CPES 3 – Année 2017/2018

Introduction à la Théorie des Jeux

Miquel Oliu-Barton

27 septembre 2017

Avant-propos

Le poly. On présente dans ces notes une introduction assez classique à la théorie des jeux, comprenant les jeux sous forme normale (chapitre 1), les jeux à somme nulle (chapitre 2), les jeux sous forme extensive à observation parfaite (chapitre 3) et imparfaite (chapitre 4), les jeux avec la communication (chapitre 5) et les jeux coalitionnels (chapitre 6). Il est disponible sur internet en libre accès, sur ma page web [1]. Les parties marquées d'un * ne seront pas traitées en cours et ne seront pas interrogées en examen. Elles s'adressent aux étudiants voulant aller plus loin ou étant simplement curieux ; leur lecture est conseillée pour un approfondissement en la matière.

Les exercices. Un recueil d'exercices vous sera transmis dans un document à part.

Bonus. Toute remarque intéressante sur le poly, que ce soit sur le fond que sur la forme (et notamment des coquilles ou petites erreurs) sera récompensée par un bonus.

Remerciements. Je remercie tous ceux qui ont contribué à la rédaction et à l'amélioration de ce document, notamment Guillaume Vigeral, Yannick Viossat et Bruno Ziliotto.

1. https ://sites.google.com/site/oliubarton

Bibliographie complémentaire

Pour approfondir le cours

1. *Bases mathématiques de la théorie des jeux*, Laraki, Renault and Sorin (2010)
   Cours très solide de l'Ecole Polytechnique, niveau L3-M1, école française.
2. *A Course in Game Theory*, Osborne and Rubinstein (1994)
   Cours très solide, dispoinible gratuitement sur internet, école américaine.
3. *Game Theory*, Maschler, Solan and Zamir (2013)
   Nouvel ouvrage, très complet, niveau L2-L3. Plein d'exemples et d'explications.
4. *Game Theory : Analysis of Conflict*, Myerson (1997)
   Très bon livre, un peu plus orienté économie.

Pour aller plus loin

5. *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations*, Harsanyi (1977). Livre de référence sur la théorie de jeux et ses applications.
6. *The Strategy Of Conflict*, Schelling (1960)
   Ce livre traite des jeux de coordination et de marchandage, sans aucune équation.
7. *Game theory*, Fudenberg et Tirole (1991)
8. *Game theory in the Social Sciences*, Shubik [2] (1984)
   Très bon livre, orienté éco. Utile notamment pour les jeux coalitionnels.
9. *Microeconomics*, Mas-Colell and Green (1995)
   Livre de référence en économie mathématique. Contient 3 chapitres sur la théorie des jeux.
10. *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, Harsanyi et Selten (1988)

Autres

11. *La théorie des jeux et ses applications à l'économie mathématique*, Ekeland (1974)
12. *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*, González-Díaz (2010)
13. *Introduction à la théorie des jeux*, Yildizoglu (2003)
    Bon livre scolaire, niveau L2-L3, qui contient quelques exercices corrigés.
14. *Fun and Games : A Text on Game Theory*, Binmore (1991)
    Contient de nombreux exercices.
15. *Game Theory : A Very Short Introduction*, Binmore (2007)
    Ouvrage court qui survole plein de choses, utile pour se faire une idée (superficielle) de différents aspects du domaine

2. Il s'agit en réalité d'une collaboration avec Lloyd Shapely.

Une très brève histoire

L'origine de la théorie des jeux (moderne) remonte au début du 20e siècle, lorsque quelques personnes (dont Zermelo, notamment) s'intéressent à l'étude mathématiques des jeux – jeux au sens usuel, comme les échecs ou les jeux de cartes. L'approche mathématique permet de remplacer les aspects psychologiques, comme le bluff par exemple, par de calculs précis donnant lieu à des stratégies optimales. Le théorème du minmax, démontré par Von Neumann en 1928, établit l'existence de la valeur pour tous les jeux finis à somme nulle. Peu après son origine, la théorie des jeux se situe entre l'économie et les mathématiques, comme en témoigne l'ouvrage fondateur *Theory of games and economic behavior*, paru en 1944, co-écrit par Von Neumann (mathématicien hongrois) et Morgenstern (économiste autrichien). Cette interaction entre les deux champs n'a cessé de se creuser jusqu'à nos jours, avec des contributions profondes et géniales aussi bien de la part de mathématiciens que d'économistes. La popularité de la théorie des jeux tient surtout à son succès dans aux sciences sociales et économiques, où elle est devenu une approche incontournable. Cette popularité est d'autant plus manifeste lorsqu'on se penche sur les Prix Nobel en économie qui ont été attribué à des théoriciens des jeux, parmi lesquels on retrouve aussi bien des mathématiciens que des économistes : Samuelson (1970), Arrow (1972), Nash, Selten et Harsanyi (1994), Lucas (1995), Vickrey (1996), Aumann et Schelling (2005), Hurwitz, Maskin et Myerson (2007), Shapley et Roth (2012), Tirole (2014). Dans ce cours d'introduction, nous aurons l'occasion de côtoyer quelques contributions de Nash concernant les jeux non-coopératifs (la définition de l'équilibre qui porte son nom, et son résultat d'existence), de Vickrey (l'enchère au second prix), de Myerson (les jeux avec contrats), d'Aumann (les équilibre corrélés), et de Shapley (le cœur et la valeur de Shapley, pour une classe de coopératifs).

Table des matières

1 Jeux sous forme normale

1.1 Préférences et fonctions de paiement

Des jeux, il y en a partout, et de toutes sortes. Il suffit pour cela que des êtres humains (ou des animaux, des entreprises, des machines...) interagissent entre eux avec des règles et un but bien définis. On appelle *jeu* une interaction stratégique interdépendante ; les protagonistes ce sont les *joueurs*. Interagir, c'est–à–dire que les actions des uns ont un impact sur les autres. Les règles, c'est–à–dire le cadre déterminant les limites de l'interaction. Quant à l'objectif des joueurs, chacun voudrait que l'issue du jeu lui soit le plus avantageuse possible . Autrement dit, les joueurs maximisent leur satisfaction, bonheur ou, en termes économiques, leur utilité ou paiement. Plus précisément, on parle de jeux dès que l'on peut identifier les 4 éléments suivants :

- Un ensemble de *joueurs*, les acteurs du jeu.
- Pour chaque joueur, un ensemble d'*actions* qui représente toutes les possibilités stratégiques que possède le joueur dans le jeu. Ce sont ses choix.
- Un ensemble de *résultats* (ou issues) du jeu. En général, le résultat du jeu dépend des actions des joueurs et de l'aléa.
- Pour chaque joueur, des *préférences*, c'est–à–dire une relation d'ordre entre les différents résultats possibles du jeu.

Les échecs et les jeux de cartes, les jeux de société et les sports compétitifs, ce sont des jeux. [3] De même, une vente aux enchères, une négociation commerciale ou politique, un vote, une guerre, un kidnap ou même l'amour, ce sont des jeux : il y a des joueurs, des règles qui définissent ce qui est possible et ce qui ne l'est pas à tout moment, des résultats qui dépendent des actions des joueurs et des préférences. On supposera que les joueurs sont rationnels, ce qui revient à dire que les préférences vérifient certains axiomes. Avant de les énoncer, il sera utile d'introduire un peu de notation.

Notation. Soit i un joueur et A et B deux résultats possibles du jeu. On écrit :

- $A >_i B$ si le joueur i préfère strictement A à B
- $A =_i B$ si le joueur i est indifférent entre A à B
- $A \geq_i B$ si le joueur i préfère faiblement A à B (i.e. $A >_i B$ ou $A =_i B$).

Probabilités sur les résultats. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des issues possibles du jeu et soient $p_1, \ldots, p_n$ des poids positifs tels que $p_1 + \cdots + p_n = 1$. On notera

$$p_1 A_1 + \cdots + p_n A_n \quad \text{ou} \quad p_1 \delta_{A_1} + \cdots + p_n \delta_{A_n}$$

l'issue (non déterministe) du jeu donnant A_k avec probabilité p_k, pour tout $k = 1, \ldots, n$. Plus généralement, on considère les variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble des résultats possibles.

Axiomes de rationalité. Soit A, B, C des résultats possibles d'un jeu et soit i un joueur.

- (complétude) $A \geq_i B$ ou $B \geq_i A$
- (transitivité) $A \geq_i B$ et $B \geq_i C$ implique $A \geq_i C$
- (indépendance) $A \geq_i B$ implique $pA + (1-p)C \geq_i pB + (1-p)C$, pour tout $p \in [0, 1]$
- (continuité) Si $A >_i C >_i B$, alors il existe $p \in [0, 1]$ tel que $pA + (1-p)B =_i C$

D'après les deux premiers axiomes, le joueur peut comparer toutes les issues possibles du jeu et ses préférences sont transitives. D'après les deux derniers, le joueur peut aussi comparer les probabilités sur les issues du jeu. Ces axiomes trouvent leur sens dans le résultat suivant, le théorème de l'utilité espérée, de Von Neumann et Morgenstern.

Théorème (Von Neumann). Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des issues possibles d'un jeu et soit i un joueur dont les préférences $\geq_i$ sont rationnelles. Il existe alors une fonction $g^i : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout couple de variables aléatoires X, Y à valeurs dans $\mathcal{I}$:

$$X \geq_i Y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathsf{E}[g^i(X)] \geq \mathsf{E}[g^i(Y)]$$

3. Le nom “théorie des jeux” vient de la ressemblance entre les interactions stratégiques générales et les jeux de société.

Définition 1.1. Deux fonctions de paiements $h, g : S \to \mathbb{R}$ sont *équivalentes* s'il existe des constantes $c > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ telles que $g = ch + d$. Autrement dit, si g est l'image de h par une application affine *préservant les préférences*, i.e. de "pente" positive.

Remarque 1.2. La fonction de paiement obtenue dans le théorème de l'utilité espérée est unique à équivalence près. En effet, si on pose $h^i := cg^i + d$ avec $c > 0$ et $d \in R$, alors $\mathsf{E}[h^i(X)] \geq \mathsf{E}[h^i(Y)]$ si et seulement si $\mathsf{E}[g^i(X)] \geq \mathsf{E}[g^i(Y)]$, ce qui prouve que h^i représente les préférences $\geq_i$ tout aussi bien que g^i.

Commentaires. D'après le résultat précédent, lorsque tous les joueurs sont rationnels, on peut remplacer leur préférences par des fonctions de paiement, et supposer que chaque joueur maximiser son paiement espéré.

1.1.1 Illustration par un exemple

Exemple 1.3 (*Pierre–Feuille–Ciseaux*)**.** Deux joueurs ont trois actions possibles (pierre (P), feuille (F) et ciseaux (C)) qu'ils doivent choisir simultanément. Les trois possibles issues du jeu sont la victoire du premier joueur (v_1), la victoire du second (v_2) ou le match nul (n). Nous avons $v_1 >_1 n >_1 v_2$ et $v_2 >_2 n >_2 v_1$ puisque le premier joueur préfère v_1 à n et n à v_2, et que le second préfère tout le contraire. D'après le théorème de l'utilité espéré, on peut représenter $\geq_i$ par une fonction de paiement $g^i : \{v_1, v_2, n\} \to \mathbb{R}$. Celle-ci doit vérifier que $g^1(v_1) > g^1(n) > g^1(v_2)$. Par continuité des préférences, il existe $p \in [0, 1]$ tel que $g^1(n) = pg^1(v_1) + (1 - p)g^1(v_2)$. Si le joueur 1 préfère gagner une fois et perdre une fois plutôt que faire deux fois match nul, alors $p < 1/2$. En général, cependant, on supposera $p = 1/2$. On remarquera que chaque issue du jeu donne lieu à un paiement, et chaque couple d'actions (une pour chaque joueur) détermine une issue. Ainsi, chaque couple d'actions donne lieu à un paiement (qui est unique à équivalence près). Deux fonctions de paiements équivalentes pour le joueur 1 sont les suivantes :

	P	F	C
P	1/2	0	1
F	1	1/2	0
C	0	1	1/2

	P	F	C
P	0	−1	1
F	1	0	−1
C	−1	1	0

Exercice 1.4. Déterminer la transformation affine reliant les deux fonctions de paiement.

1.2 Forme normale

Dorénavant, on définira les préférences des joueurs directement par des fonctions de paiements sur les profils d'actions. On supposera que les joueurs maximisent leur paiement espéré.

Définition 1.5. Un *jeu sous forme normale* est un triplet $\Gamma = (N, (S^i)_{i \in N}, (g^i)_{i \in N})$ où

— N est un ensemble de joueurs

— S^i est l'ensemble des actions du joueur i, pour chaque $i \in N$

— $g^i : \times_{j \in N} S_j \to \mathbb{R}$ est la fonction de paiement du joueur i, pour chaque $i \in N$.

Notation. On pose $S := \times_{j \in N} S^j$ et $g = (g^i)_i : S \to \mathbb{R}^N$ et on écrit $\Gamma = (N, S, g)$.
S est l'ensemble des profils d'actions et g est la fonction de paiement vectorielle. On pose aussi, pour tout $i \in N$, $S^{-i} := \times_{j \neq i} S^j$. Cet ensemble désigne les profils d'actions des autres joueurs.
On écrit ainsi $s = (s^i, s^{-i})$ pour tout $i \in N$ et $s \in S$, avec $s^i \in S^i$ et $s^{-i} \in S^{-i}$.

Déroulement du jeu

— chaque joueur choisit une action $s^i \in S^i$ (indépendamment et simultanément)

— chaque joueur reçoit un paiement $g^i(s)$, où $s = (s^i)_{i \in N}$ est le profil d'actions qui a été joué

Commentaires

- Déterminer la forme normale normale d'un jeu consiste à identifier et nommer les joueurs, ainsi que les ensembles d'actions et les fonctions de paiement.
- Dire que les joueurs jouent simultanément et indépendamment revient à dire qu'il s'agit d'un jeu *non-coopératif* où les joueurs ne peuvent pas communiquer.
- Un profil d'actions ne détermine pas toujours une unique issue du jeu. Il se peut que s donne lieu à plusieurs issues, chacune se produisant avec une certaine probabilité. Le paiement est alors le paiement espéré.
- La forme normale, aussi appelée forme stratégique, modélise aussi bien des jeux joués en un coup (i.e. une seule fois), que des jeux joués par étapes ou plusieurs fois. L'ensemble S^i représente toutes les possibilités stratégiques du joueur i pendant le jeu. C'est une application qui spécifie, pour chacune des situations qui pourraient se produire pendant le jeu et dans lesquelles le joueur i serait amené à faire un choix, un choix parmi les choix possibles. Il est donc toujours possible d'exprimer un jeu sous forme normale. Néanmoins, cette représentation sera parfois purement théorique – c'est le cas par exemple du jeu des échecs, où le nombre de stratégies est tellement grand que la forme normale devient intraitable.

1.2.1 Classification des jeux

On distingue plusieurs classes de jeux, selon la nature de N, S et g.

Définition 1.6. On dira que $\Gamma = (N, S, g)$ est

- *un jeu fini* si N et S sont des ensembles finis.
- *un jeu symétrique* si une permutation des joueurs ne change pas le jeu.
- *un jeu anonyme* si l'identité des joueurs n'a pas d'importance.
- *un jeu de coordination* si tous les joueurs ont les mêmes préférences.
- *un jeu à deux joueurs* si N contient deux éléments, et on posera toujours $N = \{1, 2\}$
- *un jeu à deux joueurs à somme nulle* si $N = \{1, 2\}$ et $g^1 + g^2 = 0$. On posera toujours $g := g^1$.

Jeux symétriques

Formellement, (N, S, g) est un jeu symétrique si pour tout joueur $i \in N$, tout profil $s \in S$ et toute bijection (ou permutation) $\pi : N \to N$, on a :

$$S^i = S^{\pi(i)} \quad \text{et} \quad g^i(s^1, \dots, s^N) = g^{\pi(i)}(s^{\pi(1)}, \dots, s^{\pi(N)})$$

La condition s'écrit plus simplement pour un jeu à deux joueurs. En effet, (S^1, S^2, g^1, g^2) est symétrique lorsque :

$$S^1 = S^2 \quad \text{et} \quad g^1(s^1, s^2) = g^2(s^2, s^1), \text{ pour tout } s^1, s^2$$

Notation. Pour un vecteur $a = (a^1, \dots, a^n)$ de $\mathbb{R}^n$ on notera a^π ou $(a^1, \dots, a^n)^\pi$ l'ensemble de ses permutations, i.e. $(a^1, \dots, a^n)^\pi = \big\{(a^{\pi(1)}, \dots, a^{\pi(n)}),\ \pi \text{ permutation de } \{1, \dots, n\}\big\}$.

Jeux à somme nulle. Un jeu à somme nulle oppose deux joueurs ayant des préférences opposées. Leur importance dépasse largement ce cadre strictement compétitif, raison pour laquelle la section 2.1 leur sera consacrée.

Exercice 1.7. Parmi les jeux ci-dessous (Exemples 1.8–1.28) lequels sont des jeux finis ? Lesquels sont symétriques ? De coordination pure ? A deux joueurs et à somme nulle ? Anonymes ?

Représentations particulières

- Un jeu fini à deux joueurs peut se représenter par un couple de matrices (A, B), ou encore par une matrice à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Dans cette représentation, le premier joueur choisit une file, le second une colonne, et l'entrée de la matrice représente le paiement – chaque joueur reçoit la coordonnée correspondante. C'est la représentation bi-matricielle du jeu.
- Plus généralement, tout jeu à deux joueurs, même infini, peut se représenter par un carré où le joueur 1 choisit une abscisse et le joueur 2 une ordonnée.
- Un jeu fini à trois joueurs peut se représenter par un ensemble fini de matrices de même taille et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Le premier joueur choisit une ligne, le second une colonne, et le troisième une matrice – chaque joueur reçoit la coordonnée correspondante.
- En général, un jeu se représente par une fonction $g : S \to \mathbb{R}^N$ ou par des fonctions $g^i : S \to \mathbb{R}$ pour tout $i \in N$.
- Dans certains cas, s ne détermine un unique résultat (et donc un unique paiement) mais seulement une probabilité sur les issues. Dans ce cas, il existe une variable aléatoire X à valeurs dans S^* et une fonction de paiement $g^* : S \times S^* \to \mathbb{R}^N$ telle que $g(s) = \mathsf{E}[g^*(s, X)]$.

1.3 Exemples

Jeux à 2 joueurs et actions finies

Exemple 1.8 (*La bataille des sexes*)**.** Deux personnes doivent décider simultanément et indépendamment où aller, au restaurant (R) ou au théâtre (T). Bien que tous les deux voudraient être ensemble, l'un préfèrerait que ce soit au restaurant et l'autre au théâtre. Autrement dit, $(R, R) >_1 (T, T) >_1 (R, T) >_1 (T, R)$ tandis que $(T, T) >_2 (R, R) >_2 (T, R) >_2 (R, R)$. On définit des paiements à l'aide de réels a, b, c, d tels que $a > b > c \geq d$ et on représente ce jeu par :

	R	T
R	a, b	c, c
T	d, c	b, a

Pour faire simple, on prend souvent des valeurs (a, b, c, d) particulières, par exemple $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$ et $d = 0$.

Exemple 1.9 (*Le Dilemme du prisonnier.*)**.** Deux prisonniers ayant participé à un crime commun sont interrogés séparément. Chacun a le choix entre dénoncer l'autre ou ne pas le dénoncer (i.e. coopérer). Si aucun ne dénonce l'autre, ils seront condamnés à 1 an de prison pour un crime mineur. Si l'un dénonce alors que l'autre ne le fait pas, le premier sera remis en liberté alors que le second endossera 4 ans de prison. S'ils se dénoncent mutuellement, ils seront tous deux condamnés à 3 ans de prison. On peut représenter le jeu de la manière suivante, avec $a > b > c > d$:

	C	D
C	b, b	d, a
D	a, d	c, c

On peut prendre par exemple $a = 4$, $b = 3$, $c = 1$ et $d = 0$.

Exemple 1.10 (*Bière ou chocolat ?*)**.** Deux personnes veulent se retrouver à Paris mais ne peuvent pas communiquer. La veille, ils avaient parlé d'aller soit à La Jacobine prendre un chocolat chaud, soit au Highlander pour une bière. Leurs paiements sont donnés par le tableau suivant :

	J	H
J	2, 2	0, 0
H	0, 0	1, 1

Exemple 1.11 (*Le jeu du pénalty*)**.** Lors d'un tir au but, le tireur (joueur 1) doit choisir où lancer la balle et la gardien (joueur 2) où se lancer. Il y a but lorsque la balle et le gardien vont à des endroits différents. On représente la cage à but par un ensemble fini C et on pose $S^1 = S^2 = C$. On définit le paiement par :

$$g^1(s^1, s^2) = \mathbb{1}_{\{s^1 \neq s^2\}}, \quad g^2(s^1, s^2) = \mathbb{1}_{\{s^1 = s^2\}}$$

Exemple 1.12 (*L'ultimatum simplifié*)**.** Considérons l'exemple précédent dans une version simplifiée. On suppose que la ressource vaut 10 unités, et que premier joueur n'a que deux choix : proposer un partage équitable $(5, 5)$ ou cupide $(9, 1)$. Le deuxième joueur possède alors 4 stratégies : accepter les deux propositions, accepter seulement la première, accepter seulement la seconde, ou ne rien accepter. On pose $S^1 = \{E, C\}$ et $S^2 := \{AA, AR, RA, RR\}$. Le jeu étant fini et à deux joueurs, on peut représenter la fonction de paiement de la façon suivante :

	AA	AR	RA	RR
E	5, 5	5, 5	0, 0	0, 0
C	9, 1	0, 0	9, 1	0, 0

Exemple 1.13 (*Un kidnap*)**.** Un kidnappeur envisage deux possibilités : tuer sa victime ou la libérer. Dans le second cas, la victime peut dénoncer le kidnappeur ou garder silence. Le kidnappeur préfère libérer la victime si celle-ci ne le dénonce pas, et la tuer sinon. La victime veut vivre, et préfère dénoncer le kidnappeur plutôt que se taire.

Exemple 1.14 (*Les échecs*)**.** Les échecs est un jeu à deux joueurs dans lequel les préférences des joueurs sont à l'opposé. Une stratégie spécifie un coup légal pour chacune des positions possibles qui pourraient avoir lieu lors d'une partie. Chaque couple de stratégies détermine l'issue du jeu (une victoire pour les blanches ou pour les noires ou un match nulle) et donc un paiement. On obtient ainsi la forme normale du jeu (S^1, S^2, g^1, g^2), avec $g^1 : S^1 \times S^2 \to \{-1, 0, 1\}$ et $g^1 = -g^2$.

Exemple 1.15 (*La poule mouillée*)**.** Deux adolescents dirigent leurs vélos l'un contre l'autre dans un chemin trop étroit pour qu'ils puissent se croiser sans provoquer d'accident [4]. Si personne ne ralentit, il y aura un accident ; si un seul ralentit, celui-ci perdra la face ; si les deux ralentissent, il ne se passera pas grande chose. On peut représenter ce jeu de la façon suivante, avec $a > b > c > d$, et où A représente l'action "accélérer" et R l'action "ralentir" :

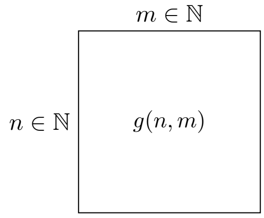
	A	R
A	d, d	a, c
R	c, a	b, b

On peut prendre par exemple $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ et $d = -10$.

4. James Dean joue à ce jeu dans *La Fureur de vivre*. C'est le jeu de la poule mouillée (en anglais, Chicken).

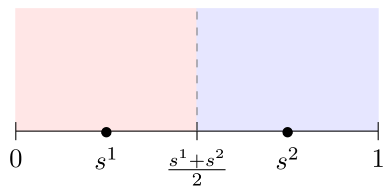
Jeux à 2 joueurs et actions infinies

Exemple 1.16 (*Se coordonner sur un entier*)**.** Deux personnes doivent écrire un nombre entier positif sur une feuille. Ils gagnent (tous les deux) s'ils ont écrit le même nombre et perdent sinon. Les ensembles d'actions sont donc $S^1 = S^2 = \mathbb{N}$ et le paiement $g^1(n,m) = g^2(n,m) = \mathbb{1}_{\{n=m\}}$. Alternativement, on peut représenter le jeu par :



Exemple 1.17 (*L'ultimatum*)**.** Un gouvernement met à disposition de deux sociétés une ressource, à condition qu'elles se mettent d'accord sur un partage. La première commence par proposer un partage $(x, 1-x)$, avec $x \in [0,1]$ la proportion qu'elle garderait pour soi. La seconde peut l'accepter (A), auquel cas la ressource leur est allouée dans les proportions accordées, ou le refuser (R), auquel cas la ressource revient au gouvernement et les sociétés n'ont rien. L'ensemble des stratégies sont $S^1 = [0,1]$ et $S^2 = \{f : S^1 \to \{A, R\}\}$, puisque le second joueur choisit son action en connaissant celle du premier joueur. Alternativement, on peut décrire l'ensembles des actions du second joueur comme l'ensemble des parties de S^1, puisque il peut choisir en amont le sous-ensemble $A \subset [0,1]$ des propositions qu'il accepte.

Exemple 1.18 (*Jeu de Hotelling*)**.** Un grand nombre de votants participent à une élection avec 2 candidats. Chaque parti choisit une position dans $[0,1]$ interprété comme son orientation politique : 0 correspond à la gauche la plus l'extrême et 1 à la droite la plus extrême. Une fois que les partis ont choisi leur position, chaque individu votera pour le candidat dont l'idéologie lui est plus proche (si les deux sont équidistant, il en choisira au hasard). On suppose que les votants sont uniformément distribués dans $[0,1]$. Voici la répartition des votants lorsque les candidats se placent en s^1 et s^2 :



Jeux à deux joueurs avec de l'aléa

Exemple 1.19 (*Jeu de pile ou face*)**.** Deux joueurs parient 1 euro sur le lancer d'une pièce non truquée. Ils annoncent un résultat, "pile" ou "face" l'un après l'autre, et ensuite la pièce est lancée. Si tous les deux ont deviné l'issue de la pièce, chacun récupère sa mise. Si les deux ont fait faux, ils perdent l'argent. Si, enfin, un a deviné et pas l'autre, celui qui a deviné empoche les 2 euros, et l'autre 0. Les actions possibles sont $S^1 = \{P, F\}$ et $S^2 = \{f : S^1 \to \{P, F\}\}$ puisque le deuxième joueur choisit *en connaissant* l'action du premier joueur. Il a donc 4 choix : dire toujours "pile", imiter le joueur 1, dire le contraire que le joueur 1 ou dire toujours "face". On note ces actions, respectivement, par PP, PF, FP et FF. Contrairement aux exemples précédents, dans ce jeu les profils d'actions ne déterminent pas une unique issue. Le résultat et, par conséquent le paiement, dépend d'une variable aléatoire X à valeurs dans $S^* = \{P, F\}$ telle que $\mathsf{P}(X = P) = \mathsf{P}(X = F) = \frac{1}{2}$. Le profil $s \in S^1 \times S^2$ induit donc un paiement de $g(s) = \mathsf{E}[g^*(s, X)]$, où $g^* : S \times S^* \to \mathbb{R}^2$ est la fonction de paiement dépendant des actions et de l'aléa. Pour $s = (P, FF)$ par exemple, on a :

$$g(P, FF) = \mathsf{E}[g^*(P, FF, X)] = \frac{1}{2} g^*(P, FF, P)] + \frac{1}{2} g^*(P, FF, F)] = \frac{1}{2}(2,0) + \frac{1}{2}(0,2) = (1,1)$$

En répétant un calcul similaire pour les autres profils on obtient la forme normale suivante :

	PP	PF	FP	FF
P	(1/2, 1/2)	(1/2, 1/2)	(1, 1)	(1, 1)
F	(1, 1)	(1/2, 1/2)	(1, 1)	(1/2, 1/2)

Exemple 1.20 (*Deviner juste*)**.** Joan et Pere jouent au jeu suivant : chacun doit annoncer une entier compris entre 1 et n. Ensuite, on tire un nombre au hasard uniformément dans $\{1, \ldots, n\}$. Le joueur s'ayant le plus approché du nombre tiré gagne, et si les deux sont à égale distance c'est un match nul.

Jeux à N joueurs et actions finies

Exemple 1.21 (*Jeu de minorité à 3 joueurs*)**.** Trois étudiants doivent choisir un café où aller réviser, et préfèreraient être seuls. Lorsqu'il n'y a que deux cafés possibles, on représente cette situation par le jeu suivant :

	A	B
A	(0, 0, 0)	(0, 1, 0)
B	(1, 0, 0)	(0, 0, 1)

A

	A	B
A	(0, 0, 1)	(1, 0, 0)
B	(0, 1, 0)	(0, 0, 0)

B

Exemple 1.22 (*Le bon samaritain*)**.** Lorsque n personnes témoignent un crime, chacune a le choix entre appeler la police (A) ou ne rien faire (B). On écrit le jeu sous normale en posant $N = \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $i \in N$, $S^i = \{A, B\}$ et $g^i : S \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g^i(s) = \begin{cases} v^i & \text{si } s^i = B \text{ et il existe } j \neq i \text{ tel que } s^j = A \\ v^i - c^i & \text{si } s^i = A \\ 0 & \text{si } s^1 = \cdots = s^n = B \end{cases}$$

Dans ce modèle, v^i et c^i sont des paramètres du jeu représentant, respectivement, l'utilité du joueur i lorsque le crime est dénoncé et sa désutilité (ou coût) pour appeler soi-même.

Exemple 1.23 (*Rendez-vous à Dauphine*)**.** Des amis étrangers se donnent rendez-vous à Dauphine, à Paris. En arrivant séparément à l'aéroport, chacun apprend que plusieurs lieux portent ce nom dans la capitale : une place, une université et un marché. Ils voudraient se retrouver et, comme il pleut, ont une préférence pour les lieux couverts. On décrit cela par un jeu (N, S, j) avec, pour tout $i \in N$, $S^i = \{P, U, M\}$ et $g^i(s) = \alpha^i \mathbb{1}_{\{s^1 = s^2 = s^3 = P\}} + \beta^i \mathbb{1}_{\{s^1 = s^2 = s^3 \neq P\}}$, avec $0 < \alpha^i < \beta^i$.

Exemple 1.24 (*Le vote*)**.** Lors d'une élection, chaque votant choisit le candidat pour lequel voter. Le vote détermine un gagnant. Le paiement de chaque joueur dépend du gagnant ainsi que de ses préférences personnelles sur tous les candidats (on suppose que chaque votant peut ordonner tous les candidats).

Jeux à N joueurs et actions infinies

Exemple 1.25 (*Enchère sous enveloppe scellé*)**.** Un objet est mis en vente et plusieurs acheteurs potentiels participent à la vente aux enchères, chacun ayant une valuation personnelle de la valeur de cet objet. Un commissaire priseur demande aux participants de soumettre une offre dans une enveloppe fermée : l'objet sera attribué à la personne ayant misé la plus grande somme. Lorsque le prix à payer pour l'objet est le prix de la plus grande offre, on parle d'enchère au premier prix. Lorsque le prix à payer est celui de la deuxième plus grande offre, on parlera d'enchère au deuxième prix.[5] On représente cela par un jeu qui dépend d'un paramètre $v \in \mathbb{R}_+^N$ (les valuations des joueurs), où N est l'ensemble fini des joueurs. On suppose que $S^i = \mathbb{R}_+$ pour tout i. Dans le cas d'une enchère au premier prix, on définit le paiement par :

$$g^i(s) = \begin{cases} v^i - s^i & \text{si } s^i > s^j \text{ pour tout } j \neq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 1.26 (*Jeu de Hotelling*)**.** Une grande quantité de touristes sont uniformément distribués sur un plage (représentée par un compact $C \subset \mathbb{R}^n$). Des vendeurs de glaces, cherchant à attirer le plus grand nombre de clients possible, viennent se placer sur la plage sachant que, par la suite, chaque touriste achètera une glace avec probabilité p au vendeur le plus proche, et avec probabilité 0 ailleurs. Lorsque deux vendeurs sont à la même place, ils se partagent équitablement la clientèle. Soit N l'ensemble des vendeurs. On considère plusieurs cas :

— Les vendeurs peuvent aller partout, i.e. $S^i = C$ pour tout $i \in N$.

— Les vendeurs ont des restrictions, i.e. $S^i \subset C$ pour tout $i \in N$, avec possiblement $S^i \neq S^j$.

— $C = [0, 1]$ ou C est une courbe fermée (une plage autour d'un lac par exemple)

Jeux avec un continuum de joueurs et actions finies $(*)$

Exemple 1.27 (*Samedi soir à Neuchâtel*)**.** Neuchâtel est une petite ville en Suisse romande, près d'un lac. L'hiver, tous les bars sont fermés sauf deux : Bar King (K) et le Café du Cerf (C). Ainsi, lorsqu'arrive samedi soir, tous ceux qui veulent prendre une bière en ville doivent choisir un parmi ces deux bars. Or, personne n'aime lorsque le bar est trop vide, ni trop plein. Modélisons cela par un jeu (N, S, g), avec $N = [0, 1]$ et $S^i = \{K, C\}$ pour tout i. On a donc que S est l'ensemble des application de $[0, 1]$ dans $\{K, C\}$. Soit $x(s)$ la fraction de gens allant au Bar King (pour un profil s donné). Pour exprimer le fait que le paiement d'un joueur ne dépend que de son action et du nombre (ou fraction) de personnes ayant choisi la même action que lui, on pose $g^i(s) = f(s^i, x(s))$ pour une certaine fonction f.

Exemple 1.28 (*Voiture ou métro ?*)**.** Chaque matin, certaines personnes vont au travail en voiture (V), tandis que d'autres prennent le métro (M). Soit $N = [0, 1]$ l'ensemble des joueurs ayant une voiture, et soit $\{V, M\}$ leur ensemble d'actions commun. Comme dans le jeu précédent, le paiement du joueur i est une fonction de s^i et $x(s) = \int_{i \in [0,1]} \mathbb{1}_{\{s^i = V\}} di$, i.e. $g^i(s) = f(s^i, x(s))$ pour une certaine fonction f. On suppose que $x \mapsto f(V, x)$ est décroissante (plus il y a des voitures, plus il y a du traffic sur les routes) alors que $x \mapsto f(M, x)$ est croissante (plus il y a de gens qui prennent la voiture, plus confortable et rapide sera le métro).

1.4 Equilibres de Nash

Définition 1.29. Un profil d'actions $s \in S$ est un *équilibre de Nash* du jeu Γ si aucun joueur n'a de déviation unilatérale profitable, i.e. $g^i(t^i, s^{-i}) \leq g^i(s^i, s^{-i}) = g(s)$ pour tout $i \in N$ et $t^i \in S^i$.

L'ensemble des équilibres de Nash du jeu Γ sera noté $\mathrm{NE}(\Gamma)$. Cet ensemble peut être vide, contenir un élément unique ou plusieurs, une infinité dénombrable ou un continuum.

Définition 1.30. Pour tout $i \in N$ et tout $s^{-i} \in S^{-i}$ on définit *la mielleure réponse* :

$$br^i(s^{-i}) := \{s^i \in S^i \,|\, g^i(s^i, s^{-i}) \geq g^i(t^i, s^{-i}), \text{ pour tout } t^i \in S^i\} = \operatorname{argmax}_{s^i \in S^i} g^i(s^i, s^{-i})$$

Il s'agit de l'ensemble des meilleures réponses du joueur i face à l'action s^{-i} des autres. La correspondance $br^i : S^{-i} \rightrightarrows S^i$ est la *correspondance de meilleure réponse*. On remarquera qu'un profil d'actions $s \in \mathrm{NE}(\Gamma) \iff s^i \in br^i(s^{-i})$, pour tout $i \in N$.

5. L'enchère au deuxième prix fut introduite par Vickrey en 1961, qui reçut le prix Nobel d'Economie en 1996 notamment après avoir montré que ces enchères possèdent des propriétés remarquables. En réalité, il mourut trois jours après l'annonce de sa nomination et la remise de médaille se fit à titre posthume.

Commentaires. Supposons qu'un jeu admette une “solution”. Imaginons, par exemple, qu'il existe un profil d'actions sur lequel les joueurs pourraient se mettre d'accord. Alors celui-ci doit être un équilibre un Nash car, sinon, il y aurait au moins un joueur pour qui l'accord serait intenable : en désobéissant, il recevrait un meilleur paiement. En ce sens, l'équilibre de Nash offre une condition nécessaire pour qu'un profil d'actions puisse prétendre à être une solution.

Définition 1.31. Un *paiement d'équilibre* du jeu Γ est un vecteur de paiements $z \in \mathbb{R}^N$ correspondant à un équilibre de Nash, i.e. il existe $s \in \mathrm{NE}(\Gamma)$ tel que $g(s) = z$.

L'ensemble des paiements d'équilibre sera noté $\mathrm{PE}(\Gamma) = \{g(s) \mid s \in \mathrm{NE}(\Gamma)\}$.

Exercice 1.32. Soit Γ le jeu *bière ou chocolat*. Vérifier que $\mathrm{NE}(\Gamma) = \{(J, J), (H, H)\}$.

Exercice 1.33. Montrer que la *bataille des sexes* et le jeu de la *poule mouillée* possèdent plusieurs équilibres de Nash. Lesquels ?

Exercice 1.34. Déterminer les correspondances de meilleure réponse ainsi que les équilibres de Nash dans le jeu de *l'ultimatum simplifié*.

