L2 MIDO – Durée 1h 30min – 2019
Équilibre général - CC
Documents interdits
F. Bien et M. Patty

Problème (20 points)

Problème (20 points)

Nous considérons une économie comprenant *2* consommateurs identiques notés A et B, *2* entreprises identiques notées 1 et 2, un facteur de production le capital, noté *K*, et deux biens de consommation 1 et 2 produits respectivement par les entreprises 1 et 2 avec les fonctions de production suivantes :

$$q^1 = \sqrt{k^1} \text{ et } q^2 = \sqrt{k^2}$$

avec q^1 et q^2 les productions respectives de biens 1 et 2, et k^1 et k^2 les quantités de capital utilisées respectivement par les entreprises 1 et 2.
L'entreprise 1 (resp. 2) appartient au consommateur A (resp. B). L'individu A (resp. B) possède 100 (resp. 400) unités de capital. Les préférences d'un consommateur i sont représentées par la fonction d'utilité suivante :

$$u^i = \ln c_1^i + \ln c_2^i$$

avec u^i le niveau d'utilité, $c_1^i > 0$ et c_2^i les consommations respectives de bien 1 et 2 pour un consommateur i avec $i \in \{A, B\}$.
Les prix des bien 1 et sont notés respectivement p_1 et p_2 et le prix du capital est normé à 1.

1) Écrire le programme des deux entreprises.
2) Calculer la fonction de demande de capital et d'offre de bien des deux entreprises.
3) Calculer les profits des entreprises.
4) Définir et calculer l'élasticité prix de l'offre de l'entreprise 1.

5) Écrire le programme des deux consommateurs.
6) Calculer et définir l'expression $-\frac{dc_1}{dc_2}$ pour l'agent A. Commenter son évolution.
7) Calculer les fonctions de demande marshalliennes des biens 1 et 2 pour les deux consommateurs.
8) Définir et calculer l'élasticité prix de la demande de bien 1 pour l'agent B.

9) Écrire les conditions d'équilibre de cette situation d'équilibre général.
10) Montrer que l'équilibre sur les marchés des biens de consommation implique l'équilibre sur le marché du capital. Commenter.
11) Calculer le système de prix d'équilibre ainsi que les différentes quantités.

12) Définir et calculer la frontière de production. Montrez que les productions sont optimales.
13) Définir et calculer la frontière d'utilité. Montrez que les consommations sont optimales.
14) Conclure.

CORRECTION

15) Écrire le programme des deux entreprises. (0,5 pt)

$$\max_{k^i} \pi^i = p_i \sqrt{k^i} - k^i \text{ (0,5)}$$

16) Calculer la fonction de demande de capital et d'offre de bien des deux entreprises. (2 pts)

Définition de la demande conditionnelle de capital. (0,25)

$$q^i = \sqrt{k^i} \Leftrightarrow k^{i,dc} = {q^i}^2 \text{ (0,5)}$$

Définition de l'offre (0,25)

$$\pi^i = p_i q^i - {q^i}^2$$

$$\frac{d\pi^i}{dq^i} = 0 \Leftrightarrow p_i - 2q^i = 0 \Leftrightarrow q^{i,s} = \frac{p_i}{2} \text{ (0,5)}$$

Demande de capital

$$k^{i,d} = {q^{i,s}}^2 = \frac{{p_i}^2}{4} \text{ (0,5)}$$

17) Calculer les profits des entreprises. (0,5 pt)

$\pi^i = p_i \times \frac{p_i}{2} - \frac{{p_i}^2}{4} = \frac{{p_i}^2}{4} > 0$ (0,25)

Le profit est positif car les rendements d'échelle sont décroissants (0,25)

18) Définir et calculer l'élasticité prix de l'offre de l'entreprise 1. (1 pt)

Définition littéraire de l'élasticité (0,25)

Définition mathématique (0,25)

$$e_p = \frac{1}{2} \times \frac{p_i}{\frac{p_i}{2}} = 1 \text{ (0,25)}$$

L'offre est iso-élastique. Une augmentation de 1% du prix de vente augmente l'offre de biens de 1%. (0,25)

