe le joueur ne gagne rien.

Nous nous demandons combien un agent rationnel serait prêt à payer pour avoir le droit de participer à ce jeu. L'agent fait bien face ici à une décision qui comporte un élément de risque puisque le résultat de l'expérience est aléatoire. Une première réponse serait de dire qu'un agent serait prêt à payer l'espérance mathématique de gain, à savoir ici $100 \times 1/2 + 0 \times 1/2 = 50$ francs. Cette solution est-elle réellement convaincante ?

Le célèbre paradoxe de Saint-Pétersbourg montre qu'elle peut conduire à des situations pour le moins irréalistes. Le jeu est le suivant : le lancer d'une pièce est répété jusqu'au moment où pile apparaît. Tant que face apparaît, le lancer continue. Si pile sort au n^ième^ coup, le joueur reçoit 2^n francs. Quelle est l'espérance de gain, E ?

$$E = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{4}4 + ... + \frac{1}{2^n}2^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}2^n = \infty$$

L'espérance de gain est donc infinie, et si nous adoptions la solution suggérée, ceci signifierait qu'un joueur rationnel serait prêt à payer une somme infinie pour participer à ce jeu, ce qui semble peu plausible.

Une solution alternative est de supposer que les agents évaluent non pas l'espérance du gain qu'ils peuvent faire, mais qu'ils évaluent auparavant le gain monétaire au moyen d'une fonction d'utilité v, avant d'en prendre l'espérance. L'agent prendrait donc en considération l'espérance de l'utilité.

Introduisons quelques notations à ce stade. Soit $(x(1), \ldots, x(S))$ les gains possibles et $\pi(s)$ leur probabilité de réalisation ($\sum_{s=1}^{S} \pi(s) = 1$). Si nous faisons l'hypothèse que l'agent a un préordre complet de préférences défini sur l'ensemble des gains aléatoires, nous pouvons représenter ses préférences par une fonction d'utilité directement définie sur $(x(1), \ldots, x(S))$, à savoir $u(x(1), \ldots, x(S))$. L'hypothèse d'espérance d'utilité revient à supposer une forme particulière pour cette fonction u. Pour cela, nous avons besoin de définir une fonction d'utilité v qui permet à l'agent d'évaluer l'utilité qu'il retire d'un gain monétaire donné. v est donc une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors que u est une fonction de $\mathbb{R}^S$ dans $\mathbb{R}$. L'hypothèse d'utilité espérée s'écrit :

$$u(x_1, \ldots, x_S) = \sum_{s}^{S} \pi(s) v(x(s))$$

Sous cette hypothèse, la fonction u se décompose en la somme de S termes (u est "séparable") et est de plus linéaire par rapport aux probabilités $\pi(s)$.

Si nous appliquons ce critère au paradoxe de Saint-Pétersbourg en choisissant comme fonction d'utilité la fonction log, nous obtenons : $E(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log 2^n$ ce qui vaut $\log 4 = 1.39$, une évaluation somme toute plus "raisonnable".

Nous pouvons maintenant généraliser le cas précédent au cas où les agents choisissent des paniers de biens dans $\mathbb{R}_+^C$ (et non pas simplement une somme monétaire). A cette fin, supposons que les agents ont des préférences non pas sur les paniers de biens eux-mêmes mais sur des loteries représentant des paniers aléatoires. Une loterie l est donc un vecteur aléatoire pouvant prendre un nombre fini de valeurs, $x_1, ...x_S$, avec les probabilités respectives $\pi_1, ..., \pi_S$. Supposer que le consommateur possède des préférences sur l'ensemble des loteries revient à supposer qu'il est capable de dire s'il préfère, par exemple, recevoir une pomme avec probabilité 1/2 et une banane avec probabilité 1/2 à une poire avec probabilité 2/5 et une orange avec probabilité 3/5.

Il est cependant clair que travailler avec une relation de préférences sur l'espace des loteries n'est pas toujours très pratique, et il serait souhaitable d'obtenir une représentation de ces préférences au moyen d'une fonction d'utilité. De fait, il n'y a aucune difficulté conceptuelle à représenter ces préférences au moyen d'une fonction d'utilité portant sur les loteries. Toutefois, comme nous venons de le voir, un moyen (parmi d'autres) de représenter le choix du consommateur en univers incertain est de supposer qu'il provient de la maximisation de l'espérance de l'utilité.

Pour que cette représentation soit justifiée, la relation de préférence doit vérifier certains axiomes, développés par J. Von Neumann et O. Morgenstern[77], et notamment l'axiome d'indépendance, qui se trouve souvent violé dans la réalité (c'est le paradoxe d'Allais). La construction de l'espérance d'utilité a donc certaines limites, que nous n'étudierons cependant pas ici[78].

Si ces axiomes sont vérifiés, alors il est équivalent de dire que le consommateur préfère la loterie l (qui donne le panier de biens $x(s)$ avec la probabilité $\pi(s)$, $s = 1, \ldots, S$) à la loterie l' (qui donne le panier de biens $x'(t)$ avec la probabilité $\pi'(t)$, $t = 1, \ldots, T$) et que :

$$\sum_{s=1}^{S} \pi(s)v(x(s)) \geq \sum_{t=1}^{T} \pi'(t)v(x'(t))$$

L'expression $\sum_{s=1}^{S} \pi(s)v(x(s))$ est l'utilité espérée de la loterie l. La fonction d'utilité v ainsi définie à partir des préférences n'est définie qu'à une fonction croissante affine près, ce qui signifie que la représentation n'est plus ordinale, mais devient cardinale. La situation est à ce titre comparable à celle évoquée dans le chapitre précédent, page 232. La fonction $f \circ v$ représente les mêmes préférences que v si et seulement si f est une fonction linéaire croissante. La remarque concernant la concavité de la fonction d'utilité faite à l'occasion de la discussion de l'utilité intertemporelle reste valable ici. Si nous voulons que u, l'utilité sur les paniers aléatoires, soit une fonction quasi-concave, il n'est pas suffisant de supposer la quasi-concavité de v, car la somme de fonctions quasi-concaves n'est pas nécessairement quasi-concave[79]. Il faut donc imposer la concavité (notion plus forte, rappelons-le, que la quasi-concavité) de la fonction v pour que l'espérance soit elle-même concave (et par conséquent quasi-concave).

Lorsque les préférences d'un consommateur peuvent être représentées par le critère de l'espérance d'utilité, l'hypothèse de concavité de v que nous avons faite ci-dessus a des conséquences importantes en ce qui concerne la manière dont un agent évalue des perspectives risquées, c'est-à-dire son attitude vis-à-vis du risque : si la fonction d'utilité d'un agent est concave, il préfèrera à tout revenu aléatoire une somme certaine égale à l'espérance de ce revenu (en termes mathématiques, si v est concave, alors $E[v(r)] \leq v[E(r)]$).

Formellement, soient x et y deux sommes monétaires et $p \in [0, 1]$. La concavité de v implique, par définition :

$$v(px + (1-p)y) \geq pv(x) + (1-p)v(y)$$

En d'autres termes, le consommateur préfère toucher le revenu certain $px + (1-p)y$ plutôt que de participer à la loterie dans laquelle il touche x avec probabilité p et y avec

[77] *Theory of Games and Economic Behavior*, ,ditions Princeton University Press, 1944.

[78] Voir M. Willinger, "La r,novation des fondements de l'utilit, et du risque", *Revue Economique*, 1990, p. 5-47, et J.P. Gayant, "G,n,ralisation de l'esp,rance d'utilit, en univers risqu,", *Revue Economique*, 1995, p. 1047-1061.

[79] Voir le chapitre 16.

probabilité $(1-p)$. Nous dirons dans ce cas que l'agent présente de l'aversion vis-à-vis du risque.

Nous avons supposé jusqu'à présent qu'il existait des probabilités "objectives" qui nous permettaient de former des loteries. Supposons maintenant que le consommateur ait à choisir entre "un panier donné s'il fait beau et rien s'il fait mauvais" et, à l'inverse, "rien s'il fait beau et un panier de biens s'il fait mauvais". Les probabilités de "beau temps" et "mauvais temps" ne sont pas connues. Quel sens a alors l'hypothèse de l'espérance de l'utilité ?

En fait, lorsque cette hypothèse est adoptée, les probabilités qui apparaîssent dans ce cas de figure sont des probabilités "subjectives" , c'est-à-dire propres à l'agent et qui ne sont pas nécessairement les mêmes pour deux agents différents. Elle reflète l'idée que le consommateur a sa propre évaluation des probabilités respectives de la pluie et du beau temps.

Nous ne développerons pas plus avant cette représentation du comportement du consommateur en univers incertain, l'étude de l'équilibre général en univers incertain ne le nécessitant pas réellement.

13.3 Equilibre général dans l'incertain

Nous développons dans cette section un modèle d'échange, à deux périodes, avec incertitude en seconde période.

13.3.1 La notion d'état de la nature

L'économie est soumise à un aléa, symbolisé par un ensemble S d'états de la nature possibles. Chaque état de la nature s est une description complète de l'économie pour une réalisation de l'aléa. Les états doivent être exclusifs l'un de l'autre et exhaustif, dans le sens où ils décrivent toute l'incertitude à laquelle est soumise l'économie. La structure du modèle peut être décrite au moyen d'un "arbre" (graphique 13.1).

Dans ce cas de figure, deux (et seulement deux) événements peuvent se produire en seconde période : soit il fait beau (état α) soit il pleut (état β). Lors de la première période, le consommateur doit donc tenir compte de la possibilité d'occurrence des deux états. Il possède des dotations différentes dans chaque état, et éventuellement des préférences différentes selon les états (aller voir un match au stade ne procure pas la même utilité qu'il fasse beau ou qu'il pleuve).

Il faut donc distinguer la consommation des agents dans les différents états de la nature, et de manière générale, la fonction d'utilité d'un agent peut s'écrire :

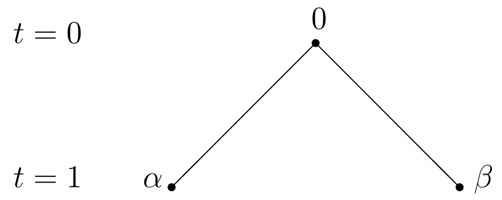
$$u_h\left(x_h(0), x_h(\alpha), x_h(\beta)\right)$$

qui prend la forme particulière, dans le cas d'espérance de l'utilité :

$$\pi_h(\alpha)v_h\left(x_h(0), x_h(\alpha)\right) + \pi_h(\beta)v_h\left(x_h(0), x_h(\beta)\right)$$

Il apparaîtra au cours de ce chapitre que la théorie de l'équilibre général n'a pas

FIG. 13.1: La structure de l'incertitude



besoin de l'hypothèse d'espérance d'utilité pour établir la plupart des résultats généraux (existence et optimalité de l'équilibre notamment), la notion essentielle étant celle de préférences sur les paniers de biens aléatoires.

13.3.2 Un modèle à deux périodes avec système complet de biens contingents

L'analyse menée ici est sensiblement similaire à celle faite dans le cadre d'une économie temporelle. En effet, interprétons $x_h^c(s)$ comme étant un contrat promettant de livrer $x_h^c(s)$ unités du bien c dans l'état s (c'est-à-dire si l'état s se réalise). Supposons maintenant que tous ces contrats soient disponibles en première période. Les agents peuvent vendre ou acheter n'importe quel contrat aujourd'hui spécifiant l'achat ou la vente d'un bien en seconde période, conditionnellement à la réalisation de l'incertitude (*i.e.* conditionnellement à la réalisation de l'état de la nature). Nous parlerons alors de bien contingent à la réalisation de l'état. Pour illustrer cette notion, nous pouvons remarquer que pour que l'agent s'assure la consommation d'une unité du bien c demain (quel que soit l'état de la nature), il doit en fait acheter S biens contingents, à savoir le bien $x^c(1)$, le bien $x^c(2)$ ..., le bien $x^c(S)$.

Dans le cas où tous les contrats possibles sont sur le marché en première période, le problème de maximisation de l'individu s'écrit :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_h} & u_h(x_h) \quad \left[= \sum_{s=\alpha,\beta} \pi_h(s) v_h\left(x_h(0), x_h(s)\right)\right] \\ \text{s.c.} & p(0)\left(x_h(0) - e_h(0)\right) + p(\alpha)\left(x_h(\alpha) - e_h(\alpha)\right) + p(\beta)\left(x_h(\beta) - e_h(\beta)\right) = 0 \end{array}$$

$p^c(s)$ est le prix contingent à l'état s du bien c. C'est le prix qu'il faut payer aujourd'hui pour s'assurer la livraison demain d'une unité de bien c si l'état réalisé est s. La structure formelle du modèle est la même que celle du modèle statique. La seule différence réside dans l'interprétation des biens présents.

Les théorèmes d'existence et d'optimalité déjà étudiés restent donc vrais dans cette économie. Toutefois, cette réinterprétation de la notion de bien est soumise à la même critique que dans le cas d'une économie temporelle : les agents n'ont pas la possibilité de prendre toutes leurs décisions économiques au début de leur vie, et de passer celle-ci à honorer les contrats achetés et vendus. Au contraire, les marchés sont animés à chaque période et les agents utilisent des actifs financiers pour transférer du pouvoir d'achat d'une période sur l'autre ou d'un état dans l'autre (contrat d'assurance).

13.3.3 Exemple

Le modèle prédemment décrit peut être illustré au moyen d'une boîte d'Edgeworth. Considérons donc une économie composée de deux agents. L'incertitude concerne la réalisation d'un aléa qui peut prendre soit la valeur α, soit la valeur β. Un seul bien physique est présent dans ce modèle. Nous adoptons l'hypothèse simplificatrice que les agents ne consomment pas en première période et que leurs préférences peuvent être représentées sous la forme de l'utilité espérée, à savoir :

$$u_h(x_h(\alpha), x_(\beta)) = \pi_h(\alpha)v_h(x_h(\alpha)) + \pi_h(\beta)v_h(x_h(\beta))$$

où $\pi_h(s)$ est la probabilité que h affecte à l'état $s = \alpha, \beta$, avec évidemment $\pi_h(\alpha) + \pi_h(\beta) = 1$. Cette représentation des préférences nous donne comme TMS entre le bien dans l'état α et le bien dans l'état β :

$$TMS_h = -\frac{dx_h(\beta)}{dx_h(\alpha)} = \frac{\pi_h(\alpha)v'_h(x_h(\alpha)}{\pi_h(\beta)v'_h(x_h(\beta)}$$

où $v'_h(.)$ représente la dérivée de v_h, supposée dérivable. Observons que pour les points tels que $x_h(\alpha) = x_h(\beta)$, cette expression se simplifie et que nous obtenons alors : $TMS = \frac{\pi_h(\alpha)}{\pi_h(\beta)}$.

Enfin, nous supposerons qu'il n'existe pas de risque agrégé dans cette économie, c'est-à-dire que le montant des dotations globales de bien dans chaque état est le même :

$$e_1(\alpha) + e_2(\alpha) = e_1(\beta) + e_2(\beta)$$

Dans le même temps, nous supposons que les agents font, individuellement, face à un risque économique, *i.e.*, $e_h(\alpha) \neq e_h(\beta)$, $h = 1, 2$.

Cette économie peut être représentée dans le cadre de la boîte d'Edgeworth. Seuls les axes doivent être réinterprétés. En abscisse, nous porterons la consommation du bien dans l'état α, tandis que l'axe des ordonnées représentera la consommation du bien dans l'état β. Notre hypothèse sur les dotations agrégées du bien dans les deux états a pour conséquence que la boîte est carrée (il y a autant de bien dans l'état α et dans l'état β). L'hypothèse qu'il existe un risque individuel est représentée par le fait que le point de dotations initiales est en dehors de la première bissectrice. Cette bissectrice représente les allocations telles que chaque agent consomme le même montant du bien dans les deux états.

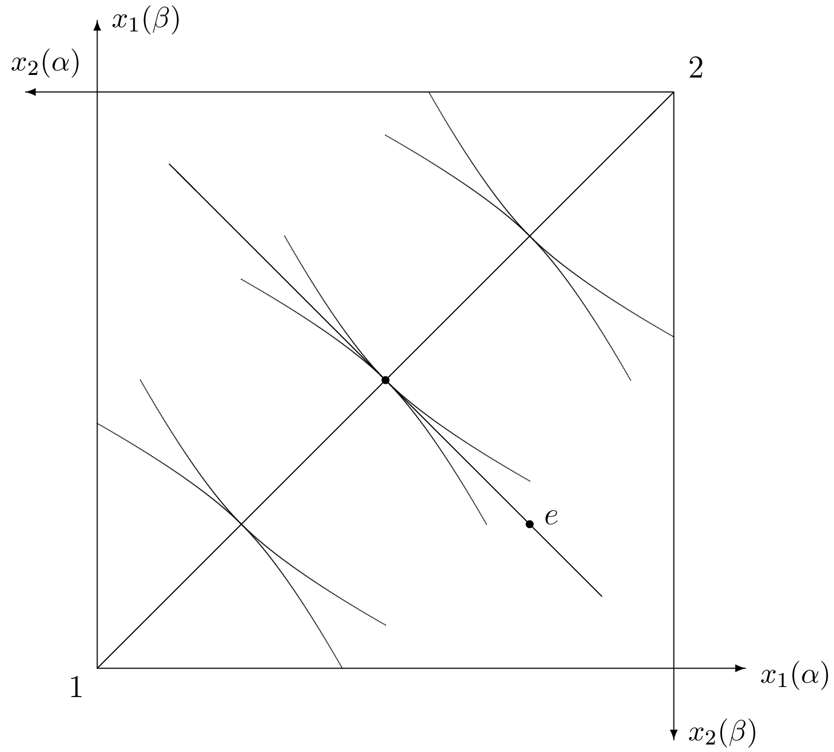
Nous étudions maintenant la structure de l'ensemble des allocations Pareto optimales dans cette boîte d'Edgeworth, ainsi que l'équilibre de l'économie. Deux cas se présentent, selon que les agents ont mêmes croyances ou non.

Premier cas : $\pi_1(\alpha) = \pi_2(\alpha) \equiv \pi(\alpha)$. Le TMS de l'agent h en un point quelconque de la première bissectrice est égal à :

$$TMS_h \mid_{x_h(\alpha)=x_h(\beta)} = \frac{\pi(\alpha)}{\pi(\beta)}$$

et est indépendant de l'agent. En conséquence, les deux agents ont le même taux marginal de substitution en tout point de la première bissectrice. Observons que ceci est vrai indépendamment de la spécification des fonctions v_h. L'égalité des TMS étant (dans le cas de préférences convexes et pour des points intérieurs) une condition d'optimalité au sens de Pareto, nous venons d'établir que la courbe des contrats de cette économie est la première bissectrice de la boîte d'Edgeworth. Ceci est représenté sur le graphique 13.2.

FIG. 13.2: La boîte d'Edgeworth : le cas de croyances identiques



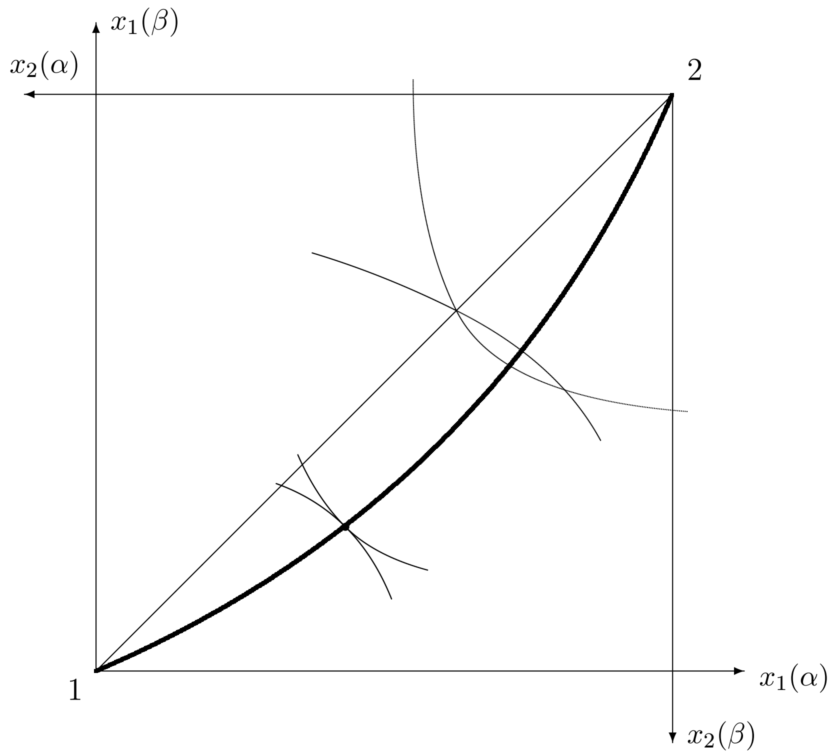
Sur ce graphique est également représentée la situation d'équilibre. Observons que, dans ce cas particulier, l'équilibre est unique. En effet, la tangente commune aux courbes d'indifférence des deux agents aux points sur la première bissectrice a la même pente quel que soit le point considéré. Ainsi, lorsque nous "balayons" (voir la discussion du paragraphe 6.3.5.1 du chapitre 6) la boîte d'Edgeworth par ces tangentes, nous ne passons qu'une seule fois par le point de dotations initiales : l'équilibre est unique.

