Microéconomie : théorie de l'équilibre général

Responsable du cours : Miquel Oliu Barton *

Diplôme L2 MI2E, Année 2016-2017

— **Manuel de référence :**
  Equilibre général : une introduction, de Jean-Marc Tallon ; Eds Vuibert, (1997).
— **Autres références utiles :**
  – *Microeconomics*, de Mankiw et Taylor (se lit facilement)
  – *Microeconomic Theory*, de Mas-Colell, Whinston et Green (plus mathématique)

— **Evaluation de l'UE :**
  Calcul de la note finale : 0.5 Examen + 0.3 Partiel + 0.2 Contrôle Continu

— **Document supplémentaire :** Brochure d'exercices pour les travaux dirigés

* Contact : miquel.oliubarton@dauphine.fr.

Ces notes reprennent le cours de Françoise Forges (2008), mises à jour par Vincent Iehlé (2015).

Table des matières

Introduction, notations

Equilibre *général* :

— *Tous* les biens $\ell = 1, ..., L$

— *Tous* les agents $i = 1, ..., N$

— Dans un premier temps : économie d'échange pur :

> Les biens, initialement détenus par les agents (ou consommateurs) sont échangés entre ceux-ci, de manière à maximiser leur satisfaction individuelle, compte tenu des ressources disponibles.

Données :

— $e^i \in \mathbb{R}_+^\ell$: dotation initiale de i, pour $i = 1, ..., N$

— $\succsim^i$: préférences de i sur les paniers de biens, $i = 1, ..., N$

Equilibre concurrentiel $(p, z^1, ..., z^N)$:

— $p = (p_1, ..., p_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell$ vecteur de prix

— $(z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}_+^\ell)^N$: allocation de biens tels que

1. z^i $(i = 1, ..., N)$ maximise les préférences $\succsim^i$ de i sous sa contrainte budgétaire
2. les marchés $(\ell = 1, ..., L)$ s'apurent

- Conditions garantissant l'existence (et, éventuellement, l'unicité) d'un tel équilibre ?
- Propriétés d'un tel équilibre ?
- Conditions d'application ?

  Quels résultats si les marchés fonctionnent imparfaitement ?

1 Le consommateur

1.1 Préférences, fonction d'utilité

On considère un consommateur typique (on omet donc l'indice i).

— $z = (z_1, ..., z_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$ désigne un panier de biens.

— z_ℓ : quantité de bien ℓ.

Le consommateur a des préférences $\succsim$ sur $\mathbb{R}^\ell_+$:

— $z \succsim z'$: le consommateur préfère z à z' (et peut être indifférent entre z et z')

— $z \sim z' \Leftrightarrow z \succsim z'$ et $z' \succsim z$: il est indifférent entre z et z'

— $z \succ z' \Leftrightarrow z \succsim z'$ et non $z' \succsim z$: il préfère strictement z à z'

Définition 1.1 *Une fonction d'utilité $u : \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}$ représente $\succsim$ si $z \succsim z' \Leftrightarrow u(z) \geq u(z')$.*

Remarque 1.1 *Si u représente $\succsim$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante, $f \circ u$ représente aussi $\succsim$.*

Hypothèses : $\succsim$ est une relation (binaire) qui est

- transitive : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{R}^\ell_+ : z \succsim z'$ et $z' \succsim z'' \Rightarrow z \succsim z''$
- complète : $\forall z, z' \in \mathbb{R}^\ell_+ : z \succsim z'$ ou $z' \succsim z$
- continue : $\forall$ suites $z_t \to z$, $z'_t \to z' : z_t \succsim z'_t$, $t = 1, 2, ... \Rightarrow z \succsim z'$

Proposition 1.1 *Si $\succsim$ satisfait les hypothèses ci-dessus, $\exists u : \mathbb{R}^\ell_+ \to \mathbb{R}$ continue qui représente $\succsim$.*

Autres propriétés usuelles des préférences $\succsim$:

- monotones ($\Leftrightarrow u$ est croissante) : $z \gg z'$ (c.à.d. $z_\ell > z'_\ell$, $\ell = 1, ..., L$) $\Rightarrow z \succ z'$ ($\Leftrightarrow u(z) > u(z')$)
- strictement monotones ($\Leftrightarrow u$ est strictement croissante) : $z > z'$ (c.à.d. $z \geq z'$ et $z \neq z'$) $\Rightarrow z \succ z'$ ($\Leftrightarrow u(z) > u(z')$)
- convexes : $\forall z \in \mathbb{R}^\ell_+ : P = \{z' : z' \succsim z\}$ est un ensemble convexe, c.à.d. $z' \succsim z$ et $z'' \succsim z \Rightarrow \lambda z' + (1 - \lambda) z'' \succsim z$, $\forall\ 0 < \lambda < 1$
- En termes d'une fonction d'utilité u représentant $\succsim$: si $\{z' : u(z') \geq r\}$ convexe $\forall r \in \mathbb{R}$; on dit que u est quasi-concave.

Proposition 1.2 *u est quasi-concave $\Leftrightarrow \forall z \neq z'$ $u(\lambda z + (1 - \lambda) z') \geq \min\{u(z), u(z')\}$, $\forall$ $0 < \lambda < 1$.*

Démonstration : exercice.

- strictement convexes : $z' \succsim z$, $z'' \succsim z$ et $z' \neq z'' \Rightarrow \lambda z' + (1-\lambda)z'' \succ z$, $\forall\ 0 < \lambda < 1$; u représentant $\succsim$ est alors strictement quasi-concave (inégalité ci-dessus stricte)

Autres propriétés de la fonction d'utilité u :

- u est différentiable
- u est concave : $\forall z, z'\ u(\lambda z + (1-\lambda)z') \geq \lambda u(z) + (1-\lambda)u(z')$, $\forall\ 0 < \lambda < 1$

Proposition 1.3 *u concave $\Rightarrow$ u quasi-concave ; l'inverse n'est pas vrai.*

Démonstration : Exercice.

