Equilibre avec deux producteurs

On considère une économie avec deux consommateurs, deux biens de consommation, un facteur de production (le travail) et deux entreprises. On note x^i la consommation de bien 1 du consommateur i et y^i, la consommation de bien 2 du consommateur i, $(i = 1; 2)$. La dotation initiale du consommateur 1 est d'une unité de travail ; celle du consommateur 2, de 2 unités de travail. Leurs fonctions d'utilité sont $u^i(x^i; y^i) = \sqrt{x^i y^i}$, $i = 1; 2$. L'entreprise 1 produit le premier bien de consommation avec du travail, suivant la technologie $q_1 = z_1$; l'entreprise 2 produit le second bien de consommation avec du travail, suivant la technologie $q_2 = \frac{1}{2}z_2$ (q_k désigne l'output de bien k et z_k, l'input de travail, $k = 1; 2$). On suppose enfin que le consommateur 1 possède les entreprises.

1. Ecrire les conditions que doit satisfaire une allocation $(x^1; y^1; x^2; y^2; q_1; z_1; q_2; z_2)$ pour être réalisable dans cette économie. En déduire qu'une allocation $(x^1; y^1; x^2; y^2)$ en biens de consommation est réalisable si et seulement si, $x^1 + x^2 + 2(y^1 + y^2) = 3$.
2. Montrer que l'économie possède un équilibre concurrentiel, en fixant le prix du travail à 1 et en notant p_k le prix du bien de consommation k, $k = 1; 2$. Calculer l'utilité de chaque consommateur à l'équilibre.
3. Sans faire de calcul, peut-on affirmer que l'équilibre concurrentiel est Pareto-optimal ?
4. En utilisant le point 1., écrire le programme d'optimisation sociale qui permet de déduire les optima de Pareto. Déterminer les allocations Pareto optimales intérieures et montrer qu'une paire de niveaux d'utilités $(v^1; v^2)$ pour les consommateurs est Pareto-optimale si et seulement si $v^1 + v^2 = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $v^1, v^2 \geq 0$. Représenter graphiquement l'ensemble des niveaux d'utilités réalisables dans l'économie et les niveaux d'utilités de l'équilibre concurrentiel. Vérifier que l'équilibre est Pareto optimal.

   (Indication : Un programme d'optimisation sociale est un programme qui permet de déterminer l'ensemble des optima de Pareto de l'économie. Par définition de l'optimum de Pareto, il s'agit ici de maximiser la somme pondérée des utilités des deux agents. Le programme peut donc s'écrire : $\max\limits_{u^1,\ u^2} \rho u^1 + (1-\rho)u^2$ sous une certaine contrainte qu'il vous est facile de retrouver.