Deuxième cas : $\pi_1(\alpha) \neq \pi_2(\alpha)\pi(\alpha)$. Les agents ont des croyances différentes. Le long de la première bissectrice, le TMS du premier agent est égal à $\pi_1(\alpha)/\pi_1(\beta)$, différent de celui du second agent égal pour sa part à $\pi_2(\alpha)/\pi_2(\beta)$. La courbe des contrats ne peut donc couper la première bissectrice, car il n'y a jamais égalité des TMS sur cette dernière. Si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que :

$$\frac{\pi_1(\alpha)}{\pi_1(\beta)} > \frac{\pi_2(\alpha)}{\pi_2(\beta)}$$

la courbe des contrats se situe au-dessous de la bissectrice, comme le montre le graphique 13.3.

FIG. 13.3: La boîte d'Edgeworth : le cas de croyances différentes



13.4 Incertain et actifs financiers : les marchés complets

Nous reprenons maintenant le modèle précédent en supposant que seuls existent des marchés au comptant pour les biens. Il existe en revanche des actifs permettant de transférer de la richesse entre les périodes et entre les états.

13.4.1 Le cadre institutionnel

Nous supposons toujours qu'il existe deux états de la nature en seconde période, α et β. Tous les biens ne sont échangeables que sur des marchés au comptant. Ainsi, les agents échangent des biens en première période, qu'ils consomment à cette même période. En seconde période, les marchés pour les biens ouvrent à nouveau et les agents échangent les biens de consommation de cette période et pour la réalisation de l'aléa. Ex-ante, c'est-à-dire avant de connaître la réalisation de l'aléa, ils doivent anticiper quels prix auront cours sur ces marchés au comptant, et ce dans les deux cas possibles, *i.e.* dans l'état α aussi bien que dans l'état β.

Les agents ont également à leur disposition deux actifs financiers. Ces actifs, ou titres, rapportent un paiement spécifié en bien 1, comme dans le chapitre précédent. Toutefois, il faut maintenant distinguer le paiement que rapporte un titre selon l'état qui se réalise. Le premier titre, b^1, coûte q^1 unités de bien 1 aujourd'hui et rapporte une unité du bien 1 si α se produit et rien si c'est β. Le paiement que rapporte cet actif est donc contingent à la réalisation de l'aléa. Le second titre, b^2, coûte q^2 unités de bien 1 aujourd'hui et ne rapporte rien si α se produit et une unité du bien 1 si β se produit. Ces titres sont, comme dans le chapitre 12, des titres internes dans la mesure où la somme de ces titres doit être nulle à l'équilibre. Il existe dans ce modèle deux actifs dont les paiements sont indépendants et deux sources d'incertitude (*i.e.* deux états de la nature) : les marchés financiers sont complets.

La séquence de décision des agents est la suivante : en première période, ils décident de leur consommation à cette période et du montant des actifs b^1 et b^2 qu'ils désirent détenir. En seconde période, les agents observent la réalisation de l'aléa (il fait beau ou il fait mauvais) et reçoivent les dotations associées, dénouent leur position financière (c'est-à-dire honorent leur dette ou reçoivent leur épargne) et échangent des biens de consommation.

Les trois (une aujourd'hui et une par état de la nature demain) contraintes budgétaires du consommateur s'écrivent donc ainsi :

$$\begin{aligned} p(0)\left(x_h(0)-e_h(0)\right) &= -q^1 b_h^1 - q^2 b_h^2 \\ p(\alpha)\left(x_h(\alpha)-e_h(\alpha)\right) &= p^1(\alpha) b_h^1 \\ p(\beta)\left(x_h(\beta)-e_h(\beta)\right) &= p^1(\beta) b_h^2 \end{aligned}$$

et le consommateur doit maximiser son utilité $u_h(x_h)$ par rapport à x_h et b_h sous ces trois contraintes. Nous constatons dans ce programme que les trois contraintes budgétaires sont homogènes de degré un par rapport aux prix. Nous pouvons donc choisir trois normalisations. Nous choisirons le bien un comme numéraire dans les deux périodes et les deux états, à savoir $p^1(0) = 1$, $p^1(\alpha) = 1$ et $p^1(\beta) = 1$. Face à ces trois normalisations, nous avons trois lois de Walras (une en 0, et une dans chaque état).

L'équilibre à anticipations rationnelles est, dans ce modèle, un vecteur de prix $(p,q) = \Big(p(0), p(\alpha), p(\beta), q^1, q^2\Big)$ et une allocation $(x,b) = \Big(x(0), x(\alpha), x(\beta), b^1, b^2\Big)$ tels que les agents maximisent et les marchés s'apurent :

Définition : *Un équilibre à anticipations rationnelles est un vecteur (p,q,x,b) tel que :*

(i) *étant donné (p,q), (x_h, b_h) est une solution au problème du consommateur, pour tout h,*

(ii) *les marchés s'apurent :* $\sum_h b_h = 0$ *et* $\sum_h x_h(s) = \sum_h e_h(s)$ *pour* $s = 0, \alpha, \beta$.

La notion d'équilibre à anticipations rationnelles signifie ici que les agents sont capables d'associer à chaque état de la nature le prix d'équilibre dans cet état. En termes plus formels, ils connaissent la fonction de prix d'équilibre $p : s \mapsto p(s)$. Il n'est cependant pas spécifié comment les agents sont amenés à connaître cette fonction. Le fait que les agents connaissent cette fonction révèle qu'ils ne se contentent pas d'une anticipation, mais bien qu'ils prévoient les prix dans tous les états possibles. Ainsi, ils ne sont jamais surpris par l'occurence d'un prix, puisqu'ils connaissent les différents états de la nature qui peuvent survenir et qu'ils anticipent correctement les prix dans tous ces états.

Il convient également de remarquer qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une distribution de probabilités objectives sur les états de la nature pour parler ici d'équilibres à anticipations rationnelles. Les agents, à un équilibre à anticipations rationnelles, ne sont pas nécessairement d'accord sur les probabilités d'apparition des états de la nature. En revanche, ils sont tous d'accord sur le fait que si c'est l'état s qui se réalise, alors le prix sera $p(s)$.

Une autre caractéristique de l'équilibre tel que nous l'avons défini est que les agents honorent toujours leur dette. Etant capables de prévoir les prix dans chaque état, et connaissant tous les états *a priori* possibles, les agents savent exactement quel montant ils devront rembourser dans chaque état et la valeur de leur dotation dans cet état. Imposer une contrainte budgétaire état par état signifie donc qu'aucun agent ne fera défaut sur sa dette.

Il est intéressant de remarquer que la faillite est possible dans le cadre de la théorie de l'équilibre temporaire que nous avons brièvement présentée dans le chapitre précédent. Dans le cadre de cette théorie, les agents anticipent des prix qui ne sont pas nécessairement les prix d'équilibre. Contrairement au concept d'équilibres à anticipations rationnelles, les agents peuvent donc commettre des erreurs, ce qui peut éventuellement et naturellement conduire à de la faillite.

Il existe également des modèles dans lesquels les agents peuvent volontairement faire défaut sur leur dette à l'équilibre à anticipations rationnelles, sachant qu'ils encourent un coût (fini) lorsqu'ils usent de cette possibilité[80]. Cette possiblité n'est cependant pas très intéressante lorsque les marchés financiers sont complets, comme nous l'avons supposé pour l'instant. En revanche, lorsque les marchés sont incomplets, la possibilité de défaut peut paradoxalement entrainer une augmentation des possibilités d'échange et améliorer la situation. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

En restant dans une optique d'équilibre à anticipations rationnelles, la faillite est également possible lorsqu'il est supposé que les agents ne connaissent pas la liste complète des états de la nature. Si un agent omet de prendre en compte un état et que celui-ci se réalise, il peut se trouver dans l'impossibilité de faire face à ses engagements[81]. La complexité de ces analyses justifie que nous adoptions ici l'hypothèse que tous les agents sont d'accord sur la liste des évènements possibles (à savoir $\{\alpha, \beta\}$).

[80] Voir W. Zame, "Efficiency and the role of default when security markets are incomplete", *American Economic Review*, décembre 1993, p. 1142-1164

[81] Voir S. Modica, A. Rustichini, J.M. Tallon, "Unawareness and Bankruptcy : A General Equilibrium Model", *Economic Theory*, à paraître 1997.

13.4.2 Un résultat d'équivalence

Comme dans le cas de l'économie étudiée dans le chapitre précédent, les trois contraintes budgétaires peuvent être ramenées à une seule, en éliminant les titres du problème du consommateur : il est en effet possible de reporter la valeur de b^1 et de b^2 calculée à partir des contraintes budgétaires dans l'état α et dans l'état β dans la contrainte budgétaire de première période. Celle-ci s'écrit alors :

$$p(0)\,(x_h(0)-e_h(0))+q^1p(\alpha)\,(x_h(\alpha)-e_h(\alpha))+q^2p(\beta)\,(x_h(\beta)-e_h(\beta))=0$$

Nous pouvons donc nous ramener à un cadre essentiellement statique, formellement équivalent à celui d'une économie dans laquelle tous les marchés pour tous les biens contingents existent. Une fois de plus, le cadre "statique" de base est une forme réduite d'un processus d'échange plus "réaliste" que celui consistant à supposer l'existence de marchés contingents pour tous les biens.

Plus formellement, nous avons le résultat d'équivalence suivant :

Théorème : *Un vecteur $(p^\star, x^\star)$ est un équilibre du modèle avec marchés pour tous les biens contingents si et seulement si il existe un vecteur $(q^\star, b^\star)$ tel que :*

$(p(0)^\star, p(\alpha)^\star/q^{1\star}, p(\beta)^\star/q^{2\star}, q^\star, x^\star, b^{1\star}, b^{2\star})$ *est un équilibre du modèle avec marchés au comptant, anticipations rationnelles, et deux actifs financiers.*

Dans ce théorème, nous pouvons caractériser les portefeuilles des agents :

$$b_h^{1\star}=p^\star(\alpha)(x_h^\star(\alpha)-e_h(\alpha)) \text{ et } b_h^{2\star}=p^\star(\beta)(x_h^\star(\beta)-e_h(\beta))$$

Commentons maintenant ce résultat d'équivalence. Remarquons tout d'abord qu'il s'étend aisément au cas de S états de la nature en seconde période. La condition est alors qu'il existe "un titre par état", c'est-à-dire qu'il existe, pour chaque état s, un actif financier rapportant une unité du bien 1 dans l'état s et zéro sinon. Lorsqu'il existe au moins autant d'actifs indépendants que d'états de la nature, nous dirons que les marchés financiers sont complets. Grâce à ce résultat, nous pouvons appliquer les résultats connus : un équilibre à anticipations rationnelles avec marchés financiers complets existe et est optimal.

La notion d'optimalité retenue ici est une notion d'optimalité *ex ante*, c'est-à-dire avant réalisation de l'aléa. En d'autres termes, il n'existe pas d'autre allocation réalisable, $\bar{x}$, qui procure à chaque agent une utilité $u_h(\bar{x}_h(0), \bar{x}_h(\alpha), \bar{x}_h(\beta))$ supérieure à l'utilité à l'équilibre.

Le second commentaire concerne le nombre de marchés que nécessite cette organisation. Le processus d'échange décrit ici, avec ouverture séquentielle des marchés de biens, nécessite moins de marchés que celui avec marchés pour tous les biens contingents. En effet, il faudrait $C \times (S+1)$ marchés contingents, alors qu'ici il suffit de C marchés au comptant aujourd'hui, C marchés au comptant demain et S marchés financiers.

Le troisième commentaire a trait à la nature des actifs financiers. Comme pour une économie temporelle, les titres pourraient promettre un paiement dans une unité de compte abstraite et non directement en bien. Dans ce cas, nous aurions des titres payant un franc dans l'état s et zéro sinon. La contrainte budgétaire dans l'état s

s'écrirait, avant normalisation :

$$p(s)\left(x_h(s) - e_h(s)\right) = b_h^1$$

et toute l'analyse resterait valable, même si cette contrainte budgétaire n'est plus homogène de degré par rapport aux prix.

Le quatrième commentaire concerne la notion de taux d'intérêt dans ce modèle. En effet, il existe plusieurs taux, à savoir le taux d'intérêt sur le premier actif, défini par $1 + r(\alpha) = \frac{1}{q^1}$ et celui sur le second actif, *i.e.*, $1 + r(\beta) = \frac{1}{q^2}$. Si nous voulons trouver le taux d'intérêt certain, c'est-à-dire celui correspondant au transfert d'une unité de bien 1 aujourd'hui à demain, il nous faut considérer la transaction suivante : acheter une unité du premier actif, ce qui représente un coût q^1 et acheter une unité du second, au prix q^2. Ce portefeuille rapporte de manière certaine une unité du bien 1 demain (quel que soit l'état de la nature) et coûte $q^1 + q^2$ unités de bien 1 aujourd'hui. Le taux d'intérêt certain est donc défini par :

$$1 + r = \frac{1}{q^1 + q^2}$$

Nous verrons plus bas que les actifs présents permettent en fait de calculer le prix de n'importe quel autre actif.

Enfin, nous terminerons par une brève discussion de la notion d'équilibre retenue. Dans l'analyse menée ici, nous avons étudié un équilibre à anticipations rationnelles, c'est-à-dire que nous avons supposé que les agents connaissent le prix d'équilibre des marchés au comptant dans chaque état de la nature. Le résultat d'équivalence entre ce système de marché et un système de marchés contingents dépend crucialement de cette hypothèse. Comme dans le chapitre précédent, la notion d'équilibre à anticipations rationnelles n'est pas toujours très aisée à justifier. Soit les agents ont totalement appris le modèle, c'est-à-dire que le modèle représente une situation de très long terme, mais dans ce cas rien ne nous dit qu'il n'est pas trompeur d'étudier la situation terminale sans considérer également le processus d'apprentissage. Soit les agents connaissent effectivement le modèle, et dans ce cas, l'avantage informatif du fonctionnement concurrentiel des marchés devient douteux, la quantité d'information détenue par chaque agent étant considérable (chaque agent connait les préférences et les dotations présentes et futures de tous les autres agents).

Toutefois, l'équilibre à anticipations rationnelles possède la “bonne” propriété qu'aucun agent n'y fait d'erreurs (en ce sens qu'il anticipe dans chaque état de la nature le prix d'équilibre, c'est-à-dire le prix qui équilibre les marchés si cet état se réalise). Dans le cas contraire, une grande part d'arbitraire interviendrait nécessairement dans la spécification de ces erreurs. Cette notion d'équilibre mérite donc d'être étudiée, au moins comme situation de référence[82] .

13.4.3 Marchés complets et optimalité

Nous revenons ici sur l'optimalité de l'équilibre avec marchés financiers complets. En écrivant les conditions de premier ordre du problème de maximisation d'un agent (par

[82] Le lecteur intéressé par cette discussion peut se reporter à l'étude critique de ce concept par P. Mongin, “Les anticipations rationnelles et la rationalité : examen de quelques modèles d'apprentissage” *Les Recherches Economiques de Louvain*, 1991, p. 319-348.

rapport aux titres), nous obtenons[83] ($\lambda_h(s)$ est le multiplicateur associé à la contrainte en s, $s = 0, \alpha, \beta$) :

$$\begin{cases} \lambda_h(0)q^1 &= \lambda_h(\alpha) \\ \lambda_h(0)q^2 &= \lambda_h(\beta) \end{cases}$$

A l'équilibre les égalités suivantes sont donc vérifiées :

$$\frac{\lambda_h(\alpha)}{\lambda_h(0)} = \frac{\lambda_{h'}(\alpha)}{\lambda_{h'}(0)} = q^1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda_h(\beta)}{\lambda_h(0)} = \frac{\lambda_{h'}(\beta)}{\lambda_{h'}(0)} = q^2 \qquad \text{pour tout } h, h'$$

Chaque agent a ainsi le même multiplicateur (normalisé) associé aux différents états de la nature. Ces égalités signifient que tous les agents ont la même évaluation subjective du futur, *i.e.* du coût, en termes d'utilité, qu'il y a à transférer une unité du bien un (soit une unité de richesse) d'aujourd'hui vers l'état α, coût qui est *a priori* différent de celui qu'il y a à transférer de la richesse d'aujourd'hui vers l'état β. Ces rapports de multiplicateurs définissent donc (l'inverse d') un taux d'intérêt subjectif entre la date 0 et l'état α, ainsi qu'entre 0 et β, et enfin, en faisant le rapport des deux expressions le taux d'intérêt entre α et β. Les égalités ci-dessus établissent qu'à l'équilibre, ces "taux d'intérêt subjectifs" sont égaux entre eux, et égaux au prix d'équilibre des actifs.

Ces égalités permettent de montrer directement l'égalité des TMS entre les agents, c'est-à-dire l'optimalité de l'équilibre de marchés complets. En effet, nous obtenons, toujours d'après les conditions de premier ordre, et en notant $x_h = (x_h(0), x_h(\alpha), x_h(\beta))$:

$$\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(0)} = \lambda_h(0)p^c(0), \quad \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(\alpha)} = \lambda_h(\alpha)p^c(\alpha), \quad \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(\beta)} = \lambda_h(\beta)p^c(\beta)$$

ce qui, combiné avec les équations précédentes permet de montrer que les TMS entre deux biens quelconques à une date quelconque et dans un état quelconque, sont égaux entre les agents.

13.4.4 Marchés complets et évaluation de prix d'actifs

Nous revenons ici sur l'étude de la structure financière du modèle présenté ci-dessus. Plaçons-nous à l'équilibre (un tel équilibre existe d'après le résultat d'équivalence). Soit q le vecteur de prix d'actifs à l'équilibre. Le prix q^1 est le prix qu'il faut payer pour transférer une unité du bien 1 dans l'état α. Nous pouvons donc l'appeler quelque peu abusivement le prix de l'état α. De même, q^2 est le prix de l'état β.

La connaissance de ces deux prix suffit, dans ce modèle, à l'évaluation du prix d'équilibre de tout autre actif. Choisissons par exemple l'actif certain, qui rapporte une unité du bien un dans les deux états. Que vaut-il à l'équilibre ? Nous avons déjà étudié la question dans le paragraphe 13.4.1 ci-dessus sous une forme un peu différente. Supposons que le prix de cet actif, notons-le q^3 soit inférieur à $q^1 + q^2$. Ceci peut-il être un prix d'équilibre ? La réponse est négative car si $q^3 < q^1 + q^2$, le programme des agents n'admet plus de solution, et nous ne pouvons donc pas être à l'équilibre. En effet, considérons l'opération suivante : un agent émet et vend, aux prix q^1 et q^2, une unité de l'actif 1 et une unité de l'actif 2. Avec le produit de cette vente, il peut

[83] Nous négligeons ici et dans le reste du chapitre les contraintes de positivité de la consommation, et supposons que tous les optima calculées sont des solutions intérieures.

acheter $\frac{q^1+q^2}{q^3} > 1$ unités de l'actif certain. Le bilan de l'opération est le suivant : à la date 0, l'agent fait un profit nul ; dans l'état α il doit rembourser ces titres 1 et donner une unité de bien 1, mais il perçoit $\frac{q^1+q^2}{q^3}$ unités de bien 1 du fait de la détention du titre certain. Il fait donc un profit net de $\frac{q^1+q^2}{q^3} - 1 > 0$ unités de bien 1 dans l'état α. De même, il fait un profit net de $\frac{q^1+q^2}{q^3} - 1 > 0$ unités de bien 1 dans l'état β. Au total, cette opération ne lui coûte rien aujourd'hui et lui rapporte, de manière certaine un profit positif demain. Il a alors intérêt à répéter cette opération, et à vendre un nombre infini d'actifs un et deux et acheter avec le produit de cette vente des actifs certains. Il obtient ainsi une richesse infinie et demande une quantité de biens infinie, ce qui ne peut bien s–r pas constituer un équilibre. En conclusion, il n'est pas possible que q^3 soit inférieur à $q^1 + q^2$.