Exercice 1.35. Déterminer $\mathrm{NE}(\Gamma)$ et $\mathrm{PE}(\Gamma)$ dans les Exemples 1.8, 1.16, 1.19 et 1.21 ci-dessus.

Exercice 1.36. Montrer qu'un jeu de coordination pure possède toujours un équilibre de Nash.

Exercice 1.37. Montrer que si Γ est un jeu symétrique, alors

1. $\mathrm{NE}(\Gamma)$ est stable par permutation, i.e. $x \in \mathrm{NE}(\Gamma) \Longrightarrow x^\pi \subset \mathrm{NE}(\Gamma)$.
2. Il existe un *équilibre symétrique*, i.e. $x \in \mathrm{NE}(\Gamma)$ tel que $x^i = x^j$ pour tous $i, j \in N$.

Exercice 1.38. Montrer que dans un jeu à deux joueurs, $g^1 + g^2 = c$ est équivalent à $g^1 + g^2 = 0$.

1.4.1 Jeux équivalents

On définit dans ce paragraph deux notions d'équivalence pour les jeux. La première traduit le fait qu'un jeu ne dépend pas du choix particuliers des fonctions de paiements parmi toutes les fonctions de paiement équivalentes. La deuxième, plus générale, s'intéresse aux équilibres de Nash.

Définition 1.39. Deux jeux Γ et Γ' ayant le même ensemble de joueurs et d'actions sont dits

— *complètement équivalents* si pour chaque joueur les fonctions de paiements de l'un et de l'autre sont équivalentes.

— *BR-équivalents* si pour chaque joueur les correspondances de meilleure réponse coincident.

Exercice 1.40. Montrer que deux jeux complètement équivalents sont aussi BR-équivalent.

Exercice 1.41. Montrer que deux jeux BR-équivalents ont les mêmes équilibres de Nash.

Exercice 1.42. Construire deux jeux $\Gamma = (N, S, g)$ et $\Gamma' = (N, S, h)$ vérifiant

— $|N| = |S^1| = |S^2| \geq 2$

— pour tout $i \in N$ il existe $c^i, d^i \in \mathbb{R}$ tels que $g^i = c^i h^i + d^i$

— les ensembles $\mathrm{NE}(\Gamma)$ et $\mathrm{NE}(\Gamma')$ sont disjoints.

Exercice 1.43. 1. Dans quel sens les jeux Γ et Γ' sont-il équivalent ?

$$\Gamma = \begin{array}{|cc|cc|}\hline & 3 & & 4 \\ 3 & & 0 & \\ \hline & 0 & & 1 \\ 4 & & 1 & \\ \hline \end{array} \qquad \Gamma' = \begin{array}{|cc|cc|}\hline & 7 & & 10 \\ 7 & & 1 & \\ \hline & -2 & & 1 \\ 9 & & 3 & \\ \hline \end{array}$$

2. Montrer que Γ et Γ' sont BR-équivalents au *dilemme du prisonnier* (Exemple 1.9).

1.4.2 Dominance

Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu sous form normale.

Définition 1.44. Soient $s^i, t^i \in S^i$ deux actions du joueur $i \in N$. On dira que :
— s^i *domine* t^i si $g^i(s^i, s^{-i}) \geq g^i(t^i, s^{-i})$ pour tout $s^{-i} \in S^{-i}$
— s^i *domine strictement* t^i si $g^i(s^i, s^{-i}) > g^i(t^i, s^{-i})$ pour tout $s^{-i} \in S^{-i}$
— s^i est *équivalente* à t^i si $g^i(s^i, s^{-i}) = g^i(t^i, s^{-i})$ pour tout $s^{-i} \in S^{-i}$

Définition 1.45. Soit $i \in N$ un joueur. On dira que :
— s^i est *dominante* si s^i domine t^i pour tout $t^i \in S^i$, i.e :

$$g^i(s^i, s^{-i}) \geq g^i(t^i, s^{-i}), \quad \forall t^i \in S^i, \ \forall s^{-i} \in S^{-i}$$

— s^i est *strictement dominante* si s^i domine strictement t^i pour tout $t^i \neq s^i$.
— s^i est *dominée* s'il existe t^i qui domine s^i.
— s^i est *strictement dominée* s'il existe t^i qui domine strictement s^i.

Exercice 1.46. Montrer que
1. une action dominante est une meilleure réponse face à tout profil des autres joueurs.
2. une action strictement dominée n'est jamais une meilleure réponse

Remarque 1.47. La dominance est une propriété globale. Lorsqu'un joueur possède une stratégie dominante, la jouer lui assure un paiement plus grand ou égale au paiement qu'il aurait en jouant toute autre action, et cela quoi que fassent les autres joueurs. Une stratégie dominante est essentiellement unique.

Définition 1.48. Un profil d'actions $s \in S$ est un *équilibre en stratégies dominantes* si s^i est une stratégie dominante pour tout $i \in N$. En particulier, c'est un équilibre de Nash.

Exercice 1.49. Montrer que le *dilemme du prisonnier* admet un unique équilibre de Nash, qui est en plus un équilibre en stratégies dominantes. Lequel ?

Proposition 1.50. *Soit $\Gamma = (N, S, g)$, $i \in N$ et $R^i \subsetneq S^i$ un sous-ensemble strict d'actions du joueur i. Soit $\Gamma' = (N, S', g')$ le jeu obtenu en supprimant R^i, i.e. $S' = (S^i \backslash R^i) \times S^{-i}$ et $g' := g_{|S'}$.*
(i) Si les toutes les actions dans R^i sont strictement dominées, alors $\mathrm{NE}(\Gamma') = \mathrm{NE}(\Gamma)$.
(ii) Si les toutes les actions dans R^i sont dominées, alors $\mathrm{NE}(\Gamma') \subset \mathrm{NE}(\Gamma)$.

Notation. On se réfère à (i) et (ii), respectivement, comme *ESSD* (élimination des stratégies strictement dominées) et *ESD* (élimination des stratégies dominées). Pour $T^i \subset S^i$, on note $\Gamma_{|T^i \times S^{-i}}$ le jeu obtenu en remplaçant S^i par T^i et g par sa restriction à $T^i \times S^{-i}$.

Exemple 1.51 (*Pierre–Feuille–Ciseaux–Source*)**.** On considère une variante du jeu Pierre–Feuille-Ciseau, où l'on rajoute l'action "source", qui bat la "pierre" et le "ciseaux" et perd contre la "feuille". La fonction de paiement g^1 du joueur 1 est décrite ci-dessous (tableau Γ). On remarque que S domine faiblement P puisqu'on a $g^1(S, t) \geq g^1(P, t)$ pour toute action $t \in \{P, F, C, S\}$ de son adversaire. Un argument similaire montre aussi que $S \geq_2 P$, puisque le paiement du joueur 2 est $g^2 = g^1$. D'après la Proposition 1.50, on a $\mathrm{NE}(\Gamma'') \subset \mathrm{NE}(\Gamma') \subset \mathrm{NE}(\Gamma)$.

	P	F	C	S
P	0	1	−1	−1
F	−1	0	1	−1
C	1	−1	0	1
S	1	1	−1	0

Γ

$\overset{\text{ESD}}{\Longrightarrow}$

	P	F	C	S
F	−1	0	1	−1
C	1	−1	0	1
S	1	1	−1	0

Γ'

$\overset{\text{ESD}}{\Longrightarrow}$

	P	F	C
F	−1	0	1
C	1	−1	0
S	1	1	−1

Γ''

Exemple 1.52. On applique l'élimination des stratégies strictement dominées (ESSD) au jeu suivant, obtenant l'unique équilibre de Nash, i.e. $\mathrm{NE}(\Gamma) = \mathrm{NE}(\Gamma') = \mathrm{NE}(\Gamma'') = \{(C, B)\}$.

	A	B
A	1, 0	2, 0
B	3, 0	4, 0
C	5, 1	6, 2

Γ

$$\overset{\text{ESSD}}{\Longrightarrow}$$

	A	B
C	5, 1	6, 2

Γ'

$$\overset{\text{ESSD}}{\Longrightarrow}$$

	B
C	6, 2

Γ''

On remarquera que, dans Γ, l'action C est strictement dominante pour le joueur 1 et que B est dominante pour le joueur 2. Donc, (C, B) est un équilibre en stratégies dominantes.

1.4.3 Quelques exercices supplémentaires

Exercice 1.53. Déterminer la forme normale et les équilibres de Nash pour le *jeu du kidnap*.

Exercice 1.54. Représenter le jeu du *rendez-vous à dauphine* sous forme normale, pour $|N| = 2$. Déterminer les équilibres de Nash.

Exercice 1.55. Modéliser le *jeu de vote* lorsqu'il y a n votants et m candidats.

Exercice 1.56. Considérer le jeu du pénalty avec C quelconque.

1. On remarquera que $g^1 + g^2$ est constante. Qu'est-ce que cela signifie ?
2. Montrer qu'il ne possède pas d'équilibre de Nash. Commenter.
3. Ecrire la forme normale du jeu lorsque $C = \{G, D\}$, avec G=gauche et D=droite.

Exercice 1.57. Déterminer les équilibres de Nash le l'Exemple 4 (le bon samaritain) lorsque les joueurs sont identiques et voudraient que le crime soit dénoncé, mais de préférence par quelqu'un d'autre. On supposera que qu'il existe v et c tels que $(v^i, c^i) = (v, c)$ pour tout $i \in N$ avec $v > c > 0$.

Exercice 1.58. Considérer le *jeu de l'ultimatum* (non-simplifié).

1. Définir la fonction de paiement.
2. (*) Déterminer les correspondances de meilleure réponse. En déduire les équilibres de Nash.

Exercice 1.59. Déterminer la forme normale pour le jeu *deviner juste*, puis déterminer l'ensemble des équilibres de Nash.

Exercice 1.60. Soit (S^1, S^2, g^1, g^2) un jeu à deux joueurs. Montrer qu'il existe des fonctions f et h de $S^1 \times S^2$ dans $\mathbb{R}$ telles que $(f, f) + (h, -h) = (g^1, g^2)$. En déduire qu'un jeu à deux joueurs s'écrit comme la somme d'un jeu de coordination pure et d'un jeu à somme nulle.

Exercice 1.61. Considérer le jeu des échecs (ou le morpion). Montrer que chaque joueur possède un nombre fini de stratégies. Donner une borne du nombre de stratégies. [6]

Exercice 1.62. Considérer l'Exemple 1.25 d'une enchère sous enveloppe scellée.

1. Que se passe-t-il lorsque plusieurs offres sont égales et en tête ?
2. Définir la fonction de paiement pour une enchère au second prix.
3. Montrer que miser sa propre valuation est un équilibre en stratégies dominantes.

Exercice 1.63. (*) Considérer le *jeu politique de Hotelling-Downs.*

1. Ecrire la forme normale lorsque $C = S^1 = S^2 = [0, 1]$ et $|N| = 2$ et déterminer l'unique équilibre de Nash du jeu.

6. *Indication.* Pour les échecs, une partie ne peut pas durer indéfiniment, car le jeu s'achève lorsque 50 coups se succèdent sans qu'il n'y ait de prise ni d'avancement d'un pion.

2. Considérer ensuite le même jeu avec $S^1 = [0, a]$ et $S^2 = [b, 1]$, en fonction de a et b. Quels sont les équilibres de Nash en fonction de a et b ? *Indication :* On pourra distinguer trois cas : $0 \leq a < b \leq 1$, $0 \leq b \leq \frac{1}{2} \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq a < \frac{1}{2}$.
3. Montrer que le jeu avec $|N| = 3$ et $C = S^1 = S^2 = S^3 = [0, 1]$ ne possède pas d'équilibre.
4. Considérer le jeu lorsque C est une courbe fermée et que vendeurs peuvent se placer partout. Déterminer tous les équilibres pour $|N| = 2$ et $|N| = 3$, puis un équilibre pour tout $|N| > 3$.

Exercice 1.64. (*) Considérer le jeu du *Samedi soir à Neuchâtel* d'un point de vue évolutif, i.e. les joueurs peuvent changer de bar au cours de la soirée.

1. Que doit-on supposer sur les fonctions $x \mapsto f(K, x)$ et $x \mapsto f(C, x)$?
2. Lorsque $f(K, x(s)) < f(C, x(s))$, les personnes qui sont au King préféreraient être au Cerf, et peuvent tout simplement changer de bar. Quel serait l'effet ?
3. Que se passe-t-il si $f(K, x(s)) = f(C, x(s))$?

Exercice 1.65. (*) Considérer le jeu *Voiture ou métro ?* d'un point de vue évolutif, i.e. les joueurs peuvent changer d'action au cours du temps.

1. Supposons qu'il existe un unique $x_0 \in [0, 1]$ tel que $\mapsto f(V, x_0) = f(M, x_0)$. Justifier que la proportion de personnes prenant la voiture converge vers x_0.
2. Supposons que $\mapsto f(V, x^*) = f(M, x^*)$ pour un certain x^*. Justifier que x^* est un équilibre de Nash du jeu et un point stationnaire de la dynamique.

1.5 Jeux finis : extension mixte

Dans toute cette section, $\Gamma = (N, S, g)$ désigne un jeu fini, c'est–à–dire un jeu avec un nombre fini de joueurs et où chaque joueur a un nombre fini de choix. Le joueur i, par exemple, peut choisir parmi deux actions A et B. Mais ne peut-il pas aussi choisir une action au hasard − lancer un pièce et choisir A ou B en fonction du résultat, par exemple ? Plus généralement, lorsque S^i est un ensemble fini, on supposera que le joueur i peut choisir une action en se servant d'une variable aléatoire. L'ensemble d'actions possibles est alors *l'ensemble des probabilités* sur S^i, que l'on notera $\Delta(S^i)$ ou X^i. Mathématiquement, on peut écrire X^i des deux manières suivantes :

$$\left\{ x^i : S^i \to [0, 1], \ \sum_{s^i \in S^i} x^i(s^i) = 1 \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ a^1, \ldots, a^{|S^i|} \geq 0, \quad a^1 + \cdots + a^{|S^i|} = 1 \right\}$$

On écrira X^i On pose $X = \times_{i \in N} X^i$ et, pour tout $i \in N$, $X^{-i} = \times_{j \neq i} X^i$.

Notation. Un élément $x^i \in X^i$ est une *action mixte*, tandis que $s^i \in S^i$ est *action pure*.
L'action mixte x^i consiste en choisir s^i avec probabilité $x^i(s^i) \in [0, 1]$, pour chaque $s^i \in S^i$.

Définition 1.66. Le *support* d'une action mixte est l'ensemble d'actions pures qui sont jouées avec probabilité strictement positive. On notera $\mathrm{supp}(x^i) := \{s^i \in S^i, x^i(s^i) > 0\}$.

Remarque 1.67. Une action pure est un cas particulier d'une action mixte. On identifie S^i avec un sous-ensemble de X^i via l'inclusion $s^i \mapsto \delta_{s^i}$ attribuant à chaque action la masse de Dirac correspondante. Rappelons que δ_{s^i} est une probabilité sur S^i concentrée sur s^i, i.e. telle que $\delta_{s^i}(s^i) = 1$ et $\delta_{s^i}(t^i) = 0$ pour tout $t^i \neq s^i$. Une action mixte x^i est une combinaison linéaire d'actions pures, $x^i = \sum_{s^i \in S^i} x^i(s^i) \delta_{s^i}$.

Illustration. Soit $S = \{A, B, C\}$. Alors $\Delta(S) = \{a, b, c \geq 0, a + b + c = 1\}$ et on identifie A, B et C, respectivement, à $\delta_A = (1, 0, 0), \delta_B = (0, 1, 0)$ et $\delta_C = (0, 0, 1)$. Une action mixte $(a, b, c) \in \Delta(S)$ s'écrit alors $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$. Par un léger abus de langage on écrira parfois $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$ et donc $(a, b, c) = aA + bB + cC$.

Définition 1.68. L'*extension mixte* du jeu $\Gamma = (N, S, g)$ (aussi nomée le jeu Γ *en stratégies mixtes*) est le jeu obtenu en remplaçant les ensembles d'actions finis S^i par les ensembles de probabilités X^i. On écrit $\Gamma_\Delta = (N, X, g_\Delta)$ où g_Δ n'est rien d'autre que le paiement espéré, i.e.

$$g_\Delta(x) = \sum_{s \in S} x(s) g(s)$$

où $x(s) = \prod_{i \in N} x^i(s^i)$ est la probabilité avec laquelle le profil s est joué – le produit vient du fait que les joueurs choisissent leurs actions de manière indépendante. On remarquera que $g(s) = g_\Delta(\delta_s)$.

Notation. Par un abus de langage, et pour alléger les notations, on notera g_Δ simplement par g.

Exercice 1.69. Montrer que si $x^i \in X^i$ domine (ou domine strictement) chacune des actions pures dans $R^i \subset S^i$, alors x^i domine (ou domine strictement) toute action $y^i \in X^i$ à support dans R^i.

Proposition 1.70 (ESD–ESSD)**.** *Soit $\Gamma = (N, S, g)$ un jeu fini, $s^i \in S^i$ une action pure du joueur $i \in N$ et $x^i \in X^i$ une action mixte telle que $x^i(s^i) > 0$ dans un. Soit $\Gamma' = (N, S', g')$ le jeu obtenu en supprimant s^i, i.e. $S' = S^i \backslash \{s^i\} \times S^{-i}$ et $g' = g_{|S'}$. Alors*

(i) Si s^i est strictement dominée dans Γ_Δ, x^i l'est aussi et $\mathrm{NE}(\Gamma'_\Delta) = \mathrm{NE}(\Gamma_\Delta)$.

(ii) Si s^i est dominée dans Γ_Δ, x^i l'est aussi et $\mathrm{NE}(\Gamma'_\Delta) \subset \mathrm{NE}(\Gamma_\Delta)$.

Démonstration. Montrons seulement (i). Soit $y^i \in X^i$ une action mixte qui domine strictement s^i dans Γ_Δ. En particulier $y^i(s^i) < 1$. A l'aide de celle-ci, nous allons construire une action $z^i \in X^i$ qui domine x^i. L'idée est de replacer la masse $x^i(s^i)$ dans $S^i \backslash \{s^i\}$, et proportionnellement à y^i. Formellement, on pose :

$$\begin{cases} z^i(s^i) = 0 \\ z^i(t^i) = x^i(t^i) + x^i(s^i) \frac{y^i(t^i)}{1 - y^i(s^i)}, \quad \forall t^i \neq s^i \end{cases}$$

On vérifie que c'est bien une probabilité puisque $z^i(t^i) \leq x^i(t^i) + x^i(s^i) \in [0, 1]$ et

$$\sum_{t^i \in S^i} z^i(t^i) = \sum_{t^i \neq s^i} z^i(t^i) = 1 - x^i(s^i) + x^i(s^i) \frac{\sum_{t^i \neq s^i} y^i(t^i)}{1 - y^i(s^i)} = 1$$

Il suffit de vérifier que $g^i(z^i, x^{-i}) > g^i(x^i, x^{-i})$ pour tout x^{-i} fixe. Notons d'abord que :

$$g^i(z^i, x^{-i}) = \sum_{t^i \neq s^i} z^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) \quad \text{et} \quad g^i(x^i, x^{-i}) = x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) + \sum_{t^i \neq S} x^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i})$$

En utilisant la linéarité de g ainsi que la définition de z^i et de y^i, on obtient :

$$\begin{aligned} g^i(z^i, x^{-i}) &= \sum_{t^i \neq s^i} z^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) \\ &= \sum_{t^i \neq s^i} x^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) + \frac{x^i(s^i)}{1 - y^i(s^i)} \sum_{t^i \neq s^i} y^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) \\ &= g^i(x^i, x^{-i}) - x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) + \frac{x^i(s^i)}{1 - y^i(s^i)} \left(g^i(y^i, x^{-i}) - y^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) \right) \\ &> g^i(x^i, x^{-i}) - x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) + \frac{x^i(s^i)}{1 - y^i(s^i)} \left(g^i(s^i, x^{-i}) - y^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) \right) \\ &= g^i(x^i, x^{-i}) + g^i(s^i, x^{-i}) \left(-x^i(s^i) + \frac{x^i(s^i)}{1 - y^i(s^i)} (1 - y^i(s^i) \right) \\ &= g^i(x^i, x^{-i}) \end{aligned}$$

Ainsi, toutes les actions mixtes jouant s^i avec probabilité positive sont strictement dominées. On peut donc appliquer la Proposition 1.50, (i) à l'ensemble $R^i = \{x^i \in X^i \,|\, x^i(s^i) > 0\}$ et vérifier que Γ'_Δ est précisément le jeu obtenu en supprimant les actions R^i à Γ_Δ. Pour cela, il suffit de noter que $\Delta(S^i \backslash s^i) = \Delta(S^i) \backslash R^i$, laissé en exercice. □

Exemple 1.71. On utilise l'élimination de stratégies strictement dominées (ESSD) dans l'exemple suivant, en constatant que C est strictement dominée par $1/2A + 1/2B$. En effet,

$$1/3 = g^1(C,t) < g^1(1/2A + 1/2B, t) = 1/2, \quad \forall t \in \{A, B\}$$

A fortiori, $g^1(C,y) < g^1(1/2A + 1/2B, y)$ pour tout $y \in \Delta(\{A, B\})$ (voir Exercice 1.69).

	A	B
A	(1, 2)	(0, 1)
B	(0, 1)	(1, 3)
C	(1/3, 0)	(1/3, 5)

Γ

ESSD $\Longrightarrow$

	A	B
A	(1, 2)	(0, 1)
B	(0, 1)	(1, 3)

Γ'

D'après ESSD, $\mathrm{NE}(\Gamma') = \mathrm{NE}(\Gamma)$.

1.6 Théorème de Nash

Théorème 1.72. *Tout jeu fini admet un équilibre de Nash (en stratégies mixtes), i.e.* $\mathrm{NE}(\Gamma_\Delta) \neq \emptyset$.

La démonstration est admise dans ce cours. Dans un document annexe, le lecteur intéressé pourra retrouver deux démonstration différentes : la première basée sur le théorème de point fixe de Brower, la seconde basée sur le théorème de point fixe de Kakutani.

Combien d'équilibres ? L'ensemble d'équilibres peut aussi bien contenir un unique élément, qu'un nombre fini, voire même un continuum. Cependant, le nombre d'équilibres de Nash est "génériquement" fini et impair [7]. Ce sera le cas, par exemple, lorsque tous les paiements sont distincts. Génériquement (**à ne pas confondre** avec "en général" !) est une terminologie qui sous-entend que si l'on tirait un jeu au hasard (avec une loi uniforme), alors ce serait le cas presque sûrement. Pour prendre un jeu au hasard, remarquons d'abord qu'une transformation affine permet de ramener tous les paiements dans $[-1, 1]$. Un jeu peut donc se voir comme un point dans $[-1, 1]^n$, avec $n = |N| \times |S|$. Par exemple, un jeu $2 \times 2times2$ (i.e. deux joueurs avec chacun deux actions) se est défini par 8 réels. Si on prend un jeu au hasard, uniformément dans $[-1, 1]^n$, alors avec probabilité 1 l'ensemble des équilibres de Nash est fini et impair. Ce commentaire doit être pris avec énormément de prudence puisque dans la plupart des exemples les paiements ne sont pas tous distincts (certains joueurs sont indifférents parmi certaines issues).

Comment déterminer les équilibres ? En général, c'est un problème très difficile – même pour les ordinateurs ! [8]. Pour une méthode systématique (ou algorithmique) on se réfère à la Section 1.9.

Dorénavant, sauf mention explicite du contraire, on considérera toujours les jeux finis en stratégies mixtes.

N.B. En particulier, $\mathrm{NE}(\Gamma) := \mathrm{NE}(\Gamma_\Delta)$ désignera l'ensemble d'équlibres, purs et mixtes. L'ensemble des équilibres purs sera noté $\mathrm{NE}_{purs}(\Gamma)$.

1.7 Principe d'indifférence

Ecriture probabiliste. Soit $x = (x^i)_{i \in N}$ un profil d'action mixtes. Pour chaque $i \in N$, soit Y^i une variable aléatoire à valeurs dans S^i telle que $\mathsf{P}(Y^i = s^i) = x^i(s^i)$. Supposons que les $(Y^i)_{i \in N}$

7. La La preuve de ce résultat est au-delà d'une licence en mathématique. Le lecteur intéressé pourra la consulter dans *Bases mathématiques de la théorie des jeux*, de Laraki, Renault et Sorin.

8. C'est un problème NP-hard, i.e. le temps de calcul est une fonction exponentielle des données.

sont indépendantes et soit $Y := (Y^1, \ldots, Y^N)$ un vecteur aléatoire. Alors $g(x) = \mathsf{E}[g(Y)]$ et

$$x(s) = \prod_{i\in N} x^i(s^i) = \prod_{i\in N} \mathsf{P}(Y^i = s^i) = \mathsf{P}(Y^1 = s^1, \ldots, Y^N = Y^N) = \mathsf{P}(Y = s)$$

Posons aussi $Y^{-i} := (Y^j)_{j\neq i}$, et $x^{-i}(s^{-i}) := \mathsf{P}(Y^{-i} = s^{-i})$ pour tout $i \in N$ et $s^{-i} \in S^{-i}$. Alors :

$$\begin{aligned} g^i(x) &= \sum_{s\in S} \mathsf{P}(Y = s) g^i(s) \\ &= \sum_{s^i\in S^i} \mathsf{P}(Y^i = s^i) \sum_{s^{-i}\in S^{-i}} \mathsf{P}(Y^{-i} = s^{-i}) g^i(s^i, s^{-i}) \\ &= \sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i) \sum_{s^{-i}\in S^{-i}} x^{-i}(s^{-i}) g(s^i, s^{-i}) \\ &= \sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) \end{aligned}$$

Linéarité du paiement. La dernière égalité du paragraphe précédent est très utile car elle met en évidence le fait que, à profil x^{-i} des autres fixé :

$$x^i \mapsto g^i(x^i, x^{-i})$$

est une application linéaire (le maximum sera donc atteint en un point extrémal). Cette assertion est l'objet du lemme suivant.

Notation. On pose $m^i(x^{-i}) := \max_{s^i\in S^i} g^i(s^i, x^{-i})$ le meilleure paiement que le joueur i peut obtenir face à un profil x^{-i} des autres joueurs, en jouant une action pure.

Lemme 1.73. *Pour tout $i \in N$ et $x^{-i} \in X^{-i}$, $\sup_{x^i\in X^i} g^i(x^i, x^{-i}) = m^i(x^{-i})$.*

Démonstration. ($\geq$) Cette inégalité découle directement de l'inclusion $S^i \subset X^i$ (donner plus de possibilités au joueur i ne peut pas diminuer son paiement face à x^{-i}). C'est vrai dans un cadre bien plus général : pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et ensembles $A \subset B \subset E$, $\sup_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in B} f(x)$.
($\leq$) Par définition, $m^i(x^{-i}) \geq g^i(s^i, x^{-i})$, pour tout $s^i \in S^i$. On obtient donc :

$$g^i(x^i, x^{-i}) = \sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) \leq \sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i) m^i(x^{-i}) \leq m^i(x^{-i}) \sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i) = m^i(x^{-i})$$

en utilisant le fait que $\sum_{s^i\in S^i} x^i(s^i) = 1$, car c'est une probabilité. $\square$

Remarque 1.74. Le résultat précédent implique que $x^i \in BR^i(x^{-i}) \iff g^i(x^i, x^{-i}) = m^i(x^{-i})$.

Exemple 1.75 (*La bataille des sexes*). Reprenons le jeu de *la bataille des sexes* en stratégies mixtes, avec les paiements ci-dessous :

	C	T
C	3, 2	1, 1
T	0, 0	2, 3

Pour simplifier les notations, posons $x := x^1(C)$ et $y := x^2(C)$, de sorte qu'un profil de stratégies mixtes est un élément dans $[0, 1]^2$. Les fonctions de paiement sont les suivantes :

$$g^1(x, y) = 3xy + (1 - y) + 2(1 - x)(1 - y)$$

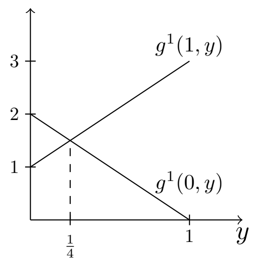
$$g^2(x, y) = 2xy + (1 - y) + 3(1 - x)(1 - y)$$

En effet, lorsque les joueurs jouent (x, y), les profils (C, C), (C, T), (T, C) et (T, T) sont joués, respectivement, avec probabilités xy, $x(1-y)$, $(1-x)y$ et $(1-x)(1-y)$. L'ensemble des équilibres de Nash est l'ensemble suivant :

$$\{(x, y) \in [0,1]^2 \mid x \in BR^1(y), y \in BR^2(x)\}$$

Calcul des meilleures réponses. Soit $y \in [0, 1]$ fixé. D'après le Lemme 1.73,

$$\sup_{x\in[0,1]} g^1(x, y) = \max\{g^1(0, y), g^1(1, y)\} = \max\{2(1-y), 3y + 1 - y\}.$$



Pour $0 \leq y < 1/4$, l'unique meilleure réponse est 0 (ou T), puisque $g^1(0, y) > g^1(1, y)$. De même, $BR^1(y) = \{1\}$ pour tout $y \in (1/4, 1]$. Pour $y = \frac{1}{4}$, le joueur 1 est indifférent puisque C et T lui donnent le même paiement, i.e. $g^1(0, 1/4) = g^1(1, 1/4) = 3/2$. On remarque aussi que, par linéarité,

$$g^1(x, 1/4) = xg^1(T, 1/4) + (1-x)g^1(C, 1/4) = 3/2$$

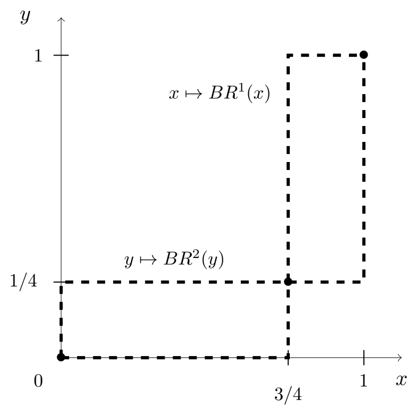
pour tout $x \in [0, 1]$, de sorte que $BR^1(1/4) = [0, 1]$. On a donc :

$$BR^1(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } y \in [0, 1/4) \\ [0,1] & \text{si } y = 1/4 \\ \{1\} & \text{si } y \in (1/4, 1] \end{cases}$$

Un calcul similaire donne la correspondance de meilleure réponse du second joueur :

$$BR^2(x) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } y \in [0, 3/4) \\ [0,1] & \text{si } x = 3/4 \\ \{1\} & \text{si } x \in (3/4, 1] \end{cases}$$

On pourra représenter $x \mapsto BR^2(x)$ et $y \mapsto BR^1(y)$ dans $[0, 1]^2$.



Equilibres de Nash. Les équilibres de Nash sont les points d'intersection des correspondances de meilleure réponse, i.e. NE $= \{(0, 0), (3/4, 1/4), (1, 1)\}$.

Paiements d'équilibre. Il suffit de calculer $g(3/4, 1/4)$ puisque $g(0, 0) = g(T, T) = (2, 3)$ et $g(1, 1) = g(C, C) = (3, 2)$. Plutôt que de faire un calcul fastidieux, on a déjà vu que $g^1(x, 1/4) = g^1(C, 1/4) = 3/2$ pour tout x. De même, $g^2(3/4, y) = g^2(3/4, C) = 3/2$ pour tout y. On a donc PE $= \{(3, 2), (2, 3), (1.5, 1.5)\}$. On remarquera que le dernier paiement d'équilibre est le seul qui soit équitable, mais il est strictement inférieur pour les deux joueurs.

Notation. On pose $br^i(x^{-i}) := \{s^i \in S^i \,|\, g^i(s^i, x^{-i}) = m^i(x^{-i})\}$ l'ensemble des meilleures réponses pures face à x^{-i}.

N. B. Le résultat suivant est très pratique : il établit que pour déterminer l'ensemble $BR^i(x^{-i})$, il suffit de comparer les paiements $g^i(s^i, x^{-i})$, pour $s^i \in S^i\}$.

Proposition 1.76. *Pour tout $i \in N$ et tout $x^{-i} \in X^{-i}$, $BR^i(x^{-i}) = \Delta(br^i(x^{-i}))$.*

Démonstration. ($\supset$) Pour tout $x^i \in \Delta(br^i(x^{-i}))$ et s^i dans son support (i.e. telle que $x^i(s^i) > 0$) on a $g^i(s^i, x^{-i}) = m^i(x^{-i})$. Par conséquent, $g^i(x^i, x^{-i}) = \sum_{s^i \in S^i} x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) = m^i(x^{-i})$. D'après le Lemme 1.73, cela implique $x^i \in BR^i(x^{-i})$.
($\subset$) Montrons, par contraposé, que $x^i \notin \Delta(br^i(x^{-i}))$ implique $g^i(x^i, x^{-i}) < m^i(x^{-i})$ et donc $x^i \notin BR^i(x^{-i})$. En effet, $x^i \notin \Delta(br^i(x^{-i}))$ implique qu'il existe une action t^i telle que $x^i(t^i) > 0$ et $g^i(t^i, x^{-i}) < m^i(x^{-i})$. Donc $x^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) < x^i(t^i) m^i(x^{-i})$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
g^i(x^i, x^{-i}) &= \sum_{s^i \in S^i} x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) \\
&= x^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) + \sum_{s^i \neq t^i} x^i(s^i) g^i(s^i, x^{-i}) \\
&\leq x^i(t^i) g^i(t^i, x^{-i}) + \sum_{s^i \neq t^i} x^i(s^i) m^i(x^{-i}) \\
&< x^i(t^i) m^i(x^{-i}) + m^i(x^{-i}) \sum_{s^i \neq t^i} x^i(s^i) \\
&= m^i(x^{-i}) \left(x^i(t^i) + \sum_{s^i \neq t^i} x^i(s^i) \right) \\
&= m^i(x^{-i})
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est le *principe d'indifférence* (PI) : si dans un équilibre de Nash un joueur joue deux actions avec probabilités strictement positives c'est qu'il est indifférent, i.e. les deux lui donnent le même paiement. Ce résultat sera très utile pour déterminer des équilibres de Nash en stratégies mixtes. En voici un énoncé formel.

Proposition 1.77. *Soit $x \in \mathrm{NE}$. Supposons qu'il existe $i \in N$ et $s^i, t^i \in S^i$ telles que $x^i(s^i) > 0$ et $x^i(t^i) > 0$. Alors $g^i(s^i, x^{-i}) = g^i(t^i, x^{-i})$.*

Démonstration. Par définition, $x \in \mathrm{NE}$ équivaut à $x^j \in BR^i(x^{-j})$ pour tout $j \in N$. D'après le Lemme 1.76, $BR^i(x^{-i}) = \Delta(br^i(x^{-i}))$. Donc $x^i(s^i) > 0$ implique $s^i \in br^i(x^{-i})$, et donc $g^i(s^i, x^{-i}) = m^i(x^{-i})$. Le même raisonnement pour t^i donne bien $g^i(s^i, x^{-i}) = g^i(t^i, x^{-i})$. □

Illustration. Considérons à nouveau la *bataille des sexes* de l'Exemple 1.75. Soit (x, y) un équilibre de Nash avec $0 < x < 1$. Alors, par le principe d'indifférence, $g^1(0, y) = g^1(1, y)$ (on écrit aussi $g^1(T, y) = g^1(C, y)$). Cela donne un l'équation $2(1 - y) = 3y + 1 - y$, dont l'unique solution est $y = 1/4$. Or, cela veut dire que le joueur 2 joue C et T avec probabilités strictement positives. Le principe d'indifférence donne alors $g^2(x, 0) = g^2(x, 1)$, qui se traduit par $2x = x + 3(1 - x)$, dont l'unique solution est $x = 3/4$. Le seul équilibre vérifiant $0 < x < 1$ est donc $(3/4, 1/4)$.

Exemple 1.78 (*Jeu de minorité*)**.** Considérer le jeu de l'exemple 1.21. Considérons d'abord les équilibres de Nash purs. Dans un profil de stratégies pures, un joueur a intérêt à dévier s'il peut acquérir la minorité. Les profils (A, A, A) et (B, B, B) ne sont donc pas des équilibres. On vérifie aisement que tous les autres profils le sont, et donc

$$NE_{purs} = \{(A, B, A), (A, A, B), (B, A, A), (A, B, B), (B, A, B), (B, B, A)\}$$

Cherchons les équilibres de Nash qui ne sont pas purs. Soit $(x, y, z) \in \mathrm{NE}$ avec $0 < x < 1$. D'après principe d'indifférence (PI) pour le joueur 1 :

$$\begin{aligned} x \in BR^1(y,z) &\Leftrightarrow g^1(A,y,z) = g^1(B,y,z) \\ &\Leftrightarrow (1-y)(1-z) = yz \\ &\Leftrightarrow y + z = 1 \end{aligned}$$

On distingue deux cas, selon que $y = 0$ (ou, par symétrie, $y = 1$) ou $y \in (0,1)$. Dans le premier cas, $z = 1$. Vérifions que pour tout $x \in (0,1)$, $(x,0,1)$ (ou (x,B,A)) est bien un équilibre de Nash. D'après ce qui précède, on a $x \in BR^1(0,1)$. De plus, $g^2(x,A,A) = g^3(x,B,B) = 0$, qui est le pire paiement possible du jeu. On en déduit que $g^2(x,B,A) \geq g^2(x,A,A)$ et $g^3(x,B,A) \geq g^3(x,B,B)$. Donc $B \in BR^2(x,A)$ et $A \in BR^3(x,B)$, ce qui prouve que (x,B,A) est bien un Nash. Les joueurs 2 et 3 jouant des rôles symétriques, le cas $y = 1$ se traite de la même façon. Pour tout $x \in (0,1)$, (x,A,B) est aussi un équilibre de Nash.
Si, en revanche, $y \in (0,1)$, on peut appliquer le principe d'indifférence au joueur 2 – on n'A pas besoin de refaire le calcul, puisque les joueurs 1 et 2 jouent des rôles symétriques :

$$y \in BR^2(x,z) \quad \Leftrightarrow \quad g^2(x,A,z) = g^2(x,B,z) \quad \Leftrightarrow \quad x + z = 1.$$

On en déduit que $z \in (0,1)$ aussi. On peut donc appliquer le PI au joueur 3 (encore une fois sans refaire le calcul par symétrie).

$$z \in BR^3(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad g^3(x,y,A) = g^3(x,y,B) \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 1.$$

L'unique solution des équations précédentes est $x = y = z = 1/2$. On a bien que $(1/2,1/2,1/2)$ est un équilibre de Nash, car par construction $1/2 \in BR^i(1/2,1/2)$, pour tout $i = 1,2,3$.