19) Écrire le programme des deux consommateurs. (0,5 pt)

$$\begin{cases} \max\limits_{c_1^i > 0 \text{ et } c_2^i} \ln c_1^i + \ln c_2^i \\ sc.(DB) : \pi^i + 1 \times \widetilde{k^i} = p_1 c_1^i + p_2 c_2^i \end{cases} \text{ (0,5)}$$

avec $\widetilde{k^i}$ la quantité de capital possédée par l'agent i et $\pi^j = \pi^i$ le profit de l'entreprise j possédée par l'agent i.

20) Calculer et définir l'expression $-\frac{dc_1}{dc_2}$ pour l'agent A. Commenter son évolution. (1 pt)

$-\frac{dc_1}{dc_2} = TMS_{1-2}$ (0,25)

Définition littéraire : quantité de biens 1 qu'il faut substituer à une unité de bien 2 pour conserver la même satisfaction (0,25)

Calcul : $TMS_{1-2} = \frac{c_1^i}{c_2^i}$ (0,25)

Évolution : quand c_2^i augmente c_1^i diminue pour conserver la même satisfaction. Le numérateur diminue et le dénominateur augmente. Le rapport diminue et le TMS_{1-2} est donc décroissant. (0,25).

21) Calculer les fonctions de demande marshalliennes des biens 1 et 2 pour les deux consommateurs. (2 pts)

Définition de la demande marshallienne (0,25)

Le TMS est décroissant car il existe une solution intérieure (0,25)

Elles sont solutions du système suivant

$$\begin{cases} TMS_{1-2} = \frac{p_2}{p_1}\ (CO)(0{,}25) \\ \pi^i + \widetilde{k^i} = p_1 c_1^i + p_2 c_2^i\ (DB)(0{,}25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1^{i,d} = \frac{\pi^i + \widetilde{k^i}}{2p_1}\ (0{,}5) \\ c_1^{2,d} = \frac{\pi^i + \widetilde{k^i}}{2p_2}\ (0{,}5) \end{cases}$$

22) Définir et calculer l'élasticité prix de la demande de bien 1 pour l'agent B. (1 pt)
Définition littéraire de l'élasticité (0,25)
Définition mathématique (0,25)

$$e_p = -\frac{\pi^i + \widetilde{k^i}}{2{p_1}^2} \times \frac{p_i}{\frac{\pi^i + \widetilde{k^i}}{2p_1}} = -1\ (0{,}25)$$

La demande est iso-élastique. Une augmentation de 1% du prix de vente réduit la demande de biens de 1%. (0,25)

23) Écrire les conditions d'équilibre de cette situation d'équilibre général. (1,5 pt)

$$\begin{cases} bien\ 1 : q^{1,s} = c_1^{A,d} + c_1^{B,d}\ (0{,}25) \\ bien\ 2\ : q^{2,s} = c_2^{A,d} + c_2^{B,d} (0{,}25) \\ capital : k^{1,d} + k^{2,d} = \widetilde{k^A} + \widetilde{k^B}\ (0{,}25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} bien\ 1 : \frac{p_1}{2} = \frac{\frac{{p_1}^2}{4} + 100}{2p_1} + \frac{\frac{{p_2}^2}{4} + 400}{2p_1}\ (0{,}25) \\ bien\ 2 : \frac{p_2}{2} = \frac{\frac{{p_1}^2}{4} + 100}{2p_2} + \frac{\frac{{p_2}^2}{4} + 400}{2p_2} (0{,}25) \\ capital : \frac{{p_1}^2}{4} + \frac{{p_2}^2}{4} = 500\ (0{,}25) \end{cases}$$

$$avec\ \pi^1 = \pi^A\ et\ \pi^2 = \pi^B$$

24) Montrer que l'équilibre sur les marchés des biens de consommation implique l'équilibre sur le marché du capital. Commenter. (2 pts)