Un raisonnement similaire établit que q^3 ne peut pas être supérieur à $q^1 + q^2$. Nous avons donc nécessairement $q^3 = q^1 + q^2$. Le principe d'évaluation du prix des actifs qui sous-tend le raisonnement ci-dessus est le principe d'absence "de possibilités d'arbitrage". Un arbitrage est une opération financière qui ne comporte aucun risque et qui rapporte un profit positif dans certains états (comme l'opération décrite ci-dessus). La connaissance de q^1 et de q^2 permet à elle seule d'évaluer le prix de n'importe quel actif par ce principe de non-arbitrage.

Ce raisonnement se généralise aisément, en approfondissant la notion de "prix d'état" introduite au début de ce paragraphe. Généralisons le modèle en supposant qu'il existe S états de la nature et $I = S$ actifs indépendants de sorte à ce que les marchés financiers soient complets. Soit Y la matrice à S lignes et I colonnes de paiement des actifs. La première colonne indique ce que rapporte le premier actif dans chaque état. Ainsi, l'élément $y^i(s)$, de la $s^{\text{ième}}$ ligne et $i^{\text{ième}}$ colonne représente le paiement de l'actif i dans l'état s. $y(s)$ est le vecteur correspondant à la $s^{\text{ième}}$ ligne de la matrice.

Une condition nécessaire d'équilibre est que le prix q ne permette pas d'arbitrage. En d'autres termes, q ne peut être un prix d'équilibre que s'il n'est pas possible de composer un portefeuille de titres qui rapporterait un montant positif aujourd'hui et dans tous les états de la nature demain. En effet, si un tel portefeuille existait, tout le monde désirerait en détenir un montant infini (il ne coûte rien et rapporte une somme positive) ce qui ne peut constituer un équilibre. Cette condition de non-arbitrage s'écrit :

$$q \text{ est tel que } \nexists b \text{ tel que } \begin{bmatrix} -q \\ Y \end{bmatrix} b > 0$$

Cette condition est mathématiquement équivalente à :

$$\exists \mu = (\mu(1), \mu(2), ..., \mu(S)) \in \mathbb{R}^S_{++} \text{ tel que } q^i = \sum_{s=1}^{S} \mu(s) y^i(s) \text{ pour tout } i$$

condition qui peut s'écrire :

$$\exists \mu \in \mathbb{R}^S_{++} \text{ tel que } q = \mu Y$$

A l'équilibre les prix $\mu(s)$ sont uniquement déterminés. En effet, lorsque les marchés sont complets, Y est une matrice carrée inversible et nous obtenons $\mu = qY^{-1}$. Le prix $\mu(s)$ s'interprète comme étant la somme qu'il faut payer pour transférer un franc dans l'état s.

Ces prix d'état permettent d'évaluer n'importe quel nouvel actif : introduisons par exemple un actif rapportant une unité du bien 1 quel que soit l'état demain. Afin qu'il n'existe pas de possibilités d'arbitrage, il doit être équivalent de transférer une unité de bien 1 demain quel que soit l'état de la nature en achetant cet actif ou en achetant un portefeuille consistant en une unité de chaque actif rapportant une unité de bien 1 si s se réalise et zéro sinon (il y a bien s–r S actifs de ce type). Chacun de ces actifs élémentaires coûte $\mu(s)$ unités de bien 1 aujourd'hui. Ainsi, l'actif rapportant une unité de bien 1 quel que soit l'état de la nature doit coûter $\sum_{s=1}^{S} \mu(s)$ unités de bien 1 aujourd'hui.

De manière générale, la formule de non-arbitrage signifie que le prix d'un actif rapportant un montant $a^i(s)$ dans l'état s ($s = 1, \ldots, S$) doit être la somme des prix d'état pondérée par les $a^i(s)$, *i.e.* $q^i = \sum_{s=1}^{S} \mu(s)a^i(s)$.

13.4.5 Le comportement de l'entreprise en marchés complets

Nous avons adopté le cadre d'une économie d'échange pour discuter des concepts d'équilibre à anticipations rationnelles et de marchés complets, afin de simplifier l'analyse au maximum. Il est toutefois possible d'introduire des entreprises dans ce modèle. Faisons-le le plus simplement possible et considérons pour l'instant une entreprise qui produit un montant alétoire de bien numéraire à la date $t = 1$ (en utilisant par exemple des inputs à la date zéro, mais ne modélisons pas ceci pour l'instant). Soit $(y(\alpha), y(\beta))$ cette production aléatoire. Le problème que la firme doit résoudre est de savoir quelle production mettre en œuvre. Il se trouve que la solution est particulièrement simple lorsque les marchés sont complets.

En effet, par le principe d'absence de possibilités d'arbitrage introduit précédemment, le plan de production $(y(\alpha), y(\beta))$ a une valeur, aujourd'hui, égale à : $q^1 y(\alpha) + q^2 y(\beta)$. Un actionnaire désirera alors toujours le plan de production qui maximise cette valeur, qui n'est autre que la valeur de la firme. Il importe peu que ce plan optimal spécifie, par exemple, une production très élevée dans l'état α alors que l'actionnaire considéré a une probabilité subjective de cet état très faible. En effet, l'actionnaire en question peut s'endetter en actif b^1, qu'il remboursera à l'aide du profit réalisé en α, afin de consommer plus aujourd'hui ou demain dans l'état β.

Ainsi, tous les actionnaires sont unanimes sur ce que l'entreprise doit faire : celle-ci doit maximiser sa valeur, sans ce soucier d'une quelconque attitude à avoir face au risque. Les actionnaires peuvent alors se composer un portefeuille de titres leur permettant de répliquer n'importe quel flux aléatoire de richesse, si celui proposé par l'entreprise ne leur convient pas. Il faut donc séparer la maximisation de la valeur de la firme, qui est dans l'intérêt de tous les actionnaires, et la forme précise du flux de richesse désirée par chaque actionnaire, qui dépend de son attitude vis-à-vis du risque, et qu'il peut atteindre sans aucun problème lorsque les marchés sont complets. Remarquons pour terminer qu'il importe peu de savoir si les actions sont effectivement échangées ou non dans ce modèle avec marchés complets.

Etudions le problème formellement et plus généralement. Les contraintes budgétaires d'un consommateur qui serait actionnaire de la firme f uniquement, à hauteur de θ_h s'écrivent :

$$\begin{aligned}
p(0)\left(x_h(0) - e_h(0)\right) &= -q^1 b_h^1 - q^2 b_h^2 + \theta_h p(0) y_f(0) \\
p(\alpha)\left(x_h(\alpha) - e_h(\alpha)\right) &= p^1(\alpha) b_h^1 + \theta_h p(\alpha) y_f(\alpha) \\
p(\beta)\left(x_h(\beta) - e_h(\beta)\right) + p(\alpha) y_f(\alpha) &= p^1(\beta) b_h^2 + \theta_h p(\beta) y_f(\beta)
\end{aligned}$$

Il est possible de réduire, sans aucune perte de généralité (le procédé est le même que dans l'économie d'échange étudiée ci-dessus), ces trois contraintes en une seule, qui s'écrit :

$$p(0)\left(x_h(0)-e_h(0)\right)+q^1p(\alpha)\left(x_h(\alpha)-e_h(\alpha)\right)+q^2p(\beta)\left(x_h(\beta)-e_h(\beta)\right)=\\ \theta_h[p(0)y_f(0)+q^1p(\alpha)y_f(\alpha)+q^2p(\alpha)y_f(\alpha)]$$

Il apparaît alors que le seul souhait émis par l'actionnaire est que le terme de droite soit le plus élevé possible. Ce terme est précisément égale à la valeur de la firme. Ainsi, le souhait commun de tous les actionnaires est de maximiser la valeur de la firme. Il convient de remarquer que la valeur de l'entreprise consiste en trois termes : le profit à la date 0, le profit à la date 1 et dans l'état α escompté à l'aide du prix q^1 du titre rapportant 1 unité du bien numéraire dans l'état α, et enfin du profit à la date 1 et dans l'état β escompté à l'aide du prix q^2 du titre rapportant 1 unité du bien numéraire dans l'état β. L'actualisation est donc un peu plus délicate que dans le cadre d'une économie sans incertitude, puisqu'il existe maintenant un taux d'actualisation par état. Nous retrouvons ici le même résultat que dans la section précédente sur l'évaluation des actifs. Une fois les prix d'état définis, il est possible d'évaluer n'importe quel flux aléatoire, qu'il provienne de la détention d'un actif ou de la production d'une entreprise.

13.5 Incertain et actifs financiers : les marchés incomplets

13.5.1 Présentation du modèle

Nous nous tournons maintenant vers un modèle en tout point semblable à celui étudié précédemment, mais dans lequel il existe moins d'actifs que d'états de la nature. Nous parlerons alors de marchés financiers incomplets. Dans ce cas le résultat d'équivalence entre le cadre statique et l'économie avec marchés financiers n'est plus vérifié. Supposons par exemple que dans notre modèle à deux états, il n'existe qu'un seul actif, b, rapportant une unité du bien 1 quel que soit l'état réalisé, *i.e.* l'actif "certain". Le programme du consommateur s'écrit alors :

$$\max_{x_h,b_h} \quad u_h(x_h) \quad (=\pi(\alpha)v_h(x_h(0),x_h(\alpha))+\pi(\beta)v_h(x_h(0),x_h(\beta)))$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} p(0)\left(x_h(0)-e_h(0)\right) &= -qb_h \\ p(\alpha)\left(x_h(\alpha)-e_h(\alpha)\right) &= p^1(\alpha)b_h \\ p(\beta)\left(x_h(\beta)-e_h(\beta)\right) &= p^1(\beta)b_h \end{cases}$$

La notion d'équilibre retenue est la même que ci-dessus, à savoir la notion d'équilibre à anticipations rationnelles : les agents résolvent leur problème de maximisation en prenant en compte dans leurs contraintes budgétaires les prix d'équilibre (en 0, α et β) et les marchés s'apurent. Trois normalisations sont à nouveau possibles, et nous choisirons à nouveau le bien 1 comme numéraire ($p^1(0)=p^1(\alpha)=p^1(\beta)=1$).

En présence de marchés financiers incomplets, il n'est plus possible de directement réduire les trois contraintes budgétaires en une seule, et le résultat d'équivalence n'est plus vrai. Le consommateur n'est pas libre, du fait de l'absence d'un nombre suffisant d'actifs, de transférer du pouvoir d'achat dans les deux états comme il le veut. S'il veut disposer d'une unité de bien 1 d'épargne en α, alors il doit choisir $b_h = 1$ et ceci implique qu'il a également une unité de bien 1 d'épargne si β se réalise. Or, il ne désire (sans doute) pas transférer exactement le même montant d'argent d'aujourd'hui vers demain, indépendamment de l'état de la nature.

En effet, supposons que dans l'état α le consommateur dispose de très peu de dotations, alors que dans l'état β il dispose de beaucoup de dotations. Dans ce cas, il voudrait transférer de sa richesse dans l'état β vers l'état α. Il pouvait réaliser cette opération dans le cadre de marchés complets en vendant du titre b^2 et en achetant du titre b^1 ; seule sa richesse totale (c'est-à-dire aujourd'hui plus celle dans les deux états de la nature, "actualisée au bon taux") importait dans sa décision de consommation. Dans le cas de marchés incomplets, il ne peut plus se livrer à cette opération : il existe des contraintes supplémentaires (le manque d'actifs financiers) qui l'empêchent d'allouer sa richesse comme il le souhaiterait.

C'est à ce stade qu'introduire la possibilité de faillite est particulièrement intéressant (et particulièrement ardu). En effet, un consommateur peut trouver optimal pour lui de s'endetter en première période, tout en sachant qu'il ne sera pas capable de rembourser sa dette dans l'un des deux états, si la probabilité d'occurrence de cet état est faible (et si les pénalités ne sont pas prohibitives). Ainsi, permettre des faillites serait un moyen de compléter les marchés financiers, en déserrant les contraintes imposées par l'incomplétude des marchés financiers. Il est même possible que permettre la faillite en imposant des pénalités relativement faibles puisse améliorer au sens de Pareto la situation, l'équilibre en marchés incomplets sans faillite étant quant à lui sous-optimal comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. Nous ne poursuivrons cependant pas cette route ici.

13.5.2 Sous-optimalité de l'équilibre avec marchés incomplets

Une manière de souligner que le résultat d'équivalence n'est plus vérifié lorsque les marchés financiers sont incomplets est de montrer que l'allocation d'équilibre n'est pas Pareto optimale. Ceci nous permet de conclure immédiatement que l'équilibre est différent de l'équilibre du modèle avec marchés à terme qui lui est Pareto optimal. En fait, l'équilibre de marchés incomplets ne satisfait aucune propriété d'optimalité : le marché ne remplit pas bien son rôle d'allocation des ressources.

Afin de comprendre la source de l'inefficience, écrivons les conditions de premier ordre de maximisation du programme d'un consommateur ($\lambda_h(s)$ est le multiplicateur associé à la contrainte en s, $s = 0, \alpha, \beta$) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(s)} & = & \lambda_h(s)p^c(s) \quad s = 0, \alpha, \beta \quad c = 1, \ldots, C \\ \lambda_h(0)q & = & \lambda_h(\alpha) + \lambda_h(\beta) \end{array} \right.$$

Seule l'égalité suivante est donc vérifiée :

$$\frac{\lambda_h(\alpha) + \lambda_h(\beta)}{\lambda_h(0)} = \frac{\lambda_{h'}(\alpha) + \lambda_{h'}(\beta)}{\lambda_{h'}(0)} \quad \text{pour tout } h, h'$$

Ceci entraine, du fait de la normalisation adoptée que :

$$\frac{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^1(\alpha)} + \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^1(\beta)}}{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^1(0)}} = q$$

pour tout h. En particulier, il n'y a plus égalité des TMS des agents. En effet, il n'y a aucune raison pour que, par exemple :

$$\frac{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^1(\alpha)}}{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^1(0)}} = \frac{\frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}^1(\alpha)}}{\frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}^1(0)}}$$

A l'équilibre, les agents sont d'accord sur l'évaluation d'une unité du bien 1 demain (quel que soit l'état), mais leur évaluation d'une unité du bien 1 dans l'état α (ou β) n'a aucune raison d'être identique. En d'autres termes, la somme (normalisée par le multiplicateur de première période) des multiplicateurs associés aux contraintes de seconde période est la même, mais le multiplicateur (normalisé) associé à chaque état n'est pas nécessairement le même.

Enfin, il est également remarquable que, en général,

$$\frac{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(\alpha)} + \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(\beta)}}{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(0)}} \neq \frac{\frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}^c(\alpha)} + \frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}^c(\beta)}}{\frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}^c(0)}}$$

pour $c \neq 1$. Ceci est simplement une conséquence du fait que pour les biens autres que le bien numéraire, le prix dans l'état α n'est pas égal au prix dans l'état β, soit $p^c(\alpha) \neq p^c(\beta)$ pour $c \neq 1$. En d'autres termes, les agents ne possèdent pas le même TMS entre tout bien c autre que le bien numéraire demain (quel que soit l'état) et ce même bien aujourd'hui. Ceci est en fait symptomatique du fait que l'allocation d'équilibre dans un modèle avec plusieurs biens et marchés incomplets n'est pas même "contrainte-optimale", une notion plus faible que l'optimalité au sens de Pareto. Sans développer cette notion formellement[84], il est intéressant de comprendre l'implication de ceci. Une allocation est "contrainte-optimale" s'il n'existe pas de redistribution des actifs et des dotations en première période qui améliorerait le bien-être de tous les agents. Ceci représente le fait que le planificateur ne doit pas pouvoir, dans les transferts qu'il opére entre les agents, effectuer des transferts entre les états impossibles à réaliser en utilisant les actifs disponibles. Il s'agit donc de mettre "sur un pied d'égalité" le système de marché (et son incomplétude) et le planificateur. Ainsi, même s'il était contraint dans les transferts qu'il peut réaliser, un planificateur pourrait faire mieux que le marché. Ce dernier remplit donc particulièrement mal son rôle d'allocation des ressources.

S'il n'existe qu'un bien dans l'économie, l'équilibre est contraint-optimal : ceci se traduit par l'égalité, pour tout h et h' :

$$\frac{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h(\alpha)} + \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h(\beta)}}{\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h(0)}} = \frac{\frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}(\alpha)} + \frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}(\alpha)}}{\frac{\partial u_{h'}(x_{h'})}{\partial x_{h'}(0)}}$$

puisque le seul bien peut être traité comme le bien numéraire.

Toutefois, si plusieurs biens co-existaient, alors l'égalité ci-dessus ne serait vraie, à l'équilibre, que pour le bien numéraire et non pour les autres biens. C'est ce que nous avions vu ci-dessus. Ainsi, le planificateur, en tenant compte de l'effet qu'un changement des portefeuilles des agents a sur les prix relatifs des biens autres que le numéraire, peut faire mieux que le marché.

[84] Voir M. Magill et M. Quinzii *Theory of Incomplete Markets*, éditions MIT Press, 1996.

13.5.3 Marchés incomplets et évaluation de prix d'actifs

L'incomplétude des marchés financiers a une autre conséquence, à savoir qu'il n'est plus possible de définir des prix d'état uniques à partir des prix d'actifs. Ceci implique en particulier qu'il n'est pas toujours possible d'évaluer n'importe quel nouvel actif.

La condition de non-arbitrage s'écrit dans le cadre de notre exemple :

$$q \text{ est tel que qu'il n'existe pas de portefeuille } b \text{ tel que } \begin{bmatrix} -q \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} b > 0$$

Cette condition est mathématiquement équivalente à :

$$\exists \mu = (\mu(1), \mu(2)) \in \mathbb{R}^2_{++} \text{ tel que } q = \mu(1) + \mu(2)$$

Nous observons sur cette dernière formule que le prix d'équilibre q ne détermine pas de manière unique, au travers de la formule de non-arbitrage, des prix d'état. Il existe ainsi plusieurs prix d'état compatibles avec l'évaluation q du seul actif du modèle. Chaque agent peut avoir une évaluation différente de la valeur d'un franc supplémentaire dans un état particulier (ceci constitue une autre façon de voir que l'équilibre est sous optimal, l'optimalité requérant l'égalité de ces évaluations).

De plus, l'information donnée par le prix q d'équilibre est insuffisante pour évaluer le prix de l'actif rapportant une unité du bien 1 dans l'état α et rien dans l'état β. En effet, cet actif a *a priori* une valeur différente pour chaque agent. Si cet actif était introduit dans ce modèle, il en changerait totalement la structure, puisque son introduction modifierait les allocations de biens que chaque agent peut atteindre. En fait, si cet actif était introduit, les marchés deviendraient complets dans notre exemple.

L'analyse que nous avons menée dans un cas très simple peut aisément être généralisée. En particulier, nous avons considéré un exemple dans lequel seul l'actif sans risque était présent. Cela n'est pas nécessaire, la notion de marchés financiers incomplets requérant uniquement qu'il existe moins d'actifs que d'états de la nature. Le résultat de sous-optimalité de l'équilibre et l'impossibilité d'évaluer n'importe quel actif par le principe d'absence de possibilité d'arbitrage restent vrais, de manière générale, dans ce type de modèles.

13.5.4 Le comportement de l'entreprise en marchés incomplets

Si nous avons pu définir la fonction objectif d'une entreprise lorsque les marchés sont complets (il lui faut maximiser la valeur de la firme), ceci est beaucoup plus délicat en présence de marchés incomplets. Il n'existe en particulier aucune raison pour que les actionnaires soient unanimes sur le plan de production qu'il faut adopter. Ceci provient du fait qu'en présence de marchés incomplets, les prix d'état sont indéterminés, et qu'il existe donc plusieurs manières d'évaluer un plan de production (si celui-ci ne peut être répliqué par les actifs existants).

Pour simplifier à l'extrême, considérons un modèle sans aucun actif financier. Deux actionnaires détiennent une entreprise. L'un possède beaucoup de dotation dans l'état

α et rien dans l'état β, le second, à l'inverse, ne détient rien en α et beaucoup en β. La firme doit faire un choix entre deux plans de production uniquement. Elle peut adopter soit une technique de production qui nécessite une unité du bien un comme input aujourd'hui et qui rapporte une unité de ce même bien dans l'état α et rien dans l'état β, soit une technique de production qui, pour le même investissement, rapporte une unité dans l'état β et rien en α. Quel plan l'entreprise va-t-elle finalement adopter ?