Proposition 1.4 *Si u est différentiable deux fois continûment, u est concave $\Leftrightarrow$ $D^2u(z)$ est semi-définie négative pour tout z*

1.2 Le taux marginal de substitution

Pour fixer les idées : $\ell = 2$. On note les paniers de biens $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2_+$.

Définition 1.2 *Le taux marginal de substitution du second bien, y, pour le premier, x, en un point (x_0, y_0), noté $TMS_{y\to x}(x_0, y_0)$, est la quantité de bien y qu'il faut donner au consommateur pour compenser la perte marginale d'une unité de bien x en ce point.*

Si la fonction d'utilité u est différentiable, $TMS_{y\to x}(x_0, y_0)$ correspond à la valeur absolue de la pente de la courbe d'indifférence en (x_0, y_0) :
$TMS_{y\to x}(x_0, y_0) = -\frac{dy}{dx}|_{u(x,y)=u(x_0,y_0)}$

En différentiant $u(x, y) = c$ (où c est une constante), on trouve :
$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)dy = 0 \Leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}$
On déduit :

$$TMS_{y\to x}(x_0, y_0) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

1.3 La contrainte budgétaire

— L biens ; $p = (p_1, ..., p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_{++}$: vecteur de prix, donné
— p_ℓ : prix d'une unité de bien ℓ, quelle qu'en soit la quantité
— $w \in \mathbb{R}^\ell_+$: revenu du consommateur, provenant par exemple d'une dotation initiale $e = (e_1, ..., e_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$: $w = p_1 e_1 + ... + p_\ell e_\ell = p \cdot e$

Le consommateur peut acquérir les paniers de biens $z = (z_1, ..., z_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$ dont la valeur ne dépasse pas le revenu disponible w, c.à.d. tels que $p.z \leq w$. C'est la contrainte budgétaire (C.B.) du consommateur.

— Si $\ell = 2$, on note le panier de biens $z = (x, y)$, et le prix $p = (p_x, p_y)$. La contrainte budgétaire est $p_x x + p_y y \leq w$.
— En fonction d'une dotation initiale $e = (e_x, e_y)$: $p_x x + p_y y \leq p_x e_x + p_y e_y$.
— La C.B. correspond donc à une droite de pente $\frac{-p_x}{p_y}$, passant par le point $e = (e_x, e_y)$.
— $\frac{p_x}{p_y}$ = quantité de bien y qu'on peut acquérir avec 1 unité de bien x.

1.4 L'optimisation du consommateur

Pour fixer les idées : $\ell = 2$. Le problème du consommateur qui dispose d'un revenu w est

$$\begin{cases} \max_{(x,y)} u(x, y) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ p_x x + p_y y \leq w \end{cases}$$

- Ce problème a une solution dès lors que u est continue et $p_x > 0$, $p_y > 0$
- On suppose u croissante, de sorte que la C.B. sera saturée : $p_x x + p_y y = w$ (*à savoir démontrer*).

Supposons de plus u différentiable ; on dispose alors de conditions *nécessaires* pour un optimum "*intérieur*" $x^* > 0$, $y^* > 0$: $\exists \lambda^* > 0$ tel que (x^*, y^*, λ^*) maximise le lagrangien

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = u(x, y) - \lambda(p_x x + p_y y - w)$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

C'est-à-dire :

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = 0 \Leftrightarrow$ C.B.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \lambda p_x = 0 \qquad (*)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) - \lambda p_y = 0 \qquad (**)$$

(*) et (**) $\Leftrightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)}{p_x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)}{p_y}$ d'où, à l'optimum (x^*, y^*) :

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x^*,y^*)}{\frac{\partial u}{\partial y}(x^*,y^*)} \qquad \Big(= TMS_{y\to x}(x^*,y^*)\Big) \tag{1}$$

Intuition de $\frac{p_x}{p_y} = TMS_{y\to x}\ (x^*,y^*)$: supposons $TMS_{y\to x}\ (x^*,y^*) < \frac{p_x}{p_y}$. En vendant 1 unité de bien x, le consommateur obtiendrait un revenu p_x qui lui permettrait d'acheter $\frac{p_x}{p_y}$ unités de bien y et $\frac{p_x}{p_y} >$ la quantité de bien y qui compense la perte d'1 unité de bien x : (x^*,y^*) ne peut être un optimum

Proposition 1.5 *Si les préférences du consommateur sont strictement convexes, c.à.d. si u est strictement quasi-concave, le problème d'optimisation du consommateur a une solution unique.*

Dans ce cas, Eq. (1) et la C.B. permettent de déduire la *fonction* de demande du consommateur :

$$x^* = d_x(p,w),\ y^* = d_y(p,w)$$

ou, en remplaçant w par $p_x e_x + p_y e_y$,

$$x^* = D_x(p,e),\ y^* = D_y(p,e)$$

Remarque 1.2 *Si u n'est pas strictement quasi-concave, le problème d'optimisation du consommateur peut avoir plusieurs solutions et on fait face à une correspondance de demande.*

Remarque 1.3 *Le problème d'optimisation est soluble dès que u est continue, même si u n'est pas différentiable, mais alors, on ne peut pas recourir aux conditions du premier ordre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou "min" en T.D.).*

Remarque 1.4 *Si u est différentiable, les conditions du premier ordre sont juste nécessaires pour une solution $x^* > 0,\ y^* > 0$ mais $x^* = 0$ ou $y^* = 0$ est concevable (voir par exemple les fonctions d'utilité linéaires en T.D.).*

<u>Résumé et généralisation à L biens :</u>

— $p \in \mathbb{R}^{\ell}_{++}$, $w \in \mathbb{R}_+$ fixés

— $d(p,w) = \{z^* \in \mathbb{R}^{\ell}_+ : u(z^*) = \max_{z \geq 0} u(z) \text{ sous } p \cdot z \leq w\}$
définit la *demande* du consommateur

