

Exo 3.4.

3) Equation des C.I. :  $u(x, y) = K$ ,  $K$  constante  $> 0$

$$\Leftrightarrow y = \frac{Kx}{x-4K}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{K(x-4K) - Kx}{(x-4K)^2} \\ &= \frac{-4K^2}{(x-4K)^2} = -4\left(\frac{y}{x}\right)^2 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -4K^2 \left[ -\frac{2(x-4K)}{(x-4K)^4} \right] \\ &= 8K^2 \left(\frac{y}{Kx}\right)^3 = \frac{8}{K} \left(\frac{y}{x}\right)^3 > 0. \end{aligned}$$

donc C.I. sont bien str. décroissantes et str. convexes

donc  $u$  est str. quasi-concave.

4) Gni :  $u$  str. monotone ( $u'_x, u'_y > 0$ ),  
str. quasi-concave, continue

+ biens  $x, y$  présents ( $e_j^1 + e_j^2 > 0$ ,  $j = x, y$ )

$\Rightarrow$  théorème d'existence : il y a au moins 1 éq. concurrentiel.



$$\begin{aligned} 5) \text{ TMS} : \frac{u'_x}{u'_y} &= \frac{y(x+4y) - xy}{(x+4y)^2} \bigg/ \frac{x(x+4y) - 4xy}{(x+4y)^2} \\ &= \frac{4y^2}{x^2} \end{aligned}$$

$$\text{Optimalité : } \text{TMS} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \left(\frac{x}{4y}\right)^2 = \frac{p_y}{p_x}$$

$$\text{Budget : } p_x x + p_y y = W \Rightarrow p_x \cdot 2y \sqrt{\frac{p_y}{p_x}} + p_y y = W$$

$$\Rightarrow y = \frac{W}{2\sqrt{p_x p_y} + p_y}$$

$$x = \frac{2W}{(2\sqrt{p_x} + \sqrt{p_y})\sqrt{p_x}}$$