Le premier actionnaire désire utiliser la seconde technique de production ; cela lui permet en effet de transférer du revenu de la première période dans l'état β où il est particulièrement démuni. En revanche, le second consommateur désire utiliser la seconde technique de production, pour la raison inverse. Ainsi, les actionnaires ne sont plus unanimes sur ce qu'est le meilleur plan de production à adopter.

Cet exemple très simple est révélateur de problèmes extrêmement complexes, qui surgissent lorsqu'il faut définir l'objectif de la firme en marchés incomplets[85].

13.6 Les taches solaires

La situation de l'économie dépend parfois de phénomènes psychologiques, qui trouvent leur source dans des domaines "extra-économiques". La méthode que nous avons développée dans ce chapitre pour étudier l'équilibre dans l'incertain va nous être utile maintenant pour aborder, brièvement, cette question.

Plaçons-nous dans un modèle à deux périodes avec deux états de la nature en seconde. La particularité du modèle réside dans le fait que ces deux états de la nature sont en fait identiques en ce qui concerne les fondamentaux de l'économie (c'est-à-dire les préférences et les dotations des agents). La seule différence entre ces états est purement subjective. Ceci est traditionnellement représenté en disant que, dans l'état α apparaissent des taches sur le soleil, alors que celles-ci sont absentes dans l'état β. Les taches solaires représentent ici un phénomène totalement étranger aux données économiques de base[86].

L'intuition ou le bon sens suggèrent que ces taches solaires ne devraient avoir aucune influence sur l'équilibre de l'économie. Cette intuition est effectivement vraie lorsque les marchés sont complets, comme nous allons le démontrer. Cependant, elle est invalidée dans le cas où les marchés sont incomplets.

Supposons donc que l'incertitude est purement "extrinsèque" au modèle, c'est-à-dire en particulier $e_h(\alpha) = e_h(\beta)$ pour tout h. Notons donc la dotation du consommateur h en seconde période $e_h(1)$. Nous ferons l'hypothèse que les agents se conforment à la théorie de l'utilité espérée et qu'ils connaissent les probabilités "objectives" d'apparition des taches solaires, $\pi(\alpha)$ et $\pi(\beta)$. Enfin, nous supposons les marchés financiers complets. Il convient de remarquer que cette hypothèse est très forte, puisque ceci revient à supposer l'existence de deux titres financiers, b^1 et b^2, rapportant respectivement une unité de bien 1 dans l'état α et dans l'état β. Il faut donc comprendre ici que la structure de marchés financiers est complète par rapport à l'incertitude extrinsèque, *i.e.* par rapport à l'incertitude introduite par les taches solaires et qui n'a *a priori* rien à voir avec des phénomènes économiques.

---

[85] Pour un traitement d,taill, et avanc, de ce problŠme, voir M. Magill et M. Quinzii *Theory of Incomplete Markets*, ,ditions MIT Press, 1996. E. Malinvaud, *Equilibre g,n,ral dans les ,conomies de march,*, ,ditions Economica, 1993, traite de ce problŠme de maniŠre un peu moins abstraite.

[86] Voir D. Cass et K. Shell, "Do sunspots matter ?", *Journal of Political Economy*, 1983, p. 193-227.

Le programme de maximisation d'un individu est alors :

$$\max_{x_h,b_h} \quad \pi(\alpha)v_h(x_h(0),x_h(\alpha))+\pi(\beta)v_h(x_h(0),x_h(\beta))$$
$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} p(0)\,(x_h(0)-e_h(0)) &= -q^1b_h^1-q^2b_h^2 \\ p(\alpha)\,(x_h(\alpha)-e_h(1)) &= p^1(\alpha)b_h^1 \\ p(\beta)\,(x_h(\beta)-e_h(1)) &= p^1(\beta)b_h^2 \\ \end{cases}$$

Proposition : *A l'équilibre à anticipations rationnelles, si v_h est concave, alors $x_h(\alpha)=x_h(\beta)$*

Démonstration : Remarquons que, du fait de la complétude des marchés, nous pouvons réduire les trois contraintes en une seule, à savoir :

$$p(0)\,(x_h(0)-e_h(0))+q^1p(\alpha)\,(x_h(\alpha)-e_h(1))+q^2p(\beta)\,(x_h(\beta)-e_h(1))=0$$

L'équilibre est donc le même que dans une économie statique à trois biens, et il est en conséquence Pareto optimal. Supposons maintenant qu'à l'équilibre $x_h(\alpha)\neq x_h(\beta)$. Soit $\overline{x}_h=\pi(\alpha)x_h(\alpha)+\pi(\beta)x_h(\beta)$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{H}\overline{x}_h &= \sum_h\left(\pi(\alpha)x_h(\alpha)+\pi(\beta)x_h(\beta)\right)\\ &= \pi(\alpha)\sum_h x_h(\alpha)+\pi(\beta)\sum_h x_h(\beta)\\ &= \pi(\alpha)\sum_h e_h(1)+\pi(\beta)\sum_h e_h(1)\\ &= \sum_h e_h(1)\end{aligned}$$

L'allocation $(x(0),\overline{x},\overline{x})$ est donc réalisable. Maintenant, par stricte concavité de v_h :

$$v_h(x_h(0),\overline{x}_h)>\pi(\alpha)v_h(x_h(0),x_h(\alpha))+\pi(\beta)v_h(x_h(0),x_h(\beta))$$

Ceci constitue une contradiction au fait que l'allocation x est un optimum de Pareto. □

S'il existe suffisamment d'instruments financiers, l'allocation d'équilibre de l'économie ne dépendra pas de la présence de taches solaires (ou de tout autre événement n'ayant aucune relation directe avec les "fondamentaux économiques"). En revanche, si les marchés financiers sont incomplets, alors, il est possible de mettre en évidence un effet des taches solaires sur l'allocation d'équilibre : des phénomènes purement psychologiques peuvent engendrer des perturbations du système économique.

L'exemple le plus simple d'un tel phénomène est le suivant. Soit un modèle à deux périodes, sans incertitude intrinsèque en seconde période, sans actif financier (les marchés sont incomplets), et dans lequel les agents ont des fonctions d'utilité séparables intertemporellement. Il n'existe ainsi aucun lien entre les deux périodes, et nous pouvons calculer l'équilibre de première période et celui de seconde période séparément. Supposons qu'il existe en fait trois prix d'équilibre (de l'économie statique) de seconde période, $p(1), p(2)$ et $p(3)$, et un unique équilibre en première période, $p(0)$.

L'équilibre intertemporel du modèle peut prendre la forme suivante : $p(0)$ en première période et une distribution de probabilité sur $\left\{p(1), p(2), p(3)\right\}$ en seconde période. Plus précisément, les agents peuvent avoir le comportement suivant : ils anticipent –correctement à l'équilibre– que s'ils observent tel signal (par exemple des taches solaires peu nombreuses) alors le prix réalisé est $p(1)$, tel autre signal (pas de taches) le prix est $p(2)$, et enfin $p(3)$ s'ils observent de nombreuses taches. Ces trois signaux ayant des probabilités d'apparition connues, cette construction est équivalente à dire que l'équilibre peut en fait être stochastique. Un phénomène *a priori* totalement étranger au fonctionnement de l'économie peut avoir une influence sur l'équilibre.

13.7 Conclusion

Ce chapitre a traité d'économies dans lequel le futur est incertain. Nous avons vu que nous pouvions formellement traiter ce cas comme un cas particulier du modèle "statique" développé précédemment. Toutefois, nous avons également conclu que cette interprétation n'était guère satisfaisante. Nous avons alors développé un cadre analytique dans lequel les agents peuvent échanger des actifs financiers afin de se couvrir contre la réalisation de l'aléa. Les conclusions de ce modèle dépendent crucialement du nombre d'actifs présents. Si celui-ci est suffisamment élevé, plus précisément s'il est supérieur ou égal au nombre d'états de la nature, alors le modèle permet de conclure que l'équilibre à anticipations rationnelles existe et est optimal.

En revanche, si les actifs sont trop peu nombreux (les marchés sont incomplets), de nouveaux problèmes se posent. Les contraintes (autre que la simple contrainte de richesse intertemporelle) qu'imposent l'incomplétude des marchés sont à la source de l'inefficacité de l'équilibre concurrentiel. L'incomplétude des marchés peut également expliquer pourquoi l'allocation d'équilibre peut dépendre de phénomènes extra-économiques, représentés dans cette littérature par la notion d'équilibre à taches solaires.

Chapitre 14

Le prix, vecteur d'information

14.1 Introduction

Nous entreprenons dans ce chapitre l'étude d'une économie dans laquelle les agents possèdent une information privée[87]. Nous abordons ainsi les problèmes associés au rôle du système de prix d'équilibre en tant que vecteur de l'information possédée individuellement par chaque agent, dans un modèle d'équilibre général. Ceci renvoie au débat concernant la supériorité d'un système de marchés sur, par exemple, un mode d'allocation centralisé des ressources. En effet, une des vertus prêtée au système de marché est que le prix qui va émerger à l'équilibre résume toutes les informations privées des agents participant aux échanges. Le prix est donc un vecteur privilégié de l'information détenue par les individus. Se priver d'un tel moyen d'apprendre des informations privées, peut alors être source d'inefficacité, le planificateur ne disposant pas *a priori* de ces informations.

Ce débat a pris une ampleur particulière en théorie financière. L'enjeu est le suivant : le prix des actions sur les marchés financiers reflète-t-il correctement toute l'information dont dispose le marché (c'est-à-dire l'ensemble des informations détenues par les intervenants sur ce marché) ? Si tel est le cas, le marché sera dit efficient.

Nous n'aborderons pas ici directement ce thème, et présentons simplement le principal outil théorique de cette approche, le concept d'équilibre à anticipations rationnelles en présence d'information asymétrique.

14.2 Une représentation des asymétries d'information en équilibre général

Le modèle que nous abordons introduit une asymétrie d'information entre les agents en ce sens qu'ils possèdent une information différenciée sur l'occurence de tel ou tel évènement aléatoire.

Plaçons-nous dans le cadre d'un modèle d'équilibre général d'échange pur en univers incertain et représentons-y ce type d'information asymétrique. Il existe S états de la nature *a priori* possibles aujourd'hui. Rappelons que dans le cadre adopté, un état de la nature est une description complète des données de l'économie (préférences et dotations initiales). La structure de l'information est donnée.

[87] Dans la logique de cet ouvrage, nous traitons de l'information asymétrique dans un cadre d'équilibre général. Une approche qui a connu un large succès au cours des vingt dernières années consiste à étudier les conséquences d'une information asymétrique entre vendeurs et acheteurs dans un cadre d'équilibre partiel ou de relations contractuelles. Nous ne traiterons pas de ces modèles ici et renvoyons le lecteur à H. Varian , *Analyse micro-économique*, éditions De Boeck, 1995.

Supposons par exemple qu'il y ait quatre états de la nature possibles : $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ définis ainsi :

- s_1 : il fait beau à Paris et beau à New-York
- s_2 : il fait beau à Paris et il pleut à New-York
- s_3 : il pleut à Paris et il fait beau à New-York
- s_4 : il pleut à Paris et il pleut à New-York

Supposons que les dotations des agents soient indépendantes de l'état de la nature, mais que les préférences du new-yorkais (respectivement du parisien) dépendent du temps qu'il fait à New-York (respectivement à Paris). Supposons de plus qu'un habitant de Paris ne peut pas observer le temps à New-York. S'il fait beau à Paris, il ne pourra cependant pas dire quel état, s_1 ou s_2 s'est réalisé : il ne peut distinguer les états s_1 et s_2. De même, il ne peut distinguer l'état s_3 de s_4. Un raisonnement similaire nous dit qu'un new yorkais ne peut pas distinguer l'état s_1 de s_3, pas plus qu'il ne peut distinguer s_2 de s_4. Cette situation sera représentée au moyen de partitions de l'ensemble des états de la nature. Le parisien, ne pouvant distinguer s_1 de s_2, les "rangera" dans la même catégorie. Sa partition des états de la nature est alors :

$$P_P = \{\{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}\}$$

tandis que celle d'un new yorkais sera :

$$P_{NY} = \{\{s_1, s_3\}, \{s_2, s_4\}\}$$

La structure informationnelle de l'économie est ainsi donnée par la partition que chaque agent a de l'ensemble des états de la nature. Quelles sont les implications de cette information différenciée sur les propriétés de l'équilibre général d'une économie ?

Nous pouvons remarquer que dans le modèle d'équilibre général standard, la structure informationnelle est implicitement donnée par la forme des fonctions d'utilité. Par exemple, si un agent sait avec certitude (probabilité un) que l'état de la nature qui s'est réalisé aujourd'hui est l'état 1, il assigne alors une utilité marginale de zéro à la consommation de biens dans les autres états : $\partial u_h(x_h)/\partial x_h^c(s) = 0$ pour tout $s \neq 1$. Un autre exemple est le cas où les préférences de l'agent ne dépendent pas de l'état de la nature réalisée. Si le consommateur considère l'état 1 plus probable que l'état 2, alors l'utilité marginale de la consommation d'un bien dans l'état 1 sera en tout point supérieure à celle de la consommation de ce même bien dans l'état 2, soit encore :

$$\frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(1)} > \frac{\partial u_h(x_h)}{\partial x_h^c(2)} \quad \text{pour tout} \quad x_h$$

Il semble donc que nous ayons déjà implicitement traité des cas d'information asymétrique en situation d'équilibre général. Il existe toutefois des problèmes liés à cette asymétrie dont nous n'avons pas encore parlé.

Le premier concerne la version à deux périodes du modèle, et plus particulièrement la question de savoir comment faire exécuter les contrats contingents en présence d'asymétries d'information. Supposons en effet que les agents possèdent une information asymétrique concernant la réalisation de l'état en seconde période (à savoir par exemple le temps à Paris). Ces mêmes agents peuvent acheter ou vendre en première période des contrats contingents à la réalisation de l'état de seconde période. Si toutefois, un new yorkais ne peut observer le temps à Paris, il semble logique qu'il n'achète pas un contrat promettant une unité d'un bien s'il fait beau à Paris. En effet, si un parisien vend au new yorkais ce contrat, il aura toujours intérêt à dire, en seconde période, qu'il pleut à Paris. Ainsi, il n'a pas à fournir le bien. Le new yorkais décidera alors de ne pas acheter ce contrat. En conclusion, la participation des agents aux marchés (de biens contingents ou financiers) peut être restreinte par l'information dont ils disposent.

Le second problème posé par les asymétries d'information est plus facilement traité dans la version statique du modèle, et concerne l'exogénéité de la structure informationnelle. Il recouvre en fait deux problèmes différents, bien que liés.

En premier lieu, l'information est un bien qui devrait pouvoir s'acheter et se produire comme tout autre bien. Un audit sur la situation d'une entreprise en est l'exemple. Cependant, la nature même de l'information fait que les théorèmes connus ne s'appliquent pas aux modèles où celle-ci est effectivement traitée comme un bien susceptible d'être produit et échangé. Le coût de l'information est en effet principalement un coût fixe qui induit d'importantes non-convexités dans l'analyse. De façon moins abstraite, l'information est un bien dont il est difficile de "contrôler" l'échange, et en conséquence, auquel il est difficile d'attacher un prix.

Ceci nous amène au second point qui est précisément que l'information détenue par certains agents peut être révélée par leur comportement sur le marché. En effet, puisque le prix d'équilibre résulte de l'interaction entre différents agents, il est normal de penser que ce prix reflète l'information que chaque agent possède. Par exemple, une réaction possible face à la hausse du cours d'une action est de penser que certains agents, mieux informés, ont eu de "bonnes nouvelles" concernant l'entreprise cotée. Les agents n'ayant pas un accès direct à ces "bonnes nouvelles" vont cependant inférer leur existence du simple fait que le prix a augmenté. La structure de l'information devient alors endogène au modèle : elle n'est pas donnée une fois pour toute mais dépend des prix observés sur les marchés.

La forme de la fonction d'utilité dépend donc de l'information dont dispose un agent. Si nous prenons en considération le fait que le système de prix transmet de l'information aux agents, et donc que l'information dont dispose l'agent dépend des prix d'équilibre, il faut envisager la situation dans laquelle les fonctions d'utilité dépendent *in fine* des prix. C'est ce que nous faisons maintenant.

14.3 Information asymétrique et équilibre à anticipations rationnelles

Le concept d'équilibre à anticipations rationnelles prend en compte le rôle informatif des prix. Lorsqu'il existe de l'information asymétrique dans l'économie, ce concept est différent du concept standard d'équilibre concurrentiel. Nous avons déjà parlé d'équilibre à anticipations rationnelles dans les chapitres 12 et 13. L'analyse de cette section étend ce concept au cas d'asymétries d'information.

14.3.1 Définition et exemple

Il convient d'abord de préciser ce que nous entendons par "les prix transmettent de l'information aux agents". Soit une économie "statique", dans laquelle S états de la nature peuvent se réaliser. Les agents échangent avant que l'état réalisé devienne publiquement observable. A la fin de la période, tout le monde observe l'état effectivement apparu. Si cette économie se répète au cours du temps, les agents finissent par apprendre la relation entre l'état de la nature et le prix d'équilibre. Ils peuvent associer un prix avec un état. Autrement dit, ils connaissent le prix d'équilibre si s s'est réalisé, et ceci pour tout s. Ils ont donc une connaissance parfaite de la fonction de prix, $p : s \mapsto p(s)$, qui associe à chaque état le prix d'équilibre. En fait, nous postulons ici cette connaissance sans formaliser l'intuition proposée, à savoir que cette connaissance est le fruit d'un apprentissage.

Un agent peut donc utiliser l'observation de $p(s)$ pour en inférer que s s'est réalisé, alors qu'il n'observe pas nécessairement l'état directement. Même s'il ne possède pas cette information *a priori*, un agent peut donc déterminer, simplement en observant le prix sur le marché, quel est l'état de la nature.

Le concept d'équilibre à anticipations rationnelles prend en compte le fait que les agents infèrent de l'information du système du prix. Soit Δ le simplexe de dimension $C - 1$.

Définition : *Un équilibre à anticipations rationnelles est une fonction de prix* $p : S \to \Delta$ *telle que :*

(i) *étant donnée la fonction* $p(.)$*, chaque consommateur maximise son utilité conditionnellement à son information et à* $p(.)$ *sous ses contraintes budgétaires,*
(ii) *les marchés s'apurent pour tout* $s \in S$*.*

Il existe une certaine circularité dans cette définition, ou plus précisément une simultanéité de la révélation et de l'utilisation de l'information. En effet, ce concept d'équilibre est totalement statique, en ce sens que l'information privée est immédiatement incluse dans le prix d'équilibre.

Si la fonction de prix d'équilibre est inversible, alors l'équilibre est parfaitement révélateur , c'est-à-dire qu'un consommateur *a priori* non informé infère du prix d'équilibre toute l'information nécessaire. En revanche, si la fonction de prix est une fonction constante, c'est-à-dire $p(s) = p(s') \quad \forall s, s'$, alors celle-ci ne révèle aucune information aux consommateurs.

Illustrons cette notion d'équilibre sur un exemple. Soit une économie de pur échange, à deux consommateurs, $h = 1, 2$, deux biens, x et y, et deux états α et β, dont la probabilité d'apparition est 1/2. Le prix du bien x dans l'état α est noté $p(\alpha)$, et celui du bien y, $q(\alpha)$. Symétriquement, les prix dans l'état β sont notés $p(\beta)$ et $q(\beta)$. Nous normalisons les prix de telle manière que $p(s) + q(s) = 1$ pour $s = \alpha, \beta$.