— Supposons u différentiable ; si les conditions du premier ordre
$\frac{\partial u}{\partial z_\ell}(z^*) = \lambda^* p_\ell$, $\ell = 1, ..., L$ (C.P.O.) et $p.z^* = w$ (C.B.)
sont satisfaites en $z^* \gg 0$, alors $z^* \in d(p,w) \Rightarrow$

$$TMS_{k \to l}(z^*) = \frac{\frac{\partial u}{\partial z_\ell}(z^*)}{\frac{\partial u}{\partial z_k}(z^*)} = \frac{p_\ell}{p_k} \;\; \forall k, \ell$$

— Si $d(p,w)$ est un singleton, $z^*(p,w)$, $\forall p$, on peut parler de *fonction de demande* du consommateur : $d(.,w) : p \to d(p,w) \in \mathbb{R}^{\ell}_+$

Interprétation du multiplicateur de Lagrange :

On suppose u différentiable et la fonction de demande bien définie ; on fixe p et on note $z^*(w) = d(p,w)$ pour ce prix p ; $u(z^*(w))$ représente le niveau d'utilité du consommateur à l'optimum :

$$\begin{aligned}
\frac{du(z^*(w))}{dw} &= \sum_\ell \frac{\partial u}{\partial z_\ell}(z^*(w)) \frac{dz^*_\ell(w)}{dw} \\
&= \sum_\ell \lambda^* p_\ell \frac{dz^*_\ell(w)}{dw} \\
&= \lambda^* \frac{d}{dw}\Big[\sum_\ell p_\ell z^*_\ell(w)\Big] \\
&= \lambda^*
\end{aligned}$$

Il s'agit donc l'*utilité marginale* du revenu.

Propriétés de la fonction de demande (supposée bien définie)

- Homogène de degré 0 par rapport au prix et au revenu : $d(\alpha p, \alpha w) = d(p,w)$ $\forall \alpha > 0$. De même, en fonction des dotations initiales, $D(\alpha p, e) = D(p,e)$. *Démonstration :* Exercice.
- Loi de Walras : $p \cdot d(p,w) = w$ ou $p \cdot [D(p,e) - e] = 0$; $D(p,e) - e$ s'appelle la "demande excédentaire". *Démonstration :* Exercice.
- Continuité par rapport à $p \gg 0$: sous nos hypothèses de préférences continues et monotones. Attention : $p_\ell \to 0 \Rightarrow d_\ell(p,w) \to \infty$!

2 Economies d'échange

Une économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ consiste en

— L biens, $\ell = 1, ..., L$

— N agents (ou consommateurs) $i = 1, ..., N$ caractérisés chacun par une dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}^\ell_+$ et des préférences $\succsim^i$ sur $\mathbb{R}^\ell_+$, représentées par une fonction d'utilité u^i

2.1 Equilibre concurrentiel

Définition 2.1 *Un équilibre concurrentiel $(p, z^1, ..., z^N)$ pour $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ est :*

— *un vecteur de prix $p = (p_1, ..., p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$*

— *une allocation $z = (z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}^\ell_+)^N$ tels que :*

1. *$\forall i = 1, ..., N$, z^i maximise l'utilité u^i de i sous sa contrainte budgétaire : z^i est solution de $\max_{\zeta\in\mathbb{R}^\ell_+} u^i(\zeta)$ sous $p.\zeta \leq p.e^i$ c.à.d. $\sum_{\ell=1}^{\ell} p_\ell\zeta_\ell \leq \sum_{\ell=1}^{\ell} p_\ell e^i_\ell$, $i = 1, ..., N$*
2. *les marchés ($\ell = 1, ..., L$) s'apurent : $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$ c.à.d. $\sum_{i=1}^N z^i_\ell = \sum_{i=1}^N e^i_\ell$, $\ell = 1, ..., L$*

Interprétation : "main invisible"

— Le systéme de prix suffit à équilibrer les demandes des agents, qui n'agissent que pour maximiser leurs préférences individuelles.

— Les agents sont négligeables, ils n'ont pas d'influence sur les prix (par exemple, ils sont très nombreux).

Théorème 2.1 (Existence) *Si l'économie $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ satisfait :*

— *$\sum_{i=1}^N e^i \gg 0$ (c.à.d. $\sum_{i=1}^N e^i_\ell > 0$, $\ell = 1, ..., L$: tous les biens sont présents dans l'économie)*

— *la fonction d'utilité u^i de chaque agent i ($i = 1, ..., N$) est continue, strictement croissante et strictement quasi-concave*

Alors $\mathcal{E}$ a (au moins) un équilibre concurrentiel.

Remarque 2.1 *Le théorème donne simplement des conditions suffisantes pour l'existence d'un équilibre. Une démonstration standard du résultat fait appel à un théorème de point fixe ; nous y reviendrons. Une économie qui ne satisfait pas les conditions ci-dessus peut néanmoins avoir un équilibre (voir par exemple les fonctions d'utilité de Leontief ou linéaires en T.D.). L'unicité, question délicate, fait l'objet d'énoncés de nature tout à fait différente.*

2.2 Calcul pratique d'équilibres et boîte d'Edgeworth

- 2 biens x, y
- 2 consommateurs 1,2 de dotations initiales respectives $e^1 = (e^1_x, e^1_y)$, $e^2 = (e^2_x, e^2_y)$ et de fonctions d'utilité respectives u^1, u^2
- On se place dans le cas "régulier" : $e^1_x + e^2_x > 0$, $e^1_y + e^2_y > 0$, u^1, u^2 continues, strictement croissantes, strictement quasi-concaves et de plus, continûment différentiables
- Un équilibre consiste en une paire de prix $p = (p_x, p_y)$ et une allocation $((x^1, y^1), (x^2, y^2))$

Etape 1. La résolution des problèmes d'optimisation individuels fournit les demandes $(x^1(p), y^1(p))$ et $(x^2(p), y^2(p))$ de chaque consommateur, en fonction de p :

En supposant une solution $x^i > 0$, $y^i > 0$, $i = 1, 2$:

$TMS^i_{y\to x}\ (x^i, y^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial x}(x^i,y^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial y}(x^i,y^i)} = \frac{p_x}{p_y}$ (C.P.O.)