On a donc trouvé tous les Nash où $0 < x < 1$. Le jeu étant symétrique, l'ensemble NE est stable par permutation des joueurs (voir Exercice 1.37). On conclut donc que l'ensemble des équilibres de Nash mixtes (qui inclut donc les équilibres purs) est :

$$NE = \{(1/2,1/2,1/2)\} \cup \{(x,1,0)^\pi, x \in [0,1]\}$$

où rappelons que $(a,b,c)^\pi$ est l'ensemble des permutations de (a,b,c), i.e

$$(a,b,c)^\pi := \{(a,b,c),(a,c,b),(b,a,c),(b,c,a),(c,a,b),(c,b,a)\}$$

Exemple 1.79 (*Jeu du film* "Un homme d'exception")**.** Dans ce film hollywoodien, où Russell Crowe interprète John Nash, 4 amis se retrouvent dans un bar pour boire une bière et draguer. Lorsque 5 jeunes femmes arrivent, les garçons sont tous du même avis : les 5 sont très séduisantes et une sort carrément du lot, mais ils ne faut pas l'accoster à plusieurs au risque de l'accabler. On modélise cela par un jeu avec 4 joueurs (les garçons) avec chacun deux actions : prendre un risque (i.e. tenter de séduire la plus attirante) ou être prudent (i.e. accoster une des autres filles). On écrit $N = \{1,2,3,4\}$, $S = \{R,P\}^4$ et pour tout $i \in N$ et $s \in S$

$$g^i(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s^i = P \\ 2 & \text{si } s^i = R \text{ et } s^{-i} = (P,P,P) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Autrement dit, l'action prudente garantir un paiement de 1, alors que l'action risquée donne un paiement de 2 ou de 0 dépendant de ce que font les autres. Clairement, $\mathrm{NE}_{purs} = \{(R,P,P,P)\}^\pi$. En effet, on a $g(R,P,P,P) = (2,1,1,1)$. Le premier joueur, ayant déjà le paiement maximal du jeu, n'a pas de déviation profitable. De même, un garçon prudent aurait 0 en déviant unilatéralement. On vérifie aisément qu'il n'y a pas d'équilibre avec $k = 0$ ou $k \geq 2$ actions risquées. La détermination des équilibres mixtes est laissée en exercice.

Exercice 1.80. Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash mixtes et les paiements d'équilibre correspondants dans le jeu du film *Un homme d'exception*. Généraliser à n joueurs.

1.8 Méthode générale pour déterminer les équilibres de Nash

Déterminer tous les équilibres de Nash d'un jeu n'est pas en général quelque chose de facile. On peut cependant fournir une méthode systématique (ou algorithmique) qui sera utile pour résoudre les jeux, notamment à l'aide d'un ordinateur. On procède en deux étapes :

- **Première étape.** Fixer le support T^i pour chaque joueur, i.e. les actions qui sont jouées avec probabilités strictement positive. On a donc $\emptyset \neq T^i \subset S^i$, pour tout $i \in N$.
- **Deuxième étape.** Déterminer les équilibres de Nash $x = (x^i)_{i \in N}$ tels que x^i est à support dans T^i pour chaque i.

On remarquera que, pour un support $T = (T^i)_i$ fixé, déterminer un équilibre de Nash à support dans T revient à résoudre un système avec $M_T := \prod_{i \in N}(T^i - 1)$ inconnues : les probabilités avec lesquelles les actions sont jouées. Le principe d'indifférence fournit $N_T := \sum_{i \in N} \binom{T^i}{2}$ équations.[9]

Exercice 1.81. Montrer que le choix des supports possibles pour le joueur i est $2^{|S^i|} - 1$. En déduire que la première étape de la méthode générale comprend $\prod_{i \in N}(2^{|S^i|} - 1)$ cas possibles.

Exemple 1.82 (*La bataille des sexes*). Reprenons encore le jeu de *la bataille des sexes* :

	C	T
C	3, 2	1, 1
T	0, 0	2, 3

Il y a ici 9 supports possibles pour un équilibre, notés $\{T^1 \times T^2 \,|\, T^1 \subset S^1,\ T^2 \subset S^2\}$. Les quatre supports tels que $|T^1||T^2| = 1$, qui donnent les équilibres purs, les quatre supports vérifiant $|T^1||T^2| = 2$, qui donnent les équilibres partiellement mixtes et le seul support tel que $|T^1||T^2| = 4$, qui donne les équilibres complètement mixtes.

Exemple 1.83. Considérons un jeu à n joueurs (N, S, g) où $S = \{0,1\}^n$ et :

$$\forall i \in N \quad g^i(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s^i = 0 \\ 2 & \text{si } s^i = \sum_{j=1}^n s^j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note x^j la probabilité avec laquelle le joueur j joue l'action 1. Pour déterminer les équilibre de Nash, on procède support par support. Soit $(T^i)_{i \in N}$ un support, avec $|T^i| \in \{1,2\}$ pour tout i. On distingue alors les supports tels que $\prod_{i \in N} |T^i| = 2^k$, où k désigne le nombre de joueurs qui jouent les deux actions avec probabilité strictement positive. Pour $1 \leq k \leq n$, on supposera sans perte de généralité (le jeu est symétrique) que ce soient les joueurs $1, \ldots, k$ qui jouent en stratégies mixtes.
– Le cas $k = 0$ donne les équilibres purs $(1, 0, \ldots, 0)^\pi$, i.e. tous les profils d'actions où un seul joueur joue 1.
– Pour $k = 1$, tous les joueurs sauf le premier jouent en pur. Or $g^1(1, s^{-1}) \neq g^1(0, s^{-1})$ pour tout s^{-1} et donc le joueur 1 ne peut pas être indifférent ; il n'y a donc pas d'équilibre dans ce cas.
– Pour $2 \leq k \leq n$, par le principe d'indifférence, $1 = g^i(0, x^{-i}) = g^i(1, x^{-i})$, pour tout $i = 1, \ldots, k$. Montrons d'abord que $x^j = 0$ pour tout joueur $j = k+1, \ldots, n$ (s'il y en a). En effet, sinon on aurait $g^i(1, x^{-i}) = 0$ (deux joueurs jouent l'action 1) et on contredirait le principe d'indifférence. On a donc pour tout $i = 1, \ldots, k$ l'équation suivante :

$$g^i(1, x^{-i}) = 2 \prod_{\substack{j \in 1, \ldots, k \\ j \neq i}} 1 - x^j = 1$$

L'unique solution est $x^i = a_k := 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$, pour tout $i = 1, \ldots, k$. On a ainsi déterminé tous les équilibre de Nash du jeu :

$$\left(\{(1, 0, \ldots, 0)\} \cup \bigcup_{k=2}^{n} \{(\alpha_k, \overset{k \text{ fois}}{\ldots}, \alpha_k, 0, \ldots, 0)\} \right)^\pi$$

9. Avec la convention $\binom{1}{2} := 0$.

1.9 $*$ Caractérisation des équilibres et des paiements d'équilibre

Définition 1.84. Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est *semi-algébrique* s'il est une union finie d'ensembles définis par un nombre fini d'égalités polynomiales du type $p(x) = 0$ et d'inégalités du type $q(x) > 0$, avec $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Sur $\mathbb{R}$, par exemple, les intervalles sont semi-algébriques. En effet, pour tout $a < b$,

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -(x-a)(x-b) > 0\}$$

Théorème 1.85 (Vigeral, Viossat 2015). *Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est l'ensemble des paiements d'équilibres d'un jeu fini à $n \geq 3$ joueurs si et seulement si c'est C est semi-algébrique et compact.*

Théorème 1.86 (Lehrer, Solan, Viossat 2011)**.** *Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des paiements d'équilibres d'un jeu fini à 2 joueurs si et seulement si c'est l'union fini de pavés $[a, b] \times [c, d]$.*

Théorème 1.87 (Vigeral, Viossat 2015)**.** *L'ensemble des équilibre de Nash est une union finie de composante connexes Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^2$ est l'ensemble des paiements d'équilibres d'un jeu fini à $N \geq 3$ joueurs si et seulement si c'est un ensemble semi-algébrique compact de $\mathbb{R}^n$.*

2 Jeux à deux joueurs

2.1 Jeux à somme nulle

Un jeu à deux joueurs (S^1, S^2, g^1, g^2) est *un jeu à somme nulle* si $g^1 + g^2 = 0$. Dans ce cas on pose, pour simplifier les notations, g à la place de g^1 et (S, T) à la place de (S^1, S^2). Il est important de noter que maximiser $g^2 = -g$ est équivalent à minimiser g. Ainsi donc, lorsqu'on a affaire à un jeu à somme nulle, **le joueur** 1 **maximise et le joueur** 2 **minimise** une fonction de paiement commune g. Les jeux à somme nulle servent à modéliser principalement deux situations : celles où deux adversaires ayant des intérêts opposés s'affrontent (les échecs, le football, le poker, la guerre), et celles où un joueur fait face au “pire des cas” dans un scénario incertain (un investissement en bourse, par exemple).

Définition 2.1. Un *jeu à somme nulle* est une triplet $\Gamma = (S, T, g)$ où S et T sont deux ensembles et $g : S \times T \to \mathbb{R}$ une fonction de paiement.

Notation. On désignera par $\mathrm{NE}(\Gamma)$ et $\mathrm{PE}(\Gamma)$ l'ensemble des équilibre du Nash et des paiements d'équilibre du jeu $(S, T, g, -g)$. Lorsque le jeu est fini, ces ensembles feront référence à l'extension mixte du jeu, comme dans le chapitre 1.

Remarque 2.2 (*Jeux à somme constante*)**.** Plus généralement, on peut parler de jeux à somme constante lorsque (S^1, S^2, g^1, g^2) est un jeu à deux joueurs tel que $g^1 + g^2 = c$, pour une certaine constante $c \in \mathbb{R}$. Ces jeux sont équivalents aux jeux à somme nulle dans le sens où (a) il complètement équivalent au jeu $(S^1, S^2, g^1 - c, g^2)$ qui est un jeu à somme nulle ou (b) maximiser $g^2 = c - g^2$ est équivalent à minimiser g^1, et on peut donc considérer directement le jeu à somme nulle (S^1, S^2, g^1).

Remarque 2.3 (*Jeux matriciels*)**.** Un jeu à somme nulle fini $\Gamma = (S, T, g)$ peut se représenter sous forme d'une matrice de taille $|S| \times |T|$. Par convention, le joueur 1 choisit une ligne et le joueur 2 une colonne. Réciproquement, toute matrice réelle peut être vue comme un jeu à somme nulle. Il y a donc bien une bijection entre l'ensemble des matrices et l'ensemble des jeux à somme nulle finis. Comme dans le chapitre précédent, on considéra l'extension mixte pour les jeux matriciels.

2.1.1 Maxmin, minmax et valeur

L'équilibre de Nash est en quelque sorte une notion “locale”, dans le sens où aucun joueur n'a de déviation unilatérale profitable, par rapport à un profil d'actions donné. On interprète cela en disant, par exemple, que si les joueurs s'étaient mis d'accord sur un profil, alors une condition nécessaire pour que les joueurs n'ai pas d'incitation à dévier est que ce profil soit un équilibre de

Nash. De tels accords n'ont évidemment pas de sens quand les joueurs sont des ennemis jurés. En revanche, les propriétés unilatérales (i.e. celles qui ne dépendent que d'un joueur) trouvent toute leur signification dans ce cadre, parfois appelé *strictement compétitif.*

On commence par se demander combien peut *garantir* le joueur 1. Autrement dit, combien peut-il être sûr d'avoir indépendamment de l'action de son adversaire ? En jouant une action $s \in S$, par exemple, il est certain d'obtenir un paiement dans l'ensemble $\{g(s,t) \,|\, t \in T\}$. Dans le pire des cas, donc, son paiement sera $\inf_{t\in T} g(s,t)$. L'action s donc garantit un paiement d'au moins $\inf_{t\in T} g(s,t)$. La plus grande somme que le joueur 1 peut garantir, est le *maxmin.* **Les joueurs jouent un rôle symétrique**, i.e. en changeant le sens des inégalités et en intervertissant les opérateurs sup et inf, on définit de manière duale le *minmax* comme étant la plus petite somme que le joueur 2 (qui, rappelons-le, minimise) peut garantir.

Définition 2.4. Soit $\Gamma = (S,T,g)$ un jeu à somme nulle. On définit alors le

— le *maxmin* de Γ, $v^-(\Gamma) := \sup_{s\in S} (\inf_{t\in T} g(s,t))$

— le *minmax* de Γ, $v^+(\Gamma) := \inf_{t\in T} (\sup_{s\in S} g(s,t))$

Définition 2.5. Le jeu $\Gamma = (S,T,g)$ admet une *valeur* lorsque $v^-(\Gamma) = v^+(\Gamma)$, et on la note $\mathrm{val}(\Gamma)$.

La valeur, lorsqu'elle existe, peut être interprétée comme le prix que le joueur 1 doit payer ou encaisser (cela dépend du signe de $\mathrm{val}(\Gamma)$) pour participer au jeu. Un jeu est dit *équitable* si $\mathrm{val}(\Gamma) = 0$. Les jeux admettant une valeur permettent de définir une notion unilatérale d'optimalité.

Définition 2.6. Soit $\Gamma = (S,T,g)$ un jeu admettant une valeur. Une action $s^* \in S$ est *optimale* (pour le joueur 1) si elle garantit la valeur du jeu, c'est–à–dire si

$$g(s^*,t) \geq \mathrm{val}(\Gamma), \qquad \forall t \in T$$

De même, $t^* \in T$ est *optimale pour le joueur 2* si $g(s,t^*) \leq \mathrm{val}(\Gamma)$, pour tout $s \in S$. On désigne par $S^*(\Gamma)$ et $T^*(\Gamma)$, respectivement, les ensembles des stratégies optimales pour les joueurs 1 et 2.

Remarque 2.7. Les termes maxmin et minmax témoignent du fait que, dans le jeux matriciels (aussi bien en stratégies pures que mixtes) le sup et l'inf sont atteints. Dans le cas d'un jeu matriciel $\Gamma = (S,T,g)$ on a :

$$v^-(\Gamma) = \max\{\min\{g(s,t), t \in T\}, s \in S\}$$

Dans le cas de sont extension mixte $\Gamma_\Delta = (\Delta(S), \Delta(T), g)$ on a, d'après le Lemme 1.73 :

$$v^-(\Gamma_\Delta) = \max_{x\in\Delta(S)} \min_{t\in T} g(x,t)$$

Les minmax $v^-(\Gamma)$ et $v^-(\Gamma_\Delta)$ satisfont des formules analogues.

Exemple 2.8 (*Le policier et le voleur*)**.** Un voleur vient de braquer une banque et veut fuir. Pour quitter la ville il peut passer par le pont (P) ou par la forêt (F). De même, un policier peut se rendre soit au pont soit à la forêt. Si les deux sont sur le pont, la probabilité de capture est de 1, alors que dans la forêt le policier n'a que que 50% de chances d'attraper le voleur. Il s'agit d'un jeu à somme nulle où le policier (joueur 1) maximise la probabilité de capture.

	P	F
P	1	0
F	0	$\frac{1}{2}$

En stratégies pures, d'après la remarque précédente

$$\begin{aligned} v^-(\Gamma) &= \max(\min(1,0), \min(0,1/2)) = 0 \\ v^+(\Gamma) &= \min(\max(1,0), \max(0,1/2)) = 1/2 \end{aligned}$$

La valeur n'existe pas, et il n'y a donc pas des stratégies optimales. En revanche, celle-ci existe en stratégies mixtes, puisque

$$\begin{aligned} v^-(\Gamma_\Delta) &= \max_{x\in[0,1]} \min\{g(x,P), g(x,F)\} = \max_{x\in[0,1]} \min\{x, (1-x)/2\} = 1/3 \\ v^+(\Gamma_\Delta) &= \min_{y\in[0,1]} \max\{g(P,y), g(F,y)\} = \min_{y\in[0,1]} \max\{y, (1-y)/2\} = 1/3 \end{aligned}$$

L'unique coupe de stratégies optimales est $(x^*, y^*) = (1/3, 1/3)$.

Le lemme suivant établit un **critère utile pour résoudre les jeux à somme nulle** : si les deux joueurs peuvent garantir une même quantité $w \in \mathbb{R}$, alors le jeu admet w comme valeur. Plus précisément, voici le résultat.

Lemme 2.9. *Supposons qu'il existe $w \in \mathbb{R}$ et $(s^*, t^*) \in S \times T$ tels que $g(s^*, t) \geq w$, pour tout $t \in T$ et $g(s, t^*) \leq w$, pour tout $s \in S$. Alors $w = \mathrm{val}(\Gamma)$ et (s^*, t^*) est un couple de stratégies optimales.*

Démonstration. La preuve est laissée en **exercice**. □

2.1.2 Théorème du minmax

Dans l'exemple 2.8, nous avons obtenu en particulier, les relations suivantes :

$$v^-(\Gamma) \leq v^-(\Gamma_\Delta) = v^+(\Gamma_\Delta) \leq v^+(\Gamma)$$

Il s'avère que celles-ci sont satisfaites par tous les jeux finis (voir Proposition 2.11 et Théorème 2.12 ci-dessous). Pour les montrer, nous aurons besoin du résultat suivant interprété de la manière suivante : il est plus avantageux pour le joueur 1 de choisir son action *après* son adversaire, plutôt qu'*avant* lui.

Lemme 2.10. *Pour tout jeu Γ à somme nulle, $v^-(\Gamma) \leq v^+(\Gamma)$. En particulier, si Γ est un jeu matriciel, alors $v^-(\Gamma_\Delta) \leq v^+(\Gamma_\Delta)$.*

Démonstration. Pour tout $(s, t) \in S \times T$ on a $g(s, t) \leq \sup_{s' \in S} g(s', t)$, et donc pour tout $s \in S$:

$$\inf_{t' \in T} g(s, t') \leq \inf_{t' \in T} \left(\sup_{s' \in S} g(s', t') \right) = v^+(\Gamma)$$

En prenant le sup des deux côtés on obtient alors :

$$v^-(\Gamma) = \sup_{s' \in S} \left(\inf_{t' \in T} g(s, t') \right) \leq \inf_{t' \in T} \left(\sup_{s' \in S} g(s', t') \right) = v^+(\Gamma)$$

Le jeu Γ_Δ étant un jeu à somme nulle comme un autre son maxmin et son minmax vérifient l'inégalité que nous venons de montrer pour tous les jeux à somme nulle. □

On peut maintenant démontrer le résultat annoncé plus haut.

Proposition 2.11. *Soit $\Gamma = (S, T, g)$ un jeu matriciel. Alors $v^-(\Gamma) \leq v^-(\Gamma_\Delta) \leq v^+(\Gamma_\Delta) \leq v^+(\Gamma)$.*

Démonstration. La première inégalité découle du fait que, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et tout si $A \subset B \subset E$, $\sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in B} f(x)$. Ainsi, d'après l'inclusion $S \subset \Delta(S)$ et le Lemme 1.73 :

$$v^-(\Gamma) = \sup_{s \in S} \left(\inf_{t \in T} g(s, t) \right) \leq \sup_{x \in \Delta(S)} \left(\inf_{t \in T} g(x, t) \right) = \sup_{x \in \Delta(S)} \left(\inf_{y \in \Delta(T)} g(x, y) \right) = v^-(\Gamma_\Delta)$$

Par symétrie, on a $v^+(\Gamma) \geq v^+(\Gamma_\Delta)$ et l'inégalité centrale a déjà été montré plus haut. □

Le résultat suivant est connu comme le **Théorème du minmax** et peut être considéré comme le résultat fondateur de la théorie des jeux. Après que Borel ait conjecturé le contraire, il fut enfin établi par Von Neumann en 1928. Nous verrons ci-dessous que le Théorème de Nash, obtenu plus de vingt ans plus tard, en une généralisation de ce résultat, au sens où l'équilibres de Nash coincident avec les couples des stratégies optimales dans le cas d'un jeu à somme nulle (voir Proposition 2.13). Le résultat sera admis. Le lecteur intéressé peut trouver deux demonstrations dans le chapitre destiné aux annexes : une première démonstration basée reposant sur un théorème de séparation [10], et une seconde faisant appel à la dualité forte en programmation linéaire.

Théorème 2.12 (*Von Neumann, 1928*)**.** *Soit* $\Gamma = (S, T, g)$ *un jeu à somme nulle fini. Alors* $v^-(\Gamma_\Delta) = v^+(\Gamma_\Delta)$*. De plus, les joueurs possèdent des stratégies optimales.*

Le théorème du minmax définit une *fonction valeur*, c'est–à–dire une fonction attribuant à chaque jeu matriciel un unique réel, sa valeur. **Le résultat suivant est très important**, puisqu'il relie les notions introduites plus haut (i.e. la valeur et les stratégies optimales) qui sont spécifiques aux jeux à somme nulle avec la notion d'équilibre de Nash, qui s'applique à tout jeu non-coopératif. Plus exactement, il établit que, contrairement aux jeux finis à N joueurs, où l'ensemble des paiements d'équilibres peut très bien contenir plusieurs vecteurs dans $\mathbb{R}^N$, les jeux matriciels n'admettent comme paiement d'équilibre qu'un unique vecteur, $(\mathrm{val}(\Gamma), -\mathrm{val}(\Gamma))$.

Proposition 2.13. *Soit* $\Gamma = (S, T, g)$ *un jeu admettant une valeur* $v := \mathrm{val}(\Gamma) \in \mathbb{R}$*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) s^* *et* t^* *sont des actions optimales*

(ii) $g(s^*, t) \geq g(s^*, t^*) \geq g(s, t^*)$ *pour tout* $(s, t) \in S \times T$

(iii) $s^* \in BR^1(t^*)$ *and* $t^* \in BR^2(s^*)$

(iv) (s^*, t^*) *est un équilibre de Nash*

Dans tous ces cas, $g(s^*, t^*) = v$*.*

Démonstration. Si (s^*, t^*) est un couple de stratégies optimales alors $g(s^*, t) \geq v$ pour tout $t \in T$ et $g(s, t^*) \leq v$ pour tout $s \in S$. En particulier, on a $g(s^*, t^*) = v$. Donc

$$g(s^*, t) \geq v = g(s^*, t^*) \geq g(s, t^*), \quad \forall (s, t) \in S \times T$$

On a donc

$$\begin{cases} g(s^*, t^*) \geq g(s, t^*), & \forall s \in S \\ g(s^*, t^*) \leq g(s^*, t), & \forall t \in T \end{cases}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} s^* \in BR^1(t^*) \\ t^* \in BR^2(s^*) \end{cases}$$

Donc (s^*, t^*) est un équilibre de Nash. Il reste à montrer que si (s^*, t^*) est un équilibre de Nash, alors $g(s^*, t^*) = v$. Supposons, au contraire, que $g(s^*, t^*) > v + \varepsilon$, pour un certain $\varepsilon > 0$. Comme $t^* \in BR^2(s^*)$, on a alors

$$g(s^*, t) \geq g(s^*, t^*) > v + \varepsilon, \quad \forall t \in T$$

Mais alors $v^-(\Gamma) \geq \inf_{t \in T} g(s^*, t) > v$, une contradiction. Le cas $g(s^*, t^*) < v$ se résout de manière analogue et on a bien $g(s^*, t^*) = v$. □

Corollaire 2.14. *Soit* $\Gamma = (S, T, g)$ *un jeu matriciel. Soit* $v := \mathrm{val}(\Gamma)$ *sa valeur et soient* S^* *et* T^* *les ensembles de stratégies optimales. Alors*

$$\mathrm{NE}(\Gamma) = S^* \times T^* \quad \textit{et} \quad \mathrm{PE}(\Gamma) = \{(v, -v)\}$$

Démonstration. Le résultat découle du Théorème du minmax et de la Proposition 2.13. □

Exercice 2.15 (*Un investissement*)**.** Un investisseur veut placer de l'argent dans deux actifs financiers A et B. Après analyse, il identifie trois scénarios possibles pour les mois à venir, notés a, b et c, et estime la valeur des actifs pour chacun d'eux de la manière suivante :

10. Plus exactement, sur le résultat suivant : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe fermé tels que $x \notin C$, il existe un hyperplan *séparant* x et C, i.e. $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1x_1 + \ldots a_nx_n > a_1y_1 + \ldots a_ny_n$ pour tout $y \in C$.

	a	b	c
A	2	5	1
B	1	0	3

Incapables d'estimer les probabilités de a, b et c, l'investisseur s'intéresse au pire des cas, ce qui revient à considérer la nature comme un adversaire.

1. Déterminer le maxmin et le minmax du jeu, en stratégies pures, puis en stratégies mixtes.
2. En déduire la valeur et un couple de stratégies optimales.

Remarque 2.16 (*Réinterprétation des stratégies mixtes*)**.** On a introduit les stratégies mixtes comme étant des probabilités sur des stratégies pures. L'exemple dans l'Exercice 2.15 fourni une toute autre interprétation. Clairement, l'investisseur possède deux actions pures consistant à investir la totalité de son argent dans un des actifs. Or, pour $x \in [0,1]$, la stratégie mixte $xA+(1-x)B$ s'interprète naturellement de deux façons, soit comme une probabilité (i.e. le joueur investit la totalité de son argent dans A avec probabilité x et dans B avec probabilité $1-x$) soit comme une fraction (i.e. le joueur investit une fraction x de son argent dans A et le reste dans B). Cette deuxième interprétation, souvent utilisée en finance, est aussi utilisée dans les applications militaires, où les généraux distribuent leur troupes parmi leur positions respectives, ou dans les jeux de congestion où une entreprise distribue un flux parmi plusieurs canaux disponibles.

Exercice 2.17 (*Prise de risque*)**.** Dans le jeu matriciel suivant, x est un réel quelconque, A représente une action prudente et B une action risquée. Déterminer le maxmin et le minmax en fonction de x. Le jeu admet-il une valeur ?

	A	B
A	0	1
B	-1	x

Exercice 2.18 (*Vendeurs de glaces sur la plage*)**.** En été, chaque jouer de soleil un grand nombre de vacanciers s'installent sur la plage de Port de la Selva. Pour simplifier, on suppose qu'il s'agit d'une masse uniformément distribuée sur $[0,1]$. Avant le début de l'été, deux vendeurs de glaces soumettent à la marie une position sur la plage (i.e. $s,t \in [0,1]$) sachant que chaque acheteur se rendra au magasin le plus proche, ou au hasard si les deux magasins sont équidistants. On modélise cela par un jeu à somme nulle (S,T,g), avec $S=T=[0,1]$ et la fonction de paiement $g:[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous. S'agit-il d'un jeu à somme nulle ? Si oui, déterminer le maxmin et le minmax du jeu, et la valeur si elle existe.

$$g(s,t) = \begin{cases} \frac{s+t}{2} & \text{si } s<t \\ 1-\frac{s+t}{2} & \text{si } s>t \\ \frac{1}{2} & \text{si } s=t \end{cases}$$

2.1.3 Propriétés de la valeur

Dans cette section nous nous intéressons à des propriétés de la fonction valeur. On se demande, par exemple, comment est affectée la valeur lorsque (a) on supprime ou ajoute une action à un joueur, (b) on change la fonction d'utilité des joueurs par une transformation affine préservant les préférences, ou (c) on augmente tous les paiements à un joueur. La réponse à ces questions est condensée dans la proposition suivante.

Proposition 2.19 (*Propriétés du maxmin*)**.** *Soient $\Gamma=(S,T,g)$ et $\Gamma'=(S',T',g')$ deux jeux à somme nulle admettant des valeurs v et v' respectivement. Alors*

1. Invariance par tranformation affine. *Si $g'=cg+d$ pour $c>0$ et $d\in\mathbb{R}$, alors $v'=cv+d$.*
2. Monotonie en actions. *Si $S\subset S'$, $T'=T$ et $g'=g$ sur $S'\times T'$, alors $v'\leq v$*
3. Monotonie en paiement. *Si $S=S'$, $T'=T$ et $g'\leq g$, alors $v'\leq v$*

4. Suppression des actions dominées. *Si $S' = S \backslash R$ (où $R \subset S$ est un ensemble d'actions dominées), $T' = T$ et $g' = g$ sur $S' \times T$, alors $v' = v$.*

Remarque 2.20. Lorsque les jeux n'admettent pas de valeur, les mêmes propriétés sont satisfaites par les maxmins. On remarquera aussi que l'on s'est placé du point du joueur 1. Or, par symétrie, on a des résultats analogues pour le joueur 2.

Exercice 2.21. Ecrire les résultats de la Proposition 2.19 du point de vue du joueur 2.

Exercice 2.22. Considérer les jeux $\Gamma = (S, g)$ et $\Gamma' = (S', g')$ à deux joueurs suivants :

Γ

3, 3	0, 4
4, 0	1, 1

Γ'

3, 3	0, 2
2, 0	−1, −1

1. Donner une interprétation pour les jeux Γ et Γ' et vérifier que $g \geq g'$.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathrm{PE}(\Gamma)$ et $b \in \mathrm{PE}(\Gamma')$ on a $a < b$ (i.e. $a^i < b^i$ pour $i = 1, 2$).
3. Conclure qu'il n'y a pas en général de monotonie pour les paiements d'équilibre – et que donc la "monotonie en paiement" est spécifique aux jeux à somme nulle.

2.2 Maximin dans un jeu à N joueurs

On se fixe un jeu non-coopératif $\Gamma = (N, S, g)$ sous forme normale.

Définition 2.23. Le *maximin du joueur i* est la valeur du jeu à somme nulle (S^i, S^{-i}, g^i), où le joueur i fait face à tous les autres, i.e.

$$v^i := \max_{x^i \in X^i} \min_{s^{-i} \in S^{-i}} g^i(x^i, s^{-i})$$

Le maxmin du joueur i est ce que peut garantir le joueur i dans le pire des cas, i.e. lorsque tous les autres joueurs cherchent *ensemble* à minimiser son paiement. En effet, les joueurs $N \backslash \{i\}$ agissent ensemble, comme une coalition, en choisissant l'action commune $s^{-i} \in S^{-i}$ qui minimise la fonction $g^i(s^i, \cdot)$. Cette quantité permet de définir une borne inférieure des paiements que le joueur i pourrait accepter dans une situation d'équilibre.

Définition 2.24. Soit $(v^i)_{i \in N}$ le vecteur des maximin de Γ. On dit que $z \in \mathbb{R}^N$ est *individuellement rationnel* si $z^i \geq v^i$ pour tout $i \in N$.

Exercice 2.25. Montrer que tout paiement d'équilibre est individuellement rationnel.

Pour un ensemble de joueurs $M \subset N$ non-vide, on note $S^M := \times_{i \in M} S^i$ l'ensemble d'actions jointes des joueurs dans M et $g^M := \sum_{i \in C} g^i$ leur paiement agrégé. On peut alors définir le maximin pour chaque ensemble de joueurs, ou coalition $C \subset N$, comme étant la valeur du jeu à somme nulle joué entre C et $N \backslash C$. Cette notion sera utilisé dans le Chapitre 6, dédié précisément aux jeux dits *coalitionnels*.

Définition 2.26. Pour tout $C \subsetneq N$ non-vide, on définit le *maximin de la coalition C* par :

$$v^C := \mathrm{val}\left(S^C, S^{N \backslash C}, g^C\right)$$

Exercice 2.27. Calculer les maximin v^C, pour tout $C \subsetneq N$ pour les jeux suivants :

— Le dilemme du prisonnier et la bataille des sexes

— Le jeu de la majorité et de la minorité à 3 joueurs

— Le jeu du bon samaritain

— Le jeu du film "Un homme d'exception"

2.3 Coco-valeur

Dans cette section, $\Gamma = (S^1, S^2, g^1, g^2)$ représente un jeu fini à 2 joueurs et on notera $\mathcal{G}_2$ l'ensemble de ces jeux. On supposera, en plus, que les joueurs peuvent se *transférer de l'utilités*. Cette hypothèse signifie que lorsque si, un profil d'actions s donne lieu au paiement $g(s) = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, les joueurs "ont le droit" de considérer aussi les paiements $(a - t, b + t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, où t représente le transfert d'utilité du joueur 1 au joueur 2.

2.3.1 Introduction

Comme dans la section précédente, nous allons définir une fonction valeur, i.e. une fonction attribuant à chaque jeu dans $\mathcal{G}_2$ un unique vecteur de paiement dans $\mathbb{R}^2$. Pour que ce vecteur puisse être la *solution* d'un jeu à deux joueurs, il devra vérifier certaines propriétés. Par exemple, il devra être en accord avec la valeur définie pour les jeux matriciels. En effet, on a vu dans la section précédente que ces jeux possèdent comme unique paiement d'équilibre le vecteur $(v, -v)$, où v est la valeur du jeu et qui existe d'après le théorème du minmax. Il est donc naturel d'exiger à cette nouvelle fonction valeur (que l'on veut définir) d'attribuer ce vecteur pour les jeux matriciel. Dans l'autre extrémité, supposons que $g^1 = g^2$, ce qui présuppose que $S^1 = S^2$. Ces jeux sont appelés des jeux de coordination. Les joueurs ayant des paiements identiques, une solution naturelle est le max-max, i.e. $w = \max_{s^i \in S^i} g^i(s^i, s^i)$, maximum pour les deux joueurs simultanément. On exigera à la nouvelle fonction valeur d'attribuer le vecteur (w, w) aux jeux de coordination. On remarquera que dans ce cas, w représente la moitié de l'optiuim social $W(\Gamma) = \max_{s \in S} g^1(s) + g^2(s)$. Enfin, lorsque Γ est un jeu symétrique, il est naturel de s'attendre comme solution à un vecteur équitable, i.e. où les deux coordonnées sont égales.

Encore une dernière remarque sur l'hypothèse d'utilité transférable. Supposons que le vecteur (a, b) soit la solution du jeu $\Gamma \in \mathcal{G}_2$, avec $a + b$ strictement plus petit que l'optimum social $W(\Gamma)$. Les joueurs ne pourraient-ils pas joueur une action donnant $W(\Gamma)$, puis se transférer de l'argent pour arriver à $(a + \alpha, b + \beta)$, avec $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha + \beta = W(\Gamma) - (a + b)$? Autrement dit, les joueurs pourraient avoir tous les deux un paiement strictement supérieur. Cette remarque qui, rappelons-le, n'est justifiée que dans le cadre d'utilités transférables, mène à exiger à la fonction valeur d'attribuer à chaque jeu à deux joueurs un vecteur dont la somme coïncide avec l'optimum social du jeu. La question qui demeure est donc se savoir comment, en fonction des possibilités stratégiques des joueurs (i.e. de la forme normale) l'optimum social doit être distribuée aux joueurs.

En résumant, nous voulons construire une fonction valeur $\Phi : \mathcal{G}_2 \to \mathbb{R}^2$ telle que
— $\Phi(\Gamma) = (v, -v)$ pour tout jeu matriciel Γ de valeur v.
— $\Phi(\Gamma) = (w/2, w/2)$ pour tout jeu de coordination Γ d'optimum social w.
— $\Phi(\Gamma) = (z, z)$ pour tout jeu symétrique Γ, pour un certain $z \in \mathbb{R}$.
— $\Phi(\Gamma) = (a, b)$, avec $a + b = w$, pour tout jeu Γ d'optimum social w.

L'optimum social étant de 0 pour les jeux matriciels, toutes ces conditions sont compatibles. En les combinant, on obtient que
— $\Phi(\Gamma) = (w/2, w/2)$ pour tout jeu symétrique Γ d'optimum social w
— $\Phi(\Gamma) = (w - t, t)$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}_2$, pour un certain transfert $t \in \mathbb{R}$.

2.3.2 La coco-valeur

La fonction de paiement $g = (g^1, g^2)$ peut se décomposer en la somme d'un terme coopératif et d'un terme compétitif, i.e.

$$(g^1, g^2) = \frac{1}{2}(g^1 + g^2, g^1 + g^2) + \frac{1}{2}(g^1 - g^2, -(g^1 + g^2))$$

Autrement dit, g est la de deux fonctions de paiement bien particulières : la première correspond à un jeu de coordination, la seconde à un jeu à somme nulle. Or ces deux classes de jeux possèdent une solution assez naturelle : l'optimum social (ou max-max) et la valeur (ou min-max). On définir la coco-valeur (ou valeur de coopération-compétition) à l'aide de cette décomposition-là.