Le premier agent est informé de l'état de la nature réalisé. Ses dotations sont contingentes à la réalisation de l'état : $e_1(\alpha) = (1, 0)$ et $e_1(\beta) = (0, 1)$. Les agents cherchent à maximiser une fonction d'utilité espérée, $u_h(x_h) = \pi(\alpha)v_h(x_h(\alpha), y_h(\alpha)) + \pi(\beta)v_h(x_h(\beta), y_h(\beta))$. La fonction d'utilité "dans le certain" du premier agent (*i.e.* v_1) est indépendante de l'état de la nature : $v_1\left(x_1(s), y_1(s)\right) = x_1(s)^{1/2} y_1(s)^{1/2}$ pour $s = \alpha, \beta$. Le second consommateur ne possède aucune information *a priori*. Ses dotations sont indépendantes de l'état de la nature : $e_2(\alpha) = e_2(\beta) = (1, 1)$. Sa fonction d'utilité dans le certain en revanche dépend de l'état : $v_2\left(x_2, y_2\,; \alpha\right) = 1/4 \log x_2 + 3/4 \log y_2$ pour $s = \alpha$, et $v_2\left(x_2, y_2\,; \beta\right) = 3/4 \log x_2 + 1/4 \log y_2$ pour $s = \beta$

Le premier consommateur, possédant une information privée lui disant quel état s'est réalisé, résout un problème différent dans chaque état :

$$\begin{array}{ll} \max_{(x_1(\alpha),y_1(\alpha))} & v_1\left(x_1(\alpha),y_1(\alpha)\right) \\ \text{s.c.} & p(\alpha)x_1(\alpha)+q(\alpha)y_1(\alpha)=p(\alpha) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \max_{(x_1(\beta),y_1(\beta))} & v_1\left(x_1(\beta),y_1(\beta)\right) \\ \text{s.c.} & p(\beta)x_1(\beta)+q(\beta)y_1(\beta)=q(\beta) \end{array}$$

Ceci conduit aux fonctions de demande suivantes :

$$x_1(\alpha)=\frac{p(\alpha)}{2p(\alpha)}=1/2 \quad \text{et} \quad y_1(\alpha)=\frac{p(\alpha)}{2q(\alpha)}$$

$$x_1(\beta)=\frac{q(\beta)}{2p(\beta)} \quad \text{et} \quad y_1(\beta)=\frac{q(\beta)}{2q(\beta)}=1/2$$

Le second agent, *a priori* non informé, résout, s'il demeure non informé, un seul programme de maximisation : il maximise l'espérance de son utilité sous sa contrainte budgétaire.

$$\begin{array}{ll} \max_{(x_2,y_2)} & \frac{1}{2}v_2(x_2,y_2\,;\alpha)+\frac{1}{2}v_2(x_2,y_2\,;\beta)=1/2\log x_2+1/2\log y_2 \\ \text{s.c.} & px_2+qy_2=1 \end{array}$$

car $p(s)+q(s)=1$ pour $s=\alpha,\beta$.

Dans ce cas, sa demande est bien s–r la même dans chaque état :

$$x_2=\frac{1}{2p} \quad \text{et} \quad y_2=\frac{1}{2q}$$

Les relations d'équilibre sur chaque marché dans chaque état sont dans ce cas de figure :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2p(\alpha)}=2 \quad \text{et} \quad \frac{p(\alpha)}{2q(\alpha)}+\frac{1}{2q(\alpha)}=1 \quad \text{en} \quad \alpha$$

$$\frac{q(\beta)}{2p(\beta)}+\frac{1}{2p(\beta)}=1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2q(\beta)}=2 \quad \text{en} \quad \beta$$

Les prix d'équilibre seraient alors :

$$(p(\alpha),q(\alpha))=(1/3,2/3) \quad \text{et} \quad (p(\beta),q(\beta))=(2/3,1/3)$$

Le second consommateur peut ainsi inférer du prix observé sur le marché quel est l'état réalisé. En effet, les prix sont différents selon l'état réalisé. La fonction de prix proposée n'est donc pas un équilibre à anticipations rationnelles.

Si le second consommateur est informé par le système de prix de l'état réalisé (c'est-à-dire si le prix d'équilibre est différent dans chaque état), il résout les deux programmes suivants :

$$\begin{array}{ll} \max_{(x_2(\alpha),y_2(\alpha))} & v_2\left(x_2(\alpha),y_2(\alpha)\,;\alpha\right) \\ \text{s.c.} & p(\alpha)x_2(\alpha)+q(\alpha)y_2(\alpha)=1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ll} \max_{(x_2(\beta),y_2(\beta))} & v_2\left(x_2(\beta),y_2(\beta)\,;\beta\right) \\ \text{s.c.} & p(\beta)x_2(\beta)+q(\beta)y_2(\beta)=1 \end{array}$$

Ceci conduit aux fonctions de demande suivantes :

$$x_2(\alpha) = \frac{1}{4p(\alpha)} \quad \text{et} \quad y_2(\alpha) = \frac{3}{4q(\alpha)}$$

$$x_2(\beta) = \frac{3}{4p(\beta)} \quad \text{et} \quad y_2(\beta) = \frac{1}{4q(\beta)}$$

Les prix d'équilibre sont alors :

$$(p(\alpha), q(\alpha)) = (1/6, 5/6) \quad \text{et} \quad (p(\beta), q(\beta)) = (5/6, 1/6)$$

Ceci constitue bien un équilibre à anticipations rationnelles : les prix étant différents dans les deux états, le consommateur non informé en déduit quel état s'est réalisé. Dans ce cas, l'équilibre est révélateur. La simultanéité de la révélation de l'information avec la formation du prix est ici apparente. La demande du second consommateur dépend du fait que le prix d'équilibre (qui incorpore donc sa propre demande) est différent dans chaque état.

La prise en compte de l'information révélée par le système de prix conduit à de nouveaux problèmes, concernant l'existence d'un équilibre, comme nous l'illustrons maintenant à l'aide d'un exemple simple.

14.3.2 Un exemple de non-existence d'un équilibre à anticipations rationnelles

Nous développons ici un exemple dont la structure est proche de celle de l'exemple du paragraphe précédent, mais dans lequel il n'existe pas d'équilibre à anticipations rationnelles. Il existe deux biens, deux agents, et deux états équiprobables. Les notations sont les mêmes que ci-dessus. Le premier consommateur est informé de la réalisation de l'état, tandis que le second ne l'est pas *a priori*.

La fonction d'utilité de chaque agent dépend de l'état de la nature :

$$\begin{cases} v_1(x, y\,; \alpha) = \frac{2}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y \\ v_1(x, y\,; \beta) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_2(x, y\,; \alpha) = \frac{1}{3}\log x + \frac{2}{3}\log y \\ v_2(x, y\,; \beta) = \frac{2}{3}\log x + \frac{1}{3}\log y \end{cases}$$

Les dotations sont les mêmes pour les deux agents et identiques selon les états : $e_1 = e_2 = (1, 1)$. Les prix sont normalisés de manière à appartenir au simplexe : $p(s)+q(s) = 1$ pour $s = \alpha, \beta$. Le revenu de chaque agent dans chaque état est donc égal à 1.

Supposons qu'il existe un équilibre à anticipations rationnelles. Deux cas sont alors possibles. Soit $p(\alpha) = p(\beta)$ et l'équilibre est révélateur, soit $p(\alpha) \neq p(\beta)$ et l'équilibre est non révélateur.

Premier cas : $p(\alpha) = p(\beta)$. Le second consommateur reste non informé et cherche à maximiser son utilité espérée, égale à $1/2 v_2(x, y\,; \alpha) + 1/2 v_2(x, y\,; \beta)$, soit $1/2 \log x + 1/2 \log y$. Ses fonctions de demande sont identiques dans les deux états :

$$\begin{aligned} x_2(\alpha) &= \tfrac{1}{2p(\alpha)} \quad \text{et} \quad y_2(\alpha) = \tfrac{1}{2q(\alpha)} \\ x_2(\beta) &= \tfrac{1}{2p(\beta)} \quad \text{et} \quad y_2(\beta) = \tfrac{1}{2q(\alpha)} \end{aligned}$$

Le premier consommateur est informé de la réalisation de l'état et sa demande prend la forme suivante :

$$\begin{array}{lcl} x_1(\alpha) = \frac{2}{3p(\alpha)} & \text{et} & y_1(\alpha) = \frac{1}{3q(\alpha)} \\ x_1(\beta) = \frac{1}{3p(\beta)} & \text{et} & y_2(\beta) = \frac{2}{3q(\alpha)} \end{array}$$

Les équations d'équilibre sur les marchés dans les deux états s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{2}{3p(\alpha)} + \frac{1}{2p(\alpha)} & = & 2 \\ \frac{1}{3q(\alpha)} + \frac{1}{2p(\beta)} & = & 2 \end{array} \right. \implies p(\alpha) = 7/12 \;\text{ et }\; q(\alpha) = 5/12$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{3p(\alpha)} + \frac{1}{2p(\alpha)} & = & 2 \\ \frac{2}{3q(\alpha)} + \frac{1}{2p(\beta)} & = & 2 \end{array} \right. \implies p(\beta) = 5/12 \;\text{ et }\; q(\beta) = 7/12$$

En conséquence, $p(\alpha) \neq p(\beta)$ ce qui est une contradiction puisque nous sommes dans le cas où ces prix sont supposés égaux. Il n'existe donc pas d'équilibre non révélateur.

Deuxième cas : $p(\alpha) \neq p(\beta)$. Le second consommateur devient informé de la réalisation de l'état, et maximise donc une fonction d'utilité différente selon que l'état est α ou β. Nous obtenons alors (les calculs de fonctions de demande sont semblables à ceux effectués ci-dessus) les deux systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{2}{3p(\alpha)} + \frac{1}{3p(\alpha)} & = & 2 \\ \frac{1}{3q(\alpha)} + \frac{2}{3p(\beta)} & = & 2 \end{array} \right. \implies p(\alpha) = 1/2 \;\text{ et }\; q(\alpha) = 1/2$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{1}{3p(\alpha)} + \frac{2}{3p(\alpha)} & = & 2 \\ \frac{2}{3q(\alpha)} + \frac{1}{3p(\beta)} & = & 2 \end{array} \right. \implies p(\beta) = 1/2 \;\text{ et }\; q(\beta) = 1/2$$

En conséquence, $p(\alpha) = p(\beta)$ ce qui est une contradiction puisque nous sommes dans le cas où ces prix sont supposés différents. Il n'existe donc pas d'équilibre révélateur, et en conclusion des deux cas, il n'existe pas d'équilibre à anticipations rationnelles.

Cet exemple est cependant très particulier. Si l'économie était très légèrement modifiée (en supposant que $v_1(x, y\,; \alpha) = (2/3 + \varepsilon)\log x + (1/3 - \varepsilon)\log y$ par exemple), alors nous obtiendrions un équilibre révélateur ($p(\alpha) = 1/2 + \varepsilon/2$ et $p(\beta) = 1/2$). Le problème d'inexistence de l'équilibre n'est en fait pas trop sérieux, dans la mesure où, pour presque toutes les configurations de l'économie, un équilibre à anticipations rationnelles existe.

14.3.3 Equilibre révélateur et équilibre non révélateur

L'exemple du paragraphe précédent montre que l'analyse est plus compliquée en présence d'asymétrie d'information. Ceci est d– au rôle informatif du prix. Celui-ci est non seulement un indicateur de rareté mais également un vecteur d'information.

Dans l'exemple du paragraphe 14.3.1, toute l'information disponible dans l'économie est révélée par le système de prix d'équilibre aux agents non informés. Il en va de même dans l'exemple "perturbé" du paragraphe 14.3.2. Il convient de se demander si ce résultat de "révélation totale" est vrai de manière générale.

Il a été démontré que ce résultat est vrai, sauf cas exceptionnel, lorsque l'espace des prix est "plus grand" que l'espace des états de la nature. En effet, un équilibre est révélateur si la fonction de prix $p(.)$ est inversible, ou, plus précisément si cette fonction est injective :

$$p(s) = p(s') \Longrightarrow s = s'$$

Si $p(.)$ est injective et si $s \neq s'$, alors les prix sont différents dans les deux états, et les agents sont capables d'inférer du système de prix quel état s'est réalisé. Or, cette propriété d'injectivité de la fonction de prix est d'autant plus facile à vérifier que l'espace des prix, Δ, est grand, et que l'ensemble des états de la nature, S, est petit.

Pour voir ceci, prenons l'exemple d'une fonction f quelconque qui va de $\{a, b\}$ dans $\mathbb{R}$. Il faudrait "beaucoup de malchance" pour que $f(a) = f(b)$, alors que $f(a)$ et $f(b)$ peuvent *a priori* prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$. En d'autres termes, "presque toutes" ces fonctions f sont injectives. En revanche, si cette fonction f allait de $\mathbb{R}$ dans $\{a, b\}$, alors, il est évident qu'elle ne peut pas être injective.

Dans les exemples d'équilibres révélateurs ci-dessus, nous étions précisément dans le cas où l'ensemble des états de la nature est fini, alors que le vecteur de prix peut prendre un nombre infini de valeur. L'équilibre est donc en général révélateur. Si toutefois, l'espace des états de la nature était de dimension supérieure à celui des prix, alors les équilibres seraient typiquement non révélateurs.

Le résultat "intuitif" peut s'exprimer de la manière suivante : si l'incertitude dans l'économie est faible (faible dimension de l'espace des états de la nature), alors le système de prix révèle toute l'information détenue de manière privée, au marché. En revanche si le degré d'incertitude est élevé, le système de prix devient non-révélateur.

Le fait que l'équilibre puisse être parfaitement révélateur crée quelques problèmes si l'information est coûteuse à acquérir. En effet, un agent, sachant que l'information est coûteuse à acquérir individuellement et qu'elle sera de toute manière révélée par le système de prix, ne va pas l'acheter. Mais si tous les agents tiennent ce raisonnement, personne n'acquiert l'information, et celle-ci ne peut donc être révélée à l'équilibre puisque personne ne la détient. Ce problème est très lié à la représentation statique adoptée. En effet, si nous supposons que l'information détenue par un agent n'est révélée qu'une période après qu'il s'en soit servi, alors il peut quand même avoir intérêt à l'acheter.

14.4 Information et assurance

Nous terminons ce chapitre par un phénomène (étudié pour la première fois par J. Hirshleifer[88]) qui peut sembler de prime abord assez contre-intuitif, mais qui, à la reflexion se comprend aisément : disposer d'une information plus fine sur l'état réalisé peut dégrader l'utilité de tous les individus.

[88] "Where are we in the theory of information", *American Economic Review*, 1973.

Ce phénomène n'est pas lié à une quelconque asymétrie d'information, mais le cadre développé jusqu'à présent permet de l'appréhender simplement.

Etudions ceci sur un exemple[89]. Il s'agit d'un modèle à deux états, α et β, supposés équiprobables, deux agents 1 et 2, et deux biens x et y. Le premier agent a une dotation indépendante de la réalisation de l'aléa, égale à 2 unités du bien x et zéro unité du bien y. Le second agent est dans une position inverse et possède deux unités du bien y et aucune du bien x (indépendamment de l'état réalisé).

Les deux agents ont les mêmes préférences, qui dépendent de la réalisation de l'aléa : dans l'état α, seul le premier bien a une utilité, tandis que seul le second bien a de l'utilité dans l'état β. Plus précisément, supposons $u_h(x, y; \alpha) = x^{1/2}$ et $u_h(x, y; \beta) = y^{1/2}$. Pour fixer les idées, soyons plus concrets. L'état α correspond à l'état "il fait beau", l'état β à "il pleut". Le premier bien est un billet pour un spectacle en plein air, le second un parapluie.

Supposons dans un premier temps qu'aucun agent ne soit informé du temps qu'il fera demain. Quel est l'équilibre dans ce cas de figure ? En l'absence d'information, chacun maximise son utilité espérée, en affectant la probabilité 1/2 à chaque état. L'équilibre (qu'il est possible de calculer très simplement) correspond alors à une situation dans laquelle les agents sont parfaitement assurés : chacun détient un billet et un parapluie dans chaque état. L'utilité *ex ante*, c'est-à-dire avant réalisation de l'aléa, de chaque agent est égale à 1. A cet équilibre, chaque agent s'est assuré contre la possibilité que le bien qu'il détient soit sans valeur une fois l'aléa réalisé.

Considérons maintenant le cas opposé. Les agents ont accès à un signal (un service météorologique) qui leur permet de connaître le temps qu'il fera demain, avant que les marchés ne s'ouvrent. Dans ce cas de figure, les marchés seront inactifs, puisqu'un des deux biens ne procure aucune utilité dans chaque état. Les agents se voient alors dans l'obligation de consommer leurs dotations. Ainsi, chaque agent a une utilité de $\sqrt{2}$ avec probabilité 1/2 et de 0 avec probabilité 1/2. Si nous calculons maintenant son utilité *ex ante*, nous trouvons $\sqrt{2}/2$, ce qui est inférieur à 1. Ainsi l'utilité espérée est plus faible que dans le modèle dans lequel les agents n'avaient accès à aucune information. Disposer d'une information supplémentaire est néfaste pour l'économie dans son ensemble.

La raison de ce phénomène est simple à comprendre : le fait que l'information soit disponible a tué toute possibilité d'assurance entre les agents. Ceux-ci souffrent, *ex ante*, de ce fait, et préfèrent la situation sans information préalable mais dans laquelle une possibilité de s'assurer leur est offerte.

14.5 Conclusion

Ce chapitre a essayé de rendre précis l'argument selon lequel le marché révèlerait à tous l'information privée détenue par chaque agent. Le concept d'équilibre à anticipations rationnelles en présence d'information asymétrique permet d'étudier cette question. Si nous excluons les problèmes d'inexistence de l'équilibre, cette étude nous a enseigné que le prix ne pouvait remplir parfaitement ce rôle de vecteur de l'information privée que si les sources d'incertitude n'étaient pas trop nombreuses.

Cette propriété de l'équilibre à anticipations rationnelles est certes intéressante mais soulève un problème. Comment les agents sont-ils amenés à connaître la fonction de

[89]Cet exemple s'inspire du manuel A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green, *Microeconomic Theory*, ,ditions Oxford University Press, 1995.

prix d'équilibre ? L'intuition suggère que si l'économie se reproduit à l'identique alors les agents seront amenés à faire le lien entre l'état réalisé et le prix observé. Ainsi, le prix serait un bon vecteur des informations privés dans un système économique dont la structure stochastique se reproduit à l'identique période après période. Généraliser les conclusions de ce chapitre à un environnement sur lequel les agents auraient peu d'information peut sembler problématique. En tout état de cause, il conviendrait certainement de formaliser plus avant ce problème d'apprentissage.

Chapitre 15

Le modèle à générations imbriquées

15.1 Introduction

Nous terminons cet ouvrage par la présentation d'un modèle dynamique à horizon infini qui possède la particularité d'être peuplé d'agents à durée de vie finie, le modèle à générations, développé à l'origine par M. Allais[90] et P. Samuelson[91].

Ce modèle dynamique, dans lequel les agents économiques "naissent et meurent", est une généralisation logique du modèle à deux périodes étudié dans le chapitre 12. Chaque agent ne vit que deux périodes, mais la structure emboîtée des générations implique que l'économie se renouvelle sans cesse. Du point de vue des agents, la structure du problème qu'ils doivent résoudre est en tout point semblable à celle du problème dans un modèle à deux périodes. En revanche, du point de vue de l'économie dans son ensemble, le caractère infini de l'horizon du modéle génère de nouveaux problèmes. Le premier, de nature technique mais qui est à la source de problèmes plus économiques, est que, du fait du nombre infini de périodes, il existe un nombre infini de biens économiques (indicés par le temps). Parallèlement, il existe un nombre infini de consommateurs dans ce modèle.

Nous allons voir que ceci a plusieurs conséquences importantes. Premièrement l'équilibre n'est plus nécessairement optimal. Deuxièmement, la monnaie peut avoir une place réelle dans le modèle. Troisièmement, il existe une infinité de trajectoires d'équilibre. Enfin, sous certaines hypothèses, des cycles peuvent apparaître.

Ce modèle est très souvent utilisé en macroéconomie, par exemple pour traiter de l'accumulation du capital ou du financement des déficits publics[92]. Nous en présenterons ici la structure de base et les propriétés élémentaires, dans un cadre d'échange.

15.2 Structure démographique et programme des agents

La caractéristique essentielle du modèle est sa structure démographique. A chaque instant nait une génération, qui vit deux périodes et meurt à l'issue de ces deux pé-

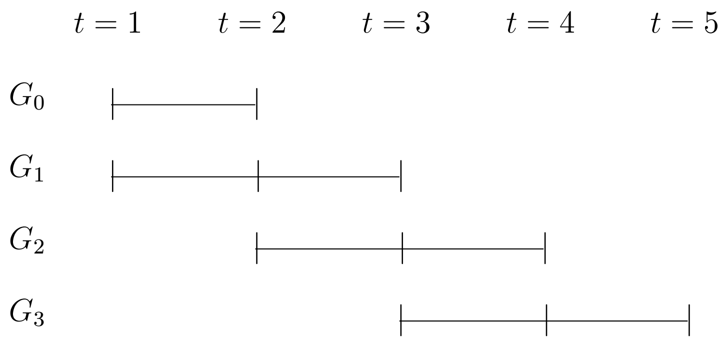
[90] *Economie et Intérêt*, Imprimerie Nationale, 1947.