$p_x x^i + p_y y^i = p_x e^i_x + p_y e^i_y$ (C.B.)

En particulier, $TMS^1_{y\to x}\ (x^1, y^1) = TMS^2_{y\to x}\ (x^2, y^2) = \frac{p_x}{p_y}$

Etape 2. Les conditions d'apurement des marchés :

(i) : $x^1(p) + x^2(p) = e^1_x + e^2_x$, (ii) : $y^1(p) + y^2(p) = e^1_y + e^2_y$ (ii)

permettent de déduire $p = (p_x, p_y)$.

(i) et (ii) ne sont pas indépendantes (loi de Walrsas), i.e. chaque agent sature sa contrainte budgétaire, d'où :

$p_x[x^1(p) + x^2(p) - e^1_x - e^2_x] + p_y[y^1(p) + y^2(p) - e^1_y - e^2_y] = 0.$

On garde donc un degré de liberté pour le vecteur de prix, qu'on peut normaliser ; par exemple, $p_x + p_y = 1$, $p_x = 1$ (bien x numéraire), etc.

Ayant déterminé p, on trouve l'allocation d'équilibre $((x^{*1}, y^{*1}), (x^{*2}, y^{*2}))$ en remplaçant p dans l'expression des demandes des consommateurs.

Remarque 2.2 *Si les fonctions d'utilité ne sont pas différentiables, ou si la solution du problème d'optimisation d'un des deux consommateurs n'est pas strictement positive, on peut suivre la même démarche, c.à.d.*

- Etape 1 : déterminer la (fonction de) demande de chacun des consommateurs.

- Etape 2 : vérifier pour quel(s) prix ces demandes sont compatibles, au sens où les marchés s'apurent.

MAIS on ne peut plus égaliser d'emblée les TMS !!! (voir exemples en T.D.).

2.3 Eléments de démonstration du théorème d'existence

Résultat auxiliaire (théorème de point fixe de Brouwer) : Soit $S \subseteq \mathbb{R}^\ell$, $S \neq \emptyset$, compact, convexe et $g : S \to S$ une fonction continue. Sous ces hypothèses, g a un point fixe, c.à.d. $\exists\ p^* \in S$ tel que $g(p^*) = p^*$.

Remarque 2.3 *La continuité de g est essentielle, y compris "au bord ".*

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ une économie d'échange satisfaisant les hypothèses du théorème.

— Les dotations initiales e^i resteront fixées.

— Soit S l'ensemble des prix normalisés : $S = \{p \in \mathbb{R}^\ell_+ : \sum_\ell p_\ell = 1\}$ et Int$S = \{p \in S : p \gg 0\}$.

— Comme u^i est strictement croissante et strictement quasi-concave, la fonction de demande du consommateur i, $d^i : S \to \mathbb{R}^\ell_+$, est bien définie et satisfait la loi de Walras $p.d^i(p) = p.e^i$, $\forall\ p \gg 0$.

— La fonction de demande excédentaire f^i est définie par $f^i(p) = d^i(p) - e^i$. Par la loi de Walras, $p.f^i(p) = 0$, $\forall\ p \gg 0$.

— Les hypothèses garantissent que $f^i : S \to \mathbb{R}^\ell_+$ est continue sur int S. Cependant, si $p_\ell \to 0$, $f^i_\ell(p) \to \infty$, ce qui est de nature à poser quelques problèmes techniques. Dans ces éléments de démonstration, nous les négligerons.

— Soit $f = \sum_{i=1}^N f^i$ la demande excédentaire agrégée.

  — Par la loi de Walras, $p.f(p) = 0$, c.à.d. $\sum_\ell p^*_\ell f_\ell(p^*) = 0\ \forall\ p \gg 0$

  — p^* est un prix d'équilibre concurrentiel $\Leftrightarrow f(p^*) = 0$

  — Un tel prix existe dès que $\exists\ p^* \gg 0 : f(p^*) \leq 0$

  — En effet, on a alors $p^*_\ell f_\ell(p^*) \leq 0$, $\ell = 1, ..., L$; par la loi de Walras ($\sum_\ell p^*_\ell f_\ell(p^*) = 0$), on déduit $f_\ell(p^*) = 0$, $\ell = 1, ..., L$

Etape principale du raisonnement : lemme

Lemme 2.1 *Supposons que $h : S \to S$ soit une fonction continue (sur tout S) telle que $p \cdot h(p) = 0\ \forall\ p \in S$; alors $\exists\ p^* \in S$ tel que $h(p^*) \leq 0$, c.à.d. $h_\ell(p^*) \leq 0$, $\ell = 1, ..., L$.*

Remarque 2.4 *Le lemme ne s'applique pas directement à la fonction de demande excédentaire agrégée dans la mesure où sa définition au bord pose problème.*

Démonstration du lemme : on définit une fonction $g : S \to S$

$$g_\ell(p) = \frac{p_\ell + \max\{0, h_\ell(p)\}}{1 + \sum_k \max\{0, h_k(p)\}} \quad \ell = 1, ..., L$$

Intuition : si $h_\ell(p) \leq 0$, on maintient le prix du bien ℓ ; si $h_\ell(p) > 0$, on l'augmente

Par le théorème de Brouwer, $\exists\ p^* \in S : p^* = g(p^*)$

$$p_\ell^* \sum_k \max\{0, h_k(p)\} = \max\{0, h_\ell(p^*)\}\ \ell = 1, ..., L$$

En multipliant par $h_\ell(p^*)$ et en sommant sur ℓ

$$\sum_\ell p_\ell^* h_\ell(p^*) \sum_k \max\{0, h_k(p)\} = \sum_\ell h_\ell(p^*) \max\{0, h_\ell(p^*)\}$$

Comme $p \cdot h(p) = 0$,

$$0 = \sum_\ell h_\ell(p^*) \max\{0, h_\ell(p^*)\} \Rightarrow h_\ell(p^*) \leq 0 \quad \ell = 1, ..., L$$

ce qui établit le lemme.