Définition 2.28. La *coco-valeur* est une application de $\mathcal{G}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui attribue, à chaque jeu $\Gamma = (S^1, S^2, g^1, g^2)$ le vecteur

$$\mathrm{coco}(\Gamma) := \left(\frac{w+v}{2}, \frac{w-v}{2}\right)$$

où w est l'optimum social de Γ et v est la valeur du jeu matriciel $(S^1, S^2, g^1 - g^2)$.

Notation. Les coordonnées de la coco-valeur seront notées $\mathrm{coco}^i(\Gamma)$ pour $i = 1, 2$.

Déroulement du jeu et interprétation. La coco-valeur nécessite de la coopération entre les joueurs. En effet, pour que le vecteur de paiement $\mathrm{coco}(\Gamma)$ soit attribué aux joueurs, il faut que les ceux-ci se mettent d'accord sur deux choses :

— L'action jointe $s = (s^1, s^2)$ qui va être joueur dans le jeu. Il faut que celle-ci donne l'optimum social et, s'il y en a plusieurs, il faut se coordonner sur l'une d'entre elles.

— Le transfert d'utilité qu'ils effectueront ensuite pour atteindre la coco-valeur. Précisément, le joueur 1 transférera $g^1(s) - \mathrm{coco}^1(\Gamma)$ au joueur 2.

On a donc quitté, dans cette section, le cadre des jeux non-coopératifs, où la communication (et toute autre sorte de coopération entre les joueurs) était exclue. Nous traiterons plus tard, et de manière plus approfondie, des classes importantes de jeux coopératifs : les jeux avec communication (voir chapitre 5) et les jeux coalitionnels (voir chapitre 6). On a choisit de traiter la coco-valeur ici pour en avoir déjà un avant-goût.

Exercice 2.29. Montrer que la coco-valeur satisfait les propriétés mentionnées plus haut, à savoir :

1. $\mathrm{coco}(\Gamma) = (v, -v)$ pour tout jeu matriciel Γ de valeur v
2. $\mathrm{coco}(\Gamma) = (w/2, w/2)$ pour tout jeu de coordination Γ d'optimum social w
3. $\mathrm{coco}(\Gamma) = (w/2, w/2)$ pour tout jeu symétrique Γ d'optimum social w
4. $\mathrm{coco}^1(\Gamma) + \mathrm{coco}^2(\Gamma) = w$ pour tout jeu Γ d'optimum social w

Exemple 2.30 (*Les vendeurs de hot-dogs*)**.** Cet exemple est dû à Kalai et Kalai. Simultanément et indépendamment, deux vendeurs de hot-dogs doivent choisir un emplacement, soit à l'aéroport (A), soit à la plage (B). La demande à l'aéroport est de 40 hot-dogs par jour, tandis que la demande à la plage est de 100 hot-dogs. Lorsque les deux s'installent au même emplacement, ils partagent équitablement la demande. Le premier joueur obtient un bénéfice d'1 euro par hot-dog vendu, le deuxième en obtient 2 euros. On modélise cela par le jeu Γ, que l'on décompose en une somme d'un jeu coordination Γ_c et d'un jeu à somme nulle Γ_0, de paiements $(g^1 + g^2)/2$ et $(g^1 - g^2)/2$ respectivement. En gras, nous avons indiqué le max-max du premier et la valeur du second. La coco-valeur vaut donc $(95, 145)$: les joueurs jouent (A, B), puis le joueur 1 donne -55 au joueurs 2 (ou reçoit 55 du joueur 2, si l'on préfère). [11]

$$\underset{\Gamma}{\begin{array}{c|c|c|} & A & B \\ \hline A & \begin{array}{r} 40 \\ 20 \end{array} & \begin{array}{r} 200 \\ 40 \end{array} \\ \hline B & \begin{array}{r} 80 \\ 100 \end{array} & \begin{array}{r} 100 \\ 50 \end{array} \\ \hline \end{array}} = \underset{\Gamma_c}{\begin{array}{c|c|c|} & A & B \\ \hline A & \begin{array}{r} 30 \\ 30 \end{array} & \begin{array}{r} \mathbf{120} \\ \mathbf{120} \end{array} \\ \hline B & \begin{array}{r} 90 \\ 90 \end{array} & \begin{array}{r} 75 \\ 75 \end{array} \\ \hline \end{array}} + \underset{\Gamma_0}{\begin{array}{c|c|c|} & A & B \\ \hline A & \begin{array}{r} 10 \\ -10 \end{array} & \begin{array}{r} 80 \\ -80 \end{array} \\ \hline B & \begin{array}{r} -10 \\ 10 \end{array} & \begin{array}{r} \mathbf{25} \\ \mathbf{-25} \end{array} \\ \hline \end{array}}$$

Le résultat suivant "axiomatise" la coco-valeur au sens où ils identifient quelques propriétés, ou axiomes, qui caractérisent la fonction. Il a été établi par Kalai et Kalai, père et fils, en 2011. C'est dans ce même article qu'ils ont donné le nom de coco-valeur à ce vecteur "max-max – min-max" qui avait déjà été introduit par Nash (1953) et Selten (1960).

Théorème 2.31. *La coco-valeur est l'*unique *application de $\mathcal{G}_2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés ci-dessous pour tout jeu fini à deux joueurs Γ,*

11. D'après Kalai et Kalai, ce transfert peut être vu comme la somme d'un transfert -80 pour que les paiements soient égaux, et d'un transfert de $+25$ pour dédommager le joueur 2 d'avoir accepté que les paiements soient égaux.

— Efficience : $\text{coco}^1(\Gamma) + \text{coco}^2(\Gamma) = \max_{s \in S}(g^1(s) + g^2(s))$
— Invariance par translation : *Soit* $c \in \mathbb{R}^2$ *et soit* $\Gamma' = (S, g + c)$*. Alors* $\text{coco}(\Gamma') = \text{coco}(\Gamma) + c$
— Monotonie en actions : *Si* Γ' *est obtenu en supprimant quelques actions au joueur* $i \in \{1, 2\}$ *dans* Γ*, alors* $\text{coco}^i(\Gamma') \leq \text{coco}^i(\Gamma)$
— Monotonie en paiements : *Si* $g^1 > g^2$*, alors* $\text{coco}^1(\Gamma) > \text{coco}^2(\Gamma)$
— Actions redondantes [12] : *Si* Γ' *est obtenu en supprimant quelques actions redondantes dans* Γ*, alors* $\text{coco}(\Gamma) = \text{coco}(\Gamma')$

Démonstration. La coco-valeur vérifie les cinq propriétés énoncés dans le théorème **exercice** . On admettra que ces propriétés suffisent pour caractériser la fonction. ☐

Exemple 2.32 (*Partager ou voler ?*)**.** Le jeu suivant est tiré d'un jeu télévisé anglais très populaire, le "golden balls". Dans ce jeu, après de multiples épreuves en commun, les joueurs disposent d'une somme d'argent $x > 0$, et de deux minutes pour se parler face à face, avant de décider simultanément et indépendamment, soit de partager (P) ou de voler (V) le pot commun. En normalisant (i.e. en divisant par x), les paiements sont représentés de la façon suivante :

	P	V
P	1/2 1/2	1 0
V	0 1	0 0

Proche du dilemme du prisonnier, le jeu admet un (unique) équilibre en stratégies dominantes, le profil (V, V), et le paiement correspondant est $(0, 0)$. La coco-valeur, en revanche, propose le vecteur de paiement $(1/2, 1/2)$ qui s'obtiendrait en jouant (P, P), (V, P) ou (P, V) et en effectuant ensuite des transferts d'utilité de 0, $1/2$ et $-1/2$, respectivement. En effet, s'agissant d'un jeu symétrique, les deux joueurs ont le même paiement, et la somme doit être égale à 1, optimum social du jeu.

Exemple 2.33 (*Bataille des sexes disymétrique*)**.** Le jeu ci-dessous représente la bataille des sexes avec un premier joueur qui est un fanatique de cinéma :

	C	T
C	2 10	1 1
T	0 0	3 2

Pour calculer la coco-valeur, on commence par déterminer l'optimum social $12 = g(C, C)$. On calcule ensuite la valuer du jeu $(S^1, S^2, g^1 - g^2)$ représenté ci-dessous

8	0
0	-1

La valeur de ce jeu est 0, puisqu'en jouant C, le joueur garantit un paiement ≥ 0 et en jouant T le joueur 2 garantit un paiement ≤ 0. Il s'ensuit que, malgré la disymétrie dans les paiements, $\text{coco}^1(\Gamma) = \text{coco}^2(\Gamma) = 6$. Pour l'obtenir, les joueurs iront ensemble au cinéma, puis le joueur 1 donnera 4 utils au joueurs 2 (en lui offrant un cadeau, par exemple).

2.4 Exercices

2.4.1 Jeux à somme nulle

Exercice 2.34 (*Partage du gâteau*)**.** Deux joueurs vont se partager un gâteau. J1 commence par proposer un partage $(x, 1 - x)$, $x \in [0, 1]$. Puis, le joueur 2 choisit une part.

12. Dans un jeu (N, S, g), une action s^i du joueur $i \in N$ est *redondante* s'il existe une autre action t^i lui donnant les mêmes paiements face à tout profil des autres joueurs, i.e. $g^i(s^i, s^{-i}) = g^i(t^i, s^{-i})$ pour pout tout $s^{-i} \in S^{-i}$.

1. S'agit-il d'un jeu à somme nulle ? Écrire le jeu sous forme normale.
2. Montrer l'existence de la valeur et exhiber des stratégies optimales.

Exercice 2.35 (*Poker simplifié*)**.** D'abord, chaque joueur paye 1 euro. Puis le joueur 1 tire une carte, qui peut être haute ou basse avec la même probabilité. Il est le seul à la voir. Puis, il peut : *se coucher* (C), auquel le joueur 2 remporte les 2 euros, et la partie se termine ou *miser* (M), auquel cas il doit mettre 2 euros de plus et c'est le tour du joueur 2. Ensuite, le joueur 2 peut *se coucher* (c), auquel cas le joueur 1 remporte le pot, ou *payer* (p), auquel cas il doit mettre 2 euros de plus. Le joueur 1 montre alors sa carte et remporte le pot si elle est haute ; si elle est basse c'est le joueur 2 qui le remporte.

1. Ecrire le jeu sous forme normale et identifier les stratégies faiblement dominées.
2. Résoudre le jeu, i.e. déterminer les stratégies optimales et la valeur du jeu.

Exercice 2.36 (*Jeux* 2×2)**.** Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, considérer le jeu matriciel suivant :

a	c
b	d

Soit $v = v(a, b, c, d)$ la valeur du jeu (en stratégies mixtes).

1. Montrer que $\min(a, b, c, d) \leq v \leq \max(a, b, c, d)$
2. Montrer que $v \in \{a, b, c, d, \frac{ad-bc}{a+d-b-c}\}$
3. Trouver des conditions sur a, b, c, d pour avoir $v = \frac{ad-bc}{a+d-b-c}$

Exercice 2.37 (*Un jeu de cartes*)**.** On donne à chaque joueur un As, un Roi, une Dame et un Valet. Simultanément, ils choisissent une carte et la placent visible sur la table. Le premier joueur gagne avec (As, As) et avec deux têtes différentes. Dans les autres cas, gagne son adversaire. Résoudre le jeu. Si le premier joueur a payé 10 euros pour y jouer, combien devrait-on faire payer au second pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 2.38 (*Jeu matriciel à paramètres*)**.** Considérer le jeu $\Gamma(a, b, c)$ suivant, où $a, b, c > 0$ sont des paramètres :

	A	B	C
A	a	b	0
B	c	$-b$	0
C	$-a$	0	$-c$

1. Montrer que C n'est jamais jouée par une stratégie optimale du joueur 1. En déduire que le joueur 1 a une unique stratégie optimale, pour tout $a, b, c > 0$.
2. Montrer que $\frac{1}{3} \min(a, b, c) \leq \mathrm{val}(\Gamma(a, b, c)) \leq \frac{1}{2} \min(a, b, c)$, pour tout $a, b, c > 0$.
3. Déterminer la valeur des jeux $\Gamma(2a, a, a)$ et $\Gamma(a, a, a)$, pour tout $a > 0$.
4. Déterminer la valeur du jeu $\Gamma(a, b, c)$ pour tout $a, b, c > 0$.

Exercice 2.39 (*Jeu matriciel diagonal*)**.** Considérer le jeu matriciel $\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, pour $a_1, ..., a_n > 0$. Autrement dit, $S = T = \{1, \ldots, n\}$ et $g(i, j) = a_i \mathbb{1}_{\{i=j\}}$ pour $(i, j) \in S \times T$.

1. Montrer que $\frac{1}{n} \min(a_1, \ldots, a_n) \leq \mathrm{val}(\Gamma) \leq \min(a_1, \ldots, a_n)$.
2. Montrer que pour toute stratégie optimale x du joueur 1, $x(i) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.
3. En déduire une stratégies optimale du joueur 2 à à l'aide du principe d'indifférence.
4. Déterminer la valeur et l'ensemble des équilibres de Nash du jeu.

Exercice 2.40 (*Résolution de jeux matriciels*). Résoudre les jeux suivants :

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.41 (*Pierre – Feuille – Ciseaux*).

1. Résoudre le jeu de Pierre – Feuille – Ciseaux.
2. Résoudre le jeu Pierre – Feuille – Ciseaux–Source, de l'Exemple1.51.

Exercice 2.42 (*Jeu sur* $\mathbb{N}$). Considérer le jeu $S = T = \mathbb{N}$ et $g(s,t) = \frac{1}{1+s+t}$

1. Calculer l'infsup et le supinf de ce jeu. Le jeu a-t-il une valeur ?
2. Dire pour chaque joueur s'il possède des stratégies optimales. Si oui, les donner.
3. Montrer que 0 est une stratégie dominante pour le joueur 1. Commenter.

Exercice 2.43 (*Le voleur et le gendarme*). Un voleur vient de braquer une banque. Il a trois choix : fuir vers le pont (p), fuir vers la forêt (f) ou se rendre (r). Il risque une peine de $b > 0$ années de prison s'il se rend et de $a > b$ années s'il est capturé dans sa fuite. Un gendarme, cherchant à arrêter le voleur, choisit d'aller soit au pont (P) soit à la forêt (F). Il y capture le voleur (lorsqu'il y est) avec probabilité 1 et $\lambda \in [0,1]$, respectivement. On note ce jeu $\Gamma(a,b,\lambda)$.

1. Ecrire le jeu $\Gamma(a,b,\lambda)$ sous forme matricielle.
2. Déterminer un couple de stratégies optimales et la valeur de $\Gamma(a,b,\lambda)$, pour tout a, b et λ.

Exercice 2.44 (*Une bataille*). L'armée A peut attaquer deux positions de l'armée B avec 2 divisions seulement. L'armé B peut défendre ses deux positions avec 3 divisions, et doit toujours avoir une division sur chaque position. Une position est prise si elle est attaquée par strictement plus de divisions qu'elle n'est défendue. L'utilité accordée par l'armée B à ses positions est égale à v_1 et v_2 respectivement $(v_1 > v_2 > 0)$. L'objectif de l'armée A est de maximiser les pertes de l'armée B, celle-ci cherche à les minimiser.

1. Écrire cette situation comme un jeu sous forme normale. Quel type de jeu est-ce ?
2. Montrer que ce jeu admet un unique équilibre de Nash et le déterminer.
3. (*) Généraliser au cas avec k positions, et où A dispose de n divisions pour attaquer et B dispose de m divisions pour se défendre.

Exercice 2.45 (*Propriétés de la valeur*). Soit $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$ une matrice réelle $n \times m$, représentant un jeu à deux joueurs et somme nulle fini et soit $\mathrm{val}(A)$ sa valeur (en stratégies mixtes). On note par A^t la matrice transposée. Montrer que :

1. $\mathrm{val}(A) = \mathrm{val}(A^t)$
2. $\mathrm{val}(A + c) = \mathrm{val}(A) + c$
3. Si $A = A^t$, alors $\mathrm{val}(-A) = -\mathrm{val}(A)$
4. Si $A = -A^t$, alors $\mathrm{val}(A) = 0$

2.4.2 Coco-valeur

Exercice 2.46 (*Axiomes de la coco-valeur*). Montrer que la coco-valeur vérifie les cinq propriétés énoncées dans le Théorème 2.31.

Exercice 2.47 (*Jeux équitables*). Donner des conditions suffisantes sur un jeu fini à deux joueurs pour que les deux coordonnées de la coco-valeur soient égales.

Exercice 2.48 (*Coco-valeur sur des exemples classiques*). Déterminer la coco-valeur pour (a) la bataille des sexes, (b) le dilemme du prisonnier, (c) chicken et (d) le pénalty.

Exercice 2.49 (*Coco-valeur sur des classes de jeux*). A l'aide de l'Exercice 2.45, déterminer la coco-valeur pour tout jeu à deux joueurs *symétrique* ou *à somme nulle*.

Exercice 2.50 (*Coco-valeur et paiement d'équilibre*)**.** Considérer le jeu Γ suivant :

	A	B
A	5 3	2 2
B	0 1	-2 0

1. Montrer que le jeu admet un unique équilibre de Nash. S'agit-il d'un équilibre en stratégies dominantes ? Déterminer l'unique paiement d'équilibre $z \in \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la coco-valeur $w \in \mathbb{R}^2$ de Γ. Comparer z et w et commenter.

3 Extensive-Form games with perfect information

3.1 Rooted trees

Let us start by recall some elements from graph theory.

Définition 3.1.

- A *graph* is described by a pair (V, E) where V is a set of vertices (or nodes), and $E \subset V \times V$ is a set of edges, or links between nodes. $(v, v) \notin E$, for all $v \in V$.
- A *graph is finite* iff V and E are finite sets.
- A *path from u to v in (V, E)* is a sequence $(v_0, \ldots, v_n)$ such that $n \geq 1$, $u = v_0$, $v = v_n$ and $(v_i, v_{i+1}) \in E$ for all $i = 0, \ldots, n-1$.
- A *cycle* is a path from one node to itself.
- A *connected graph* is a graph (V, E) in which for any two different nodes $u, v \in V$, there exists a path from u to v.
- A *tree* is a connected graph with no cycles. Equivalently, a tree is a graph in which any two vertices can be connected by a unique path.
- A *rooted tree* is a tree in which one vertex has been designated to be the root.

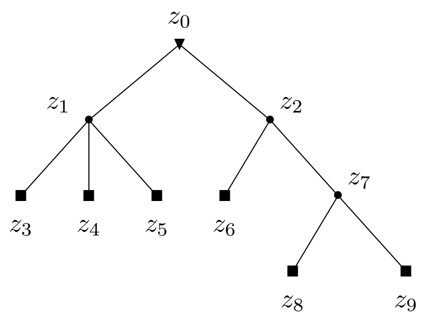
In the sequel, we will focus on **finite, rooted trees**, denoted simply as trees.

Définition 3.2. A *tree* is described by a pair $\mathcal{Z} = (Z, r)$ such that

- Z is a finite set of nodes.
- $r \in Z$ is the root.
- For any $z \in Z$, $z \neq r$, there exists a unique path from r to z.

Comments. Because of the last property, there is a one-to-one correspondence between nodes and paths in this case : each node is determined by the unique path connecting it to the root, and each path determines a unique node. A canonical way to refer to a node is by its corresponding path, described as a sequence of nodes or, alternatively, as a sequence of edges.

Exemple 3.3. Consider the following tree $Z = \{z_0, \ldots, z_9\}$, with root $r = z_0$. Denote by ℓ the edges which go down to the left, r the edges which go down to the right, and m the edge that goes down straight. Then, one canonically identifies Z with the set of paths, or *histories*, $H = \{\emptyset, \ell, r, \ell\ell, \ell m, \ell r, r\ell, rr, rr\ell, rrr\}$.



Définition 3.4. Let $\mathcal{Z} = (Z, r)$ be a tree.

- The *predecessor map* is defined as follows : for any $z \in Z \backslash \{r\}$, let $(z_0, \ldots, z_n)$ be the unique path from r to z, for some $n \geq 1$. Then $\theta(z) := z_{n-1}$. Note that, for each $z \in Z \backslash \{r\}$, there exists a unique $n \geq 1$ (the length of the path) such that $\theta^n(z) = r$.
- For any $z \in Z$, the *set of successors of z* is $C(z) := \{z' \in Z \,|\, \theta(z') = z\}$.
- The *set of terminal nodes of $\mathcal{Z}$* is $T := \{z \in Z \,|\, C(z) = \emptyset\}$.

3.2 Extensive-form games with no chance

Model

Définition 3.5. A *extensive form game with perfect information and no chance* is described by a tuple $\Gamma = (N, \mathcal{Z}, P, (g^i)_{i\in N})$ where

— N is a finite set of players.

— $\mathcal{Z} = (Z, r)$ is a tree.

— $P : Z\backslash T \to N$ is the *player mapping* : it assigns a player to each non-terminal node.

— $g^i : T \to \mathbb{R}^i$ is player i's payoff function, for all $i \in N$.

Outline of the game. The player who is assigned to the root, $P(r)$, starts by selecting a successor $z_1 \in C(r)$. If z_1 is a terminal node, the game terminates. If $z_1 \notin T$, then it is the turn of player $P(z_1)$, who must select a successor $z_2 \in C(z_1)$. The play goes on, producing a path sequence of nodes $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ such that $z_0 = r$, $z_{m+1} \in C(z_m)$ for all $m = 0, \ldots, n-1$ and $z_n \in T$. Player i's payoff is then $g^i(z_n)$, for each $i \in N$.

Notation

— We denote by $g = (g^i)_{i\in N}$ the *vector payoff*, $g : T \to \mathbb{R}^N$.

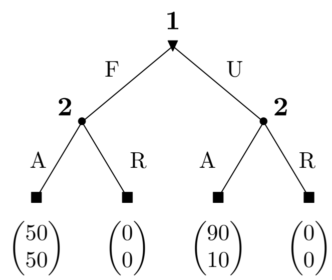
— Z^i is the set of nodes affected to player i, $Z^i := \{z \in Z\backslash T,\ P(z) = i\}$.

— $Z\backslash T$ is the *set of decision nodes*.

Comments. Equivalently, one can describe the player mapping by the (disjoint) sets $(Z^i)_{i\in N}$. Note that Z is the disjoint union of T, the set of terminal nodes, and $(Z^i)_{i\in N}$, the decision nodes of each player. One may assume, without loss of generality, that each nonterminal node has at least two successors. Indeed, decision nodes with a unique successor are superfluous, since there is nothing to be decided.

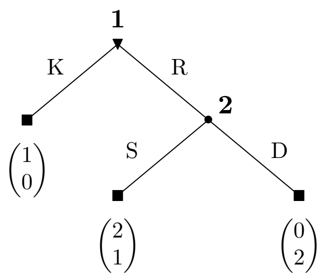
Examples

1. *Fair-Unfair Ultimatum game*. The government assigns an important amount of money to two agents, subject to their agreement on how to share it. After endless negotiations, the first agent goes for an ultimatum : "this is my last offer, take it or leave it". The following tree represents an ultimatum game in which player 1 considers a fair (F) and an unfair (U) offer. The fair offer consists in sharing the money equitably, while the unfair offer consists in keeping 90% of the money for himself :

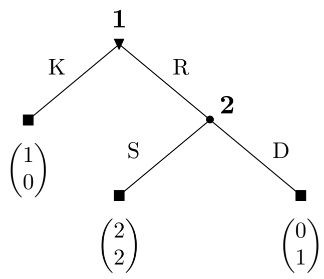


Formally, the *fair-unfair ultimatum game* is described by a set of players $N = \{1, 2\}$, a tree $\mathcal{Z} = (Z, r)$ where $Z = \{r, F, U, FA, FR, UA, UR\}$, a player mapping determined by the set of nodes $Z^1 = \{r\}$ and $Z^2 = \{F, U\}$ and a payoff function $g : Z\backslash(Z^1 \cup Z^2) \to \mathbb{R}^2$.

2. *The Kidnap*. A terrorist can either kill (K) or release (R) his victim. If he releases the victim, then he can either denounce the terrorist (D) or remain silent (S). There are three possible outcomes : (K), (R, D) and (R, S). The terrorist strictly prefers (R, S) to (K) and (K) to (R, D). The victim's preferences depend on whether he developed Stockholm's syndrome or not : he strictly prefers to remain silent if he did, and to denounce the terrorist if he didn't. Thus, he strictly prefers (R, S) to (R, D) in the first case and (R, D) to (R, S) in the second. In any case, K is the worst possible outcome for the victim.



No syndrome



Stockholm's syndrome

3.3 Extensive-form games with chance moves

Model

Définition 3.6. An *extensive-form game with perfect information* is described by a tuple $(N, \mathcal{Z}, P, \varphi, g)$ where

- N is a finite set of players.
- $\mathcal{Z} = (Z, r)$ is a tree.
- $P : Z \backslash T \to N \cup \{*\}$ is the *player mapping* which assigns to each non-terminal node either some player $i \in N$ or the *chance player* $*$. Let $Z^* := P^{-1}(*)$.
- φ is the *chance mapping*, which assigns to each $z \in Z^*$, a probability $\varphi(z) \in \Delta(C(z))$.
- $g : T \to \mathbb{R}^N$ is the payoff function.

Outline of the game. The game proceeds as in the case with no chance player, as far as Z^* is not reached. When the play is at $z \in Z^*$, a successor is drawn according to $\varphi(z) \in \Delta(C(z))$, i.e. the play moves on to z' with probability $\varphi(z)(z')$, for each $z' \in C(z)$.

Remark. To avoid specifying whether there are or not chance moves, this model is intended to generalize the previous one. To do so, one allows the set Z^* to be empty.

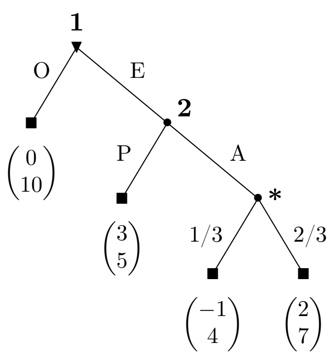
Notation. Z^* is the *set of chance nodes*, and $Z \backslash (T \cup Z^*)$ is the *set of decision nodes*. That is, every node is either a terminal node, a chance node or a decision node.

Définition 3.7.

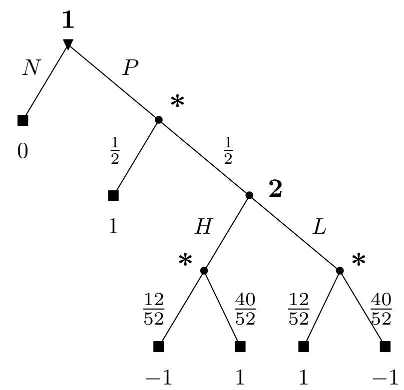
- A *pure strategy for player i* in the extensive-form game Γ is a mapping which assigns a successor to each decision node in Z^i, i.e. $s^i : Z^i \to Z$ such that $s^i(z) \in C(z)$ for all $z \in Z^i$. We denote by S^i the set of pure strategies of player i.
- A *mixed strategy for player i* is a probability over the set of pure strategies. The set of mixed strategies for player i is denoted by $X^i := \Delta(S^i)$.

Examples

1. *Entry in the market*. A company considers entering a market in which there is currently another firm. The first firm may stay out (O) and get nothing, or enter the market (E). The operating firm can then remain passive (P) or fight aggressively (A) :



2. *Card game*. Consider a two-player zero sum game, played with a standard 52 playing cards deck. Player 1 chooses either to play (P) or not to play (N). If he plays, a coin is tossed : player 1 wins if the outcome is heads. If it is tails, player 2 has to make a guess : a high card (Ace, King, Queen or Jack), or a low card (any other card). Then, a card is taken from the deck, player 2 wins iff he made the good guess.



3.4 Normal-form representation

A pure strategy profile specifies the actions of all players at any possible decision node. It follows that, if there are no chance moves, a pure strategy profile determines a unique path from the root to some terminal node. When the game has chance moves, a strategy profile $s \in S$ may induce several possible paths from the root to the set of terminal nodes, depending of the chance moves along the way. In both cases, a strategy profile s determines a unique probability distribution $f(s) \in \Delta(T)$ over the set of possible terminal nodes [13]. Similarly, a strategy profile s defines a unique (expected) payoff vector, $\sum_{t \in T} g(t) f(s)(t)$. Let $g \circ f : S \to \mathbb{R}^N$ be the mapping thus described.

Définition 3.8. The *normal-form representation* of the extensive-form game Γ is the game $(N, (S^i)_{i \in N}, g \circ f)$.

Définition 3.9. A *Nash equilibrium of an extensive-form game* is a Nash equilibrium of its normal-form representation.

Examples

Let us give the normal-form representation of the examples presented above, in sections 3.2 and 3.3 and compute for each of them the set of pure Nash equilibria.

1. *Fair-Unfair Ultimatum game*. The strategy (F, AR) (player 1 proposes a fair offer, and player 2 accepts fair offers but rejects unfair ones) leads to a unique terminal node, the payoff of which is $(50, 50)$. Thus, $(g \circ f)(F, AR) = (50, 50)$. Similarly, any action profile induces a unique payoff vector : the sets of pure strategies are $S^1 = \{F, U\}$ and $S^2 = \{AA, AR, RA, RR\}$, and its normal-form representation is as follows :

	AA	AR	RA	RR
F	50 / 50	50 / 50	0 / 0	0 / 0
U	10 / 90	0 / 0	10 / 90	0 / 0

The set of pure Nash equilibria of this (extensive-form) game is $\{(F, AR), (U, RA), (U, AA)\}$.

2. *The Kidnap* (with and without Stockholm's syndrome). The normal-form representation of these games are given as follows :

13. When the game has no chance moves $f(s)$ is supported by a unique node.

	S	D
K	1, 0	1, 0
R	2, 1	0, 2

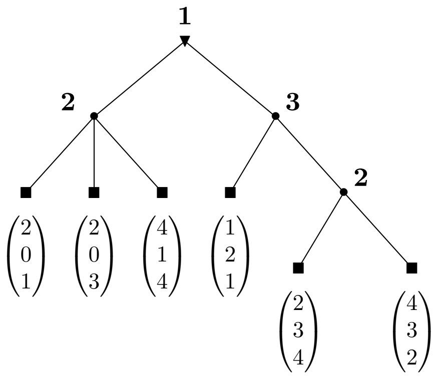
	S	D
K	1, 0	1, 0
R	2, 2	0, 1

The first game (no syndrome) has a unique pure Nash equilibrium, (K, D), whereas the second has two, (K, D) and (R, S). That is, the Stockholm's syndrome induces a new Nash equilibrium, in which the victim is released.

3. *Entry in the market*. The pure strategy profile (E, A) (player 1 enters the market, and player 2 fights aggressively) may lead to two terminal nodes. One easily computes the expected payoff associated to this action, $(g \circ f)(E, A) = \frac{2}{3}(-1, 4) + \frac{1}{3}(2, 7) = (1, 6)$. The other strategy profiles (O, P), (O, A) and (E, P) determine a unique payoff. Its normal-form representation is given as follows, so that (E, A) is the unique pure Nash equilibrium if the game :

	P	A
O	0, 10	0, 10
E	3, 5	1, 6

Exercice 3.10. Consider the following extensive-form game :



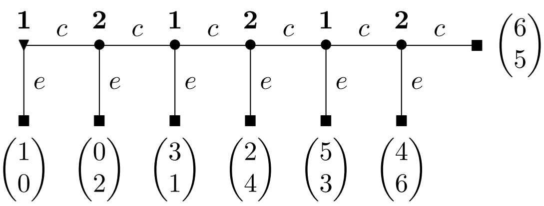
How many pure strategies do the payers have ? Put the game in normal form.

Exercice 3.11. Put the *card game* of Section 3.3 in normal-form and solve it (i.e. find its value and optimal strategies).

Reduced normal-form

The normal-form representation may contain some payoff-equivalent pure strategies. To avoid this redundancy, it is useful to consider the *reduced normal-form*, obtained by merging payoff-equivalent strategies into one single representative.

Consider the following game, known as the *Centipede game*.



Each player has three nodes, with two successors at each node : c for *continue*, and e for *exit*. Therefore, both players have 2^3 strategies, and its normal-form representation is a 8×8 bi-matrix game. Formally, denote the non-terminal nodes by $z_1, \dots, z_6$, reading from left to right, so that $Z^1 = \{z_1, z_3, z_5\}$ and $Z^2 = \{z_2, z_4, z_6\}$. The set of pure are given by $S^1 = S^2 = \{eee, eec, ece, ecc, cee, cec, cee, ccc\}$. The action cee of player $i = 1, 2$, for instance, should be read as : "continue at player i's first decision node, exit at his second, and exit at his third".

Let us show that the normal-form is redundant. Let $s^1 = eee$ and $t^1 = ecc$ be two strategies of player 1 that select e at the first decision node. Then, no matter what player 2 does, both strategies induce the same outcome, i.e. they are payoff equivalent. Similar considerations suggest that each player has only four relevant pure strategies, which specify whether he decides to exit at his first, second or third decision node, or to continue at each node. Denoting these reduced strategies as e_1, e_2, e_3 and C, respectively, one obtains the following reduced-normal form :

	e_1	e_2	e_3	C
e_1	1, 0	1, 0	1, 0	1, 0
e_2	0, 2	3, 1	3, 1	3, 1
e_3	0, 2	0, 2	5, 3	5, 3
C	0, 2	0, 2	4, 6	6, 5

The reduced game has a unique pure Nash equilibrium, (e_1, e_1). Note, however, that this equilibrium corresponds to 16 pure Nash equilibria of the extensive-form game. Indeed, e_1 represents 4 payoff-equivalent strategies, eee, eec, ece and ecc, so that (e_1, e_1) stands for 4×4 strategy profiles of the (standard) normal-form representation.

3.5 Sub-game perfect equilibria

Let $\Gamma = (N, \mathcal{Z}, P, \varphi, g)$ be an extensive-form game with perfect information (with or without chance moves)

Définition 3.12. For any node $z \in Z \backslash T$, the *subtree stemming from z* is the restriction of $\mathcal{Z}$ to the successors of z, and the successors of the successors of z, and so on. That is,

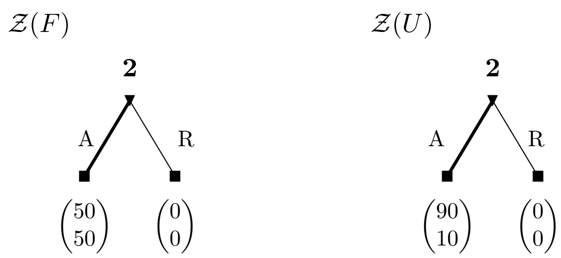
$$\mathcal{Z}(z) = \{z, C(z), C(C(z)), \dots\}.$$

Définition 3.13. For any node $z \in Z \backslash T$, the *subgame stemming from z* is the restriction of Γ to the subtree $\mathcal{Z}(z)$.

Notation. A proper subtree of $\mathcal{Z}$ is a subtree which is strictly contained in $\mathcal{Z}$. Equivalently, it is a subtree stemming form $z \in Z \backslash (T \cup r)$. Proper subgames are subgames from proper subtrees.

Définition 3.14. A *subgame Perfect Equilibrium* is a pure Nash equilibrium whose restriction to any subgame is a pure Nash equilibrium of the subgame.

Illustration. The thick lines indicate the Nash equilibria :



The proper subgames in the Fair-Unfair Ultimatum game

Recall that the three pure Nash equilibria of this game were (F, AR), (U, RA) and (U, AA). The two first ones are not sub-game perfect for their restriction to the proper sub-trees prescribes the action R in one of them. On the other hand, (U, AA) is a sub-game perfect equilibrium.

Théorème 3.15 (Existence of SPNE)**.** *Any finite extensive-form game with perfect information (with or without chance moves) admits a sub-game perfect equilibrium.*

Démonstration. The proof proceeds by backward induction. □

Comments.

— Every extensive-form games with perfect information admit at least one pure Nash equilibrium since, by definition, $SPNE \subset PNE$.

— Generically, a finite extensive-form game with perfect information admits a *unique* sub-game perfect equilibrium. Indeed, the outcomes being all different with probability 1, each player has a unique best action at each decision node. The unique sub-game perfect equilibrium results from backward induction.

— The previous comment does not apply to Nash equilibria : a "generic" tree with generic payoffs will have a continuum of Nash equilibria.

Backward induction

Let $\Gamma = (N, \mathcal{Z}, P, \varphi, g)$ be an extensive-form game, and let T be the set of its terminal nodes. Let $z \in Z$ be a *pre-terminal* node. That is, such that $C(z) \subset T$, so that the sub-game stemming from z has only one decision node. We define a new game Γ' by replacing, for any pre-terminal node z, the subgame $\Gamma(z)$ with a terminal node. The payoff associated to this new node depends on whether it is a player or Chance who selects an action in the subgame $\Gamma(z)$, i.e. $P(z) \in N$ or $P(z) = *$.

— If $P(z) = i \in N$, define the payoff at this new node as $g(z^*)$, where $z^* \in C(z)$ is an optimal action of player i in $\Gamma(z)$, i.e. $z^* \in \operatorname{argmax}_{z' \in C(z)} g^i(z')$.

— If $P(z) = *$, define the payoff at this new node as $\sum_{z' \in C(z)} \varphi(z)(z')g(z')$.