[91] "An exact consumption-loan model of interest without the social contrivance of money", *Journal of Political Economy*, 1958, p. 467-482.

[92] Voir O. Banchard et S. Fisher, *Lectures on Macroeconomics*, éditions MIT Press, 1989 ou C. Azariadis, *Intertemporal Macroeconomics*, éditions Blackwell, 1993.

riodes. A chaque date coexistent deux générations différentes. Cette structure démographique est représentée sur le graphique 15.1.

FIG. 15.1: La structure démographique



L'économie commence en $t = 1$, avec une génération, G_0, qui est déjà "vieille" et meurt à la fin de cette première période. En $t = 1$ nait la génération G_1 qui vit jusqu'en $t + 3$. Elle est "jeune" de $t = 1$ à $t = 2$ et "vieille" de $t = 2$ à $t = 3$. En $t = 2$ nait la génération G_2 qui, lorsqu'elle est jeune cohabite avec les vieux de la génération G_1, et lorsqu'elle est vieille cohabite avec les jeunes de la génération G_3. Il n'est pas nécessaire de se restreindre à des générations vivant seulement deux périodes. Nous le ferons afin d'éviter de compliquer les notations.

Il faut remarquer que ce modèle est un modèle à horizon infini, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de période terminale, même si chaque agent ne vit que deux périodes. Ceci se révèlera être très important pour expliquer certaines de ces particularités.

Nous supposerons en outre que chaque génération n'est composée que d'un seul agent (et donc que la population est stationnaire), et qu'il n'existe qu'un bien par période dans l'économie. Enfin, nous nous plaçons dans une économie d'échange. Les notations sont les suivantes :

- x_j^t : consommation d'un jeune de la génération t (en t),
- x_v^t : consommation d'un vieux de la génération t (en $t+1$),
- e_j^t : dotation d'un jeune de la génération t (en t),
- e_v^t : dotation d'un vieux de la génération t (en $t+1$),
- $p(t)$: prix à la date t.

La fonction d'utilité de l'individu de la génération t s'écrit $u^t(x_j^t, x_v^t)$ et est supposée vérifier les hypothèses habituelles. L'agent de la génération t doit donc résoudre le programme de maximisation suivant :

$$\begin{array}{rl} \max_{x_j^t, x_v^t} & u^t(x_j^t, x_v^t) \\ \text{s.c.} & \left\{ \begin{array}{rcl} p(t)x_j^t & = & p(t)e_j^t \\ p(t+1)x_v^t & = & p(t+1)e_v^t \end{array} \right. \end{array}$$

15.3 L'équilibre dans le modèle à générations simple

Quel est l'équilibre de ce modèle, s'il en admet un ?

Définition : *Un équilibre du modèle à générations est une suite de prix $(p(t))_{t=1}^{\infty}$ telle que :*

- *étant donnée $(p(t))_{t=1}^{\infty}$, chaque génération résout son problème de maximisation, et*
- *les marchés s'apurent à chaque période : $x_v^{t-1} + x_j^t = e_v^{t-1} + e_j^t$ pour tout t.*

Dans ce concept d'équilibre, nous supposons que les agents ont des anticipations parfaites.

Il est très simple de trouver l'équilibre du modèle décrit jusqu'à présent. Il n'existe aucun moyen pour un agent de transférer de la richesse entre les deux périodes. Ainsi, les échanges entre générations sont impossibles. De plus, les deux contraintes budgétaires sont homogènes de degré 0 par rapport au prix, et peuvent donc se réécrire (si le prix est strictement positif) : $x_j^t = e_j^t$ et $x_v^t = e_v^t$, c'est-à-dire que le programme optimal de chaque agent est de consommer ses dotations initiales à chaque période. L'équilibre est l'équilibre autarcique : le prix du bien n'importe pas (tant qu'il est strictement positif) et chaque agent consomme ses dotations à chaque période. Il n'existe donc aucun échange à cet équilibre.

Si nous compliquons un peu le modèle en introduisant plusieurs agents différents dans chaque génération, alors les échanges entre agents de la même génération sont possibles à l'équilibre, mais il n'existe toujours aucune possibilité d'échanges entre générations. Cet équilibre n'est, en général, pas un optimum de Pareto. Le premier théorème du bien-être n'est donc pas vérifié dans le cas présent. Ceci peut se voir directement sur l'exemple suivant :

Supposons que, pour toutes les générations : $u^t(x_j^t, x_v^t) = \left(x_j^t\right)^{1/2} \left(x_v^t\right)^{1/2}$, $e_j^t = 1-\varepsilon$, et $e_v^t = \varepsilon$, où $1/2 > \varepsilon > 0$. L'équilibre de cette économie est l'équilibre autarcique :

$$x_j^t = 1 - \varepsilon \ , \quad x_v^t = \varepsilon \implies u^t(1-\varepsilon, \varepsilon) = ((1-\varepsilon)\varepsilon)^{1/2}$$

Considérons maintenant l'allocation suivante : $x_j^t = 1/2$ et $x_v^t = 1/2$ pour tout t. Cette allocation est réalisable : en $t = 1$, les ressources de l'économie consistent en ε des vieux de la génération G_0 et $1 - \varepsilon$ des jeunes de la génération G_1, c'est-à-dire un total de 1. Nous pouvons donc allouer $1/2$ à chaque génération vivante à cet instant. Le même raisonnement montre que c'est le cas à toute date. Le vieux de la génération G_0 obtient une utilité (instantanée) de $1/2^{1/2} > \varepsilon^{1/2}$, et un individu né en t obtient une utilité de $1/4^{1/2} > ((1-\varepsilon)\varepsilon)^{1/2}$. A cette allocation tout le monde a une utilité supérieure à celle d'équilibre. Ce dernier n'est donc pas un optimum.

Observons que le fait que l'horizon est infini est essentiel dans la construction de l'allocation qui Pareto domine l'équilibre. En effet, si l'économie stoppait à la date T, les jeunes nés en $T - 1$ verraient leur utilité baisser si on leur demandait de donner une partie de leur dotation aux vieux de cette période. Il convient également de noter que les marchés ne sont pas "complets" dans la mesure où aucun marché n'existe pour l'échange du bien à la période t contre le bien à la période $t + 1$. Aucun transfert intertemporel n'est permis, pour l'instant, dans ce modèle. Les conditions de validité du premier théorème du bien-être ne sont ainsi pas remplies et il est donc normal que celui-ci ne soit pas vrai en général dans une économie à générations.

Nous venons de voir qu'il manque dans ce modèle un moyen de transférer de la richesse d'une période sur l'autre. Or, nous avons vu dans les chapitres 12 et 13 qu'un moyen d'opérer ce transfert était d'échanger des actifs financiers internes. Supposons donc que les agents puissent échanger des reconnaissances de dette entre eux. Cela permettra-t-il à l'économie de s'éloigner de l'équilibre autarcique ?

La réponse à cette question est négative : l'équilibre dans ce modèle modifié reste l'équilibre autarcique. Le marché des titres demeurera inactif. En effet, les vieux ne veulent pas prêter puisqu'ils meurent à la fin de la période et ne seront donc jamais remboursés. Ceci signifie que les jeunes ne peuvent pas emprunter. De même, ceux-ci ne peuvent pas prêter aux vieux car ces derniers ne les rembourseront jamais. Aucun échange n'est possible sur le marché financier. Introduire un actif interne ne résout donc pas la question de la sous-optimalité de l'équilibre.

Evidemment, s'il existait plusieurs agents à l'intérieur de chaque génération, ceux-ci pourraient conclure des échanges financiers entre eux, puisqu'ils vivent deux périodes ensemble. De même, si nous avions supposé que chaque agent vivait trois périodes, alors, il pourrait conclure des arrangements financiers (d'une période) avec la génération précédente et la suivante, puisqu'il cotoyerait ces générations pendant deux périodes. Il reste cependant que toute structure démographique "raisonnable" impose des contraintes sur les échanges inter-générationels réalisables ; contraintes qui sont autant de sources d'inefficience de l'équilibre. Le cas que nous étudions est certes "caricatural" mais met clairement en évidence ce problème.

Il existe un moyen de résoudre (partiellement) le problème d'impossibilité d'échanges intertemporels dans le modèle le plus simple ; moyen que nous allons maintenant exposer.

15.4 La monnaie dans le modèle à générations

Le problème que nous devons résoudre est celui du transfert de richesse entre des générations qui ne coexistent que pendant une seule période.

15.4.1 Le rôle de la monnaie

Il est possible qu'un jeune admette une dette d'un vieux si, lorsqu'à son tour il devient vieux, il peut transmettre cette dette aux jeunes d'alors. Ce type d'arrangement nécessite une certaine confiance entre les générations : un jeune n'accepte une dette d'un vieux que s'il anticipe qu'il pourra s'en débarasser un jour puisque de toutes façons le vieux ne peut la lui rembourser[93].

C'est précisément ce rôle que la monnaie externe peut jouer dans ce modèle. La monnaie externe (par opposition aux actifs internes que nous avons déjà rencontrés) est simplement un bout de papier, stockable, qui ne possède aucune utilité pour les agents (ce n'est pas un bien), et qui existe en quantité donnée. En particulier, aucun agent ne peut émettre de la monnaie. Soit M ce stock de monnaie. La demande de monnaie par les agents de la génération t à la date t est notée m^t. Il est évident qu'ils ne demandent pas de monnaie en $t+1$ puisque celle-ci ne leur serait alors d'aucune utilité. Enfin, le stock de monnaie est détenu par le consommateur de la génération G_0.

[93] L'analogie avec le modèle de N. Kiyotaki et R. Wright abordé lors du chapitre 4 est frappante : dans leur modèle un agent n'accepte de la monnaie que parce qu'il anticipe qu'il pourra s'en débarrasser ultérieurement.

L'individu de la génération G_0 résout ainsi le programme suivant :

$$\begin{array}{rl} \max_{x_v^0} & u^0(x_v^0) \\ \text{s.c.} & p(1)x_v^0 = p(1)e_v^0 + M \end{array}$$

tandis que les agents de la génération t, qui vivent deux périodes, doivent résoudre le problème suivant :

$$\begin{array}{ll} \max_{x_j^t, x_v^t, m^t} & u^t(x_j^t, x_v^t) \\ & \left\{ \begin{array}{lcl} p(t)x_j^t + m^t & = & p(t)e_j^t \\ p(t+1)x_v^t & = & p(t+1)e_v^t + m^t \\ m^t \geq 0 & & \end{array} \right. \end{array}$$

Nous avons précisé dans le problème la contrainte de positivité sur m^t (qui reflète le fait que les agents ne peuvent pas émettre de monnaie) car celle-ci joue un rôle important dans l'analyse qui suit.

Définition : *Un équilibre du modèle à générations avec monnaie est une suite de prix $(p(t))_{t=1}^{\infty}$ telle que :*

- *étant donnée $(p(t))_{t=1}^{\infty}$, chaque génération résout son problème de maximisation,*
- *le marché du bien s'apure à chaque période : $x_v^{t-1} + x_j^t = e_v^{t-1} + e_j^t$ pour tout t,*
- *le marché de la monnaie s'apure à chaque période : $m^t \leq M$ pour tout t.*

La raison pour laquelle l'équilibre sur le marché de la monnaie est écrit $m^t \leq M$ et non $m^t = M$ sera claire bientôt : il est possible que, dans une situation que nous désirons considérer comme une situation d'équilibre, personne ne désire détenir de la monnaie, auquel cas $m^t = 0$ pour tout $t > 0$.

Il est possible de réécrire le problème de maximisation de la façon suivante, en éliminant la monnaie :

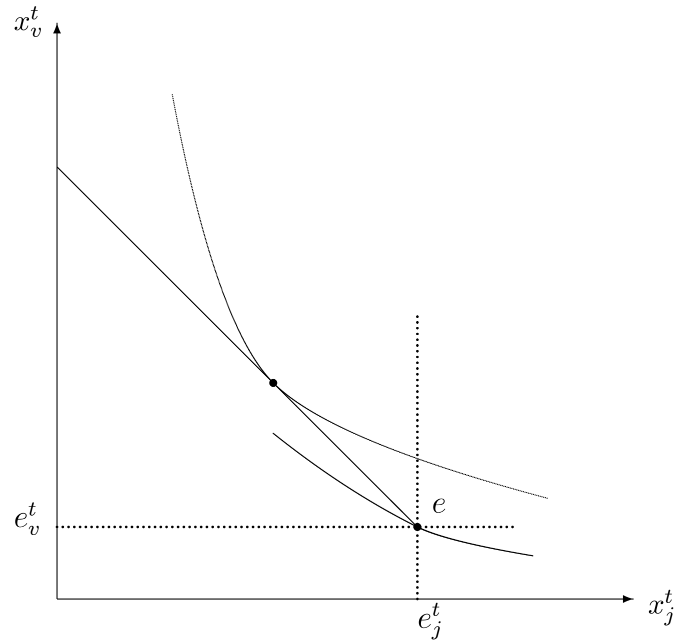
$$\begin{array}{ll} \max_{x_j^t, x_v^t} & u^t(x_j^t, x_v^t) \\ & \left\{ \begin{array}{l} p(t)\left(x_j^t - e_j^t\right) + p(t+1)\left(x_v^t - e_v^t\right) = 0 \\ x_v^t - e_v^t \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Le choix du consommateur peut alors être représenté sur le graphique 15.2.

Nous voyons sur ce graphique que l'existence de monnaie dans l'économie permet au consommateur de s'éloigner de son point de dotations initiales, et en conséquence d'avoir un véritable comportement intertemporel. Le fait qu'il ne puisse pas émettre de la monnaie est représenté dans le programme ci-dessus par l'inégalité $x_v^t - e_v^t \geq 0$, qui tronque la droite budgétaire de l'agent au point (e_j^t, e_v^t). La (valeur absolue de la) pente de cette droite est égale au rapport de prix $p(t)/p(t+1)$, qui représente les termes de l'échange entre le présent et le futur. Plus ce rapport est faible, plus l'inflation est élevée.

Il est apparent sur le graphique 15.3 que si le taux marginal de substitution du consommateur au point de dotations initiales est supérieur (en valeur absolue) à ces termes de l'échange, alors le consommateur désirerait emprunter et non épargner. Toutefois, il ne peut réaliser cet emprunt puisqu'il ne peut émettre de la monnaie. Le

FIG. 15.2: Demande d'un consommateur : la cas "non contraint"



transfert de richesse du futur vers le présent n'est pas permis par la présence de monnaie. Il est donc possible qu'à l'équilibre, personne ne désire détenir de la monnaie.

Il est un cas où cette inégalité entre le TMS et le rapport de prix est vérifiée, et donc dans lequel la monnaie n'est pas détenue ; c'est celui où le prix ne cesse d'augmenter fortement, de telle sorte que $p(t+1)$ est largement supérieur à $p(t)$. Plus précisément, l'agent de la génération t demande son point de dotations (*i.e.*, $x_j^t = e_j^t$ et $x_v^t = e_v^t$ pour tout t) lorsque la suite de prix est telle que $p(t)/p(t+1) < TMS(e)$. Dans ce cas de figure, la configuration d'équilibre va correspondre à une situation inflationiste, dans laquelle la monnaie perd de sa valeur réelle (en termes de bien) au cours du temps. Si cette inflation est suffisamment forte les agents ne désireront pas en détenir.

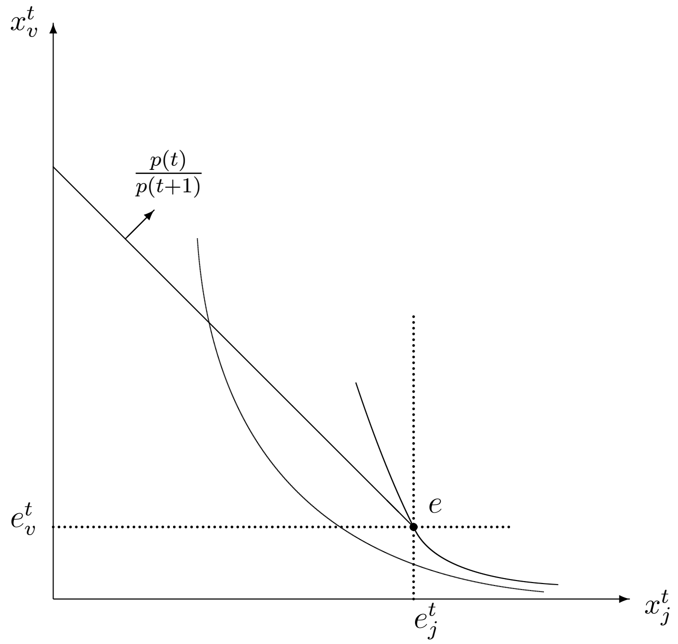
15.4.2 Une multiplicité d'équilibres

Nous allons maintenant étudier l'ensemble des équilibres du modèle à générations imbriquées à l'aide d'un exemple simple. Nous mettrons ainsi en évidence un fait inhabituel : il existe une infinité d'équilibres.

La fonction d'utilité des agents prend la forme[94] : $u\left(x_j^t, x_v^t\right) = 1/2 \log x_j^t + 1/2 \log x_v^t$. Supposons de plus que l'économie est stationnaire, dans le sens où elle se reproduit à l'identique : $e_j^t = e_j^{t'} \equiv e_j$ et $e_v^t = e_v^{t'} \equiv e_v$. Nous supposons que $e_j > e_v$. Observons que

[94]Nous avons, pour simplifier, supposé que les agents n'escomptent pas l'utilité future. Introduire un paramètre de préférences pour le présent, $\beta < 1$, ne change en rien les conclusions qualitatives obtenues ici.

FIG. 15.3: Demande d'un consommateur : la cas "contraint"



le TMS d'un agent au point de dotations initiales est égal, dans cet exemple, à e_v/e_j et est inférieur à 1.

Afin de calculer les fonctions de demande, il faut distinguer deux cas :

- Si $p(t)/p(t+1) \leq e_v/e_j$, alors chaque agent désire consommer ses dotations initiales : $x_j^t = e_j^t$ et $x_v^t = e_v^t$ pour tout $t > 0$. La génération G_0 pour sa part consomme $x_v^0 = e_v + M/p(1)$.
- Si $p(t)/p(t+1) > e_v/e_j$, alors les fonctions de demande s'écrivent, pour $t > 0$:

$$x_j^t = \frac{p(t)e_j + p(t+1)e_v}{2p(t)} \quad \text{et} \quad x_v^t = \frac{p(t)e_j + p(t+1)e_v}{2p(t+1)}$$

La génération G_0 pour sa part consomme $x_v^0 = e_v + M/p(1)$.

Ces deux cas renvoient à deux types d'équilibre : l'équilibre autarcique, où la monnaie n'est pas détenue, et un équilibre où la monnaie aurait une valeur non nulle et serait ainsi détenue par les agents.

Premier cas : $p(t)/p(t+1) \leq e_v/e_j$ pour tout t.

Nous venons d'établir que la demande d'un agent de la génération $t > 1$ est son point de dotations initiales. Ceci constitue-t-il un équilibre ? Apparemment oui, puisque l'allocation autarcique est réalisable et est celle demandée par toutes les générations $t > 1$ pour des prix vérifiant notre hypothèse de croissance suffisamment rapide. Toutefois, nous ne pouvons omettre la génération G_0, qui demande une quantité différente de ses dotations, à savoir $e_v + M/p(1)$. Il n'y a équilibre en première période que si :

$$e_v + M/p(1) + e_j = e_v + e_j$$

et donc uniquement si $p(1)$ est infini. Nous venons donc de trouver l'équilibre autarcique : il est soutenue par toute suite de prix telle que $p(1)=\infty$ et $p(t)/p(t+1) \leq e_v/e_j$. A cet équilibre, le prix relatif de la monnaie et du bien est nul ($p(t)$ est infini), c'est-à-dire que la valeur de la monnaie est nulle. En détenir ne permet pas d'acheter des biens, et personne ne désire donc en détenir. A l'équilibre autarcique personne ne détient de monnaie et tous les agents consomment leurs dotations. Cet équilibre est sous-optimal dans notre exemple.