2.4 Unicité

L'unicité (globale) de l'équilibre n'est pas garantie par les hypothèses du théorème d'existence.

Exemple : $u^1(x,y) = (\alpha x^\rho + y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $u^2(x,y) = (x^\rho + \alpha y^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ (fonctions d'utilité à élasticité de substitution constante, voir T.D.) avec $\rho = -2$

$e^1 = (1, 0)$, $e^2 = (0, 1)$

$d_x^1(p) + d_x^2(p) = 1 \Leftrightarrow ar^3 - r^2 + r - a = 0$, où $r = (\frac{p_x}{p_y})^{\frac{1}{3}}$ et $a = \alpha^{-\frac{1}{3}}$

$\Leftrightarrow (r-1)(ar^2 + (a-1)r + a) = 0$

Pour $\alpha = 64$, $a = \frac{1}{4}$, $(r-1)(r^2 - 3r + 1) = 0$ a 3 racines : $r = 1$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,62$; $\frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0,38$. On a donc 3 prix d'équilibre possibles.

3 Optimalité de Pareto

Economie d'échange :

$$\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$$

Définition 3.1 *Une allocation* $z = (z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}_+^\ell)^N$ *est réalisable si* $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$ *c.à.d.* $\sum_{i=1}^N z_\ell^i = \sum_{i=1}^N e_\ell^i$, $\ell = 1, ..., L$.

Soient z *et* $\widetilde{z}$ *des allocations réalisables ;* $\widetilde{z}$ *Pareto-domine* z *si* $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $u^i(\widetilde{z}^i) \geq u^i(z^i)$ *et* $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$.

Une allocation (réalisable) z est Pareto-optimale si elle n'est Pareto-dominée par aucune allocation (réalisable).

Remarque 3.1 *La Pareto-dominance ne permet pas nécessairement de comparer deux allocations données, i.e. c'est un ordre partiel.*

Remarque 3.2 *Le concept d'optimum de Pareto ne fait pas appel à la notion de prix.*

Remarque 3.3 *A un optimum de Pareto, il n'existe plus d'échange mutuellement avantageux.*

Remarque 3.4 *Les optima de Pareto dépendent de la dotation initiale totale des agents, mais non de la répartition de cette dotation entre les agents.*

3.1 Les deux théorèmes du bien-être

Théorème 3.1 (Premier théorème du bien-être) *Soit* $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ *une économie dans laquelle les fonctions d'utilité* u^i *,* $i = 1, ..., N$*, sont croissantes ; si* $(p, \widetilde{z})$ *est un équilibre concurrentiel,* $\widetilde{z}$ *est une allocation Pareto-optimale.*

Démonstration :

— Puisque $(p, \widetilde{z})$ est un équilibre, on a, pour chaque i, compte tenu de la croissance de u^i, $\forall\ \zeta^i \in \mathbb{R}^\ell_+$

— $p.\zeta^i \leq p.e^i \Rightarrow u^i(\zeta^i) \leq u^i(\widetilde{z}^i)$

— $p.\zeta^i < p.e^i \Rightarrow u^i(\zeta^i) < u^i(\widetilde{z}^i)$

— Par l'absurde, supposons que $\widetilde{z}$ soit Pareto-dominée par z : $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$. $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $u^i(z^i) \geq u^i(\widetilde{z}^i)$ et $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $u^j(z^j) > u^j(\widetilde{z}^j)$

— On doit avoir $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $p.z^i \geq p.e^i$ et $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $p.z^j > p.e^j$

— En sommant, $\sum_{i=1}^N (p.z^i) > \sum_{i=1}^N (p.e^i)$, c.à.d. $p. \sum_{i=1}^N z^i > p. \sum_{i=1}^N e^i$, mais ceci contredit $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$

Résultat auxiliaire : théorème de séparation :

Théorème 3.2 *Soit* $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ *deux ensembles convexes disjoints* ($A \cap B = \emptyset$)*. Il existe* $\gamma \in \mathbb{R}^N$*,* $\gamma \neq 0$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tels que* $\gamma.x > c\ \forall x \in A$ *et* $\gamma.y < c\ \forall y \in B$*.*

Corollaire 3.1 *Soit* $B \subseteq \mathbb{R}^N$ *un ensemble convexe et* $x \notin int(B)$*. Il existe* $\gamma \in \mathbb{R}^N$*,* $\gamma \neq 0$*, tel que* $\gamma.x \geq \gamma.y\ \forall y \in B$*.*

Théorème 3.3 (Second théorème du bien-être) *Soit* $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$ *une économie dans laquelle les fonctions d'utilité* u^i *,* $i = 1, ..., N$*, sont strictement croissantes et quasi-concaves ; si* $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^1, ..., \widetilde{z}^N)$ *est une allocation Pareto-optimale telle que* $\widetilde{z}^i \gg 0$*,* $i = 1, ..., N$*,* $\widetilde{z}$ *est une allocation d'équilibre concurrentiel de* $\mathcal{E}' = \{L, N, (\widetilde{z}^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}\}$*, c.à.d.* $\exists\ p$ *tel que* $\widetilde{z}^i$ *maximise* $u^i(z^i)$ *sous* $p.z^i \leq p.\widetilde{z}^i$ $i = 1, ..., N$*.*

Base de la démonstration :

— $P^i = \{z^i \in \mathbb{R}^\ell_+ : u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i)\}$, $i = 1, ..., N$

— P^i est convexe par la quasi-concavité de u^i

— $P = \sum_i P^i = \{z \in \mathbb{R}^\ell_+ : z = \sum_i z^i,\ z^i \in P^i,\ i = 1, ..., N\}$

— P est également convexe

— Soit $\zeta = \sum_i \widetilde{z}^i$; comme $\widetilde{z}$ est Pareto-optimale, $\zeta \notin P$

— Par le théorème de séparation, $\exists\ p \in \mathbb{R}^\ell$, $p \neq 0$, tel que $p.\zeta \leq p.z$, $\forall z \in P$