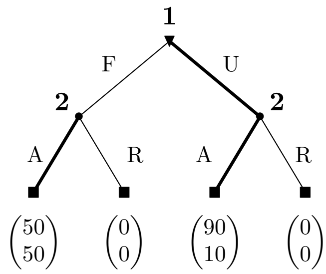
We have thus defined a new game Γ' whose terminal nodes are the pre-terminal nodes of the original game, and the terminal nodes of Γ whose predecessor was not pre-terminal.

Inductively, this process gets eventually to the root, to which it associates a vector payoff. Every non-terminal nodes will be pre-terminal once and only one during the backward induction algorithm. Hence, backward induction selects and action at every node, and thus produces a pure strategy profile.

Proposition 3.16. *An action profile $s \in S$ is a sub-game perfect equilibrium of an extensive-form games with perfect information if and only if it is obtained by backward induction.*

Examples (continued)

1. *Fair-Unfair Ultimatum game.*

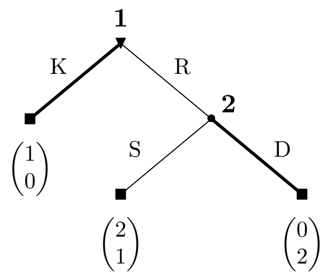


The unique sub-game perfect equilibrium, obtained by backward induction

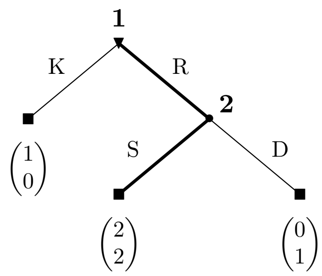
The ultimatum game, and some variations such as the public goods game or the dictator game, has been the object of several laboratory experiments, to test the humans' rationality, and utility-maximizing criteria. Evidence shows that within social groups (people from the same club, or from the same village) people tend to make fair offers. On the other hand, even when the game is played by people who do not see nor know each other, second players massively reject an unfair division, just because it is *unfair*. Many attempts have been made to understand why an individual rejects a positive offer, thus choosing to get nothing rather than something. These attempts come from various fields such as anthropology, sociology, psychology, economy or biology.

Exercice 3.17. Play the ultimatum game with 10 people you know, and with 10 you hardly know, choosing player 1 half of the times. Analyze the evidence you have gathered.

2. *The Kidnap* (with and without Stockholm's syndrome).



No syndrome



Stockholm's syndrome

Note that the sub-game perfect equilibrium obtained in the Stockholm's case is much more advantageous for the victim : he/she is not killed. In this sense, developing the Stockholm's syndrome seems to be a rational response (though, perhaps, unconscious) of the victim in order to preserve his/her life. This interpretation is radically opposed to the psychological analysis, which relies on the Freudian theory.

See http ://en.wikipedia.org/wiki/Stockholm_syndrome for a further discussion in this topic.

Exercice 3.18. Find the subgame perfect equilibria for the games presented in sections 3.3 and 3.2 : (1) the *kidnap* games, (2) the *entry in the market* game, and (3) the *card game*.

3.6 Extensive-form games with simultaneous moves

The aim of this section is to provide a bit more flexibility in the models presented so far, by allowing simultaneous moves. The idea is to consider an extensive-form game with perfect information (with or without chance moves) and replace de player mapping by a correspondence. The outline of the game is then as follows : every time a non-terminal node is reached, all the players being affected to it choose simultaneously their actions; their joint action determines a successor. Thus, to model simultaneous moves one needs to have some further structure in the tree : the set of successors needs to be a product set.

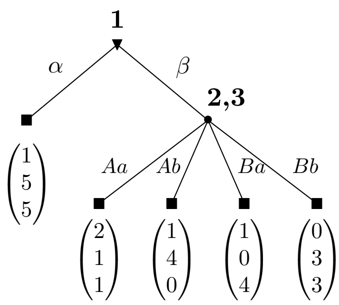
Définition 3.19. An *extensive-form game with perfect information and (possibly) simultaneous moves* is an extensive-form game with perfect information $(N, \mathcal{Z}, P, \varphi, g)$ in which

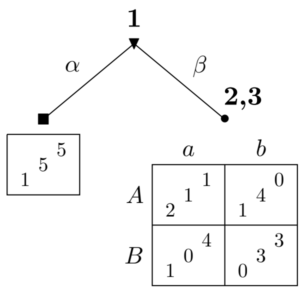
— The player mapping is replaced by a *player correspondence*, i.e. $P : Z \backslash T \rightrightarrows N \cup \{*\}$

— For each decision node z, there exists a bijection between (the finite sets) $\times_{i \in P(z)} S^i(z)$ and $C(z)$, where $S^i(z)$ is the set of possible actions for player i at z.

Comments. This model generalizes the two previous models of extensive form-games with perfect information. Note, however, that in the case of simultaneous moves the backward induction algorithm is no longer defined and, consequently, the existence of a pure subgame perfect equilibrium may fail. To see this, it is enough to consider the penalty game (or matching pennies), which is included in this model but does have pure subgame perfect equilibria.

Examples. The following games are two equivalent representations of an extensive-form game with simultaneous moves.





Note that there is a unique pure sub-game perfect equilibrium, which can be easily seen by looking at the second (and more intuitive) representation.

Outline of the game. At any decision node $z \in Z \backslash T$, the players assigned to this node simultaneously choose an action (chance chooses his actions randomly, according to φ). The game proceeds then to the unique successor which corresponds to the action profile which has been played. The game ends when a terminal node is reached, and every player receives the corresponding payoff.

3.7 $*$ Infinite extensive-form games

Infinite actions

Consider a one-player game with action set $\mathbb{N}$ and payoff $g(n) = 1 - \frac{1}{n}$. It can be seen as an extensive form game, yet has no sub-game perfect equilibrium.

Infinite tree

For any subset $A \subset [0, 1]$ define a two-player extensive-form zero-sum game Γ_A as follows : alternatively, each player choses a number in $\{0, 1\}$, ad infinitum. A play produces a sequence $(a_n)_n$ to which one associates the number

$$x := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} a_n$$

which belongs to $[0,1]$. Note that $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ in binary base. Player 1 wins the game if and only if $x \in A$, otherwise player 2 wins.

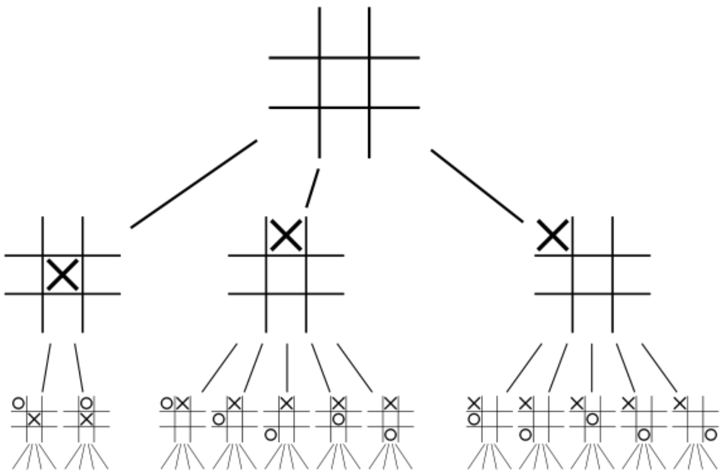
Théorème 3.20 (Gale and Stewart 1953)**.** *If A is an open or a closed set, then Γ_A is determined. However, there exist sets for which the game is not determined.*

Théorème 3.21 (Martin 1975)**.** *If A is a Borel set, then Γ_A is determined.*

3.8 ∗ Zero-sum games with perfect information

Zermelo's existence theorem

In this section we consider two-player zero-sum extensive-form games with perfect information. An example of such games, with no chance moves, is the Tic-Tac-Toe :



Reduced representation of Tic-Tac-Toe (using the symmetry of the game).

Définition 3.22.

- A two-player extensive-form game with perfect information Γ is *simple* if it has no chance moves, and if there exist a partition of the terminal nodes $T = T^1 \cup T^2$ such that player $i = 1,2$ wins iff the final outcome belongs to T^i.
- Player $i = 1,2$ has *a winning strategy* if he can force the outcome to be in T^i, i.e. there exists a strategy $s^i \in S^i$ such that for all $f(s) \in T^i$, for all $s^{-i} \in S^{-i}$.
- The game Γ is *determined* if one one the players has a winning strategy.

Théorème 3.23 (Zermelo 1912)**.** *Any finite, simple, two-player extensive-form game with perfect information is determined.*

Démonstration. The proof proceeds by induction on the length n of the tree. Clearly, a game with one stage (a tree with one decision node) is determined.

Proof (1) : Forward induction.
The successors of the root all define a game with less than n stages, so they are all determined. If player 1 begins, let him choose the subgame which has the biggest value (we assume that winning and loosing correspond to a payoff of $+1$ and -1 respectively). If the value of such subgame is $+1$, he wins. Otherwise, player 2 can guarantee a win. Symmetrically, if player 2 begins, let him choose the subgame which has the smallest value. If this value is -1 he can force a win, otherwise, player 1 can.

Proof (2) : Backward induction.
The pre-terminal nodes correspond to one-stage games, therefore they are determined (their value is ±1). We replace each of these nodes by a terminal node having this value. The new game has

length less than n ; by induction, it is determined. If one of the players has a winning strategy in the new game, than he also does in the original game : once a new terminal node is reached, the players can play optimally in the subtree. □

The same proof shows a stronger result, for games which are not *simple*.

Corollaire 3.24. *Any finite two-player zero-sum extensive-form game with perfect information is determined.*

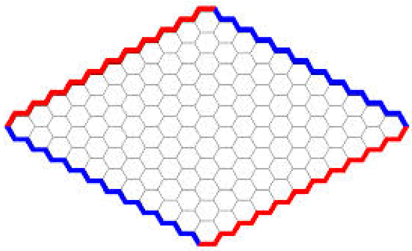
Théorème 3.25. *Any two-player zero-sum finite game with perfect information and possibly chance moves has a value in pure strategies.*

Démonstration. Let us proceed by induction on the length of the game. Let C be the set of successors of the root and suppose that chance begins. Let $\varphi := \varphi(r) \in \Delta(C)$. Hence, every successor $z \in C$ is chosen with probability $\varphi(z)$, and to each z corresponds a game which has a value $v(z)$ and the players have pure optimal strategies $(s(z), t(z))$. The original game has then value $\sum_{z\in C} \varphi(z)v(z)$ and optimal strategies $(s(z))_{z\in C})$ and $(t(z))_{z\in C}$.

If player 1 begins, than each possible subgame $\Gamma(z)$ has a value $v(z)$ and pure optimal strategies $(s(z), t(z))$, for each $z \in C$. The value is then $v = \max_{z\in C} v(z)$. To guarantee v, player 1 plays $z^* \in \text{argmax}_{z\in C} v(z)$ and then uses his strategy $s(z^*)$. Similarly, $(t(z))_{z\in C}$ is an optimal strategy for player 2. The case where player 2 starts is proved symmetrically. □

Nash's stealing-strategy argument

Consider the *game of Hex*, played on the following board :



Outline of the game. It is played as follows. Alternatively, player 1 (resp. 2) puts a blue (resp. red) token on any empty case of the board. The game finishes when there are no more free cases, or when one player has won. Player 1 wins iff his token makes a continuous path from one blue border of the board to the other. Symmetrically, player 2 wins by making a continuous red path connecting the two red borders : :

Comment. Hex is a simple, finite, extensive-form game with perfect information, so that it is determined. To see why it is simple, consider any final position where the board is full. Suppose that red tokens are "land" and blue one are "water". Then, either there is a rive (a path from connecting the two blue boarder) or there isn't, and in this case there is a red path.

Proposition 3.26 (Nash 1951)**.** *Player 1 has a winning strategy.*

Comments. The result is proved by contradiction. Assume that player 2 has a winning strategy. Then, after his first move, player 1 can *steal* this strategy by acting as if he were the second player, and obtain a win. The stealing-strategy argument works as far as (a) players alternate moves, (b) the set of admissible moves does not depend on the player who moves and (c) an extra move is always beneficial.

Démonstration. A winning strategy for player 2 is a strategy such that for any move of player 1, there exists a move of player 2 such that for any move of player 1, ..., there exists a move of player 2 which gives him a victory. In other words,

$$\forall x_1\ \exists y_1\ \forall x_2\ \exists y_2,\ \ldots,\ \forall x_n\ \exists y_n \text{ such that } (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in T^2,$$

for some integer n which depends on the play. Note that we have identified a path $(x_1, y_1 \dots x_n, y_n)$ with the unique node to which it leads.

Define a *winning position for player 2* to be any position $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ such that

$$\forall x_1' \ \exists y_1', \ \dots, \ \forall x_m' \ \exists y_m' \ \text{ such that } \ (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k, x_1', y_1', \dots, x_m', y_m') \in T^2$$

Suppose that player 2 uses his winning strategy t^*. Then, at every stage k, and for any sequence of moves of player 1, $(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ will be a winning position for player 2.

Consider then the following strategy of player 1 :

— Start by any admissible move : place a blue token somewhere in the board, and mark this token with a star.

— Then, look at the board *as if* the token with the star did not exist (that is, as if he were player 2). Then use the winning strategy t^*.

— If the move prescribed by t^* is admissible (the case is empty), then do this move. If, on the contrary, the move prescribed by t^* is not admissible (the case is already occupied by the starred token) then replace the starred token by a normal one, and place the starred token anywhere else in the board.

By using this strategy for k stages, the board will reach some position $P := (x_1, y_1 \dots x_k, y_k)$, and then player 1 uses the just-mentioned strategy to select his next move x_{k+1}. By construction, the position P' obtained from (P, x_{k+1}) by reversing the colors and removing the starred token gives a winning position for player 2. But then, (P, x_{k+1}) is a winning position for player 1, for it is like P' (with colors reversed) with an additional blue token (and additional tokens can only be beneficial in this game). A contradiction. □

More generally, the same results holds for any game which is symmetric (the players have the same set of available moves with the same results, so that the first player can *use* the second player's strategy) and in which extra moves are never disadvantagous.

Corollaire 3.27. *Let Γ be some simple, finite, extensive-form game with perfect information such that*

— *The players alternate moves*

— *The players have the same set of admissible moves*

— *Extra moves are not disadvantageous*

Then player 1 has a winning strategy.

Exercice 3.28. Does Corollary 3.27 apply to Chess ?

3.9 Problem Set

A dynamic ultimatum game

Two fishermen which cannot agree on how to split n kilos of tuna fish as a game theorist some help. The latter proposes the following game :

— One fisherman (arbitrarily designated) starts by suggesting an integer division $(m_1, n - m_1)$, that the other fisherman can accept or reject, with $m_1 \in \{0, \dots, n\}$.

— If the second fisherman accepts the offer, the game ends. The first (resp. the second) fisherman gets m_1 (rest. $n - m_1$) kilos of fish.

— If he rejects the offer, one kilo of fish is lost and the game continues. The second fisherman suggests an integer division $(m_2, n - 1 - m_2)$, with $m_2 \in \{0, \dots, n - 1\}$.

— The game goes on, alternating the proposals of the fishermen, and removing one kilo after every rejection. It ends either when a proposal has been accepted, or when only one kilo remains. In this case, the last kilo is assigned to the fisherman who's turn was to make an offer, and the other one gets nothing.

We represent a play (or an endgame) by a sequence $(m_1, m_2, \ldots, m_k, A)$, where $1 \leq k \leq n-1$ and $m_\ell \in \{0, \ldots, n-(\ell-1)\}$ for all $1 \leq \ell \leq k$, or by $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, R)$.

1. Determine the vector payoff corresponding to each play. How many possible plays are there for any $n \geq 2$?
2. Let Γ be the game for $n = 2$. Put Γ in extensive form. How many pure actions do the players have ? How many terminal nodes does the game have ? Find all the subgame perfect equilibria.
3. Consider the case $n = 3$. How many decision nodes and how many actions do the players have ? How many terminal nodes does the game have ? Put the game in extensive form and determine the unique sub-game perfect equilibrium for which player 2 accepts player 1's proposal.
4. Solve the game for all n, inductively.

4 Extensive-form games with imperfect information

4.1 Model

So far, in describing extensive-form games, we have assumed that the players know (i.e. have *perfect information* about) the current decision node. In other words, from the root until some terminal node is reached, the decision-makers know their exact position in the tree before taking their actions. The purpose of this section is to consider the more general and realistic situation, in which the players may have imperfect information about the current decision node. To do so, one can add information sets to our previous model or, equivalently, partition the sets of decision nodes for each player. During the play, the players are no longer informed of the current node ; instead, they are informed that some set of nodes (which includes the current node) has been reached.

An example of such games is poker. Indeed, in this famous card game, players observe their own cards and the previous actions from their opponent, but ignore (and this is the whole point !) their opponents' cards. As for chess, the decision tree associated to poker should include all the possible situations of the game ; in particular, to each possible set of hands corresponds a node, even though this information is not accessible to the players. Imperfect information captures some of the uncertainty that the decision-makers usually encounter in real-life contexts.

Définition 4.1. Let X be a non-empty finite set. A *partition* of X is a collection of nonempty, pairwise disjoint sets $\Pi = (X_1, \ldots, X_m)$ such that $X = X_1 \cup \cdots \cup X_m$.

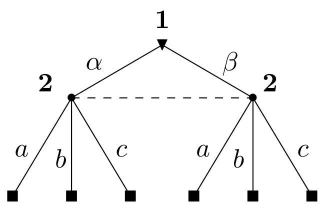
Définition 4.2. An *extensive-form game with imperfect information* is described by a tuple $(N, \mathcal{Z}, P, \varphi, g, (\Pi^i)_{i \in N})$ where

- $(N, \mathcal{Z}, P, \varphi, g)$ is an extensive-form game with perfect information.
- Π^i is a partition of Z^i (the set of decision nodes of player i) for each $i \in N$.
  The subsets that describe Π^i are *information sets* of player i.
- The decision-maker cannot distinguish the sets of successors from nodes which belong to the same information set.

Notation.

- The information sets of player i are denoted as $Z^i_1, \ldots, Z^i_{m_i} \subset Z^i$, for some integer $m_i \in \{1, \ldots, |Z^i|\}$.
- For each $z \in Z \backslash T$, let $I(z)$ denote the unique information set which contains z. Note that there exist $i \in N$ and $1 \leq k \leq m_1$ such that $I(z) = Z^i_k$.

Comments. The last requirement in the definition of extensive-form games with imperfect information deserves some explanations. An information set is meant to describe a set of nodes which all look the same for the player who makes a decision. Hence, the actions at each of this nodes should all look the same. Recall that an action is an edge from a node $z \in Z$ to the set of its successors $C(z)$. Thus, a natural way to capture such confusion is to give the same names to corresponding edges at every node of an information set, as is illustrated below :



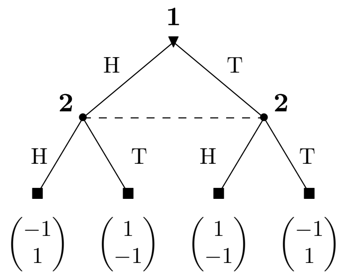
Hence, to each information set Z^i_k (or, equivalently, to each pair (i, k)) corresponds a unique set of actions, denoted by S^i_k : the actions of player i at his k-th information set. Note that an action in S^i_k corresponds to a choice of a successor for each node in the information set. In the example above, the action b of player 2 selects two different successors, (α, b) and (β, b), depending on which was the true node, which is not accessible to the player.

Outline of the game. The game starts at the root $r \in Z$ and proceeds as follows. If the current node z is a terminal node, the game ends and the players receive $g(z)$. If the current node

z belongs to Z^*, then a successor is chosen according to $\varphi(z) \in \Delta(C(z))$. Otherwise, the current node belongs to a unique information set $I(z)$, and the corresponding player chooses an action. His action corresponds to a unique successor of each node in $I(z)$, so that the game proceeds to a new node.

Remark. A game is of perfect information if and only if $m_i = |Z^i|$ for all $i \in N$. In other words, if all the information sets are reduced to singletons.

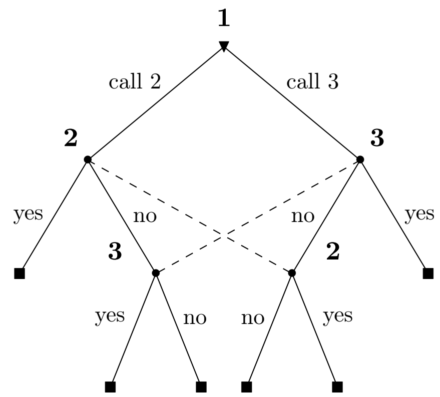
Exemple 4.3 (Matching Pennies)**.** Consider the following two-player zero-sum game. The first player puts a 1 euro coin on the table, covers it with his hand, and then asks the second player to make a guess : Heads or Tails ? The second player wins the coin if his guess is correct, and otherwise pays 1 euro to his opponent. The games is represented as follows :



The dashed line indicates that the two nodes belong to the same information set.

By construction, player 2 makes a guess *without knowing* the action of player 1. When asked to play, player 2 learns that the current node belongs to the set $\{H, T\}$, yet he is incapable of distinguishing the two. Hence, the nodes H and T belong to the same information set. In particular, these two nodes have the same number of successors or, equivalently, the same actions (if it was not the case, player 2 would distinguish the nodes !). Each player has one information set : $Z_1^1 = \{\emptyset\}$ and $Z_1^2 = \{H, T\}$.

Exemple 4.4 (Temporality : no public clock)**.** Player 1 calls either player 2 or 3 to propose him some job, then calls the other one in case of rejection. Players 2 and 3 are not informed of the previous calls. This example shows how the addition of information sets breaks the temporality of the game. That is, the decision nodes can no longer be ordered objectively. Here, for instance, the information set of player 2 may reached before or after the information set of player 3. One does not come necessarily before the other, as was the case with perfect information.

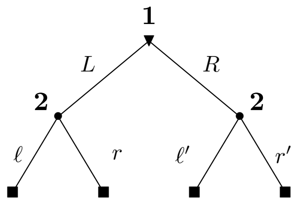


The backward induction algorithm breaks down under imperfect information, so that pure subgame perfect equilibria need no longer exist. For this reason, one needs to introduce more general strategies.

Définition 4.5.

- A *pure strategy for player i* is mapping which assigns to each information set Z^i_k an action in $S(i,k)$. It can be identified with a vector $s^i = (s^i_1, \ldots, s^i_{m_i})$ where $s^i_k \in S(i,k)$. The set of pure actions is thus $S^i = S^i_1 \times \cdots \times S^i_{m_i}$.
- A *mixed strategy* is a probability distribution over the set of pure strategies. The set of mixed strategies for player i is $X^i = \Delta(S^i)$.
- A *behavior strategy for player i* is a mapping which assigns to each information set Z^i_k a probability distribution over S^i_k, i.e. $\sigma^i = (\sigma^i_1, \ldots, \sigma^i_{m_i})$ with $\sigma^i_k \in \Delta(S^i_k)$. The set of behavior strategies is $\Sigma^i = \Delta(S^i_1) \times \cdots \times \Delta(S^i_{m_i})$.
- A *general strategy* is a probability over the set of behavior strategies.

Comments. The former definition is general. For any game, considered so far or to be considered in the sequel, a pure strategy for player i is a (deterministic) mapping which assigns, to every possible situation player i can encounter (and distinguish !) during the game, an admissible action. The information sets capture in this model the histories (or nodes) that each player can distinguish. A mixed strategy is a random choice over the set of pure strategies. A behavior strategy consists in randomizing at every information set. To understand the difference between mixed and behavior strategies consider the following example :

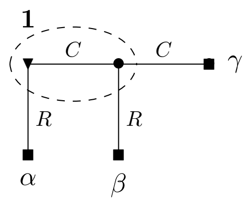


The set of pure strategies are $S^1 = \{L, R\}$ and $S^2 = \{\ell\ell', \ell r', r\ell', rr'\}$. Before the game starts player 2 can choose one of these strategies randomly, and then play this deterministic plan. Alternatively, player 2 can choose two loteries : use the first one if player 1 plays L, and the second otherwise. These scenarios correspond, respectively, to a mixed and a behavior strategy.

Exercise. Prove that the sets of mixed and behavior strategies coincide for some player if and only if he has only one information set. Mathematically, $X^i = \Sigma^i$ if and only if $m_i = 1$.

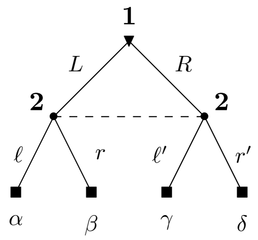
Remark. In general, one cannot compare the set of mixed strategies and the set of behavior strategies, as it is shown in the following two examples :

Exemple 4.6 (A behavior strategy with no mixed equivalent)**.** Player 1 is a drunk driver. He can turn right (R) at two consecutive crossings, or stay straight. However, he is incapable of distinguishing whether he is at the first or second crossing :



The set of pure startegies is $S^1 = \{C, R\}$ so that X^1 can be identified with $[0,1]$. A mixed strategy consists in playing R with probability x and C with probability $1-x$, and thus induces the probability $(x, 0, 1-x)$ over the set of outcomes (α, β, γ). The set of behavior strategies Σ^1 can also be identified with $[0,1]$, since there is a unique information set. A behavior strategy consists in choosing R or C with probabilities p and $1-p$, every time the information set is reached. Hence, $p \in \Sigma^1$ induces the probability $(p, p(1-p), (1-p)^2)$ over the set of outcomes.

Exemple 4.7 (A mixed strategy with no behavior equivalent)**.** Consider this game :



The set of pure strategies for player 2 is $S^2 = \{\ell\ell', \ell r', r\ell', rr'\}$, so that X^2 can be identified with the 3-dimensional simplex. We claim the existence of strategies of player 2 which do not admit a payoff-equivalent behavior strategy $p \in [0,1]$. Let $(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}) \in X^2$ be a mixed strategy of player 2 and suppose, for instance, that player 1 plays L and R with equal probability. Then, on the one hand x^2 induces the probability $(\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ over the outcomes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ and, on the other hand, a behavior strategy $p \in [0,1]$ induces the probability $\frac{1}{2}(p, (1-p), p, 1-p)$. The equality $\frac{1}{2}(p, (1-p), p, 1-p) = (\frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4})$ is clearly impossible, which proves the claim.

Comments. Isbell constructed an example of an extensive-form game with imperfect information (a 1-player game) in which the value in pure, mixed, behavior or general strategies all differ. However, there is some framework where behavior strategies and mixed strategies are very much the same : it is the case when the players have *perfect recall* (see Section 4.3). A wider class of games, for which behavior strategies do not bring new strategic possibilities, are the so-called *linear games.*

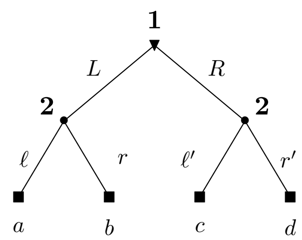
Définition 4.8. A extensive-form game is *linear for player i* if every information set of player i is reached at most once during the play. It is *linear* if it is linear for all the players.

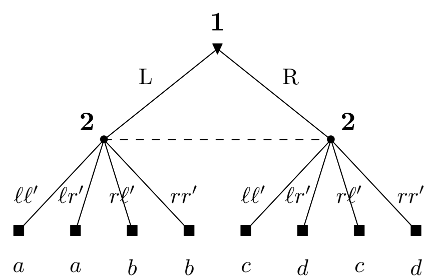
Proposition 4.9 (Isbell, 1957)**.** *Let Γ be an extensive-form game which is linear for player i. and let $\sigma^i \in \Sigma^i$ be a behavior strategy for this player. Then, there exists a payoff-equivalent mixed strategy $x^i \in X^i$.*

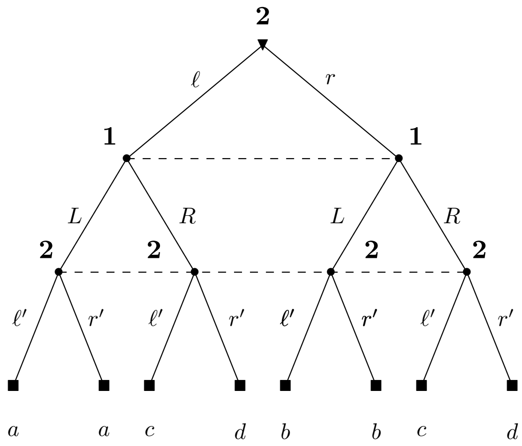
4.2 Normal-form representation

As for extensive-form games with perfect information, to any game with imperfect information corresponds a normal-form game. Indeed, to each pure action profile corresponds a unique distribution over the set of terminal nodes, and this distribution induces a unique payoff vector (or expected payoff). As already noticed above, many extensive games may correspond to the same normal form.

Consider the following three examples :







In the first example, the game starts by player 1 choosing an action (L or R) ; then, knowing player 1's action, the second player chooses his. In the second, the players play simultaneously (i.e. player 2 does not know player 1's action before choosing his own). In the third game, player 2 plays twice : at first, he chooses either ℓ or r ; then, without observing player 2's choice, player 1 chooses his action, L or R ; finally, player 2 plays again, although he does not remember what he did before.

Notice, however, that in spite of being substantially different, in all three examples the players' pure action sets are $S^1 = \{L, R\}$ and $S^2 = \{\ell\ell', \ell r', r\ell', rr'\}$ respectivley. In fact, all three games are *strategically equivalent* : they share the same normal-form :

	$\ell\ell'$	$\ell r'$	$r\ell'$	rr'
L	a	a	b	b
R	c	d	c	d

The three games thus have the same Nash equilibria. Nevertheless, whereas the first game has pure sub-game perfect equilibria (existence result of Chapter 3), the second may fail to have one. In other words, though strategically equivalent, different extensive-from representations may still reflect important differences.

4.3 Perfect recall

Définition 4.10. The history of player i at some node $z \in Z^i$, denoted by $H(z)$, is the sequence of information sets of player i and actions that he has played so far, in the order with with these events occurred.

Définition 4.11. A extensive-form game with imperfect information is of *perfect recall* if and only if $H(z) = H(z')$ for any two nodes belonging to the same information set.

Remark (exercise). Games with perfect recall are linear.

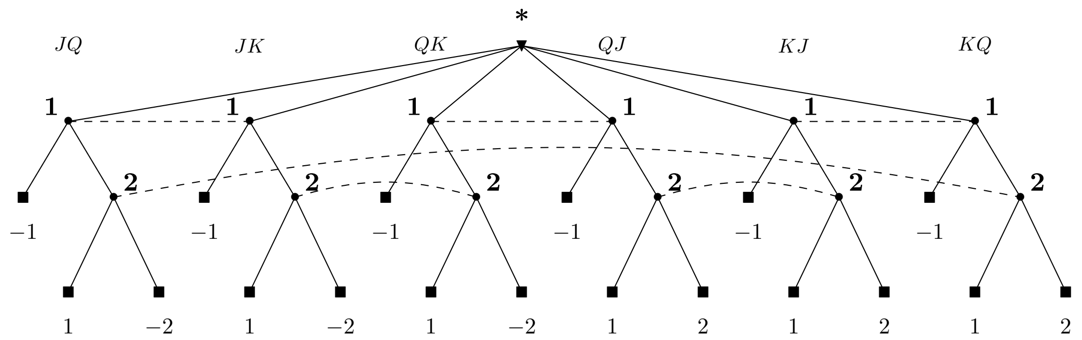
Théorème 4.12 (Kuhn 1953)**.** *Let Γ be an extensive-form game with imperfect information and perfect recall, and let $x^i \in X^i$ be a mixed strategy of some player $i \in N$. Then, there exists a payoff-equivalent behavior strategy $\sigma^i \in \Sigma^i$.*

In other words, in a finite game with perfect recall, there is no loss of generality in restricting the players to play behavior strategies.

Corollaire 4.13. *A finite extensive form game with perfect recall is strategically equivalent to a game where the players are restricted to use behavior strategies. In particular, the game admits a Nash equilibrium in behavior strategies.*

Remark. The set of behavior strategies is generally much smaller than the set of mixed strategies. For instance, if a player has n nodes with two actions per node, he has 2^n pure actions, so that the set of mixed action is the 2^n-dimensional simplex, i.e. has $2^n - 1$ degrees of freedom. On the other hand, there are n degrees of freedom for behavior strategies.

Exemple 4.14 (The 3-card poker game)**.** Consider the following simple version of Poker played by two players. Each player pays 1 euro and then receives a card from shuffled 3-card deck containing a Jack, a Queen and a King, and keeps it secret. Player 1 can either fold (F) or raise (R) (i.e. pay 1 more euro). If player 1 raises, player 2 can either fold (F) or call (C)(pay 1 euro as well). The player who folds loses 1 euro. If no player folds, then the players show their cards : the one with the lowest card [14] loses 2 euros. The game can be represented as follows.



The extensive-form presentation of the 3-card poker game

The tree corresponding to the poker game has 31 nodes : 1 node belong to the chance player, 6 nodes belong to each player, and 18 nodes are terminal. Each player has 3 information sets, corresponding to the fact that each players knows only his own card : denote by Z^i_X the information set of player $i = 1, 2$ when he holds the card $X \in \{J, Q, K\}$ and has to play. Note that the sets Z^1_X and Z^2_X are different : in the former, player 1 knows he is the first to play, whereas in the latter player 2 knows that his opponent has already played R. Note also that, as already mentioned, each decision node belong to one and only one information set.

14. The Jack is strictly lower than the Queen, which is strictly lower than the King.

5 Games with communication

Consider a finite normal-form game $\Gamma = (N, (S^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$, which will be fixed throughout this chapter. Let NE denote the set of Nash equilibria of Γ and let

$$E := \{z \in \mathbb{R}^N \mid \exists x \in NE,\ g(x) = z\}$$

be the set of equilibrium payoffs of Γ. Recall that $g(x) := \sum_{s\in S} x(s)g(s)$ is the expected payoff for the mixed action profile x, where $x(s) := \prod_{i\in N} x^i(s^i)$ is the probability of $s \in S$.

5.1 What does communication change ?

Depending on the interaction we are modeling, the players may be able to communicate, or may not, before they choose their actions. So far, we have implicitly assumed that communication was impossible. Allowing for some communication can radically change the game, as suggested by the following experiment.

Prisonner's dilemma with communication. Consider the following variant of the prisoner's dilemma, where C stands for cooperating and D for defecting :

	C	D
C	$1, 1$	$-1, 2$
D	$2, -1$	$0, 0$

I often propose this game to my students ; the payoffs represent extra points for the final exam, for which they really care. The game is presented in the three following communication scenarios :

1. *No communication* : One volunteer is called to the stage to play this game against some invisible player, who has already chosen his action.
2. *Private communication* : Two volunteers are called to the stage to play the game. Before choosing their actions, the players can communicate privately - the audience does not hear what they say.
3. *Public communication* : Two volunteers are called to the stage to play the game. Before choosing their actions, the players may communicate in front of every one.

Recall that D is a (strictly) dominant action for each player : it gives a higher payoff regardless of what the opponent plays. Consequently, (D, D) is an equilibrium in dominant strategies, and the theory we have been studying so far predicts this outcome. The fact that the players communicate before the game should not change anything, as far as the payoff matrix remains unchanged. However, communication matters. Indeed, whereas very few volunteers play C in the first scenario, this action is played more often when communication is allowed. In scenarios 2 and 3, during the pre-play communication, players systematically try to persuade their opponent about their own good intentions, so that they should both cooperate. This behavior is rational (and predictable !), for if player 1 convinces player 2 to play C, then he may obtain a bigger payoff by then defecting. But still, some players feel *they should play what they said they would*, and especially if communication happened in front of an audience. Whereas private communication seldom sustains cooperation, the presence of an audience induces a stronger commitment for both players, plays the role of a "contract". As a consequence, the action profile (C, C) is played quite surprisingly often. In other words, communication induces commitment, the strength of which depends on the type of communication.

Three sorts of communication.

The aim of this section is to study the impact of pre-play communication in normal-form games. In the previous chapters, this communication was precluded. Here, we will consider three different communication schemes :

1. The players can write and sign *contracts* which commit them to a joint action.

2. The players can use *public signals* in order to determine a joint action.
3. The players can use some external device (a mediator) which sends them *private messages* in order to determine an action profile.

The first consequence of allowing communication is that the players' action sets become larger. Players can sign or ignore some contract, players can react to the signals they receive. As a consequence, communication enlarges the set of Nash equilibria, and of the corresponding payoff vectors. Furthermore, unlike the set of Nash equilibria (which is a finite union of compact, connected components) the new, bigger set of equilibria are convex, compact polytopes, and can easily be characterized.

5.2 Probabilities over product sets

The purpose of this section is to understand the difference between :

— Independently, each player selects an action randomly (i.e. plays a mixed strategy).

— An action profile is selected randomly (i.e. according to some joint distribution).

The first situation corresponds to model of the previous chapters. The set of mixed actions of player i is $X^i = \Delta(S^i)$, and $X = \times_{i\in N} X^i$ is the set of mixed action profiles. Thus, if the players play $x \in X$, the action $s \in S$ is played with probability $x(s) := \prod_{i\in N} x^i(s^i)$. In the second scenario, an action profile is chosen according to a joint probability $\pi \in \Delta(S)$.

To begin with, note that product distributions are also joint distributions, so that the second situation is more general. To make things clear, let us consider the case of two players, and let $S = S^1$ and $T = S^2$ be their action sets. W.l.o.g. we assume in the sequel that $|S|, |T| \geq 2$. To emphasize the difference between the sets $\Delta(S\times T)$ and $\Delta(S)\times\Delta(T)$, one may refer to the elements of $\Delta(S \times T)$ as *joint* distributions over $S \times T$, whereas the elements of $\Delta(S) \times \Delta(T)$ are couples of *independent* distributions.