En résumé, le seul équilibre est l'équilibre autarcique, supporté par toute suite de prix telle que $p(t)/p(t+1) \leq e_v/e_j$ et $p(1)$ infini. Cet équilibre n'est pas Pareto optimal. C'est un équilibre stationnaire dans la mesure où l'allocation d'équilibre ne varie pas avec le temps (même si le prix d'équilibre lui, est croissant).

<u>Deuxième cas : $p(t)/p(t+1) \geq e_v/e_j$ pour tout t.</u>

Supposons que cette inégalité soit vérifiée. Il est clair que cette condition portant sur des variables endogènes, déterminées à l'équilibre (à savoir les prix), il faudra s'assurer qu'elle est bien satisfaite pour les suites de prix que nous trouverons. Pour l'instant, supposons-la vérifiée et écrivons l'équation d'équilibre sur le marché du bien à la date 1 :

$$e_v + \frac{M}{p(1)} + \frac{p(1)e_j + p(2)e_v}{2p(1)} = e_v + e_j \qquad (1)$$

soit, $p(2) = \frac{p(1)e_j - 2M}{e_v}$.

De manière similaire, l'équilibre à la date t permet d'écrire le prix d'équilibre à la date $t+1$ en fonction de ceux des dates t et $t-1$:

$$p(t+1) = \frac{p(t)(e_j+e_v) - p(t-1)e_j}{e_v} \qquad (2)$$

L'équilibre du modèle est alors une suite de prix telle que (1) et (2) sont vérifiées pour tout t. Recherchons en premier lieu les suites de prix constantes qui vérifent ces équations, c'est-à-dire une suite de prix $p(t)=\overline{p}$ qui apure les marchés à chaque date. Un calcul simple montre que l'équation (2) est vérifiée pour n'importe quelle suite constante $\overline{p}$. Reste à satisfaire l'équation (1). Ceci donne :

$$e_v + \frac{M}{\overline{p}} + \frac{\overline{p}e_j + \overline{p}e_v}{2\overline{p}} = e_v + e_j \quad \text{soit} \quad \overline{p} = \frac{2M}{e_j - e_v}$$

Cette solution n'est bien évidemment valable que si $p(t)/p(t+1) > e_v/e_j$, c'est-à-dire si $1 > e_v/e_j$, ce qui est ce que nous avons supposé. A cet équilibre stationnaire, un agent consomme la moitié de la richesse de l'économie à chaque période :

$$x_j^t(\overline{p}) = \frac{e_j+e_v}{2} \quad \text{et} \quad x_v^t(\overline{p}) = \frac{e_j+e_v}{2}$$

Nous admettrons ici que cet équilibre est Pareto optimal. De plus, la monnaie est détenue à cet équilibre, il s'agit donc d'un équilibre monétaire. La monnaie constitue ce qu'il convient d'appeler une bulle. Son prix est non nul alors qu'elle ne possède aucune utilité, aucune valeur intrinsèque.

Etudions maintenant la possibilité d'obtenir d'autres équilibres (c'est-à-dire une suite de prix d'équilibre qui ne serait pas constante), toujours en nous plaçant dans le cas $p(t)/p(t+1) > e_v/e_j$.

Nous voyons sur l'équation (2) prise à la date t, qu'à partir de l'équilibre à la date t, nous pouvons définir le prix d'équilibre de la date $t+1$. Autrement dit, étant donnés $p(t)$ et $p(t-1)$, nous pouvons trouver le prix $p(t+1)$ qui apure le marché du bien en t. En partant d'un prix $p(1)$ quelconque (supérieur à $2M/(e_j - e_v)$), il est possible de trouver $p(2)$ qui apure le marché à la première date. Pour ce $p(1)$ et ce $p(2)$, nous pouvons alors trouver le $p(3)$ qui équilibre le marché à la seconde période, etc... L'horizon infini du modèle permet de répéter ce raisonnement quelque soit la date t. Toute séquence de prix qui respecte l'équation de récurrence ci-dessus est un équilibre, et ce pour toute condition initiale $p(1) > 2M/(e_j - e_v) \equiv \overline{p}$, chaque condition initiale définissant une trajectoire d'équilibre différente. Nous obtenons une infinité d'équilibres. Formalisons maintenant cet argument.

Dans un premier temps, nous montrons que si le rapport des prix est supérieur au TMS pris au point de dotations initiales à la date t, alors ceci est encore vrai à la date $t+1$.

Proposition : *Si* $\frac{p(t-1)}{p(t)} \geq \frac{e_v}{e_j}$ *alors* $\frac{p(t)}{p(t+1)} \geq \frac{e_v}{e_j}$ *pour toute suite de prix suivant la dynamique donnée par l'équation (2).*

Démonstration :

$$\begin{aligned} p(t) \geq p(t+1)\tfrac{e_v}{e_j} &\iff e_j p(t) \geq p(t)\Big(e_j + e_v\Big) - p(t-1)e_j \\ &\iff \tfrac{p(t-1)}{p(t)} \geq \tfrac{e_v}{e_j} \end{aligned}$$

L'équation (1) nous donne par ailleurs :

$$\frac{p(1)}{p(2)} = \frac{p(1)e_v}{p(1)e_j - 2M}$$

et il est aisé de vérifier que ce rapport est supérieur à e_v/e_j. Nous venons donc d'établir que, partant d'un prix quelconque $p(1)$, et en construisant une suite de prix à l'aide des équations (1) et (2), nous satisfaisons toujours l'hypothèse faite sur le rapport des prix. Etudions maintenant les conditions sous lesquelles cette suite est croissante.

Proposition : *La suite* $\{p(t)\}$ *définie par les équations (1) et (2) est croissante si* $p(1) \geq \frac{2M}{e_j - e_v}$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} p(2) \geq p(1) &\iff p(1)e_j - 2M \geq p(1)e_v \\ &\iff p(1) \geq \tfrac{2M}{e_j - e_v} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} p(t+1) \geq p(t) &\iff p(t)\Big(e_j + e_v\Big) - p(t-1)e_j \geq p(t)e_v \\ &\iff p(t) \geq p(t-1) \end{aligned}$$

Un corollaire de cette proposition est que la suite est positive si $p(1) \geq \frac{2M}{e_j - e_v}$.

Nous nous interrogeons maintenant sur la limite de la suite de prix d'équilibre. Plutôt que de chercher la limite de $p(t)$, nous cherchons à calculer la limite du rapport $\varphi(t) = \frac{p(t)}{p(t+1)}$.

Réécrivons l'équation d'équilibre (2) de manière à faire apparaître ce ratio :

$$\begin{aligned}
(2) \iff & \frac{p(t)\left(e_j+e_v\right)}{p(t+1)e_v} = 1 + \frac{p(t-1)e_j}{p(t+1)e_v} \\
\iff & \varphi(t)\left(1+\frac{e_j}{e_v}\right) = 1 + \frac{p(t-1)}{p(t)}\frac{p(t)}{p(t+1)}\frac{e_j}{e_v} \\
\iff & \varphi(t)\left(1+\frac{e_j}{e_v}\right) = 1 + \varphi(t-1)\varphi(t)\frac{e_j}{e_v}
\end{aligned}$$

La limite de la suite $\{\varphi(t)\}$, que nous noterons $\overline{\varphi}$ est telle que :

$$\overline{\varphi}\left(1+\frac{e_j}{e_v}\right) = 1 + \overline{\varphi}^2\frac{e_j}{e_v}$$

Cette équation a deux racines évidentes, $\overline{\varphi} = \frac{e_v}{e_j}$ et $\overline{\varphi} = 1$. Cette dernière valeur n'est pas possible. En effet, ceci signifierait que la suite de prix d'équilibre converge vers une suite de prix constante. La seule suite de prix d'équilibre constante est celle associée à l'équilibre stationnaire monétaire, *i.e.* $\overline{p} = \frac{2M}{e_j-e_v}$. Mais $p(1)$ est plus grand que $\overline{p}$ et nous avons établi que la suite $p(t)$ est croissante. Cette dernière ne peut donc converger vers la suite constante $\overline{p}$. En conséquence, $p(t)/p(t+1)$ converge vers e_j/e_v, c'est-à-dire la suite de prix soutenant l'équilibre autarcique. Si nous partons d'un prix $p(1)$ quelconque (mais supérieur au prix d'équilibre stationnaire monétaire, $\overline{p}$), alors il est possible de construire une suite de prix d'équilibre, l'allocation d'équilibre associée convergeant vers l'équilibre autarcique.

Récapitulons les résultats obtenus dans cet exemple (sous l'hypothèse $e_j > e_v$). Il existe

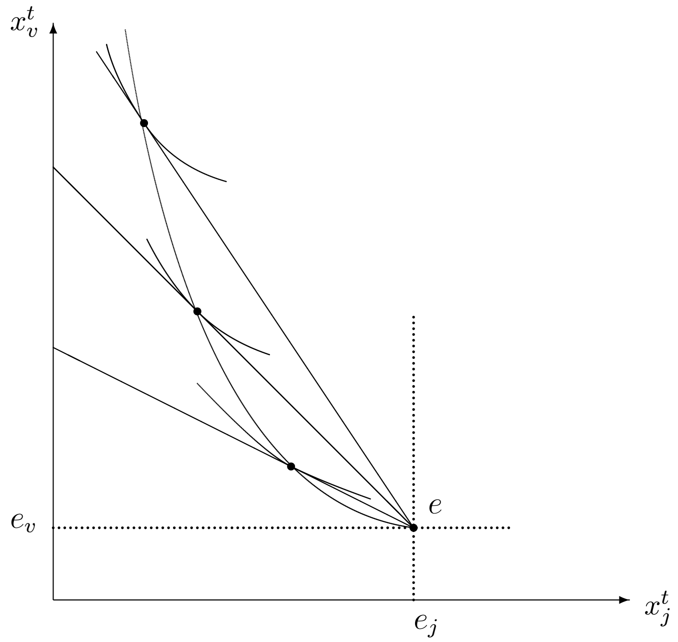
- deux équilibres stationnaires :
  - l'équilibre autarcique, où la valeur de la monnaie est nulle.
  - l'équilibre monétaire $x_j^t = x_v^t = \frac{e_j+e_v}{2}$ pour tout t soutenu par une suite de prix constante $\overline{p} = \frac{2M}{e_j-e_v}$.
- une infinité d'équilibres ayant la forme suivante : $p(1)$ est un prix arbitraire vérifiant $p(1) \geq \frac{2M}{e_j-e_v}$ et $p(t)$ est construit selon l'équation (2) de la page 283. Toutes ces trajectoires d'équilibre convergent vers l'équilibre autarcique.

15.4.3 Représentation graphique

Reprenons l'exemple développé ci-dessus. La multiplicité d'équilibres admet une représentation très simple. Traçons (graphique 15.4) dans le plan (x_t^j, x_t^v) la "courbe d'offre", c'est-à-dire le lieu des points de tangence entre les courbes d'indifférence et la droite budgétaire pour tout niveau de prix.

Ajoutons sur ce graphique le lieu des points tels que $x_j + x_v = e_j + e_v$. C'est une droite passant par le point (e_j, e_v), et qui a pour pente -1. Telle que nous l'avons tracée, la courbe d'offre admet deux points d'intersection avec la "droite d'équilibre" (graphique 15.5). Ces deux points d'intersection sont les équilibres stationnaires, où

FIG. 15.4: La courbe d'offre



l'allocation est indépendante du temps, à savoir l'équilibre autarcique (A) et l'équilibre monétaire (M).

Nous avons vu que dans notre exemple, existaient également des équilibres non-stationnaires qui convergeaient vers l'équilibre autarcique. Graphiquement, ceci se traduit par le fait que pour toute condition initiale x_v^0 compris entre e_v et la consommation des vieux à l'équilibre monétaire, nous pouvons construire une suite d'équilibre. Cette situation est représentée sur le graphique 15.6.

Partons de x_v^0. Pour que cette consommation soit partie prenante d'un équilibre, il faut que les jeunes de la génération G_1 demandent $e_v + e_j - x_v^0$. Ce point est donné par l'abscisse de l'intersection entre la droite d'équilibre et la droite horizontale passant par x_v^0. Maintenant, le jeune de la génération G_1 demande x_j^1 uniquement s'il obtient x_v^1 lorsqu'il est vieux, où x_v^1 est tel que (x_v^1, x_v^1) est sur la courbe d'offre. Cette demande x_v^1 ne fait partie d'un équilibre que si les jeunes de la génération G_2 acceptent de consommer x_j^2, et le raisonnement se poursuit jusqu'à l'infini.

Sur le graphique 15.6, nous représentons cette suite d'équilibre, et nous constatons qu'elle converge effectivement vers le point d'équilibre autarcique. Le long de cette suite, les prix augmentent et la valeur de la monnaie diminue. Nous n'avons représenté qu'une suite d'équilibre mais il est clair que le raisonnement peut être répété pour toute condition initiale appropriée et donc qu'il existe une infinité d'équilibres convergeant vers l'équilibre autarcique.

Cette représentation graphique nous permet d'envisager des cas plus compliqués. En effet, la courbe d'offre dans notre exemple a une forme très simple. Toutefois, il est possible que celle-ci prenne la forme représentée sur le graphique 15.7.

FIG. 15.5: Deux équilibres : l'équilibre autarcique et l'équilibre monétaire

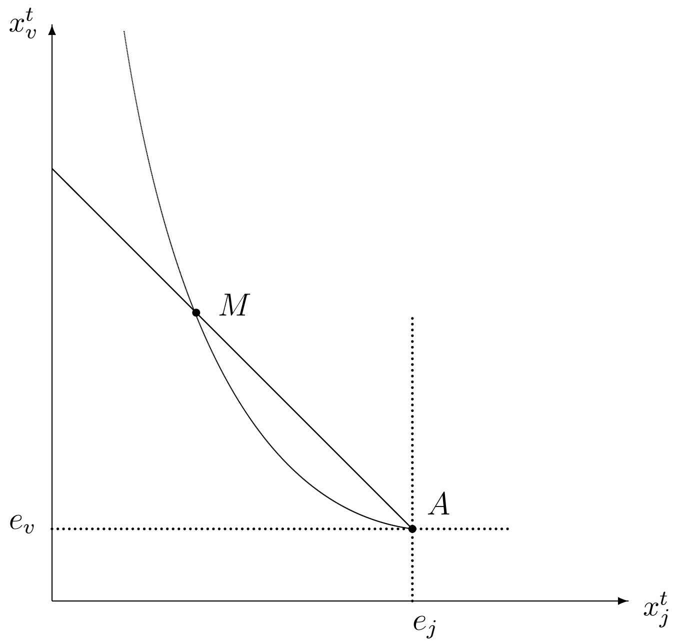


FIG. 15.6: Instabilité de l'équilibre monétaire

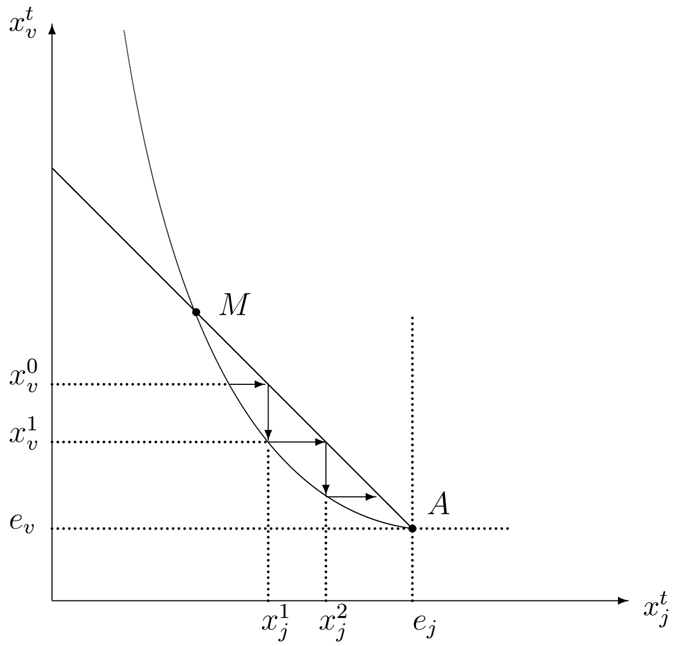
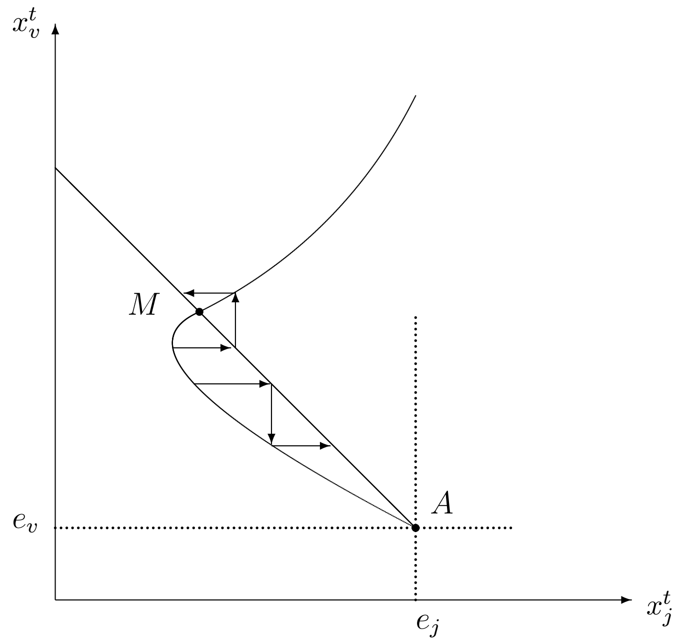


FIG. 15.7: L'indétermination possible de l'équilibre monétaire



Nous voyons alors qu'il existe dans ce cas de figure une infinité d'équilibres convergeant vers l'équilibre monétaire, et une infinité d'équilibres convergeant vers l'équilibre autarcique. Si la courbe d'offre a cette forme, il existe également un cycle d'ordre deux (voir graphique 15.8), c'est-à-dire que l'état de l'économie en t est le même que celui en $t-2$. Plus précisément, si l'économie est au point B en t, elle sera en C en $t+1$, reviendra en B en $t+2$ et ainsi de suite. L'état de l'économie est le même pour toutes les dates paires, ainsi que pour toutes les dates impaires. Nous ne développerons pas plus avant ce cas de figure, le lecteur intéressé étant renvoyé au manuel de A. Mas-Colell, M. Whinston et J. Green[95].

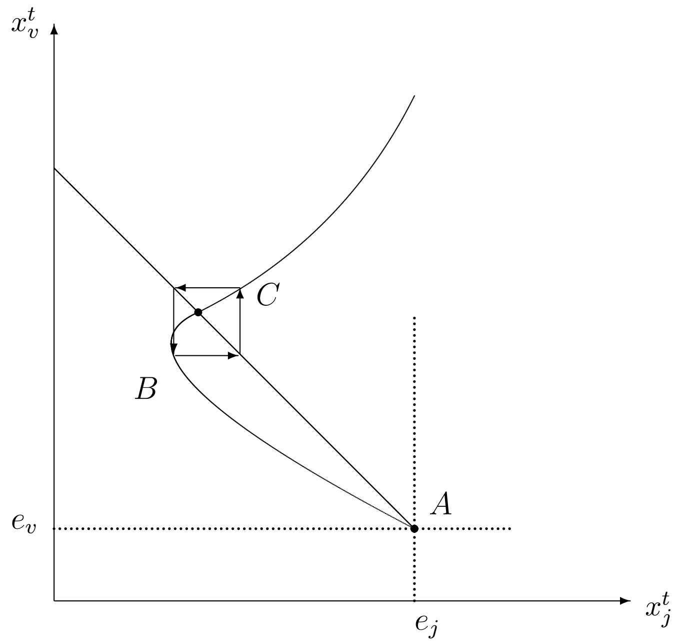
15.4.4 Quelques commentaires

Le raisonnement mené dans l'exemple ci-dessus montre bien que la source de la multiplicité des équilibres est le fait que l'horizon du modèle est infini. De plus, il convient de remarquer que l'équilibre décrit est un équilibre à anticipations rationnelles : les agents connaissent toute la séquence de prix. Enfin, la monnaie est détenue à tous les équilibres autres que l'équilibre autarcique, qui impliquent donc un échange entre générations. Dans les équilibres convergeant vers l'équilibre autarcique la valeur de la monnaie décroît au cours du temps (l'inflation est positive et le stock de monnaie constant) pour devenir nulle à la limite.