— On vérifie ensuite (*exercice*) : $p > 0$ et la condition d'optimalité de chaque consommateur : $\forall\ i = 1, ..., N$, $u^i(z^i) > u^i(\widetilde{z}^i) \Rightarrow p.z^i > p.\widetilde{z}^i$

Remarque 3.5 *Le second théorème du bien-être n'est pas nécessairement vrai dans une économie où les préférences ne sont pas convexes (voir exemple graphique).*

Remarque 3.6 *Pour faire de $\widetilde{z}$ une allocation d'équilibre, on a modifié les dotations initiales de e^i à $\widetilde{z}^i$, $i = 1, ..., N$, ce qui peut être lourd à réaliser. Il suffit en fait d'effectuer des transferts forfaitaires de richesse, compte tenu des prix p qui permettent la décentralisation de $\widetilde{z}$.*

Pour énoncer précisément ce résultat : $(p, z) \in \mathbb{R}^\ell_+ \times (\mathbb{R}^\ell_+)^N$ est un équilibre avec transferts de $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ s'il existe $w^1 \in \mathbb{R}$, ...,$w^N \in \mathbb{R}$ tels que

— $\sum_{i=1}^N w^i = p. \sum_{i=1}^N e^i$

— $\forall i = 1, ..., N$, z^i est solution de $\max_{\zeta\in\mathbb{R}^\ell_+} u^i(\zeta)$ sous $p.\zeta \leq w^i$, $i = 1, ..., N$

— $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$

Le transfert à l'agent i est $t^i = w^i - p.e^i$, $i = 1, ..., N$; qui satisfait :$\sum_{i=1}^N t^i = 0$.

- Si (p, z) est un équilibre concurrentiel, avec (p, z) est un équilibre avec transferts (il suffit de prendre $w^i = p.e^i$, $i = 1, ..., N$).

Théorème 3.4 (Variante du second théorème du bien-être) *Soit $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}\}$ une économie dans laquelle les fonctions d'utilité u^i , $i = 1, ..., N$, sont strictement croissantes et quasi-concaves ; si $\widetilde{z} = (\widetilde{z}^1, ..., \widetilde{z}^N)$ est une allocation Pareto-optimale telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, $i = 1, ..., N$, $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre avec transferts de $\mathcal{E}$.*

Démonstration : Il suffit de prendre $w^i = p.\widetilde{z}^i$, $i = 1, ..., N$, où p est le prix qu'on a construit dans la démonstration précédente. Le transfert à l'agent i est $t^i = p.\widetilde{z}^i - p.e^i$

3.2 Caractérisation des optima de Pareto

Rappel : une *allocation* $z = (z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}_+^\ell)^N$ de $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$ est *réalisable* si

$$\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i$$

On considère l'ensemble des *utilités réalisables* :

— $V = \{(v^1, ..., v^N) \in \mathbb{R}^N : \exists$ une allocation réalisable z telle que $v^i \le u^i(z^i)$, $i = 1, ..., N\}$

— V est *monotone* : $y \le v,\ v \in V \Rightarrow y \in V$

— PV : frontière de Pareto de V

— $PV = \{(v^1, ..., v^N) \in V : \nexists\ (\widetilde{v}^1, ..., \widetilde{v}^N) \in V$ tel que $\forall\ i\ \widetilde{v}^i \ge v^i$ et $\exists\ j\ \widetilde{v}^j > v^j\}$

Proposition 3.1 *Une allocation réalisable z est Pareto-optimale* $\Leftrightarrow (u^1(z^1), ..., u^N(z^N)) \in PV$.

Démonstration : exercice.

On introduit $\gamma^i \ge 0$, le poids du consommateur i, $i = 1, ..., N$ et on considère le problème d'*optimisation sociale* $\max_{v \in V} \sum_{i=1}^N \gamma^i v^i$ (O.S.)

Proposition 3.2 *Si $\exists\ \gamma^i > 0$, $i = 1, ..., N$ tels que $v_* = (v_*^1, ..., v_*^N)$ soit solution de (O.S.), $v_* \in PV$.*

Démonstration : Par l'absurde, supposons $v_* \notin PV$. Alors $\exists\ (\widetilde{v}^1, ..., \widetilde{v}^N) \in V$ tel que $\forall\ i\ \widetilde{v}^i \ge v_*^i$ et $\exists\ j\ \widetilde{v}^j > v_*^j$. Comme $\gamma^i > 0\ \forall\ i$, on en déduit $\sum_i \gamma^i \widetilde{v}^i > \sum_i \gamma^i v_*^i$, contradiction,

Proposition 3.3 *Si V est convexe, $\forall\ \widetilde{v} \in PV$, $\exists\ \gamma^i \ge 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls ($\gamma \ne 0$), tels que $\widetilde{v}$ soit solution de (O.S.)*

Démonstration : Soit $\widetilde{v} \in PV$; $\widetilde{v} \notin int(V)$. Par le théorème de séparation, $\exists\ \gamma \ne 0$ tel que $\sum_{i=1}^N \gamma^i \widetilde{v}^i \ge \sum_{i=1}^N \gamma^i v^i\ \forall v \in V$. Il reste à montrer que $\gamma^i \ge 0$, $\forall\ i$. Par l'absurde, supposons $\gamma^j < 0$ pour un certain j ; en prenant $v \in V$ tel que $v^j < 0$, $|v^j|$ très grand, on aurait $\gamma^j v^j > \gamma^j \widetilde{v}^j$, contradiction.

Remarque 3.7 *Les propriétés ci-dessus s'appliquent même si l'ensemble des utilités réalisables ne provient pas d'une économie d'échange, mais d'un problème de décision collective quelconque.*

Proposition 3.4 *Si, dans l'économie d'échange $\mathcal{E} = \{L, N, (e^i, u^i)_{1 \le i \le N}\}$, les fonctions d'utilité u^i sont concaves, V est convexe.*

Démonstration : exercice.