Lemme 5.1. *The set $\Delta(S) \times \Delta(T)$ can be injected into a strict subset of $\Delta(S \times T)$.*

Démonstration. Note that to each couple $(x, y) \in \Delta(S) \times \Delta(T)$ corresponds a unique probability measure on $S \times T$, the so-called *direct product* of x and y, and denoted as $x \otimes y$. The direct product of x and y is obtained by assuming that x and y are *independent*. The probability of (s, t) is, under this assumption, $x(s)y(t)$. Hence the direct product of x and y satisfies $x \otimes y \in \Delta(S \times T)$ and $(x \otimes y)(s, t) = x(s)y(t)$ for all $(s, t) \in S \times T$. The direct-product map $(x, y) \mapsto x \otimes y$ is injective. Indeed, if (x, y) and (x', y') are such that $x(s)y(t) = x'(s)y'(t)$ for all (s, t), then summation over S yields $y(t) = y'(t)$ for all t and, similarly, summation over T yields $x = x'$. To prove that the direct-product map is not surjective, it is enough to consider some joint probability $\pi \in \Delta(S\times T)$ satisfying $\pi(s, t)\pi(s', t') > 0$ and $\pi(s, t')$ for some, $s, s' \in S$ and $t, t' \in T$. Suppose that $(x, y) \in \Delta(S) \times \Delta(T)$ and $x \otimes y = \pi$. Then, $x(s)y(t)x(s')y(t') > 0$ and $x(s)y(t') = 0$, which is impossible. □

Comments. The lemma formalizes what we already noticed, i.e. that joint distributions are more general than direct products. Indeed, the same results holds for $X = \times_{i\in N}\Delta(S^i)$ and $\Delta(S)$. See Section 5.2.

	t	t'
s	$\frac{1}{2}$	0
s'	0	$\frac{1}{2}$

A joint probability that is not a direct product.

Remarque 5.2. The set $\Delta(S \times T)$ can be naturally embedded in $\mathbb{R}^{|S||T|}$:

$$\Delta(S \times T) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{|S||T|} \mid z_{k,\ell} \geq 0, \text{ for all } 1 \leq k \leq |S|,\ 1 \leq \ell \leq |T|, \text{ and } \sum_{k,\ell} z_{k,\ell} = 1 \right\}$$

Similalry, $\Delta(S) \times \Delta(T)$ is naturally embedded in $\mathbb{R}^{|S|+|T|}$:

$$\Delta(S) \times \Delta(T) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{|S|+|T|} \,\middle|\, z_k \geq 0, \text{ for all } 1 \leq k \leq |S|+|T|, \sum_{k=1}^{|S|} z_k = 1, \sum_{k=|S|+1}^{|S|+|T|} z_k = 1 \right\}$$

These representations show that $\Delta(S \times T)$ and $\Delta(S) \times \Delta(T)$ have, respectively, $|S||T| - 1$ and $|S| + |T| - 2$ degrees of freedom. Thus, the dimension of the first set is always strictly bigger, so that the set of independent couples is negligible inside the set of correlated distributions. [15]

Exercice 5.3. How many degrees of freedom have the sets $\Delta(S)$ and $\times_{i \in N} \Delta(S^i)$, as a function of N and $(S^i)_{i \in N}$?

The simplest case : $S = \{s, s'\}$ and $T = \{t, t'\}$. A joint probability $\pi \in \Delta(S \times T)$ and, in particular, the direct product $x \otimes y$ for some $(x, y) \in \Delta(S) \times \Delta(T)$ can be represented by a 2×2 matrix :

	t	t'
s	$\pi(s,t)$	$\pi(s,t')$
s'	$\pi(s',t)$	$\pi(s',t')$

	t	t'
s	pq	pq'
s'	$p'q$	$p'q'$

Matrix representation of two joint probabilities π and $x \otimes y$, where $x = (p, p')$ and $y = (q, q')$.

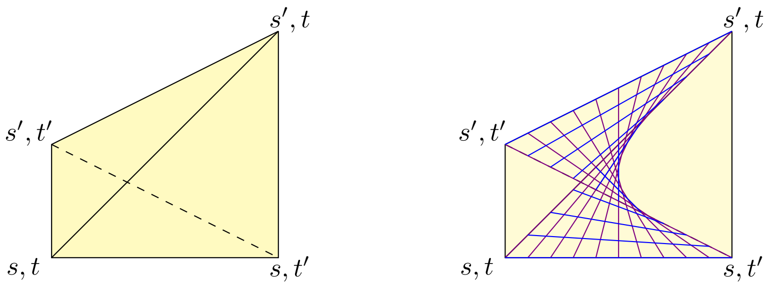


Illustration of the sets $\Delta(S \times T)$ and $\Delta(S) \times \Delta(T)$.

Exercice 5.4. Consider a $2 \times 2 \times 2$ game, where $S^1 = S^2 = \{L, R\}$, and let $x = (x^1, x^2)$ be a mixed strategy profile. Find $x := x^1(L)$ and $y := x^2(L)$ such that :

(a)

$$(x^1 \otimes x^2)(s) = \begin{cases} 1/4 & \text{if } s = (L, L) \\ 1/12 & \text{if } s = (L, R) \\ 1/2 & \text{if } s = (R, L) \\ 1/6 & \text{if } s = (R, R) \end{cases}$$

(b)

$$(x^1 \otimes x^2)(s) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{if } s \neq (R, R) \\ 0 & \text{if } s = (R, R) \end{cases}$$

15. If an element π of $\Delta(S \times T)$ is chosen at random according to the uniform law, then the probability that π is a direct product (of probabilities on S and T) is 0.

General direct product

Définition 5.5. The *direct product mapping* assigns to each mixed action profile $x = (x^i)_{i \in N}$ a unique joint probability distribution $\pi := x^1 \otimes \cdots \otimes x^N \in \Delta(S)$, defined for each $s \in S$ as $\pi(s) = \prod_{i \in N} x^i(s^i)$.

Lemme 5.6. *The direct product mapping injects the set of mixed action profiles $X = \times_{i \in N} \Delta(S^i)$ into the set of joint distributions $\Delta(S)$.*

Démonstration. Let $x, y \in X$ such that $\pi := x^1 \otimes \cdots \otimes x^N$ and $\pi' := y^1 \otimes \cdots \otimes y^N$ are equal. For each $i \in N$ and $s = (s^i, s^{-i}) \in S$, $\pi(s) = \prod_{i \in N} x^i(s^i) = x^i(s^i) \prod_{j \neq i} x^j(s^j) = x^i(s^i) x^{-i}(s^{-i})$, where $\sum_{s^{-i}} x^{-i}(s^{-i}) = 1$. Hence, the equality $\pi = \pi'$ implies that

$$x^i(s^i) x^{-i}(s^{-i}) = y^i(s^i) y^{-i}(s^{-i}), \quad \forall s = (s^i, s^{-i}) \in S$$

and, summing over S^i, $x^i(s^i) = y^i(s^i)$ for all $s^i \in S^i$. That is, $x^i = y^i$ for all $i \in N$, or $x = y$, which proves the injectivity. □

Exercice 5.7. Let $N = \{1, 2, 3\}$ and $|S^1| = |S^2| = 3$, $|S^3| = 2$. Compute $x^1 \otimes x^2$ and $x^1 \otimes x^2 \otimes x^3$ for $x^1 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$, $x^2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, and $x^3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

5.3 Games with contracts

An example

Start by considering an example of two competing factories. Every firm can choose among two policies, one that is polluting (D, for dirty) and one that is not (C, for clean). The payoffs are represented in the following table :

	C	D
C	5, 3	0, 7
D	7, 0	1, 1

The polluting game

Again, this is a prisoner's dilemma game : (D, D) is the unique Nash equilibrium, which is Pareto-dominated by the cooperative outcome (C, C). Suppose that the government comes up with the following contract : "the firm which signs this contract commits itself to play C if the other firm sings too, and D otherwise". The idea of such a contract is to give to both firms the possibility of committing themselves to play the cooperative action. By creating such contract, the government enlarges the action sets of the players : each player has now three choices, C, D or sign the contract (a). The new game has the following normal-form :

	C	D	a
C	5, 3	0, 7	0, 7
D	7, 0	1, 1	1, 1
a	7, 0	1, 1	5, 3

Polluting game with a contract

The new game has two pure Nash equilibria, (D, D) and (a, a). In particular, the payoff of the cooperative outcome is now a an equilibrium payoff. In other words, adding contracts, one increases the set of equilibria and, as a consequence, the set of equilibrium payoffs.

Comments. Contracts represent a very strong commitment, and in many situations such communication is not possible.

5.3.1 Contracts

The aim of this section is to consider the family of games that can be obtained by adding (finitely many) contracts to the underlying game Γ. A contract involves some subset of players $M \subset N$ and stipulates what each player is going to play if he signs the contract, given that $C \subset M$ players have signed and $M \backslash C$ have not. The players who sign the same contract form a *coalition* and *act as a single player*.

Let us introduce some notation and formal definitions.

Notation. For any $M \subset N$, let $S^M = \times_{i \in M} S^i$ be the action profiles of the players in C and let $X^M = \Delta(S^M)$ be the set of (correlated) mixed action profiles of the players in M. For any $i \in N$, let $Y^{-i} = \Delta(S^{N \backslash \{i\}})$ be the set of (correlated) mixed profiles of the players other than i.

Définition 5.8. A *contract* is a pair (M, f), where $M \subset N$ is a subset of players and $f : \mathcal{P}(M) \to X^M$ is a mapping which assigns, to each coalition $C \in \mathcal{P}(M)$ of players signing the contract, a probability distribution $f(C) \in \Delta(S^C)$.

Remark. For any probability distribution $\pi \in \Delta(S)$, there exists a contract (N, φ_π) such that $\varphi_\pi(N) = \pi$. Indeed, any contract starting as "if all the players sign this contract, then $s \in S$ will be chosen according to π ; otherwise..." satisfies this condition.

Définition 5.9. For any finite set of contracts A, let $\Gamma_A := (N, (S^i_A)_{i \in N}, g)$ be the game obtained by adding the contracts in A to the underlying game Γ. That is,

$$S^i_A := S^i \cup \{(M, f) \in A \,|\, i \in M\}$$

and, for any action profile $s_A \in S_A := \times_{i \in N} S^i_A$, $g(s_A)$ is the expected payoff induced by s_A. Indeed, any action profile s_A determines some coalitions (players who have signed the same contract) and also which players have not signed any contract. The former choose joint actions according to the (probability distributions stipulated in their respective) contracts, the others play (deterministic) actions of the underlying game.

5.3.2 Feasible payoffs versus Equilibrium payoffs

For any (finite) set of contracts A, let NE_A and E_A be, respectively, the set of Nash equilibria and of equilibrium payoffs of Γ_A. The set of equilibrium payoffs that can be obtained by adding contracts is $E_c := \bigcup E_A$, where the union ranges over any finite set of contracts. Equivalently,

$$\begin{aligned} E_c &= \{z \in E_A, \text{ for some set of contracts } A\} \\ &= \{z \in \mathbb{R}^N \,|\, \exists A \text{ set of contracts}, \exists x \in NE_A, \text{ such that } g(x) = z\}. \end{aligned}$$

The aim of this section is two characterize E_c.

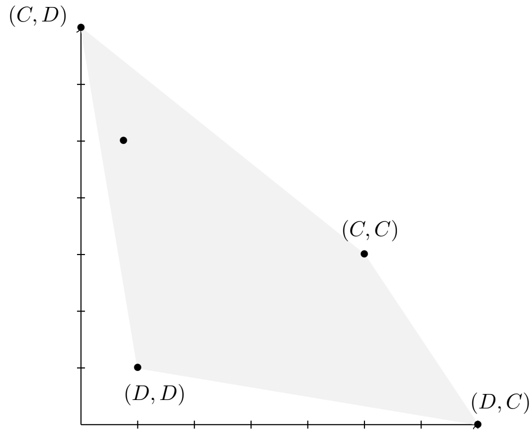
Définition 5.10. A payoff vector $z \in \mathbb{R}^N$ is *feasible* in Γ iff there exists $\pi \in \Delta(S)$ such that $z = \sum_{s \in S} \pi(s) g(s)$. The *set of feasible payoffs* is denoted as $\operatorname{Co} g := \{g(\pi) \,|\, \pi \in \Delta(S)\}$.

Remarque 5.11. The set $\operatorname{Co} g$ is a convex, compact polytope containing E_c. Indeed, on the one hand, it is the convex hull of finitely many points $\{g(s) \,|\, s \in S\}$ in $\mathbb{R}^N$. On the other hand, $E_c \subset \operatorname{Co} g$ since, by signing a contract, the players commit themselves to some correlated action $\pi \in \Delta(S)$, so that the corresponding payoff is always feasible.

Remarque 5.12. For any feasible payoff z, one can easily build a contract such that, if every player signs it, then they get z. Indeed, by definition, there exists $\pi \in \Delta(S)$ such that $g(\pi) = z$. Then, any contract starting as : "if all the players sign this contract, then $s \in S$ will be chosen according to π ; otherwise..." satisfies this condition.

An example (continued)

Consider the Polluting game introduced at the beginning of Section 5.3. The set of its feasible payoffs is represented by the shaded area :



The set of feasible payoffs for the Polluting game

Consider the vector $z = (\frac{3}{4}, 5)$, which is feasible for this game. As noticed in Remark 5.12, there exists a contract inducing this vector payoff. But can the players agree to sign this contract ? Notice that by signing it, player 1 gets $\frac{3}{4}$, which is less that what he can get by simply playing D. Hence, player 1 prefers not to sign this contract. Consequently, the action profile of both signing such contract is not a Nash equilibrium. The same argument holds for any vector payoff z such that $z^1 < 1$, and similarly for player 2. It follows that

$$E_c \subset \{z \in \mathrm{Co}\, g \,|\, z^1 \geq 1,\ z^2 \geq 1\}.$$

in the Polluting game. In particular, the inclusion $E_c \subset \mathrm{Co}\, g$ is strict.

5.3.3 Characterization of the set of equilibrium payoffs

From the Polluting game example we learned that some feasible payoff vectors needed to be ruled out from the set of equilibrium payoffs. Precisely, those vectors which give to some player i, strictly less than what he can guarantee by himself. In fact, formalizing this observation is all that we need to characterize E_c.

Notation

— Let $\Gamma_\Delta = (N, (X^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ be the mixed extension of some finit game Γ.

— For each $i \in N$, let $Y^{-i} := \Delta(S^{-i})$ be the set of mixed strategies of the players other than i, acting together. [16]

Définition 5.13.

— The *maximin of player i* is $v^i := \max_{x^i\in X^i} \min_{s^{-i}\in S^{-i}} g^i(x^i, s^{-i}) = \min_{y^{-i}\in Y^{-i}} \max_{s^i\in S^i} g^i(s^i, y^{-i})$.

— A payoff vector $z \in \mathbb{R}^N$ is *individually rational* in Γ iff $z^i \geq v^i$, for all $i \in N$.

Comments. The maximin of player i corresponds to the value of the zero-sum game $\Gamma^i = (X^i, Y^{-i}, g^i)$. In this game, player i is the maximizer, whereas all the other players act as a single player which aims at minimizing i's payoff. Thus, $v^i := \mathrm{val}(\Gamma^i)$ is the payoff that player i can

16. Recall that $X^{-i} = \times_{j\neq i}\Delta(S^i)$ so that $Y^{-i} \neq X^{-i}$, unless $|N| = 2$. Indeed, the set X^{-i} corresponds to the set of probabilities over S^{-i} which are direct products whereas as Y^{-i} is the set of all probabilities over S^{-i}. The former corresponds to the situation in which each player chooses an action independently, and the latter to the more general case where the players select a joint action *as they want*.

guarantee in the *worst case* : when all the other players form a coalition and play against him. By the minmax theorem (both X^i and Y^{-i} are compact sets) optimal strategies exist and

$$v^i = \max_{x^i \in X^i} \min_{y^{-i} \in Y^{-i}} g^i(x^i, y^{-i}) = \min_{y^{-i} \in Y^{-i}} \max_{x^i \in X^i} g^i(x^i, y^{-i}).$$

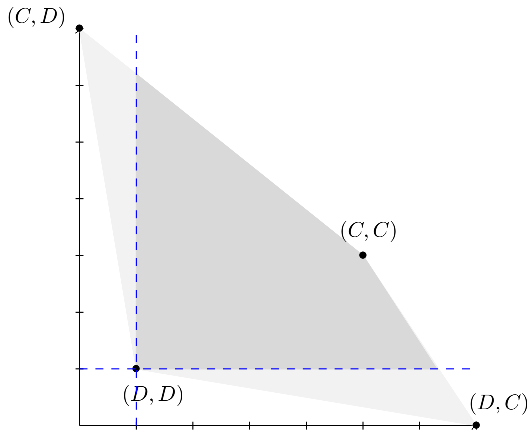
Punishment. An optimal strategy $y^{-i} \in Y^{-i}$ for the players other than i can be used by these players to punish or threaten player i. Indeed, by playing y^{-i} they ensure that player i gets the lowest possible payoff.

Théorème 5.14. *A payoff vector $z \in \mathbb{R}^N$ belongs to E_c if and only if it is feasible and individually rational, i.e.*

$$E_c = \{z \in \mathbb{R}^N \mid \exists \pi \in \Delta(S), g(\pi) = z \text{ and } z^i \geq v^i, \forall i \in N\}$$

Démonstration. Let $z \in \mathbb{R}^N$ be feasible and individually rational, so that $z^i \geq v^i$ for all $i \in N$ and there exists $\pi \in \Delta(S)$ such that $z = \sum_{s \in S} \pi(s) g(s)$. Consider the following contract : "if all the players sign this contract, then an action profile will be chosen according to the probability π ; if all the players sign this contract except player i, then the players other than i will punish this player by playing y^{-i}, an optimal strategy for player 2 in the zero-sum game $\Gamma^i = (X^i, Y^{-i}, g^i)$; ...". Clearly, the profile in which all the players sign this contract is a Nash equilibrium : by deviating, player i obtains at most v^i, which is not more that z^i, which he obtains by signing the contract. □

Illustration. The set of Nash equilibrium payoffs in the Polluting game example with contracts is shown by a darker area :



The figure illustrates the set of feasible and of equilibrium payoffs.

Exercice 5.15. Consider the following game Γ_z, for all $1 \leq z \leq 5$:

	S	T
S	6, 4	z, z
T	0, 0	4, 6

The Battle of Sexes, with selfishness factor z.

The real number z reflects the willingness of the players to go for their preferred activity, soccer (S) or theater (T).

1. Determine the set of Nash equilibria (NE_z) and the set of equilibrium payoffs (E_z).
   Hint : *Distinguish the cases $z \in [1, 4)$, $z = 4$ and $z \in (4, 5]$.*
2. Find a contract α such that $(\alpha, \alpha) \in NE_{z,\alpha}$ for all z and $g(\alpha, \alpha) = (5, 5)$.

3. Determine the set of Equilibrium payoffs $E_{z,c}$ of the game with contracts.
4. Can the players commit themselves (use a contract) to play (S,S) ?

Exercice 5.16. Consider the following minority game Γ played by three players :

	A	B
A	1, 1, 1	3, 0, 3
B	0, 3, 3	3, 3, 0

A

	A	B
A	3, 3, 0	0, 3, 3
B	3, 0, 3	1, 1, 1

B

1. Find some situation which corresponds to these payoffs.
2. Determine the set of Nash equilibria and the corresponding payoffs.
3. Find a contract α such that (α,α,α) is a Nash equilibrium of the extended game Γ_α, and $g(\alpha,\alpha,\alpha) = (2,2,2)$.
4. Is there a contract β such that (β,β,β) is a Nash equilibrium of the extended game Γ_β, and $g^1(\beta,\beta,\beta) = 3$?
5. Determine the set of Equilibrium payoffs E_c of the game with contracts.

5.4 Publicly correlated equilibria

As already noticed, in many situations it is literally impossible for the players to write and sign contracts. The players may, however, correlate their actions by commonly observing some random event. Consider, for instance, the following **coordination game** [17] :

	A	B
A	2, 1, 1	0, 0, 0
B	0, 0, 0	0, 0, 0

A

	A	B
A	0, 0, 0	0, 0, 0
B	0, 0, 0	1, 2, 1

B

The game models a situation where three players want to meet, but have two reasonable options. Moreover, player 1 prefers the first place, whereas player 2 prefers the second, and the third player is indifferent. Suppose that, prior to the game (say, the day before), the players communicate and agree on the following plan : everyone goes to A if it rains, or everyone goes to B if it does not rain. Unlike last section, the agreement here is not binding and each player can go wherever he wants to go in spite of the agreement. However, if a player expects the others to follow this agreement, he should follow it himself as well. If, for instance it rains, then since the other players are going to A, one should go to A too to meet them. By respecting this agreement, the expected payoff would be $p(2,1,1) + (1-p)(1,2,1)$, where p is the probability of the rain.

Alternatively, the players can toss a coin, roll a die, or use any randomization device they want, as far as its outcome is observed by all the players, to select some joint action. Note that this device induces a probability over the set of action profiles S, so that, without loss of generality, one can identify any randomization device with a probability $\pi \in \Delta(S)$. Its outcome is interpreted as a recommendation. A strategy for player i is a function f^i from S (the set of possible recommendations, or signals, he may get) to S^i (the set of possible actions he might, then, play). In particular, player i can follow the recommendation and play s^i, the i-th coordinate of the s.

Consider now the following joint plan of the players :

17. A coordination game designates a game in which the players' preferred outcomes are the ones in which they all play the same action.

1. Agree on some probability distribution $\pi \in \Delta(S)$.
2. Publicly, draw some action profile $s \in S$ according to π.
3. Knowing $s \in S$, each player $i \in N$ follows the recommendation, i.e. plays $s^i \in S^i$.

Note that this plan is characterized by the probability distribution π, so that we may identify the set of such plans and $\Delta(S)$. To be self-enforcing, a plan π needs to satisfies a Nash-equilibrium property, that is, that no player can benefit from deviating from the plan. We say that π is a publicly correlated equilibrium (or a correlated equilibrium with public signals) if the plan π satisfies this property. Let us give a more formal definition.

Définition 5.17. A probability $\pi \in \Delta(S)$ is a *publicly correlated equilibrium* iff

$$\sum_{s\in S} \pi(s) g^i(s^i, s^{-i}) \geq \sum_{s\in S} \pi(s) g^i(f^i(s), s^{-i}), \quad \forall f : S \to S^i, \ \forall i \in N. \tag{1}$$

The set of publicly correlated equilibria is denoted by PCE.

Comments. Suppose that π is a publicly correlated equilibrium. The previous definition captures the player's reasoning *ex ante*, i.e before he gets the signal. Indeed, each player i knows that any other pure strategy $f^i : S \to S^i$ would give him a lower payoff. Consider now the situation *ex post* : player i has received the recommendation s. To be a publicly correlated equilibrium, playing s^i should be player i's best option now. This reasoning leads us to the following equivalent definition : $\pi \in \Delta(S)$ is a publicly correlated equilibrium iff for all $s = (s^i, s^{-i})$ in the support [18] of π :

$$g^i(s^i, s^{-i}) \geq g^i(t^i, s^{-i}), \quad \forall t^i \in S^i, \forall i \in N. \tag{2}$$

Proposition 5.18. *The set of publicly correlated equilibrium is equal to* $\Delta(PNE)$.

Démonstration. The equivalent definition of publicly correlated equilibria states that $\pi \in PCE$ iff s is a pure Nash equilibrium (condition (2)) for all s in the support of π. The equality $PCE = \Delta(PNE)$ follows. □

Comments. Proposition 5.18 is not very surprising. Indeed, when player i receives the message s, he knows the pure action s^{-i} that the other players will play (assuming they all follow the agreement). Thus, s^i must belong $BR^i(s^{-i})$, or he will have an incentive to deviate.

Example. Let us go back to the coordination game at the beginning of Section 5.4. The underlying game (i.e. the game without communication) has three Nash equilibria, two pure (A, A, A) and (B, B, B) and one mixed $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. It is unclear how the players could agree on one on these equilibria without communication. The equilibrium payoffs are, respectively, $(2, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$ and $(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4})$. Recall the agreement mentioned above : "everyone goes to A if it rains and everyone goes to B if it doesn't". By Proposition 5.18, this agreement is a publicly correlated equilibrium, regardless of the probability $p \in [0, 1]$ of rain, and there are no other such equilibria. All the equilibrium payoffs thus obtained dominate (in the sense of Pareto) the payoff induced by the mixed Nash equilibrium.

Example. Consider the Battle of Sexes (Exercise 2) with $z = 0$:

	S	T
S	6, 4	0, 0
T	0, 0	4, 6

This game has two pure Nash equilibria, (S, S) and (T, T), and a completely mixed equilibrium $(x, y) = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$. The correspond payoffs are $(6, 4)$, $(4, 6)$ and $(\frac{12}{5}, \frac{12}{5})$. Note that the latter is **fair** (i.e. both players get the same payoff) but is Pareto-dominated by the other two outcomes. By Proposition 5.18, the set of publicly correlated equilibria is $\Delta(\{(S, S), (T, T)\})$. In particular, the players can agree to toss a fair coin and decide whether to go *together* to the soccer or to the theater

18. $s \in S$ is in the support of $\pi \in \Delta(S)$ iff $\pi(s) > 0$.

depending on the coin's outcome. By doing so, they achieve a payoff vector of $(5, 5)$. Alternatively, the players can use some public event to correlate their actions : the weather forecast, for instance, the outcome of some football game, or anything they can both observe (and be sure the other player will observe it as well) before selecting their actions. Personally, I recommend playing Rock-Scissor-Paper and let the winner decide where he/she prefers to go.

5.5 Correlated Equilibria

In considering publicly correlated equilibria, we assumed that the players agreed on some probability distribution $\pi \in \Delta(S)$ to select an action profile $s \in S$, and that **all the players observed** s before choosing their action. What if each player does not observe the whole recommendation, but only the coordinate which concerns him ? To do so, it is enough to have an impartial mediator, or an external machine. Suppose, for instance, that the mediator (or a computer) chooses s according to π, and communicates to each player $i \in N$, only its i-th coordinate, s^i.

Formally, suppose that the players agree in doing the following plan :

1. They communicate some probability distribution $\pi \in \Delta(S)$ to some mediator.
2. The mediator chooses $s \in S$ according to π and makes **private recommendations** to the players. That is, to player $i \in N$, he only communicates $s^i \in S^i$.
3. Then, each player $i \in N$ chooses an action independently and simultaneously.

Comments. The crucial point here is the following : even though all the players know the probability distribution π with which an action profile is selected, each player is only told one component of this action profile. As for publicly correlated equilibria (and unlike contract signing) the recommendation is non-binding, and the players can play anything they want. The action set of player $i \in N$ is the set of mappings from S^i (the set of possible recommendations) to S^i (the set of actions he can play).

Définition 5.19. A probability distribution $\pi \in \Delta(S)$ is a *correlated equilibrium* iff

$$\sum_{s \in S} \pi(s) g^i(s^i, s^{-i}) \geq \sum_{s \in S} \pi(s) g^i(f(s^i), s^{-i}), \quad \forall f : S^i \to S^i,\ \forall i \in N. \tag{3}$$

The set of publicly correlated equilibria is denoted by CE.

Remarque 5.20. Robert Aumann received the Nobel Prize in Economics (2005) for various major contributions to game theory, one of which was the introduction of correlated equilibria (1974), and later developments of this concept (1987).

Lemme 5.21. *Publicly correlated equilibria are correlated equilibria, i.e. $PCE \subset CE$.*

Démonstration. Fix $i \in N$. The action set S^i can be naturally injected into S, so that the set of functions from S^i to S^i can be seen as a subset of the set of functions from S to S^i. Hence, (3) is less restrictive than (1), and the result follows. □

Comments. A distribution π is a correlated equilibrium iff no player has an incentive to unilaterally deviate from his recommendation. That is, provided that the recommendations follow the law π and that all the other players follow their own recommendations, player i's best option is to follow his. As for publicly correlated equilibria, this way of thinking is *ex ante*, i.e. before receiving the signal. An equivalent, *ex post* formulation is as follows : π is a correlated equilibrium iff, given the recommendation s^i, player i's best option is to play s^i. This formulation tells us that $\pi \in CE$ iff for all s^i which has positive probability under π :

$$\sum_{s^{-i} \in S^{-i}} \pi(s^{-i}|s^i) g^i(s^i, s^{-i}) \geq \sum_{s^{-i} \in S^{-i}} \pi(s^{-i}|s^i) g^i(t^i, s^{-i}), \quad \forall t^i \in S^i, \forall i \in N. \tag{4}$$

Here, $\pi(s^{-i}|s^i)$ is the conditional probability of s^{-i} given s^i, under the distribution π, i.e. the probability of (s^i, s^{-i}) divided by the probability of s^i :

$$\pi(s^{-i}|s^i) := \frac{\pi(s^i, s^{-i})}{\pi(s^i)} = \frac{\pi(s^i, s^{-i})}{\sum_{t^{-i} \in S^{-i}} \pi(s^i, t^{-i})}$$

Note that, for each $s^i \in S^i$, $\pi(\cdot\,|s^i)$ is a probability over S^{-i}. The case $\pi(s^i) = 0$ is not relevant, in the sense that player i gets the recommendation s^i with probability 0 ; thus, what player does when he receives such signal does not affect the expected payoff.

Remarque 5.22. Note that (3) and (4) generalize, respectively, (1) and (2). In the case of a public signal, the conditional probabilities are trivial. Indeed, if s is publicly announced, then the probability of any action $t^i \in S^i$ is either 1 or 0 depending on whether $t^i = s^i$ or $t^i \neq s^i$. Mathematically, $\pi(\cdot\,|s^i) = \delta_{s^{-i}}$ in this case.

The following equivalent formulation of CE is the one that one uses in practice.

Proposition 5.23. *A distribution $\pi \in \Delta(S)$ is a correlated equilibrium iff*

$$\sum_{s^{-i}\in S^{-i}} \pi(s^i, s^{-i}) g^i(s^i, s^{-i}) \geq \sum_{s^{-i}\in S^{-i}} \pi(s^i, s^{-i}) g^i(t^i, s^{-i}), \quad \forall s^i \neq t^i \in S^i,\ \forall i \in N \qquad (5)$$

Démonstration. Let $s^i \in S^i$ and $\pi \in \Delta(S)$. Let $\pi(s^i) := \sum_{t\in S} \pi(t)\mathbb{1}_{\{t^i = s^i\}}$ be the probability that the i-th coordinate of s is s^i, when s is selected according to π. If $\pi(s^i) > 0$, then dividing the two sides of (5) by $\pi(s^i)$ gives exactly (4). On the other hand, if $\pi(s^i) = 0$ then $\pi(s^i, s^{-i}) = 0$ for all $s^{-i} \in S^{-i}$, so that (5) becomes trivial : $0 \geq 0$. □

Proposition 5.24. *The set of correlated equilibria is a convex, compact polytope.* [19]

Démonstration. Indeed, π is a correlated equilibrium iff the variables $(\pi(s))_{s\in S}$ satisfies finitely many linear inequalities (see Proposition 5.23) :

$$\begin{aligned} \pi(s) &\geq 0 && \forall s \in S \\ \textstyle\sum_{s\in S} \pi(s) &= 1 \\ \textstyle\sum_{s\in S} \pi(s)\big[g^i(s^i, s^{-i}) - g^i(f^i(s^i), s^{-i})\big] &\geq 0 && \forall i \in N,\ \forall f^i : S^i \to S^i \end{aligned}$$

Thus, the set of correlated equilibria is the intersection of finitely many half-spaces. The boundedness is direct, since correlated equilibria belong to the S-dimensional simplex. □

Remarque 5.25. How many half-spaces, precisely, define the set of correlated equilibria CE? Clearly, the simplex is defined by $|S|+2$ linear inequalities, to which one has to add the inequalities that characterize the equilibrium. Since there are m^n functions from a set with n elements to a set with m elements, the cardinal of $\{f^i : S^i \to S^i\}$ is $|S^i|^{|S^i|}$. Thus, according to the definition, one needs $\prod_{i\in N} |S^i|^{|S^i|}$ inequalities to characterize a correlated equilibrium. In particular, for the simplest case where $N = \{1, 2\}$ and $|S^1| = |S^2|$, this means 16 linear inequalities ! According to Proposition 5.23, however, one needs no more than one inequality for each pair of different actions, for each player. That is, a total of $\prod_{i\in N} |S^i|(|S^i| - 1)$, which in the simplest case gives 4.

5.6 Comparing all sorts of equilibria

Many equilibrium concepts have been introduced since we started this course, and some readers may be confused. However, it should be clear at this point that the equilibria are defined in terms of strategies profiles. That is, an equilibrium is a vector of strategies (one for each player) having some special properties. To fix the notation, let us recall the different equilibrium concepts here :

— Dominant strategies equilibria (DSE)

— Pure Nash equilibria (PNE)

— (Mixed) Nash Equilibria (NE)

— Sub-game perfect Nash equilibria (SPNE)

— Publicly correlated equilibria (PCE)

19. A convex polytope is the intersection of finitely many half-spaces. A product of semplices, for instance, is a compact, convex polytope.

— Correlated equilibria (CE)

Each of these sets induces a set of equilibrium payoffs – the payoff vectors, in $\mathbb{R}^N$, that correspond to some equilibrium of the set. An additional set of equilibrium payoffs was introduced in Section 5.3 : the set E_c of Nash equilibrium payoffs for some extension of the game with contracts.

Let us start by comparing Nash and correlated equilibria. The direct product mapping allows to express the set of mixed action profiles $X = \prod_{i\in N} \Delta(S^i)$ as a subset of $\Delta(S)$.

Proposition 5.26. *There is a bijection between NE and the following subset of CE :*

$$\{\pi \in CE \,|\, \pi = \otimes_{i\in N} x^i \text{ for some } x = (x^i)_{i\in N} \in X\}.$$

Comments. Nash equilibria are correlated equilibrium. They are, precisely, the correlated equilibria which are *uncorrelated*, i.e. tjhose in which the joint probability π is the product of independent probabilities.

Démonstration. It is enough to prove that, for any $x \in NE$, $\pi = \otimes_{i\in N} x^i$ is a correlated equilibrium, since the direct-product map is injective (see Lemma 5.1). But this is clear using the characterization of correlated equilibria in Proposition 5.23. Indeed, in this case, $\pi(s^i, s^{-i}) = x^i(s^i)x^{-i}(s^{-i})$, so that (5) yields, for all $t^i \neq s^i$ and $i \in N$:

$$x^i(s^i) \sum_{s^{-i}\in S^{-i}} x^{-i}(s^{-i})g^i(s^i, s^{-i}) \geq x^i(s^i) \sum_{s^{-i}\in S^{-i}} x^{-i}(s^{-i})g^i(t^i, s^{-i}) \tag{6}$$

which can be written as

$$x^i(s^i)g^i(s^i, x^{-i}) \geq x^i(s^i)g^i(t^i, x^{-i}), \quad \forall t^i \neq s^i,\ \forall i \in N$$

In other words, for all s^i in the support of x^i (i.e. such that $x^i(s^i) > 0$) one has :

$$g^i(s^i, x^{-i}) \geq g^i(t^i, x^{-i}), \quad \forall t^i \in S^i,\ \forall i \in N \tag{7}$$

which is precisely the Nash equilibrium condition. Indeed, player i plays (with strictly positive probability) actions which are pure best responses to x^{-i}, so that $x^i \in \Delta(br^i(x^{-i})) = BR^i(x^{-i})$. □

Corollaire 5.27. *Every Nash equilibrium corresponds to a unique correlated equilibrium.*

Démonstration. The direct product map injects NE in CE. Thus, for any $x = (x^i)_{i\in N} \in NE$ $\pi := x^1 \otimes \cdots \otimes x^N \in CE$. Recall that $\pi(s) = \prod_{i\in N} x^i(s^i)$, for all $s \in S$. □

Notation. Recall that the set of pure actions S^i can be viewed as a subset (via a trivial injection) of the set of mixed strategies, for each $i \in N$ and, similarly, one writes $S \subset X$. Now, thanks to the direct product injection, one can also write $X \subset \Delta(S)$. From now on, pure and mixed strategy profiles can be identified with their corresponding joint probability distribution.