Ceci est à contraster avec des modèles à horizon fini. En effet, si l'économie devait s'arrêter à la fin de la période T, personne vivant en T ne désirerait détenir de monnaie puisque l'économie disparaît à la fin de la période. Anticipant ceci, personne ne désirerait détenir de la monnaie en $T-1$, etc... Pour que la monnaie soit détenue, il est essentiel que les agents puissent toujours trouver quelqu'un qui l'accepte, c'est-à-dire quelqu'un qui anticipe qu'il pourra lui-même trouver quelqu'un avec qui échanger la

[95] *Micro-economic theory*, éditions Oxford University Press, 1995.

FIG. 15.8: La possibilité de cycles dans le modèle à générations imbriquées



monnaie. Si cette chaîne est rompue à un moment donné, alors tout le monde anticipe ceci et personne ne désire de monnaie. La monnaie n'est détenue dans le modèle à génération que parce qu'il est toujours possible de s'en débarasser[96]. A l'opposé, la monnaie aura toujours une valeur nulle, à l'équilibre, dans un modèle à horizon fini du type de ceux étudiés dans les chapitres 12 et 13. Dans ces modèles, la monnaie n'aura aucune valeur pour les agents : c'est un bien qui, à l'équilibre, est en excès d'offre et dont l'utilité est nulle.

Le modèle à générations imbriquées permet donc de faire apparaître la possibilité de "bulle spéculative" : un bien dont l'utilité est nulle peut, à l'équilibre, avoir un prix positif. Une bulle sur un actif financier quelconque est ainsi définie comme l'excès de son prix de marché sur sa valeur intrinsèque. La présence de cette bulle sur la monnaie permet en plus de restaurer l'efficacité de l'équilibre. En effet, l'équilibre autarcique (auquel la monnaie a un prix nul) est sous-optimal, tandis que nous avons admis que l'équilibre monétaire était Pareto optimal. Dans ce cas simple, la présence d'une bulle spéculative sur la monnaie est une bonne chose pour l'économie.

15.5 Conclusion

La présence d'une double infinité (infinité de biens et infinité d'agents) permet d'expliquer les propriétés du modèle à générations imbriquées. Le premier théorème du bien-être n'est plus valable dans ce cas. De plus, des actifs *a priori* sans utilité intrinsèque pour les agents peuvent avoir une valeur d'équilibre non nulle. Enfin, il existe une infinité de trajectoires d'équilibre, et certaines d'entre elles peuvent être, par exemple, cycliques. La possibilité d'indétermination de l'équilibre stationnaire (c'est-à-dire l'existence d'une infinité de trajectoires convergeant vers cet équilibre stationnaire) met en

[96] La monnaie est alors assimilée à une "patate chaude" (*hot potato*) que chacun cherche à donner à son voisin.

évidence le rôle primordial des anticipations des agents. Dans un monde sans fin, la situation présente peut être indéterminée car dépendant de ce que les agents demain anticiperont pour après demain etc ...Ce type d'indétermination implique que des anticipations "optimistes", auto-réalisatrices, peuvent engendrer des phases d'expansion (si nous incluions la production dans le modèle). L'idée keynésienne que des "esprits animaux" sont à la source du cycle économique reçoit ici une formalisation dans un cadre d'équilibre.

Le modèle à générations que nous avons présenté dans ce chapitre admet de multiples extensions. Il est ainsi possible d'introduire un secteur productif, de la dette publique ou encore des mécanismes de sécurité sociale. De plus, le fait qu'un équilibre ne soit pas nécessairement un optimum de Pareto permet d'étudier des problèmes de politique économique.

Chapitre 16

Annexe mathématique : Convexité, concavité et quasi-concavité

Le but de cette annexe mathématique est de faire le point sur la notion de convexité en général et dela le plus simplement possible. Il s'agit ici principalement de développer une intuition (essentiellement graphique) des notions de convexité, concavité et quasi-concavité ; notions qui apparaissent de manière récurrente dans cet ouvrage. Pour une étude plus approfondie et plus rigoureuse, le lecteur peut se reporter au manuel de P. Michel[97], qui fait également le lien avec la théorie de l'optimisation.

Définition : *Un ensemble X est **convexe** si :*

$$\forall x, y \in X \ \textit{et}\ \forall \lambda \in (0,1), \quad \lambda x + (1-\lambda)y \in X$$

X est un ensemble convexe si quelque soit deux points de cet ensemble le segment qui les relie est tout entier inclus dans l'ensemble. Par exemple, $\mathbb{R}$ est un ensemble convexe. En revanche, $X = [0,1] \cup [2,3]$ n'est pas convexe puisque 1.5 qui est au milieu du segment reliant 1 et 2 n'appartient pas à X.

L'ensemble X du graphique 16.1 est convexe, tandis que l'ensemble X' du graphique 16.2 ne l'est pas. Les points x et y appartiennent à X', mais z qui est sur le segment $[x, y]$ (et donc s'écrit sous la forme $\lambda x + (1-\lambda)y$ pour $\lambda \in (0,1)$) n'appartient pas à X.

Nous abordons maintenant les notions de fonction convexe et de fonction concave.

Définition *Une fonction f d'un ensemble convexe X dans $\mathbb{R}$ est :*

- ***convexe** si :*

$$\forall x, y \in X \ \textit{et}\ \forall \lambda \in (0,1), \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f strictement convexe si $\leq$ est remplacé par $<$ dans l'inégalité ci-dessus.

- ***concave** si :*

$$\forall x, y \in X \ \textit{et}\ \forall \lambda \in (0,1), \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f est strictement concave si $\geq$ est remplacé par $>$ dans l'inégalité ci-dessus.

Les notions de convexité et de concavité sont bien évidemment liées : une fonction f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

[97] *Cours de mathématiques pour économistes*, éditions Economica, 1984.

Fig. 16.1: Un ensemble convexe

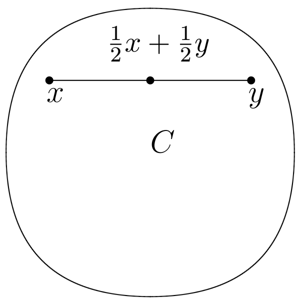
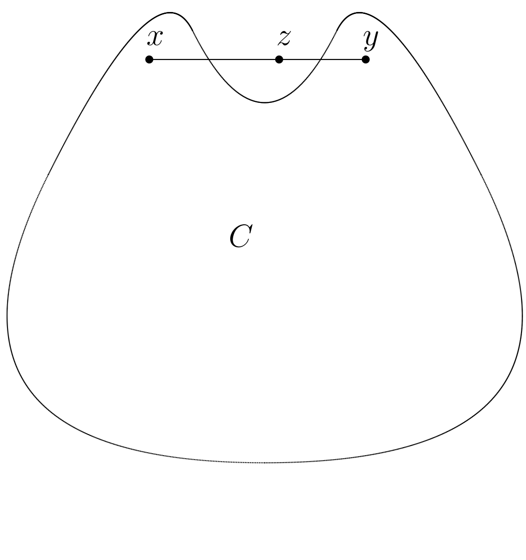
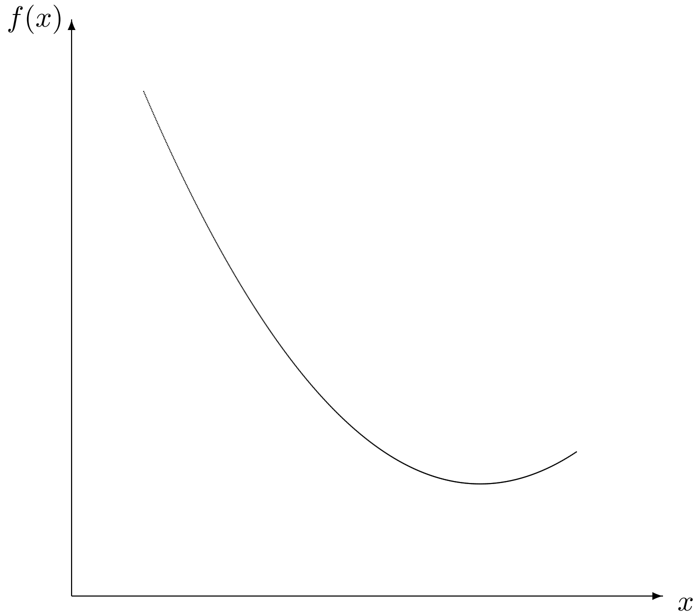


Fig. 16.2: Un ensemble non convexe



Graphiquement, la convexité d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ signifie que le segment reliant deux points sur la courbe $y = f(x)$ se situe toujours **au-dessus** de la courbe. Ceci est représenté sur le graphique **??**.

FIG. 16.3: Une fonction convexe



A l'opposé, la concavité d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ signifie que le segment reliant deux points sur la courbe $y = f(x)$ se situe toujours **au-dessous** de la courbe. Ceci est représenté sur le graphique **??**.

Faisons maintenant le lien entre la notion d'ensemble convexe et la notion de fonction convexe ou concave. Reprenons les deux graphiques représentés ci-dessus et constatons que :

- Si f est **convexe**, l'ensemble des points (w, z) situés **au-dessus** de la courbe $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points (w, z) tels que $z \geq f(w)$, est convexe.
- Si f est **concave**, l'ensemble des points (w, z) situés **au-dessous** de la courbe $y = f(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points (w, z) tels que $z \leq f(w)$, est convexe.

Nous introduisons maintenant la notion de quasi-concavité.

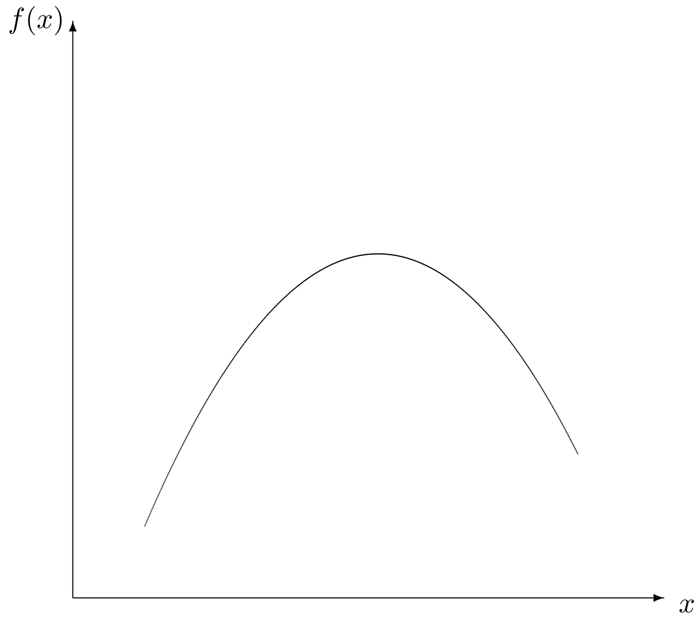
Définition : *Une fonction f de X dans $\mathbb{R}$ est* ***quasi-concave*** *si :*

$$\forall x, y \in X \text{ et } \forall \lambda \in (0,1), f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(f(x), f(y))$$

f est strictement quasi-concave si $\geq$ est remplacé par $>$ dans l'inégalité ci-dessus.

La notion de quasi-concavité est bien évidemment plus faible que celle de concavité. En effet, $\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq \min(f(x), f(y))$. Ceci nous permet de conclure que

Fig. 16.4: Une fonction concave



toute fonction concave est quasi-concave mais que l'inverse n'est pas vrai. Il existe des fonctions quasi-concaves qui ne sont pas concaves. A cet effet il faut noter que la terminologie peut induire en erreur puisqu'une fonction convexe peut être quasi-concave.

Sur le graphique 16.5, nous avons représenté une fonction quasi-concave qui n'est ni convexe ni concave.

Nous pouvons réécrire la définition de la notion de quasi-concavité de la manière suivante :

Définition : *Une fonction f de X dans $\mathbb{R}$ est **quasi-concave** si :*

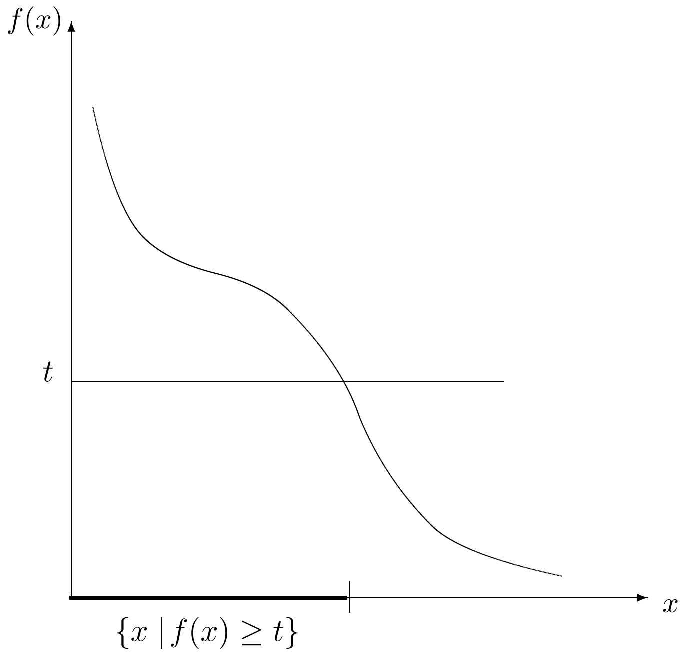
$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \{x \in X \mid f(x) \geq t\}$ *est convexe.*

Il faut noter que l'ensemble utilisé dans la définition ci-dessus pour caractériser les fonctions quasi-concaves est différent des ensembles étudiés plus haut, à savoir les ensembles $\{(w,z) \in X \times \mathbb{R} \mid z \leq f(w)\}$ et $\{(w,z) \in X \times \mathbb{R} \mid z \geq f(w)\}$. L'ensemble $\{x \in X \mid f(x) \geq t\}$ est représenté en gras sur le graphique 16.5.

Lorsque nous considérons des fonctions de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ –ce qui est le cas dans les représentations graphiques de courbes d'indifférence ou d'isoquantes utilisées dans cet ouvrage– la notion de quasi-concavité se traduit par la convexité de l'ensemble des points (x^1, x^2) qui donnent une valeur (une "utilité") au moins égale à t.

Appliquons en effet la définition de la quasi-concavité à une fonction d'utilité u de

FIG. 16.5: Une fonction quasi-concave



$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. u est quasi-concave si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid u(x^1, x^2) \geq t\} \text{ est convexe.}$$

L'ensemble défini ci-dessus n'est rien d'autre que l'ensemble situé au-dessus de la courbe d'indifférence de niveau t. Comme on le voit sur le graphique 16.6, la convexité de cet ensemble "nécessite" la convexité des courbes d'indifférence.

Nous étudions maintenant quelques propriétés des fonctions quasi-concaves et des fonction concaves ; propriétés utilisées dans plusieurs chapitres de cet ouvrage.

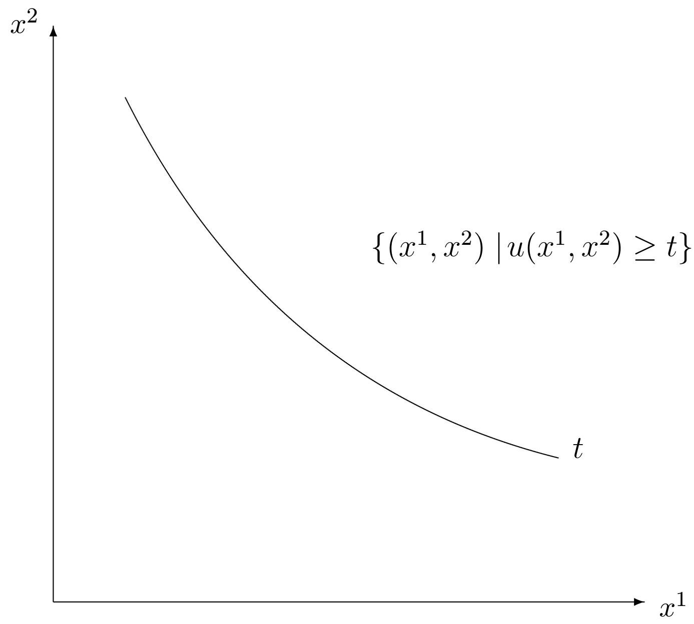
Une fonction quasi-concave le reste lorsqu'on lui applique une transformation croissante. Plus précisément, supposons la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante, alors si f est quasi-concave, $g \circ f$ est également quasi-concave. Cette propriété se comprend aisément lorsque l'on considère la seconde définition de la quasi-concavité. En effet, si $\{x \in X \mid f(x) \geq t\}$ est convexe $\forall t \in \mathbb{R}$, il est évident que $\{x \in X \mid g \circ f(x) \geq s\}$ est convexe $\forall s \in \mathbb{R}$ lorsque g est croissante. Ce dernier ensemble est en effet soit vide, soit égal, lorsque $g^{-1}(s)$ est défini, à $\{x \in X \mid f(x) \geq g^{-1}(s)\}$, lui-même convexe.

La concavité d'une fonction en revanche n'est pas préservée par une transformation croissante. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre un exemple : la fonction $f(x) = x^{1/2}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$. En revanche, si nous lui appliquons la transformation $g(z) = z^4$, nous obtenons $g \circ f(x) = x^2$ qui est une fonction convexe.

Cette discussion illustre un point important, abordé dans les chapitres 2, 8, 12 et 13, à savoir que la quasi-concavité est une notion "ordinale" (préservée par application d'une fonction croissante) tandis que la concavité est une notion "cardinale".

Enfin, observons que la somme de deux fonctions quasi-concaves n'est pas nécessai-

FIG. 16.6: Fonction quasi-concave et convexité



rement quasi-concave. En revanche, la somme de deux fonctions concaves est concave.

Commençons par ce dernier point. Soit f et g deux fonctions concaves et $h = f + g$. Montrons que h est concave :

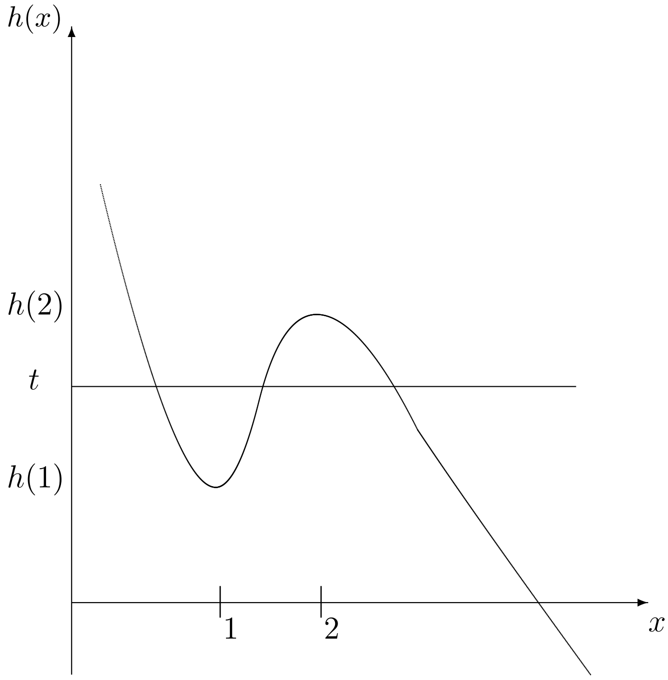
$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \\ &\geq \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) \end{aligned}$$

ce qui est bien la définition de la concavité.

Finalement, pour vérifier que la somme de deux fonctions quasi-concaves n'est pas nécessairement quasi-concave, prenons l'exemple suivant : $f(x) = -(x - 7/3)^2$ et $g(x) = 8/(3x)$, définies sur $\mathbb{R}_+$. Il est aisé de vérifier que ces deux fonctions sont quasi-concaves (en particulier, f est concave ce qui implique qu'elle est quasi-concave et g est décroissante ce qui signifie que les ensembles $\{x \,|\, g(x) \geq t\}$ sont tous du type $]0, c]$ et sont donc convexes). Etudions maintenant $h = f + g$. Cette fonction est représentée sur le graphique 16.7.

Elle est décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $[1, 2]$ puis décroissante sur $[2, \infty[$. Elle tend vers plus l'infini lorsque x tend vers 0 et vers moins l'infini lorsque x tend vers l'infini. L'ensemble $\{x \,|\, h(x) \geq t\}$ n'est donc pas convexe pour $t \in [h(1), h(2)]$. En effet, cet ensemble consiste en deux intervalles, l'un inclus dans $]0, 1]$ et l'autre dans $[1, 2]$. Nous pouvons ainsi en conclure que h n'est pas quasi-concave.

FIG. 16.7: La somme de fonctions quasi-concaves n'est pas quasi-concave



Index