Le problème d'*optimisation sociale* dans une économie d'échange

Soit $\gamma^i > 0$, $i = 1, ..., N$; si $\tilde{z}$ est solution de

$$\begin{cases} \max_{z \geq 0} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) \\ s.c. \ \sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i \\ \left(\text{équiv. à } \sum_{i=1}^N z^i_\ell \leq \sum_{i=1}^N e^i_\ell \ \forall \ell = 1, ..., L \right) \end{cases}$$

alors $\tilde{z}$ est une allocation Pareto-optimale.

Supposons les fonctions d'utilité u^i croissantes et concaves, $i = 1, ..., N$. Soit $\tilde{z}$ une allocation Pareto-optimale ; $\exists \ \gamma^i \geq 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls ($\gamma \neq 0$), tels que $\tilde{z}$ soit solution de

$$\begin{cases} \max_{z \geq 0} \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) \\ s.c. \ \sum_{i=1}^N z^i \leq \sum_{i=1}^N e^i \end{cases}$$

Si les fonctions d'utilité u^i sont différentiables, on considère les conditions du premier ordre associées au problème d'optimisation sociale en $z \gg 0$:

$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(z^i) - \sum_{\ell=1}^{\ell} \lambda_\ell \left(\sum_{i=1}^N z^i_\ell - \sum_{i=1}^N e^i_\ell \right)$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z^i_\ell} = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z^i_\ell}(z^i) - \lambda_\ell = 0 \ i = 1, ..., N, \ \ell = 1, ..., L$

$\Leftrightarrow \lambda_\ell = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z^i_\ell}(z^i) \ i = 1, ..., N, \ \ell = 1, ..., L$

$\Rightarrow$

$$TMS^i_{k \to \ell}(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial z^i_\ell}(z^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial z^i_k}(z^i)} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k} \ \ \forall i = 1, ..., N, \ \forall k, \ell = 1, ..., L$$

Donc pour couple de consommateurs $i, j = 1, ..., N$, et couples de biens $k, \ell = 1, ..., L$, on a :

$$TMS^i_{k \to \ell}(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial z^i_\ell}(z^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial z^i_k}(z^i)} = \frac{\frac{\partial u^j}{\partial z^j_\ell}(z^j)}{\frac{\partial u^j}{\partial z^j_k}(z^j)} = TMS^j_{k \to \ell}(z^j)$$

En une solution $z \gg 0$, les TMS des agents (relatifs à une paire de biens quelconques) sont égaux entre eux. On se rappelle que cette condition est satisfaite en une allocation d'équilibre concurrentiel z ($TMS^i_{k \to \ell}(z^i) = \frac{p_\ell}{p_k}$, où p est le prix d'équilibre). Par le premier théorème du bien-être, on s'attend à cette propriété. Elle indique aussi comment calculer le prix qui permet de décentraliser une allocation Pareto-optimale en un équilibre concurrentiel, suivant le second théorème du bien-être : $\frac{p_\ell}{p_k} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k}$.

Exercice : soit $e_\ell = \sum_{i=1}^N e^i_\ell$ la dotation totale en bien ℓ, $\ell = 1, ..., L$ et $\tilde{z} = \tilde{z}(\gamma, e) \gg 0$ l'allocation Pareto-optimale dérivée ci-dessus ; montrer que λ_ℓ est l'utilité sociale marginale de e_ℓ, c.à.d. $\lambda_\ell = \frac{d}{de_\ell}[\sum_{i=1}^N \gamma^i u^i(\tilde{z}^i)]$.

Interprétation du poids γ^i de l'agent i à un optimum $\widetilde{z} \gg 0$

On a vu que

$$\frac{\partial u^i}{\partial z^i_\ell}(z^i) = \frac{\lambda_\ell}{\gamma^i} \qquad (*)$$

Par le second théorème du bien-être, $\widetilde{z}$ est une allocation d'équilibre ; on peut prendre $\widetilde{p} = \lambda$ comme prix associé ; soit μ^i le multiplicateur de la contrainte budgétaire de l'agent i :

$$\frac{\partial u^i(\widetilde{z}^i)}{\partial z^i_\ell} = \mu^i \widetilde{p}_\ell = \mu^i \lambda_\ell \qquad (**)$$

(*) et (**) $\Rightarrow \gamma^i = \frac{1}{\mu^i}$ c.à.d. γ^i est l'inverse de l'utilité marginale du revenu de l'agent i.

4 Economies avec production

Une économie avec production (et propriété privée)
$\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ consiste en

— L biens, $\ell = 1, ..., L$

— N agents (ou consommateurs) $i = 1, ..., N$ caractérisés chacun par une dotation initiale $e^i \in \mathbb{R}^\ell_+$ et une fonction d'utilité u^i

— M entreprises $j = 1, ..., M$ caractérisées chacune par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^\ell$

— une part $\theta^{ij} \geq 0$ de l'entreprise j pour chaque agent i : $\sum_{i=1}^N \theta^{ij} = 1$, $j = 1, ..., M$

4.1 Le producteur

On considère un producteur typique (on omet donc l'indice j) caractérisé par son ensemble de production $Q \subseteq \mathbb{R}^\ell$. Q décrit la technologie de l'entreprise, qui permettra de transformer les dotations initiales des agents

Les inputs sont comptés négativement et les outputs, positivement.