Avec le marché du bien 1, nous obtenons :

$$bien\ 1 : {p_1}^2 = \frac{{p_1}^2}{4} + 100 + \frac{{p_2}^2}{4} + 400 \Leftrightarrow {p_1}^2 = \frac{{p_2}^2}{3} + \frac{2000}{3}\ (0{,}25)$$

Avec le marché du bien 2, nous obtenons :

$$bien\ 2 : {p_2}^2 = \frac{{p_1}^2}{4} + 100 + \frac{{p_2}^2}{4} + 400 \Leftrightarrow {p_2}^2 = \frac{{p_1}^2}{3} + \frac{2000}{3}\ (0{,}25)$$

Avec ces deux expressions, nous obtenons

$${p_1}^2 = \frac{\frac{{p_1}^2}{3} + \frac{2000}{3}}{3} + \frac{2000}{3}$$

Soit ${p_1}^2 = 1000$ (0,25)

De même, nous obtenons ${p_2}^2 = 1000$ (0,25)

Ces deux expressions vérifient l'équilibre du marché du capital car

$$\frac{{p_1}^2}{4} + \frac{{p_2}^2}{4} = \frac{1000}{4} + \frac{1000}{4} = 250 + 250 = 500\ (0{,}5)$$

Conséquence de la loi de Walras : dans une économie à 3 marchés, si 2 sont à l'équilibre, le troisième l'est nécessairement (0,5)

25) Calculer le système de prix d'équilibre ainsi que les différentes quantités. (3 pts)
Attention, comme le prix du capital est normé ($p_k = 1$)*, nous calculons* p_1 *et* p_2 *équivalent à* $\frac{p_1}{p_k} = \frac{p_1}{1} = p_1$ *et* $\frac{p_2}{p_k} = \frac{p_2}{1} = p_2$

De la question précédente, nous obtenons :
$p_1 = 10\sqrt{10}$ (0,5)
$p_2 = 10\sqrt{10}$ (0,5)
$q^{1,s} = 5\sqrt{10}$ (0,25)
$q^{2,s} = 5\sqrt{10}$ (0,25)
$k^{1,dc} = 250$ (0,25)
$k^{2,dc} = 250$ (0,25)
$c_1^{A,d} = 1,75\sqrt{10}$ (0,25)
$c_2^{A,d} = 1,75\sqrt{10}$ (0,25)
$c_1^{B,d} = 3,25\sqrt{10}$ (0,25)
$c_2^{B,d} = 3,25\sqrt{10}$ (0,25)

26) Définir et calculer la frontière de production. Montrez que les productions sont optimales. (2 pts)
Définition de la frontière de production (0,5)
Équilibre marché du capital : $k^{1,dc} + k^{2,dc} = 500$ (0,5)
${q^1}^2 + {q^2}^2 = 500$ (0,5)
$\left(5\sqrt{10}\right)^2 + \left(5\sqrt{10}\right)^2 = 250 + 250 = 500$ (0,5)

27) Définir et calculer la frontière d'utilité. Montrez que les consommations sont optimales. (2 pts)
Définition de la frontière d'utilité (0,5)
CO : $c_1^{i,d} = c_2^{i,d}$ (0,25)
Demande hicksienne : $c_1^{i,dh} = \exp(\frac{u_i}{2})$ (0,25)
Équilibre marché du bien 1 : $5\sqrt{10} = c_1^{A,d} + c_1^{B,d}$ (0,25)
$5\sqrt{10} = \exp\left(\frac{u_A}{2}\right) + \exp\left(\frac{u_B}{2}\right)$ (0,5)
$5\sqrt{10} = \exp\left(\frac{\ln(1,75\sqrt{10}+\ln(1,75\sqrt{10}}{2}\right) + \exp\left(\frac{\ln(3,25\sqrt{10}+\ln(3,25\sqrt{10}}{2}\right)$ (0,25)
$5\sqrt{10} = 1,75\sqrt{10)} + 3,25\sqrt{10}$ (0,25)

28) Conclure. (1 pt)
Les consommations et les productions sont optimales (0,25)
Nous retrouvons ici le premier théorème du BE (0,25)
Tout EG est un OP (0,5)