Proposition 5.28. *The following inclusions hold :*

(*i*) $DSE \subset SPNE \subset PNE \subset \begin{cases} NE \\ PCE = \Delta(PNE) \end{cases} \subset CE$

(*ii*) *$E \subset E_{CE} \subset E_c$, where E, E_{CE} and E_c are, respectively, the set of Nash equilibrium payoffs, of correlated equilibrium payoffs and of equilibrium payoffs of a game with contracts.*

Démonstration. (*i*). It is straightforward thanks to Proposition 5.26 and Lemma 5.21.
(*ii*). The first inclusion follows from the inclusion $NE \subset CE$. Indeed, the set of equilibrium payoffs satisfy the same inclusions as in (*i*). To show that $E_{CE} \subset E_c$ it is enough to prove that for any $\pi \in CE$, $g(\pi)$ is individually rational. Suppose that it is not, and let $i \in N$ be such that $g^i(\pi) < v^i$. By playing a maximin strategy x^i (regardless of the recommendation) player i gets a higher payoff than following it, so that the agreement is not self-enforcing. Formally, consider the zero-sum game $\Gamma^i = (X^i, Y^{-i}, g^i)$, where player i plays against (a coalition of) the other players. For each [20] action

20. The conditional $\pi(\cdot|s^i)$ is unique if $\pi(s^i) > 0$ and can be defined arbitrarily otherwise.

$s^i \in S^i$, the conditional $\pi(\cdot|s^i)$ belongs to $Y^{-i} = \Delta(S^{-i})$. Let $f^i : S^i \to S^i$ be such that $f^i(s^i)$ is best response of player i to $\pi(\cdot|s^i)$ in Γ^i, for each $s^i \in S^i$. Then, $g^i(f^i(s^i), \pi(\cdot|s^i)) \geq v^i$ for all $s^i \in S^i$, so that

$$\sum_{s \in S} \pi(s) g^i(f^i(s^i), s^{-i})) = \sum_{s^i \in S^i} \pi(s^i) g^i(f^i(s^i), \pi(\cdot|s^i)) \geq v^i > \sum_{s \in S} \pi(s) g^i(s) = g^i(\pi).$$

Hence, $\pi \notin CE$ (see (3)), a contradiction. $\square$

Comments. Dominant strategy equilibria are the most restrictive and, as a consequence, DSE is often an empty set. Next in the chain, pure sub-game perfect Nash equilibria apply to extensive-form games with perfect information : games in which one player plays at a time, and each knows the whole past play before selecting an action. As normal-form game, these games are rather special. Their structure ensures the existence of a pure Nash equilibrium (obtained by backward induction), which is not the case in one of the simplest normal-form games, the penalty game. Nash equilibria arise by allowing the players to randomize independently, whereas publicly correlated and correlated equilibria use joint randomization. The latter, in addition, requires the some external element capable of giving different signals to each player.

Remarque 5.29. In general, neither $\Delta(PNE)$ is included in NE nor vice versa, as shown in the following example :

	A	B
A	6 6	7 2
B	2 7	1 1

Indeed, $PNE = \{(A, B), (B, A)\}$ so that $\Delta(PNE) = \{\pi \in \Delta(S) \,|\, \pi(A, B) + \pi(B, A) = 1\}$. On the other hand, $NE = PNE \cup \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, where the completely mixed Nash equilibrium corresponds (via the direct product) to the joint distribution $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \notin \Delta(PNE)$. Conversely, $\pi \in \Delta(S)$ such that $\pi(A, B) = \pi(B, A) = \frac{1}{2}$ belongs to $\Delta(PNE)$ but is not a Nash equilibrium.

Exercice 5.30. Find two joint distributions π and π' satisfying $\pi \in NE$, $\pi \notin PCE$ and $\pi' \in PCE$, $\pi' \notin NE$, for the following coordination game :

	A	B
A	1 1	0 0
B	0 0	1 1

Exercice 5.31. Consider a the following modified version of Rock-Scissor-Paper :

	R	S	P
R	-5 -5	-1 1	1 -1
S	1 -1	-5 -5	-1 1
P	-1 1	1 -1	-5 -5

Rock-Scissor-Paper with penalized draws

Compute the unique Nash equilibrium of this game, and let $w \in \mathbb{R}^2$ be its corresponding payoff. Find a correlated equilibrium giving a strictly better payoff for both players, i.e. find $\pi \in CE$ such that $g^i(\pi) > w^i$ for $i = 1, 2$.

5.7 The benefits of communication : an example

The aim of this example is to show the benefits communication in terms of social welfare and fairness. The *social welfare* of the distribution π is defined as $W(\pi) := \sum_{i \in N} g^i(\pi)$ be the *social welfare* (i.e. the total payoff). The distribution π is said to be *fair* if $g^i(\pi) = g^j(\pi)$, for all $i, j \in N$ (i.e. it induces the same payoff for each player).

For any subset of distributions $C \subset \Delta(S)$, let $W_C := \max_{\pi \in C} W(\pi)$ be the *social optimum*, and let $F_C := \max\{g^1(\pi) \,|\, \pi \in C,\ \pi \text{ is fair}\}$ be the highest fair payoff, which can be obtained in the set C.

Consider the following bi-matrix game Γ :

	L	R
T	1 5	0 0
B	4 4	5 1

The game of Chicken.

Claim. The game Γ satisfies :

— $W_{NE}(\pi) = W_{PCE}(\pi) < W_{CE}(\pi)$

— $F_{NE} < F_{PCE} < F_{CE}$.

— There is a fair equilibrium payoff $(Q, Q) \in \mathbb{R}^2$ in the game with contracts such that $Q > F_{CE}$.

Démonstration. Let us compute the sets PNE, NE, PCE, CE of equilibria and the sets of equilibrium payoffs E, E_{CE} and E_c. The computation of $PNE = \{(T, L), (B, R)\}$ is straightforward. Let $(x, y) \in [0, 1]^2$ stand for a mixed action profile. Suppose that $(x, y) \in NE$ and $0 < x < 1$. Then, by the EP, $g^1(T, y) = 5y$ and $g^1(B, y) = 4y + (1 - y)$ are equal, so that $y = \frac{1}{2}$. Then, by the EP, $g^2(x, L) = x + 4(1 - x)$ and $g^2(x, R) = 5(1 - x)$ are equal, so that $x = \frac{1}{2}$. The Nash equilibrium is thus unique, and $NE = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \cup PNE$. The corresponding set of payoffs is clearly $E = \{(5, 1), (1, 5), (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})\}$. Hence, $\max_{\pi \in NE} W(\pi) = 6$ and $F_{NE} = \frac{5}{2}$.

By Proposition 5.18, $PCE = \Delta(PNE) = \{\pi \in \Delta(S) \,|\, \pi(T, L) + \pi(B, R) = 1\}$. Note that the social welfare is constant and equal to 6 in PCE, and that $F_{PCE} = 3$. To compute CE, it is enough to use Proposition 5.23. Indeed, $\pi \in CE$ iff

$$\begin{aligned}
\pi(T, L)g^1(T, L) + \pi(T, R)g^1(T, R) &\geq \pi(T, L)g^1(B, L) + \pi(T, R)g^1(B, R) \\
\pi(B, L)g^1(B, L) + \pi(B, R)g^1(B, R) &\geq \pi(B, L)g^1(T, L) + \pi(B, R)g^1(T, R) \\
\pi(T, L)g^2(T, L) + \pi(B, L)g^2(B, L) &\geq \pi(T, L)g^2(T, R) + \pi(B, L)g^2(B, R) \\
\pi(T, R)g^2(T, R) + \pi(B, R)g^2(B, R) &\geq \pi(T, R)g^2(T, L) + \pi(B, R)g^2(B, L)
\end{aligned}$$

Replacing the payoffs, and re-arranging the terms one obtains :

$$\begin{aligned}
\pi(T, L) &\geq \pi(T, R) \\
\pi(T, L) &\geq \pi(B, L) \\
\pi(B, R) &\geq \pi(B, L) \\
\pi(B, R) &\geq \pi(T, R)
\end{aligned}$$

Together with the positivity conditions $\pi(s) \geq 0$, for all $s \in S$ and with the constraint $\pi(T, L) + \pi(T, R) + \pi(B, L) + \pi(B, R) = 1$, these 4 equations characterize the set CE, i.e.

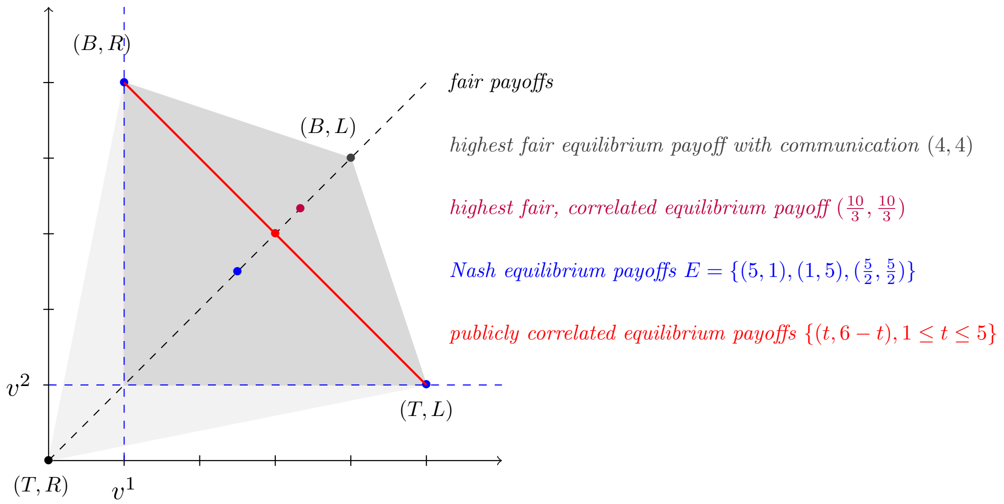
$$CE = \big\{\pi \in \Delta(S) \,|\, \min\{\pi(T, L), \pi(B, R)\} \geq \max\{\pi(T, R), \pi(B, L)\}\big\}.$$

To find the correlated equilibrium which maximizes the social welfare note that $W(B, L) > W(T, L) = W(B, T) > W(T, R)$. Hence, it is enough to find the correlated equilibrium which gives the biggest possible weight to (B, L) and the smallest possible weight to (T, R). The equations $\pi(B, L) \le \pi(T, L)$ and $\pi(B, L) \le \pi(B, R)$ imply that $\pi(B, L) \le \frac{1}{3}$, and $\pi(B, L) = \frac{1}{3}$ iff $\pi = (\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, for which $W(\pi) = \frac{20}{3}$. Clearly, π achieves the maximum and is fair, so that $\max_{\pi \in CE} W(\pi) = \frac{20}{3}$ and $F_{CE} = \frac{10}{3}$.

To compute the set E_c, one needs to compute the maximin for player 1, $v^1 \in \mathbb{R}$, since by symmetry $v^2 = v^1$. By definition, v^1 is the value of following zero-sum game :

	L	R
T	5	0
B	4	1

But R is strictly dominant for player 2, so that (iterate the elimination of dominated strategies) $v^1 = 1$. The set E_c is represented in the next figure as a shaded area :



To sustain the outcome (B, L), which clearly maximizes social welfare and is fair, it is enough to consider a standard contract, i.e. "if both players sign this contract, then (B, L) must be played ; if only player 2 signs, he must play R ; if only player 1 signs, he must play T".

□

Exercice 5.32 (Social optimum and fairness)**.** Let $\Gamma = (N, S, g)$ be a normal-form game. For any subset $C \subset \Delta(S)$, define $W_C := \max_{\pi \in C} \sum_{i \in N} g^i(\pi)$ and $F_C := \max\{g^1(\pi) \,|\, \pi \in C,\ g^i(\pi) = g^j(\pi),\ \text{for all } i, j \in N\}$.

1. Compare W_{NE} and W_{CE} and F_{NE} and F_{CE}.

From now on, let Γ be the Polluting game of the beginning of Section 5.3.

2. Compare W_{NE}, W_{PCE} and W_{CE}, and F_{NE}, F_{PCE} and F_{CE}. What is the benefit of having a mediator ?
3. Determine the set of equilibrium payoffs E_c of the game with contracts. Find a contract α such that (α, α) is a Nash equilibrium of the game Γ_α, whose payoff is $(Q, Q) \in \mathbb{R}^2$ for some $Q > F_{CE}$.
5. Conclude.

5.8 ∗ General communication systems

So far, we have considered one particular communication system : a mediator using some probability distribution over the set of action profiles S to send each player a private recommendation. What if a more complex communication system is used ? What are the equilibria of a normal-form game $\Gamma = (N, (S^i)_i, (g^i)_i)$ that arise by adding it ? To formalize such communication, for each $i \in N$, let R^i be the set of possible reports (messages) that player i can send to the system, and let M^i be the set of messages that he can receive from it. A pure strategy for player i in this game is thus a couple (r^i, f^i) where $r^i \in R^i$ is his initial report and $f^i : M^i \to S^i$ is a function which determines his reaction to the the message he receives. Let T^i be the set of such couples and let $T = T^1 \times \ldots, T^N$. Similarly, let R and M denote the sets of report profiles and messages, respectively.

Définition 5.33. A *communication system* $\mu : R \to \Delta(M)$ is any function that associates to each possible report $r \in R$ a distribution over the set of messages M.

Every communication system induces a normal form game $\Gamma_\mu = (N, (T^i)_{i\in N}, (h^i)_{i\in N})$, where $h^i : T \to \mathbb{R}$ is the expected payoff for player i given an action profile $t = (r^j, f^j)_{j\in N}$ and the communication system μ, i.e.

$$h^i\big((r^j, f^j)_{j\in N}\big) = \sum_{m\in M} \mu(m|r) g^i\big((f^j(m^j))_{j\in N}\big).$$

A (mixed) Nash equilibrium of Γ_μ is a vector $(x^i)_{i\in N}$ such that $x^i \in \Delta(T^i)$ for all $i \in N$ and such that no player has an incentive to deviate unilaterally.

Théorème 5.34 (Revelation Principle)**.** *Any Nash equilibrium of* Γ_μ *is equivalent to a correlated equilibrium of* Γ.

Démonstration. Let $x = (x^i)_{i\in N}$ be a Nash equilibrium of Γ_μ. Define a probability distribution $\pi \in \Delta(S)$ as follows :

$$\pi(s) = \sum_{(r,f)\in T} x(r, f) \sum_{m\in f^{-1}(s)} x(r, f)\mu(m|r), \quad \forall s \in S$$

where $f := (f^i)_{i\in N}$ is a function from M to S, $x(r, f) = \prod_{i\in N} x^i(r^i, f^i)$ is the probability of the pure action $(r, f) \in T$ and $f^{-1}(s) = \{m \in M \mid f(m) = s\}$. Thus, $\pi(s)$ is the probability that s is ultimately played.

□

6 Jeux coalitionnels

6.1 Introduction

Dans un premier temps, nous avons supposé que les joueurs ne pouvaient pas communiquer. Ils jouent alors simultanément et indépendamment – un profil de stratégies est un vecteur de variables aléatoires indépendantes. Nous avons ensuite étudié les jeux avec communication, en considérant les deux variantes suivantes : les jeux avec contrats et les jeux avec un intermédiaire. Dans les premiers, on suppose que les joueurs ont la possibilité, outre les actions prévues dans le jeu, d'ajouter des contrats – un contrat engage de manière définitive tous ses signataires à jouer une action jointe spécifiée par celui-ci. Dans les seconds, les joueurs peuvent communiquer une action jointe à un intermédiaire (un médiateur, une machine), qui peut ensuite envoyer à chaque joueur une recommendation privée. Nous avons aussi envisagé le cas intermédiaire où les recommendations sont publiques, auquel cas les joueurs peuvent se passer de médiateur, i.e. choisir un action jointe à l'aide d'une variable aléatoire choisie ensemble. Les différents degrés de communication dépendent des possibilités réelles des joueurs dans la situation modélisée. Leur impact, notamment sur les ensembles de paiements d'équilibre, a été étudié.

Nous allons maintenant considérer des jeux coopératifs. Ceux-ci modélisent les situation où les joueurs peuvent (ou doivent) s'unir pour *former des coalitions*. Former une coalition, c'est–à–dire, faire en sorte que leurs actions et leurs gains deviennent communs. On supposera dans cette section que le gain (paiement ou utilité) est quelque chose de transférable, comme de l'argent.

Définition 6.1. Un *jeu coopératif* est décrit par un couple (N, v), où N est l'ensemble des joueurs et $v : 2^N \to \mathbb{R}$ une fonction attribuant un paiement à chaque coalition $C \subset N$, et $v(\emptyset) = 0$.

Notation
– Pour tout ensemble fini A on note $2^A := \{B \mid B \subset A\}$ l'*ensemble des parties de A*.
– On écrit $B \subset A$ ou $B \in 2^A$ pour indiquer que B est un sous-ensemble de A
– Pour tout $C \subset N$ et $x \in \mathbb{R}^N$, et on écrira $x(C) := \sum_{i \in C} x^i$
– Un vecteur $x \in \mathbb{R}^N$ sera appelé une *allocation*
– On appelle v la *fonction caractéristique* du jeu (N, v)
– Pour tout $\{i_1, \ldots, i_m\} \subset N$, on notera $v(i_1, \ldots, i_m)$ à la place de $v(\{i_1, \ldots, i_m\})$
– Pour toute coalition $C \subset N$, on dira que $v(C)$ est la *valeur* de la coalition C

La fonction caractéristique spécifie le gain que peuvent générer les différentes coalitions dans un jeu à N joueurs. Le processus par lequel les coalitions sont formées peut être long et houleux, comme le sont souvent les négociations. On peut imaginer, par exemple, une suite d'offres et de contre-offres, de menaces et de promesses aboutissant à une partition $C_1, \ldots, C_K$ de l'ensemble de joueurs N. Dans un jeu à 2 joueurs, par exemple, les issues possibles sont $\{1, 2\}$ et $\{1\}, \{2\}$, correspondant respectivement à la formation d'une coalition ou non. De même, pour $N = \{1, 2, 3\}$, les issues possibles sont les partitions [21] suivantes :

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}$$

$$\{1, 2\}, \{3\}$$

$$\{1\}, \{2, 3\}$$

$$\{1, 3\}, \{2\}$$

$$\{1, 2, 3\}$$

La coalition formée par tous les joueurs sera nommée la *grande coalition*. A toute partition $(C_1, \ldots, C_K)$ correspond un ensemble de gains $(v(C_1), \ldots, v(C_K))$. Il est naturel de supposer que

21. Le nombre de partitions pour un ensemble à n éléments est le n-ème nombre de Bell.Les nombres de Bell satisfont la récurrence $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. On a, par exemple, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$, etc.

le gain $v(C)$ généré par une coalition C est à répartir parmi les joueurs appartenant à celle-ci. L'utilité étant transférable, on cherche donc une allocation $x \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $x(C_k) \leq v(C_k)$ pour tout $k = 1, \ldots, K$, où x^i représente la part d'utilité qui revient au joueur i, pour tout $i \in N$. L'inégalité stricte $x(C) < v(C)$ impliquerait que les joueurs dans $C \subset N$ ne se répartissent pas toute l'utilité dont ils disposent, ils en laissent une partie de côté. On verra que plus bas que, lorsqu'il s'agit d'équilibre (que ce soit le cœur ou la valeur de Shapley) aucune utilité ne sera mise de côté.

Commentaires. Le modèle assume implicitement les deux hypothèses suivantes :

— Aucun joueur ne peut appartenir à deux coalitions à la fois

— La valeur d'une coalition C ne dépend pas des coalitions au sein des autres joueurs, i.e. $N \backslash C$

La définition suivante met en exergue les allocations qui nous intéressent, à savoir les allocations réalisables qui sont efficientes et individuellement rationnelles. Elles définissent le champ sur lequel les joueurs vont négocier, qui s'avère être un compact, convexe de $\mathbb{R}^N$.

Définition 6.2. Soit (N, v) un jeu coalitionnel fixé. On dira qu'une allocation $x \in \mathbb{R}^N$ est

— *réalisable* : si $x(N) \leq v(N)$

— *efficiente* : si $x(N) = v(N)$

— *individuellement rationnelle* : $x^i \geq v(i)$, $\forall i \in N$

Rappel. Un *polytope* est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points. En particulier, c'est un compact, convexe. De manière équivalente, un polytope est un ensemble borné, délimité par un nombre fini d'hyperplans.

Exercice 6.3. Montrer que pour tout jeu coalitionnel, l'ensemble des allocations réalisables qui sont efficientes et individuellement rationnelles est un polytope.

6.1.1 Jeu coalitionnel issu d'un jeu non-coopératif

Un jeu non-coopératif $\Gamma = (N, S, g)$ peut donner lieu à un jeu coalitionnel, du moment où les utilités sont transférables. La grande coalition peut, bien entendu garantir l'optimum social du jeu. Pour tout autre sous ensemble de joueurs $C \subsetneq N$, il est naturel de considérer, *en cas de conflit*, le jeu à deux joueurs joué entre C et le complémentaire $N \backslash C$, i.e.

$$\Gamma_C = (S^C, S^{N\backslash C}, g^C, g^{N\backslash C})$$

où, pour chaque sous-ensemble de joueurs $M \subset N$, on note $S^M = \times_{i \in M} S^i$ l'ensemble de leurs action jointes et $g^M := \sum_{i \in M} g^i$ leur fonction de paiement agrégée. Pour définir $v(C)$, Von-Neumann et Morgenstern ont proposé (dans les années 50) d'utiliser le maximin, en argumentant que ce qu'une coalition C peut garantir est la valeur du jeu matriciel $(S^C, S^{N\backslash C}, g^C)$. C'est aussi l'approche suivie par Shapley pour définir la valeur de Shaley (voir ci-dessous) pour les jeux non-coopératifs. Cette approche est "pessimiste" au sens où elle considère que, en cas de conflit, tous les joueurs dans $S^{N\backslash C}$ pourraient s'allier pour minimiser le paiement des joueurs dans C. Une autre approche, moins pessimiste, est de dire que C et $S^{N\backslash C}$ n'ont pas nécessairement des intérêts contraires, et qu'ils pourraient se répartir les gains en utilisant la coco-valeur. Plus précisément, on définirait $v(C)$ comme étant la première coordonnée de la coco-valeur du jeu Γ_C.

Exemple 6.4 (*Travailleur– employeur*)**.** Un travailleur dit à son employeur : "puisque vous faites un profit grâce à moi, j'exige ma part ou alors, si vous refusez, je ferai en sorte que vous n'ayez plus aucun profit". On représente cela par le jeu non-coopératif suivant, où le premier joueur (le travailleur) peut insister (I) ou lâcher prise (L) et l'employer peut être ferme (F) ou arrangeant (A) à la demande de son employeur.

	F	A
I	-999, 0	5, 5
L	0, 10	0, 10

On détermine aisément les maximins du jeu ainsi que la coco-valeur. Le jeu coalitionnel défini par Von Neumann et Morgenstern (à l'aide des maximin) et celui défini à l'aide de la coco-valeur sont donc, respectivement :

$$v(1) = 0, \quad v(2) = 5, \quad v(1, 2) = 10$$

$$w(1) = 0, \quad w(2) = 10, \quad w(1, 2) = 10$$

On remarquera que, dans les deux cas, la fragilité du travailleur (qui peut avoir -999) n'apparaît pas dans la fonction caractéristique.

Exercice 6.5. Soit Γ_α le jeu obtenu en remplaçant $g^1(I, F)$ par $-\alpha$ dans le jeu précédent. Etudier v_α et w_α, fonctions caractéristiques des jeux coalitionnels associés, pour tout $\alpha \geq 0$.

Exercice 6.6. Ecrire les jeu coalitionnels correspondant (1) à un jeu à matriciel, (2) au dilemme du prisonnier, (3) à la bataille des sexes, (4) au jeu de majorité à 3 joueurs, et (5) au jeu du bon samaritain à n joueurs.

6.1.2 Deux classes de jeux

Selon la structure de la fonction caractéristique, on distingue plusieurs types de jeux : simples, cohésifs, symétriques, à somme constante, de profit, de coût, additifs, super-additifs, de mesure, convexes, de véto, etc. Nous allons définir seulement les deux premiers – les autres seront définis plus tard, notamment dans les exercices.

Définition 6.7. On dit que le jeu (N, v) est un jeu coalitionnel

— *simple* si $v(C) \in \{0, 1\}$ pour tout $C \subset N$. On dit que C est *coalition gagnante* si $v(C) = 1$.

— *cohésif* si $v(N) \geq \sum_{k=1}^{K} v(C_k)$ pour toute partition $C_1, \ldots, C_K$ de N.

Les **jeux cohésifs** ont un rôle important en économie et en politique. Dans ces jeux, la grande coalition a toutes les chances de se former – même si au sein de celle-ci certains joueurs n'auront rien. Une hypothèse plus forte, souvent observée, est celle de la *super-additivité* qui dit que la valeur de l'union est supérieure ou égale à la somme des valeurs, i.e $v(C \cup C') \geq v(C) + v(C')$ pour tout couple de coalitions disjointes. Le jeu coalitionnel défini par Von Neumann et Morgentern à partir d'un jeu non-coopératif, par exemple, est un jeu super-additif.

Exercice 6.8 (*Super-additif implique cohésif*)**.** Montrer qu'un jeu coalitionnel super-additif est cohésif. Donner un exemple de jeu cohésif qui ne soit pas super-additif.

Pour les **jeux simples** on considère souvent quelques axiomes en plus, notamment que la grande coalition est gagnante, qu'aucune coalition perdante ne peut contenir des coalitions gagnantes et que le complémentaire d'une coalition gagnante est perdante, i.e. $v(N) = 1$, $v(C) = 0$ et $C' \subset C \ \Rightarrow v(C') = 0$ et $v(C) = 1 \ \Rightarrow v(N \backslash C) = 0$.

Exemple 6.9. Illustrons ces jeux par deux exemples :

— *Economie de production.* Chaque joueur (une entreprise) possède certaines ressources (des matériaux, par exemple) qui peuvent servir à produire des biens. Séparées, les coalitions $C_1, \ldots, C_K$ peuvent produire des bien de valeurs $v(C_1), \ldots, v(C_K)$ respectivement. En formant la grande coalition, les joueurs peuvent toujours choisir de travailler en équipes séparées, i.e. utiliser les ressources de C_1 pour générer $v(C_1)$, celles de C_2 pour $v(C_2)$ et ainsi de suite. Ceci n'étant qu'une possibilité parmi d'autres, on a bien $v(N) \geq v(C_1) + \cdots + v(C_K)$.

— *Majorité à seuil.* Lors d'une élection, chaque parti politique possède un certain nombre de voix. Lorsqu'aucun ne possède la majorité absolue, les partis doivent s'unir pour former une coalition majoritaire. Il s'agit là d'un jeu cohésif simple. Plus généralement, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}^N$, on note $[\alpha; m]$ le jeu simple, à N joueurs, et dont la fonction caractéristique est donnée par $v(C) = \mathbb{1}_{\{m(C) \geq \alpha\}}$, $C \subset N$. Dans ce jeu, chaque joueur a un poids m^i et une coalition est gagnante si et seulement son poids est supérieur au seuil fixé α.

Exercice 6.10 (*Jeux cohésifs 2 joueurs*)**.** Décrire l'ensemble de tous les jeux cohésifs à 2 joueurs.

Exercice 6.11 (*Jeux super-additifs*)**.** Montrer que l'ensemble des jeux super-additifs à N joueurs est convexe, i.e. $(N, \alpha v + (1-\alpha)w)$ est super-additif pour tout $\alpha \in [0,1]$ et tout couple de jeux (N,v) et (N,w) super-additifs.

Exercice 6.12 (*Jeux cohésifs simples*)**.** Soit $\Gamma = (N,v)$ un jeu cohésif simple et soit $C \neq N$ une coalition gagnante. Montrer que $v(C') = 0$ pour tout C' tel que $C \cap C' = \emptyset$. Commenter.

Exercice 6.13 (*Jeu simple non cohésif*)**.** Donner un exemple d'un jeu simple, non cohésif.

6.1.3 Contribution marginale et jeux symétriques

On s'intéresse au gain qu'apporte un joueur en rejoignant une coalition. Cela nous permet, en particulier, de repérer lorsque deux joueurs ont des rôles identiques ou lorsqu'un joueur n'a aucun impact stratégique sur le jeu.

Définition 6.14. On se fixe un jeu coalitionnel $\Gamma = (N,v)$.

— La *contribution marginale* du joueur $i \in N$ à une coalition C telle que $i \notin C$ est

$$\Delta(i,C) := v(C \cup \{i\}) - v(C)$$

— Les joueurs *i et j sont interchangeables* si leur contribution marginale à toute coalition ne les contenant pas est égale, i.e. si $\Delta(i,C) = \Delta(j,C)$ pour tout C tel que $i,j \notin C$.

— Le jeu Γ est *symétrique* si tous les joueurs sont interchangeables.

— Le joueur i est *non-stratégique* si $\Delta(i,C) = v(i)$ pour tout C tel que $i \notin C$.

Une classe de **jeux symétriques** assez facile à manier est celle où la valeur d'une coalition ne dépend que de sa taille. Autrement dit, il existe une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $v(C) = f(|C|)$ pour tout $C \subset N$. On remarquera que la contribution marginal du joueur $i \in N$ à une coalition C ne le contenant pas est, dans ce cas, $\Delta(i,C) = f(|C|+1) - f(|C|)$.

Remarque 6.15 (*Jeux de mesure*)**.** Le fait de pouvoir représenter la fonction caractéristique à l'aide d'une fonction numérique, cependant, dépasse largement le cadre des jeux symétriques. Plus généralement on parle de *jeu de mesure* lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $v(C) = f(\sum_{i \in C} m^i)$, pour tout $C \subset N$. C'est le cas, par exemple, du jeu de *majorité à seuil* $[\alpha; m]$ mentionné ci-dessus lorsque m^i est le pourcentage de votes obtenu par le parti i et α le seuil. Dans ce cas, $f(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq \alpha\}}$ représente le jeu en tant que jeu de mesure.

Exercice 6.16. Montrer que i et j sont interchangeables dans (N,v) si et seulement si $v(C \cup \{i\}) = v(C \cup \{j\})$, pour toute coalition $C \subset N$ ne contenant ni i ni j, i.e. telle que $C \cap \{i,j\} = \emptyset$.

6.2 Un exemple : le jeu des trois chaussures

Sur un marché, 3 joueurs veulent vendre une paire de chaussures qui vaut 60 euros. Les deux premiers joueurs possèdent chacun une chaussure droite, le troisième joueur possède une chaussure gauche. Seul, aucun joueur ne peut faire de surplus, de même que les deux premiers joueurs ensemble. Les autres coalitions disposent d'une paire de chaussures et peuvent donc obtenir un surplus en la mettant à la vente. On représente cela par le jeu coalitionnel (N,v) cohésif suivant :

$$N = \{1,2,3\}, \quad v(1) = v(2) = v(3) = v(1,2) = 0, \; v(1,3) = v(2,3) = v(1,2,3) = 60$$

Il existe donc trois coalitions produisant un profit, $\{1,3\}, \{1,2\}$ et $\{1,2,3\}$. Tentons de comprendre laquelle se formera et comment, au sein de celle-ci, le gain sera distribué. Le jeu étant cohésif (i.e. la grande coalition génère au moins autant de profit que toutes les autres partitions) on peut supposer que les négociations aboutissent toujours à la grande coalition et l'enjeu est de définir une allocation $x \in \mathbb{R}^3$ qui "convienne" ou qui soit une "issue logique" dans ce jeu. Chaque joueur pouvant obtenir au moins 0 en restant seul, il faut déjà que $x^i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, 3$. En effet, dans le cas contraire le joueur ayant un gain négatif préfèrerait strictement quitter la grande coalition et celle-ci ne serait donc pas l'issue finale du jeu. De même, $x^1 + x^2 + x^3 = 60$ puisque, à la fin, une paire de chaussures est vendu et l'argent est à répartir parmi les trois joueurs. Le terrain de négociation est donc l'ensemble des allocations réalisables, qui sont efficientes et individuellement rationnelles.

(20,20,20) : ***Equité.*** La seule allocation équitable est $(20, 20, 20)$. Mais est-ce une issue raisonnable ? Les joueurs 2 et 3 ne pourraient-il pas menacer (le joueur 1) de rompre la grande coalition pour s'unir ensemble et s'offrir l'allocation $(0, 30, 30)$, avec laquelle ils gagnent strictement plus tous les deux ? Ces considérations mènent à une toute autre allocation.

(0,0,60) : ***Le cœur.*** Soit x une allocation réalisable (finale) pour laquelle tout le profit ne revient pas au joueur 3, i.e. $x^3 < 60$ et donc $x^1 > 0$ ou $x^2 > 0$. Les joueurs 1 et 2 étant interchangeables, supposons sans perte de généralité que $x^1 > 0$. Comme précédemment, les joueurs 2 et 3 peuvent menacer (le joueur 1) de former la coalition $\{2, 3\}$ et s'offrir l'allocation $(0, x^2 + \frac{x^1}{2}$ et $x^3 + \frac{x^1}{2})$, strictement avantageuse pour les deux. L'allocation x admettrait une "déviation profitable", i.e. un couple (C, y) coalition–allocation tel que $y(C) \leq v(C)$ et $y^i > x^i$ pour tout $i \in C$. On remarquera qu'il s'agit d'une déviation en termes de coalitions et qu'on demande à ce qu'elle soit profitable pour tous les joueurs intégrant la nouvelle coalition. Le *core*, i.e. l'ensemble des allocations n'admettant pas de déviation profitable, contient donc une unique allocation, $(0, 0, 60)$.

(10,10,40) : ***Valeur de Shapley.*** Parmi les toutes allocations envisageables, i.e.

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^1 + x^2 + x^3 = 60,\ x^1 \geq 0,\ x^2 \geq 0,\ x^3 \geq 0\}$$

on en a proposé deux de très particulières : $(20, 20, 20)$ est l'unique allocation équitable mais est sujette à des déviations profitables et $(0, 0, 60)$ est on ne peut moins équitable mais la seule à être à l'abri de telles déviations. Alternativement, on propose l'allocation $(10, 10, 40)$. Ni équitable ni dans le cœur, cette allocation (la valeur de Shapley pour ce jeu) est obtenue en considérant la contribution marginale moyenne, ou espérée, de chaque joueur lorsque ceux-ci sont tirés l'un après l'autre au hasard et que chacun rejoint, en arrivant, la coalition des joueurs tirés avant lui. Le joueur 1, par exemple, est premier avec probabilité 1/3. Sa contribution marginale est donc $v(1) - v(\emptyset) = 0$. Avec probabilité 1/3, il est tiré en dernier et sa contribution marginale est $v(1, 2, 3) - v(2, 3) = 0$. Enfin, avec probabilité 1/3 il arrive en deuxième, et sa contribution marginale est $v(1, 2) - v(1) = 0$ si le joueur 2 a été tiré en premier et $v(1, 3) - v(1) = 60$ sinon. La contribution moyenne du joueur 1 est donc $\frac{1}{3}(0 + 0 + \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}60) = 10$. Les joueurs 1 et 2 étant interchangeable, la contribution marginale moyenne de ce dernier est aussi 10, et on obtient $x^3 = 40$ par un calcul analogue : sur les 6 permutation équiprobables possibles $(1, 2, 3)^\pi = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ sa contribution marginale est de 60 dans les 4 premières, et 0 dans les deux dernières.

(15,15,30) : ***Brûler une chaussure.*** Les joueurs 1 et 2 étant interchangeables, il est naturel de considérer les allocations vérifiant $x^1 = x^2$. C'est d'ailleurs le cas pour les 3 allocations proposées plus haut. Nous proposons ici une nouvelle allocation obtenue grâce à un contrat : les joueurs 1 et 2 s'engagent à agir comme un seul. Pour ce faire, ils brûlent une chaussure puis signent un contrat stipulant que la deuxième chaussure leur appartient à 50%. Cette opération transforme le jeu en un jeu à deux joueurs, $C = \{1, 2\}$ et $\{3\}$, et où la fonction caractéristique est donnée par $w(C) = w(3) = 0,\ w(C, 3) = 60$. Dans ce nouveau jeu, la valeur de shapley coincide avec l'allocation équitable $(30, 30)$, qui est aussi dans le cœur. En distribuant l'argent équitablement dans C, comme suggéré dans le contrat, on obtient l'allocation $(15, 15, 30)$ dans le jeu de départ. Bien évidemment, toute allocation devient "possible" avec des contrats. Mais celle-ci est particulièrement significative.

Le cœur et la valeur de Shapley feront l'objet des Sections 6.4 et 6.5 respectivement. La dernière approche, qui fait appel à des contrats permettant de modifier le jeu, ne sera pas étudié dans ce cours.

6.3 Equivalence stratégique

De même que pour les jeux non-coopératifs, un jeu coalitionnel ne devrait pas dépendre de la devise choisie (dollars, euros, francs suisses, pesetas [22]) dans la fonction caractéristique. De même, un jeu ne devrait pas changer si l'on donne à chaque joueur, avant de commencer, une certaine somme d'argent. La définition suivante formalise cette idée.

22. Monnaie utilisée en Espagne jusqu'en 2002.

Définition 6.17. Deux jeux coalitionnels (N, v) et (N, w) sont (stratégiquement) *équivalents* s'il existe $\alpha > 0$ et un vecteur $\beta \in \mathbb{R}^N$ tels que $w(C) = \alpha v(C) + \beta(C)$, pour toute coalition $C \subset N$.

Définition 6.18. Un jeu coalitionnel (N, v) est *normalisé* si $v(i) = 0$ pour tout $i \in N$ et $v(N) \in \{-1, 0, 1\}$. On distingue ainsi les jeux normalisés *négatifs*, *nuls* ou *positifs* en fonction de $v(N)$.

Proposition 6.19. *Un jeu coalitionnel (N, v) est équivalent à un jeu normalisé*

— *positif si et seulement si $v(N) > \sum_{i\in N} v(i)$*
— *nul si et seulement si $v(N) = \sum_{i\in N} v(i)$*
— *négatif si et seulement si $v(N) < \sum_{i\in N} v(i)$*

Démonstration. Soit (N, v) un jeu coalitionnel normalisé positif. Alors $1 = v(N) > \sum_{i\in N} v(i) = 0$. Réciproquement, supposons que $v(N) > \sum_{i\in N} v(i)$. On pose alors $w(C) := \alpha v(C) + \beta(C)$ pour tout $C \in 2^N$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}^N$ des solutions du système linéaire suivant :

$$\alpha v(i) + \beta^i = 0, \quad \forall i \in N \quad \text{et} \quad \alpha v(N) + \sum_{i\in N} \beta^i = 1$$

Alors (N, w) est un jeu normalisé positif, équivalent à (N, v). On vérifie pour finir que ce système admet bien une solution :

$$\alpha = \frac{1}{v(N) - \sum_{i\in N} v(i)} \quad \text{et} \quad \beta^i = \frac{-v(i)}{v(N) - \sum_{i\in N} v(i)}, \ \forall i \in N$$

Le reste de la démonstration est laissé en **exercice**. □

Exercice 6.20 (*Le jeu "travailleur-employé" est-il symétrique ?*)**.** Définir le jeu normalisé équivalent au jeu "travailleur–employé". Commenter.

Exercice 6.21 (*Un jeu à 3 joueurs*)**.** Soit $\Gamma = (N, v)$ le jeu à 3 joueurs suivant :

$$v(1) = 4, \ v(2) = 2, \ v(3) = 1, \ v(1, 2) = 9, \ v(1, 3) = 8, \ v(2, 3) = 6, \ \text{et } v(1, 2, 3) = 10$$

1. Vérifier que le jeu est à *somme constante*, i.e. $v(C) + v(N\backslash C) = v(N)$ pour tout $C \subset N$.
2. Déterminer un jeu normalisé équivalent. S'agit-il d'un jeu symétrique ? Commenter.
3. Montrer que tous les jeux à 3 joueurs, à somme constante et tels que $v(N) > 0$ sont équivalents. *Indication :* montrer qu'ils sont équivalents au même jeu normalisé positif.

Exercice 6.22. Soit (N, w) un jeu normalisé positif équivalent à (N, v).

1. Montrer que pour tout coalition $C \subset N$ on a :

$$w(C) = \frac{v(C) - \sum_{i\in C} v(i)}{v(N) - \sum_{i\in N} v(i)}$$

2. Réciproquement, exprimer $v(C)$ en fonction de w, pour tout $C \subset N$

Exercice 6.23. Montrer que l'équivalence stratégique est une relation d'équivalence au sens mathématique, i.e. une relation réflexive, symétrique et transitive.

6.4 Le cœur

Dans cette section nous allons formaliser la définition du cœur, abordée déjà dans l'exemple des trois chaussures. **On supposera que le jeu $\Gamma = (N, v)$ est cohésif**, i.e. $v(N) \geq v(C_1) + \cdots + v(C_K)$ pour toute partition $C_1, \ldots, C_K$ de N.

Définition 6.24. Le *cœur d'un jeu coalitionnel (N, v)*, noté $\mathrm{core}(N, v)$, est l'ensemble des allocations $x \in \mathbb{R}^N$ réalisables pour lesquelles il n'existe pas de couple (C, y), où $C \subset N$ est une coalition, y est une allocation telle que $y(C) \leq v(C)$ et $y^i > x^i$ pour tout $i \in C$.

L'exercice suivant donne une définition équivalente du cœur. En particulier, $x(N) = v(N)$ pour toute allocation du cœur. Autrement dit, **toute allocation du cœur est efficiente**.

Exercice 6.25 (*Définition équivalente du cœur*). Soit $\Gamma = (N, v)$ un jeu coalitionnel. Montrer que

$$\mathrm{core}(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(C) \geq v(C),\ \forall C \subset N,\ \text{et } x(N) = v(N)\}$$

Corollaire 6.26. *Le cœur est un polytope, i.e. l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points.*

Démonstration. D'après l'Exercice 6.25 le cœur est défini comme intersection de $2^{|N|}$ demi-espaces, i.e. $\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(C) \geq v(C)\}$, pour tout $C \subset N$, et $\{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \leq v(N)\}$. C'est donc un ensemble fermé et convexe (comme intersection d'espaces fermés et convexes). S'il n'était pas borné, il existerait $(x_n)_n \subset \mathrm{core}(\Gamma)$ et $i \in N$ tels que $x_n^i \to \infty$. Or, $\sum_j x_n^j = v(N)$ et donc il existe $k \neq i$ tel que $x_n^k \to -\infty$, ce qui contredit la condition $x_n^k \geq v(k)$ pour tout $k \in N$, pour tout n. $\square$

Exemple 6.27. Soit $\Gamma = (N, v)$ un jeu à 3 joueurs. Une allocation $x \in \mathbb{R}^3$ est dans le cœur de Γ si et seulement si elle vérifie les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} x^1 + x^2 + x^3 & = & v(1,2,3) \\ x^1 + x^2 & \geq & v(1,2) \\ x^1 + x^3 & \geq & v(1,3) \\ x^2 + x^3 & \geq & v(2,3) \\ x^1 & \geq & v(1) \\ x^2 & \geq & v(2) \\ x^3 & \geq & v(3) \end{array}$$

Exercice 6.28 (*Jeux à deux joueurs*). Déterminer le cœur pour une jeu (N, v) à deux joueurs. Donner trois exemples : un premier où le cœur est vide, un second où le cœur est un intervalle et un dernier où le cœur contient un unique élément.

Exercice 6.29 (*Jeux non-cohésifs*). Montrer que le cœur est vide pour tout jeu non cohésif.

Exercice 6.30 (*). L'exercice précédent suggère que la définition du cœur est peut-être inadaptée pour les jeux non-cohésifs. Proposer une nouvelle définition du cœur pour les jeux non-cohésifs.

Exercice 6.31 (*Jeux à somme nulle*). Soit $\Gamma = (S, T, g)$ un jeu à somme nulle de valeur $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que le cœur du jeu coalitionnel associé est $\{(\alpha, -\alpha)\}$. Commenter.

Exercice 6.32 (*Allocation équitable*). Soit (N, v) un jeu symétrique. Montrer que si le cœur est non-vide, alors il contient l'allocation $x \in \mathbb{R}^N$ définie par $x^i = v(N)/|N|$ pour tout $i \in N$.

Exercice 6.33 (*Jeux symétriques*). Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et ensemble fini N, on définit le jeu coalitionnel (N, v_f) en posant $v_f(C) := f(|C|)$ pour tout $C \subset N$. Montrer que (N, v_f) est symétrique et que le cœur est non-vide si et seulement si $\frac{f(m)}{m} \leq \frac{f(|N|)}{|N|}$, pour tout $m = 1, \ldots, |N|-1$. *Indication :* on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

La proposition suivante donne une relation explicite reliant le cœur de deux jeux équivalents. En particulier, l'existence ou non du cœur est invariante par équivalence stratégique. Autrement dit, on ne peut pas avoir deux jeux équivalents dont un a le cœur vide et pas l'autre.

Proposition 6.34. *Soit $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^N$ et $\Gamma = (N, v)$ un jeu coalitionnel. Alors*

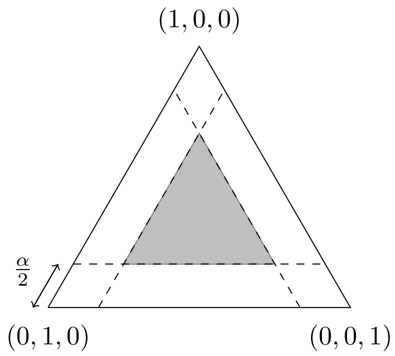
$$\mathrm{core}(N, \alpha v + \beta) = \alpha \mathrm{core}(N, v) + \beta$$

Dans le "jeu des trois chaussures", le cœur contient un unique élément : l'allocation où tout le profit revient au joueur possédant la chaussure différente. En général, cependant, le cœur peut contenir plusieurs éléments. L'application qui à chaque jeu coalitionnel attribue son cœur est donc une correspondance. Cette situation est analogue à celle des équilibres de Nash pour les jeux non-coopératifs, avec la différence importante que **le cœur peut être vide**. Illustrons cela par un exemple.

Exemple 6.35 (*Jeu de majorité à 3 joueurs*)**.** Ensemble, 3 joueurs produisent un gain de 1, à deux ils produisent $\alpha \in [0,1]$ et seul aucun joueur ne produit de profit. Autrement dit :

$$v_\alpha(C) = \begin{cases} 1 & \text{si } |C| = 3 \\ \alpha & \text{si } |C| = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le cœur est l'ensemble des allocations positives $x \in \mathbb{R}^N_+$ vérifiant $x(N) = 1$ et $x(C) \geq \alpha$ pour toute coalition C de cardinal 2. Pour $\alpha = 1/3$, le cœur est l'ensemble représenté dans la figure suivante par une région ombragée à l'intérieur de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^1 + x^2 + x^3 = 1,\ x^1, x^2, x^3 \geq 0\}$ des allocations réalisables efficientes :



Le cœur est une région non-triviale pour tout $\alpha < 2/3$ – il contient donc une infinité de points. Pour $\alpha = 2/3$, la cœur est réduit à un unique élément $\{(1/3, 1/3, 1/3)\}$, et il est vide pour tout $\alpha > 2/3$. En effet, $x^i + x^j \geq \alpha$ pour tout $i \neq j$ implique que $2 = 2(x^1 + x^2 + x^3) \geq 3\alpha > 2$, une contradiction.

Le cœur pouvant être vide, on envisage naturellement deux approches :

— Caractériser les jeux pour lesquels le cœur est non-vide.

— Définir un nouveau concept de solution qui s'appliquerait à tous les jeux.

La première approche mène au Théorème de Shapley-Bondareva (voir ci-dessous). La seconde à donné lieu à de nombreuses notions alternatives de solution, parmi lesquelles se trouvent l'ensemble de marchandage et la valeur de Shapley. L'ensemble de marchandage résulte d'un léger assouplissement dans la définition du cœur, permettant aux joueurs de marchander, i.e. faire des objections et des contre-objections aux allocations réalisables. Par rapport au cœur, il a l'avantage d'être toujours non-vide et le désavantage d'être un ensemble plus large. La valeur de Shapley déterminer une allocation unique pour chaque jeu. Celle-ci peut appartenir au cœur, lorsque celui-ci est non-vide, mais peut aussi être en dehors. En ce sens, la valeur de Shapley donne une allocation idéale, ou souhaitable, même lorsque celle-ci n'est pas stable au sens défini par le cœur : il peut y avoir un groupe de joueurs insatisfaits qui auraient préféré former une coalition sans les autres, afin de gagner tous strictement plus.

Exercice 6.36 (*Jeu de majorité à $2n+1$ joueurs*)**.** Pour $n \geq 1$, considérer le jeu coalitionnel simple à $2n + 1$ où une coalition est gagnante si et seulement si elle contient une majorité de joueurs. C'est–à–dire, $v(C) = 1$ si $|C| > n$ et $v(C) = 0$ sinon. Montrer que le cœur de ce jeu est vide.

Exercice 6.37 (*Jeux simples avec vétos*)**.** Un joueur $i \in N$ est un *joueur véto* dans le jeu simple $\Gamma = (N, v)$ lorsqu'il ne peut pas y avoir de coalition gagnante sans lui, i.e. $v(C) = 1$ implique $i \in C$. Soit $M \subset N$ l'ensemble (possiblement vide) de ces joueurs.

1. Donner un exemple d'un jeu pour lequel M est vide et un autre pour lequel M est non-vide.
2. Montrer que le cœur est vide si M est vide, et que sinon $\text{core}(\Gamma) = \{x \geq 0 \,|\, x^i = 0,\ \forall i \notin M\}$.

Exercice 6.38 (*Jeux convexes*)**.** Soit $\Gamma = (N, v)$ un *jeu convexe*, i.e. tel que

$$v(C) + v(C') \leq v(C \cup C') + v(C \cap C'), \quad \forall C, C' \subset N$$

Montrer que

1. $\Gamma = (N, v)$ est super-additif et cohésif
2. L'allocation définie par $x^i := v(1, \ldots, i) - v(1, \ldots, i-1)$, $\forall i = 1, \ldots, |N|$ est dans le cœur
3. En déduire que les jeux convexes sont équilibrés

Exercice 6.39 (*Jeux à somme constante*)**.** Un jeu coalitionnel est *à somme constante* si $v(C) + v(N \backslash C) = v(N)$, pour tout $C \subset N$. Il est *additif* si $v(C \cup C') = v(C) + v(C')$ pour tout couple de coalitions disjointes. Montrer que le cœur d'un jeu coalitionnel à somme constante qui n'est pas additif est vide.

6.4.1 Théorème de Shapley-Bondareva

Commençons par caractériser les jeux dont le cœur est non-vide. Pour cela, il faudra introduire les jeux dits *équilibrés*, qui seront précisément ceux pour lesquels le cœur est non-vide.

Définition 6.40. Soit $\Gamma = (N, v)$ un jeu coalitionnel.

— $\lambda : 2^N \to [0,1]$ est un *vecteur N-équilibré* si $\sum_{C \in 2^N} \lambda(C) \mathbb{1}_{\{i \in C\}} = 1$ pour tout $i \in N$.

— Γ est un *jeu équilibré* si $\sum_{C \in 2^N} \lambda(C) v(C) \leq v(N)$ pour tout vecteur N-équilibré.

Théorème 6.41 (Shapley-Bondareva)**.** *Le cœur est non-vide si et seulement si le jeu est équilibré.*

Commentaires. On peut penser un vecteur équilibré comme étant la fraction de temps que chaque joueur consacre aux coalitions auxquelles il appartient, avec chaque coalition représentant la même fraction pour tous ses joueurs. Un jeu est équilibré si, quelque soit la manière dont les joueurs se répartissent au sein des coalitions auxquelles ils appartiennent, ils ne généreront pas plus de valeur que la grande coalition.

Exemple 6.42. Prenons, à titre d'exemple, $N = \{1, 2, 3\}$ et supposons que le joueur 1 répartit son temps à 40%, 30%, 20% et 10% dans les coalitions $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ respectivement. Le joueur 2, qui est donc à 30% dans $\{1, 2\}$ et à 10% dans $\{1, 2, 3\}$, peut être par exemple à 50% tout seul et à 10% dans $\{2, 3\}$. Les fractions du joueur 3 sont alors fixées : il sera à 30%,10% et 10% dans $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ respectivement, et le temps restant, soit le 50%, il le consacrera à lui tout seul.

Exercice 6.43 (*Vecteur équilibrés*)**.** 1) Montrer que pour tout N il existe un unique vecteur N-équilibré constant, que l'on déterminera. 2) Montrer $\alpha(C) := \frac{1}{\binom{|N|-1}{|C|-1}}$, $C \subset N$, est N-équilibré.

6.5 La valeur de Shapley

On s'intéresse dans cette section à une notion de solution introduite par Shapley [23]. La *valeur de Shapley* est une application qui associe, à chaque jeu coalitionnel, l'allocation donnant à chaque joueur sa contribution marginale espérée – espérance au sens où les joueurs sont tirés au hasard l'un après l'autre pour former au fur et à mesure une coalition. Un exemple a déjà été donné plus haut, dans le jeu des trois chaussures. Comme le cœur, ou toute autre notion de solution, elle répond à la question suivante : "en supposant que la grande coalition se forme, comment faudrait-il répartir $v(N)$ parmi les joueurs" ? La différence la plus remarquable est que la valeur de Shapley est une *fonction valeur*, c'est–à–dire que, contrairement à la notion de cœur, elle répond à cette question de manière univoque. Rappelons que d'autres fonctions valeurs ont déjà été introduites dans ce cours, dans le cas des non-coopératifs à deux joueurs : la valeur (pour les jeux à somme

23. Mathématicien américain qui reçut le Prix Nobel d'économie en 2012 pour ses contributions, très nombreuses et très profondes, à la théorie des jeux.

nulle) et la coco-valeur (pour les jeux à somme non-nulle).

Notation. On appelle *fonction valeur* toute fonction qui, à chaque jeu (dans une famille donnée) associe une solution unique. Dans ce contexte, c'est donc une fonction qui associe à chaque jeu coalitionnel une unique allocation réalisable. On notera $\mathcal{G}$ l'ensemble des jeux coalitionnels.

Définition 6.44. La *valeur de Shapley* est la fonction valeur suivante :

$$V^i(\Gamma) := \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \Delta(i, \pi(i)), \quad \forall i \in N$$

où $\Pi(N)$ est l'ensemble des permutations de N et $\pi(i)$ est la coalition formée par les joueurs qui précèdent i dans la permutation $\pi = (i_1, \dots, i_{|N|})$. Si, par exemple, i arrive en k-ème position, alors $\pi(i) = (i_1, \dots, i_{k-1})$ et donc $\Delta(i, \pi(i)) = v(i_1, \dots, i_k) - v(i_1, \dots, i_{k-1})$.

Remarque 6.45. Soit $n := |N|$. Pour toute permutation $\pi = (i_1, \dots, i_n)$, on a

$$\sum_{i \in N} \Delta(i, \pi(i)) = \sum_{k=1}^{n} \big(v(i_1, \dots, i_k) - v(i_1, \dots, i_{k-1})\big) = v(N)$$

En effet, il s'agit d'une somme télescopique et vaut donc $v(N) - v(\emptyset)$. En sommant sur toutes les permutations, on voit bien que la valeur de Shapley est une allocation réalisable (et efficiente) :

$$\sum_{i \in N} V^i(\Gamma) = \frac{1}{|N|!} \sum_{i \in N} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \Delta(i, \pi(i)) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{i \in N} \Delta(i, \pi(i)) = \frac{N!}{N!} v(N)$$

où la dernière égalité vient du fait que l'ensemble $\Pi(N)$ est un ensemble de cardinal $N!$.

Exercice 6.46 (*Propriétés de la valeur de Shapley*)**.** Montrer que la valeur de Shapley est :

- *efficiente*, i.e. $\sum_{i \in N} V^i(\Gamma) = v(N), \ \forall \Gamma \in \mathcal{G}$
- *symétrique*, i.e. $V^i(\Gamma) = V^j(\Gamma), \ \forall \Gamma \in \mathcal{G}, \ \forall (i,j)$ interchangeables dans Γ
- *neutre*, i.e. $V^i(\Gamma) = v(i), \ \forall \Gamma \in \mathcal{G}, \ \forall i$ non-stratégique dans Γ

Exercice 6.47. Déterminer le cœur et la valeur de Shapley pour le jeu "travailleur–employer" (voir exemple 6.4). Commenter.

Exercice 6.48 (*Jeux symétriques*)**.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction et (N, v_f) le jeu coalitionnel défini par $v_f(C) := f(|C|)$ pour tout $C \subset N$. Montrer que $V^i(N, v_f) = \frac{f(|N|)}{|N|}$ pour tout $i \in N$. Comparer avec le cœur de (N, v_f) caractérisé dans l'exercice 6.33).

Exercice 6.49. Utiliser l'exercice précédent pour déterminer la valeur de Shapley dans le jeu de majorité à trois joueurs (Exemple 6.35), puis dans celui à $2n+1$ joueurs de (Exercice 6.36).

Exemple 6.50 (*Indice de pouvoir de Shapley-Shubik*)**.** Lors de l'élection générale de 2015 en Espagne, les quatre partis principaux ont obtenu, respectivement, 29%, 22%, 21% et 14% des votes, alors qu'il faut 50% pour gouverner. Aucun parti n'ayant la majorité, des coalitions sont nécessaires afin de former un gouvernement. Le premier parti semble avoir un avantage sur les autres, de même que le quatrième apparaît comme le plus faible. Mais le pouvoir est-il proportionnel au pourcentage de votes obtenus ? La valeur de Shapley permettra de répondre à cette question. On modélise la situation par le jeu coalitionnel (N, v), où $N := \{1, 2, 3, 4\}$ et où $v : 2^N \to \mathbb{R}$ est telle que

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| \geq 3 \\ 1 & \text{si } S = \{1,2\} \text{ ou } S = \{1,3\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarquera d'abord que 2 et 3 sont interchangeables, et donc $V^2 = V^3$. Puisqu'on a aussi $V^1 + V^2 + V^3 + V^4 = 1$, il suffit donc de calculer V^1 et V^2 pour obtenir la valeur de Shapley. Pour déterminer V^1 on raisonne position par position : avec probabilité $1/2$, le premier parti arrive en premier ou en dernier et sa contribution marginale est alors de 0 ; avec probabilité 1/4 il arrive en second et sa contribution marginale est 1 sauf si les partis 2 ou 3 sont en premier ; avec probabilité 1/4, enfin, il arrive en troisième et sa contribution marginale est de 1. On obtient donc $V^1 = 5/12$. Un calcul analogue donne $V^2 = 3/12$, et on a donc $V = (\frac{5}{12}, \frac{3}{12}, \frac{3}{12}, \frac{1}{12})$.

Exercice 6.51 (*Indice de Shapley-Shubik*)**.** Dans un comité d'entreprise, trois candidats ont obtenu, respectivement, 48, 47 et 5 voix. Aucun d'eux n'ayant la majorité, ils doivent former une coalition majoritaire. Ecrire le jeu sous forme coalitionnelle, déterminer le cœur et la valeur de Shapley. Commenter.

Exercice 6.52 (*Pouvoir du président*)**.** Considérer le jeu de vote majoritaire suivant. Dans une assemblée regroupant $2n + 1$ personnes, chacun a voté pour soi, sauf $k - 1$ individus qui ont tous voté pour le président de l'assemblée. Le président a donc k votes, alors que le reste de l'assistance n'a que un ou aucun vote. Utiliser la valeur de Shapley pour mesurer le pouvoir du président, en fonction de $k \geq 1$.

Exercice 6.53 (*Jeux équivalents*)**.** Décrire la relation entre $V(\Gamma)$ et $V(\Gamma')$ pour deux jeux coalitionnels équivalents Γ et Γ'.

Exercice 6.54 (*Core versus valeur de Shapley*)**.** Déterminer le cœur et la valeur de Shapley dans le jeu (N, v) où $N = \{1, 2, 3, 4\}$ et $v(N) = 3$, $v(C) = 0$ si C contient au plus un joueur parmi les trois premiers, et $v(C) = 2$ sinon. Comparer les deux, en expliquant d'où vient leur différence.

Exercice 6.55 (*Jeux convexes*)**.** Soit $\Gamma = (N, v)$ est un *jeu convexe*, i.e. tel que

$$v(C) + v(C') \leq v(C \cup C') + v(C \cap C'), \quad \forall C, C' \subset N$$

Montrer que $V(\Gamma) \in \text{core}(\Gamma)$, i.e. la valeur de Shapley est dans le cœur.

Exercice 6.56 (*Contributions quadratiques*)**.** Soit $a \in \mathbb{R}^n$ un vecteur fixé. On considère le jeu coalitionnel $\Gamma_a = (N, v)$, avec $N = \{1, \dots, n\}$ et $v(C) = \left(\sum_{i \in C} a^i\right)^2$ pour tout $C \subset N$. Déterminer la valeur de Shapley. (*Indication :* on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$ ou $n = 3$).

Exercice 6.57 (*Jeux à deux joueurs*)**.** Soit (N, v) un jeu à deux joueurs et soit $V \in \mathbb{R}^2$ sa valeur de Shapley. Montrer que $V^1 - v(1) = V^2 - v(2)$. Comparer V et $\text{core}(N, v)$.

6.6 Problème des mariages stables

6.7 Assignment game

6.8 ∗ Caractérisations de la valeur Shapley

La valeur de Shapley peut se caractériser de plusieurs manières. Dans le premier paragraphe, on étudie cette fonction en termes des propriétés qui serait souhaitables. La valeur de Shapley est l'unique fonction valeur satisfaisant quatre axiomes. Dans le paragraph suivant, on empruntera l'approche du marchandage, où les allocations peuvent être soumises à des objections et à des contre-objections de la part des joueurs. Pour chaque jeu, la valeur de Shapley est l'unique allocation pour laquelle pour toute objection (d'un certain type) on trouve une contre-objection.

6.8.1 Approche axiomatique

La valeur de Shapley satisfait certaines propriétés (ou axiomes) qui la caractérisent : efficience, symétrie, additivité et stabilité. On désigne par $\mathcal{G}$ l'ensemble de tous les jeux coalitionnels. On appelle *fonction valeur* toute fonction qui, à chaque jeu, associe une allocation réalisable.

Définition 6.58. Soit Φ une fonction valeur. On dira que Φ est :

— *efficiente* si $\sum_{i \in N} \Phi^i(\Gamma) = v(N)$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}$

— *symétrique* si $\Phi^i(\Gamma) = \Phi^j(\Gamma)$ pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}$ et (i, j) interchangeables dans Γ

— *neutre* si $\Phi^i(\Gamma) = v(i)$ pour tout $\Gamma = (N, v) \in \mathcal{G}$ et i non-stratégique dans Γ

— *additive* si $\Phi(\Gamma+\Gamma') = \Phi(\Gamma)+\Phi(\Gamma')$ pour tout $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{G}$ ayant le même ensemble de joueurs [24]

Théorème 6.59. *La valeur de Shapley est l'unique fonction valeur efficiente, symétrique, neutre et additive.*

Démonstration. On a déjà montré (exercice 6.46) que la valeur de Shapley est efficiente, symétrique et neutre. L'additivité découle du fait que si on pose $w := v + v'$, alors pour tout $C \subset N$ et $i \notin C$:

$$w(C \cup \{i\}) - w(C) = v(C \cup \{i\}) - v(C) + v'(C \cup \{i\}) - v'(C)$$

Réciproquement soit Φ une fonction valeur efficiente, symétrique, neutre et additive. Fixons un ensemble de joueurs N et définissions, pour chaque coalition $C \subset N$, le jeu $\Gamma_C = (N, v_C)$ suivant :

$$v_C(D) := \begin{cases} 1 & \text{si } C \subset D \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction v_C peut être vue comme un vecteur réel à $2^{|N|}$ coordonnées. Montrons que pour chaque jeu $\Gamma = (N, v)$ il existe une unique collections de réels $(\alpha_C)_{C\subset N}$ tels que $v = \sum_{C\subset N} \alpha_C v_C$. Pour cela, il suffit de montrer que $(v_C)_{C\subset N}$ est une base de l'espace vectoriel des jeux à N joueurs, qui est un espace de dimension $2^{|N|}$, ou encore, que les vecteurs $(v_C)_{C\subset N}$ sont linéairement indépendants. Supposons que $\sum_{C\subset N} \beta_C v_C = 0$, avec $\beta_D \neq 0$ pour une coalition $D \subset N$. Parmi ces coalitions, soit D' celle de plus petite taille. On a alors $\beta_C = 0$ pour tout $C \subset D'$, ce qui mène à une contradiction :

$$0 = \sum_{C\subset N} \beta_C v_C(D') = \sum_{C\subset D'} \beta_C = \beta_{D'} \neq 0$$

La symétrie et neutralité implique que pour tout jeu αv_C, avec $\alpha \geq 0$, $\Phi^i(N, \alpha v_C) = \alpha/|C|$ si $i \in C$ et 0 sinon. On finit la démonstration en remarquant que si $v = \sum_{C\subset N} \alpha_C v_C$ alors on a

$$v = \sum_{C\subset N,\, \alpha_C>0} \alpha_C v_C - \sum_{C\subset N,\, \alpha_C<0} (-\alpha_C v_C)$$

L'additivité montre alors que v est déterminé de manière unique. □

6.8.2 Approche en termes de marchandage

Soit $\Gamma = (N, v)$ un jeu coaitionnel et $C \subset N$. On définit le *sous-jeu* (C, v^C) en posant $v^C(C') = v(C')$ pour tout $C' \subset C$. Autrement dit, (C, v^C) est la restriction de (N, v) à la coalition C. Pour tout $i \in N$, on note $\Gamma^{(i)}$ le sous-jeu restreint à $N\backslash\{i\}$.

Soit Φ une fonction valeur et soit $\Phi(\Gamma) \in \mathbb{R}^N$ l'allocation réalisable proposée.

– Si $\Phi^j(\Gamma^{(i)}) \leq x^j$, pour certains joueurs i et j, alors i peut émettre l'objection suivante (ou menace) contre j : “*Donnez-moi plus, sinon je quitterai le jeu et vous obtiendrez* $V^j(\Gamma^{(i)})$”.

– Si $x^i - \Phi^i(\Gamma^{(j)}) \geq x^j - \Phi^j(\Gamma^{(i)})$, le joueur j peut alors rétorquer : “*C'est vrai que si vous partez je perds, mais si je pars vous perdrez au moins autant que moi*”.

– De même, si $\Phi^i(\Gamma^{(j)}) \geq x^i$, le joueur i peut avoir l'objection suivante contre j : “*Donnez-moi plus, sinon je persuaderai les autres de vous exclure du jeu*”.

– Et si $\Phi^j(\Gamma^{(i)}) - x^j \geq \Phi^i(\Gamma^{(j)}) - x^i$, alors le joueur j peut répondre :“*Certes, si vous m'excluez vous gagnez, mais si je vous exclue je gagne au moins autant*”.

Ces objections et contre-objections diffèrent de celles que l'on utilisera pour définir l'ensemble de marchandage (voir Section 6.8). Si l'on exige que $\Phi(\Gamma)$ soit telle que toute objection soit contre-balancée par une contre-objection, on aboutit à la propriété équivalente suivante.

24. Le jeu $\Gamma + \Gamma'$ est définit seulement lorsque $\Gamma = (N, v)$ et $\Gamma' = (N, v')$ sont définis sur le même ensemble de joueurs. Dans ce cas, $\Gamma + \Gamma' := (N, v + v')$, i.e. pour chaque coalition $C \subset N$, $(v + v')(C) := v(C) + v'(C)$.

Définition 6.60. Une fonction valeur Φ est *équilibrée 2–à–2* si pour tout $\Gamma \in \mathcal{G}$ on a

$$\Phi^i(\Gamma) - \Phi^i(\Gamma^{(j)}) = \Phi^j(\Gamma) - \Phi^j(\Gamma^{(i)}), \quad \forall i, j \in N$$

Théorème 6.61. *La valeur de Shapley est l'unique fonction valeur équilibrée 2–à–2.*

6.9 $*$ Le potentiel

Le cœur et la valeur de Shapley attribuent, respectivement, un ensemble (possiblement vide) et un vecteur unique à chaque jeu coalitionnel. Dans cette section, nous irons encore plus loin en associant à chacun de ces jeux un réel. Cette fonction, nommée *potentiel*, a été introduite par Hart et Mas-Colell en 1989. Comme la valeur de Shapley, elle se définit en se basant sur les contributions marginales des joueurs et en imposant l'efficience.

Notation. On notera $\mathcal{C}$ l'ensemble des jeux coalitionnels. Pour tout jeu $\Gamma = (N, v) \in \mathcal{C}$ et $M \subset N$ on note (M, v) le sous-jeu obtenu en restreignant la fonction caractéristique aux sous-ensembles de M (i.e. à 2^M).

Définition 6.62. La *contribution marginale* du joueur i par rapport à $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\Delta^i_\Phi(N, v) := \Phi(N, v) - \Phi(N \backslash \{i\}, v)$$

Définition 6.63. Une *fonction de potentiel* est une fonction $\Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\Phi(\emptyset, v) = 0$ et

$$\sum_{i \in N} \Delta^i_\Phi(N, v) = v(N)$$

Le résultat suivant résume les propriétés plus remarquables de cette fonction. Il peut être vu comme une nouvelle caractérisation de la valeur de Shapley.

Théorème 6.64. *Il existe une unique fonction de potentiel, notée P. De plus, le vecteur de paiement associé $(\Delta^i_P(N, v))_{i \in N}$ coincide avec la valeur de Shapley. Explicitement,*

$$P(N, v) = \sum_{C \in 2^N} \frac{(c-1)!(n-c)!}{n!} v(C)$$

où $c := |C|$ et $n := |N|$.

Remarque 6.65. Le potentiel per capita $P(N, v)/|N|$ est égal à la valeur moyenne per capita $\mathsf{E}[v(C)/|C|]$, où la coalition C est tirée comme dans le modèle de Shapley, i.e.

$$\mathsf{P}(C) = \frac{1}{n} \frac{1}{\binom{n}{c}}$$

Cette manière de tirer une coalition est standard et peut s'obtenir de deux manières différentes : (a) on place les joueurs dans un ordre au hasard [25], puis on prend un rang au hasard et on considère la coalition formée par les joueurs jusqu'à ce rang ; (b) on tire une taille de coalition au hasard puis une coalition au hasard parmi toutes celle d'une taille donnée.

Exercice 6.66. Soit $P : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ la fonction potentiel. Déterminer $P(N, v)$ pour $|N| = 1, 2, 3$.

6.10 $*$ Les ensembles de marchandage

Soit (N, v) un jeu coalitionnel cohésif.

Notation. On dira que (C, y) est *réalisable* si $C \subset N$ et $y \in \mathbb{R}^N$ est telle que $y(C) \leq v(C)$.

On cherche à déterminer dans ce chapitre les allocations qui peuvent résulter d'un processus de marchandage, comme celui décrit à la Section 6.6.2. Par marchandage on entend quelque chose

25. On entend par "hasard" la probabilité uniforme sur l'ensemble considéré.

de très vague, une sorte de suite d'offres et de contre-offres comme on voit dans certains marchés. A titre d'exemple, une conversation typique de marchandage entre un vendeur et un acheteur :

– *Combien coûte cette paire de chaussures ?*
– *Pour vous, ce sera 100, vous m'avez l'air sympathique.*
– *Elle ne valent pas plus que 40, elles sont légèrement cassées.*
– *C'est un modèle unique, je ne peux pas vous les donner pour moins de 80.*
– *Je n'ai que 60.*
– *Elle sont pour vous.*

Le processus qui mène à une allocation x donnée peut être long et compliqué. De manière un peu plus formelle, un joueur peut commencer par proposer x_1, en avançant quelques raisons pour un tel partage. La proposition satisfait à certains mais pas à tous. Parmi les insatisfaits, un joueur propose x_2, en donnant d'autres arguments, et ainsi de suite. On s'intéresse aux allocations qui sont susceptibles d'être obtenues de cette manière là. Prenons par exemple une allocation x qui n'est pas dans le cœur. Il existe alors un couple (C, y) réalisable tel que $y^i > x^i$ pour tout $i \in C$. Mécontent du partage x, les joueurs dans C menacent de rompre avec la grande coalition pour en former une autre, menace qui est crédible puisque la nouvelle proposition est strictement préféré à l'ancienne par tous les joueurs dans C. Différents types d'offres et contre-offres aboutissent à des allocations finales différentes. On considère dans cette section les objections et contre-objections suivantes. Supposons que x est la dernière allocation sur la table.

Définition 6.67. Une *objection du joueur i contre j en x* est un couple (C, y) réalisable, où C est une coalition qui l'inclue lui mais pas j (i.e. $i \in C$, $j \notin C$) et où tous le monde y gagne strictement plus (i.e. $y^k > x^k$, pour tout $k \in C$). Une *contre-objection* de j à (C, y) est un couple (D, z) réalisable, où D est une coalition telle que $j \in D$, $i \notin D$, et z est aussi bien que y pour tous les membres de D qui sont aussi dans C, et aussi bien que x pour tous les membres de D (i.e. $z^k \geq x^k$ pour tout $k \in D \backslash C$ et $z^k \geq y^k$ pour tout $k \in D \cap C$).

Définition 6.68. L'*ensemble de marchandage* est l'ensemble de toutes les allocations x vérifiant que pour toute objection (C, y) de i contre j en x il existe une contre-objection de j à (C, y).

Proposition 6.69. *L'ensemble de marchandage contient le cœur et est non-vide.*

Démonstration. Le cœur est l'ensemble de toutes les allocations x pour lesquelles il n'existe pas d'objection d'un joueur contre un autre en x. Il est donc inclus dans l'ensemble de marchandage. La deuxième partie de la preuve sera admise. □

Exemple 6.70. Reprenons le jeu de majorité à trois joueurs, i.e. $\alpha \in [0, 1]$, $N = \{1, 2, 3\}$ et

$$v(N) = 1,\ v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = \alpha,\ v(1) = v(2) = v(3) = 0$$

Pour $\alpha > 2/3$ le cœur est vide, alors que l'ensemble de marchandage est le singleton $\{(1/3, 1/3, 1/3)\}$. En effet, remarquons d'abord que par symétrie l'ensemble de marchandage peut être déterminé en considérant seulement les objections (C, y) du joueur 1 contre le joueur 3. La seule coalition possible pour une objection étant donc $C = \{1, 2\}$, et l'unique coalition pour une contre-objection $D = \{2, 3\}$. Ainsi, d'après ces considérations, $x \in \mathbb{R}^3$ est dans l'ensemble de marchandage si pour tout (y^1, y^2) satisfaisant $y^1 > x^1$, $y^2 > x^2$ et $y^1 + y^2 = \alpha$, il existe (z^2, z^3) tel que $z^2 \geq y^2$, $z^3 \geq x^3$ et $z^2 + z^3 = \alpha$.
(a) Montrons que $x = (1/3, 1/3, 1/3)$ appartient à l'ensemble de marchandage. Pour cela, il suffit de remarquer que toute objection (y^1, y^2) du joueur 1 admet la contre-objection $(z^2, z^3) := (y^2, y^1)$ du joueur 3. Comme $y^1 > x^1 = 1/3$, $y^2 > x^2 = 1/3$ et $y^1 + y^2 = \alpha$, il faut que $\alpha > 2/3$.
(b) Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}^3$ et (C, y) une objection du joueur 1 contre le joueur 3. En combinant les trois inégalités qui la définissent, on obtient $y^2 = \alpha - y^1 < \alpha - x^1$. En combinant les inégalités qui définissent la contre-objection du joueur 3, on obtient $z^3 = \alpha - z^2 \leq \alpha - y^2$, puis $y^2 + x^3 \leq \alpha$. On a donc que $x^1 + y^2 < \alpha$ implique $x^3 + y^2 \leq \alpha$, ce qui revient à dire que $x^1 \geq x^3$. Par symétrie, on a donc $x^i \leq x^j$ pour tout $i, j \in N$ et donc nécessairement $x = (1/3, 1/3, 1/3)$.