Exemple : si $\ell = 3$, $(-1; 1; -0,5) \in Q$ signifie qu'on peut produire 1 unité de bien 2 à partir d'1 unité de bien 1 et de 0,5 unité de bien 3

Exemple : $Q = \{(-x, y) : x \in \mathbb{R}^K_+, \, y \in \mathbb{R}_+, \, y \leq g(x)\}$ décrit la production d'un seul output à partir de K inputs, grâce à une fonction de production $g : \mathbb{R}^K_+ \to \mathbb{R}_+$

Propriétés usuelles d'un ensemble de production :

- $0 \in Q$: il est possible de ne rien produire
- $Q \cap \mathbb{R}^\ell_+ \subseteq \{0\}$: il n'est pas possible de produire sans input

- $Q - \mathbb{R}^\ell_+ \subseteq Q$: élimination libre
- Q est fermé
- Q est convexe
- Rendements d'échelle : Q est à rendements décroissants si $q \in Q$, $0 \leq \rho \leq 1 \Rightarrow \rho q \in Q$; Q est à rendements croissants si $q \in Q$, $\rho \geq 1 \Rightarrow \rho q \in Q$; Q est à rendements constants si $q \in Q$, $\rho \geq 0 \Rightarrow \rho q \in Q$

Proposition 4.1 *1. Si $0 \in Q$ et Q est convexe, Q est à rendements décroissants.*

2. Si Q est décrit par une fonction de production g :

(a) $Q = \{(-x, y) : x \in \mathbb{R}^K_+,\ y \in \mathbb{R}_+,\ y \leq g(x)\}$.

(b) Q est convexe $\Leftrightarrow$ g est concave.

(c) Q est à rendements décroissants $\Leftrightarrow$ $g(\lambda x) \leq \lambda g(x)\ \forall\ \lambda \geq 1$ (ce qui explique la terminologie).

Démonstration : exercice.

Plan de production efficace

- analogue à l'optimalité de Pareto vue dans une économie d'échange :
  $q \in Q$ est efficace $\Leftrightarrow \nexists\ q' \in Q : q' > q$ (c.à.d. $q' \geq q$, $q' \neq q$)
- $\Leftrightarrow$ il n'est pas possible d'augmenter la production d'un output sans diminuer celle d'un autre output ou sans accroître la consommation d'un input, il n'est pas possible de réduire la quantité utilisée d'un input sans augmenter celle d'un autre input ou sans diminuer la production d'un output
- Si Q est décrit par une fonction de production g, l'ensemble des plans de production efficaces correspond à une partie de la frontière de Q, où $y = g(x)$

4.2 Optimum du producteur

Soit $p = (p_\ell)_{1 \leq l \leq L} \in \mathbb{R}^\ell_+$ un vecteur de prix ; le producteur, comme le consommateur est "preneur de prix" (hypothèse de concurrence parfaite).

Le plan $q \in Q$ procure un profit $\pi(p) = p.q = \sum_{l=1}^{\ell} p_\ell q_\ell$ au producteur.

Exemple : Si les prix sont $(1, 10, 2)$, $(-1; 1; -0,5)$ procure un profit de $1 \times (-1) + 10 \times 1 + 2 \times (-0,5) = 8$

L'objectif du producteur est de maximiser son profit sous ses contraintes technologiques :

$$\max_{q \in Q} p.q$$

Justification : On suppose que les consommateurs $1, ..., N$ sont propriétaires de l'entreprise ; soit $\theta^i \geq 0$ la part du consommateur i ($\sum_{i=1}^N \theta^i = 1$) ; le consommateur reçoit la part $\theta^i p.q$ du profit de l'entreprise, qui contribue à son revenu. Comme les consommateurs maximisent leur utilité sous la contrainte de ne pas dépasser leur revenu, ils ont intérêt à avoir le revenu le plus élevé possible et sont donc unanimes pour que l'entreprise maximise son profit.

- Le problème d'optimisation du producteur $\max_{q\in Q} p.q$ n'a pas nécessairement de solution car Q n'est pas borné.
- Si les rendements sont croissants, le problème n'a pas de solution ; mais ceci peut arriver même si les rendements sont décroissants.
- Si Q est à rendements constants, le profit maximal, s'il existe, est nécessairement nul.

Démonstration : exercice.

Conditions nécessaires pour un optimum dans le cas d'une fonction de production g, différentiable, d'un seul output

$Q = \{(-x, y) : x \in \mathbb{R}^K_+,\, y \in \mathbb{R}_+,\, y \leq g(x)\}$

r = prix de l'output ; w_k = prix de l'input k, $k = 1, ..., K$; $p = (r, w_1, ..., w_K)$

Le problème du producteur est

$$\begin{cases} \max_{x,y} ry - w.x \\ s.c.\ \ y = g(x) \end{cases}$$

.

On s'intéresse aux solutions $(x, y) \gg 0$

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = ry - w.x - \lambda(y - g(x)) = ry - \sum_{k=1}^{K} w_k x_k - \lambda(y - g(x))$$

Conditions du premier ordre :

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_k}(x, y, \lambda) = -w_k + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = 0\ \forall\ k$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) = r - \lambda = 0$

En un optimum (x^*, y^*) :

1. $TMST_{k\to\ell}(x^*) =_{\text{déf}} \frac{\frac{\partial g}{\partial x_\ell}(x^*)}{\frac{\partial g}{\partial x_k}(x^*)} = \frac{w_\ell}{w_k}$, $\forall k, \ell$: le taux marginal de substitution technique de l'input k à l'input l est égal au rapport du prix de ces inputs et
2. $\frac{\partial g}{\partial x_k}(x^*) = \frac{w_k}{r}$: la productivité marginale de chaque input est égale au rapport du prix de ce facteur au prix de l'output.

Fonction d'offre du producteur : Si $\forall\, p$, $\max_{q\in Q} p.q$ a une solution, et que cette solution soit unique, on la note $q^*(p)$; q^* définit alors la *fonction d'offre* (nette) du producteur.

Proposition 4.2 *Si Q est strictement convexe ($q,\, q' \in Q$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha q + (1-\alpha)q' \in intQ$) et que $\max_{q\in Q} p.q$ ait une solution, cette solution est unique.*

Démonstration : exercice

Propriétés de la fonction d'offre $q^*(.)$, supposée bien définie (c.à.d.$\forall\, p$, $\max_{q\in Q} p.q$ a une solution unique) :

- Homogène de degré 0 par rapport au prix $q^*(\alpha p) = q^*(p)\ \forall \alpha > 0$. *Démonstration : exercice.*
- Efficacité : soit $p \gg 0$; $q^*(p)$ est efficace. *Démonstration : exercice.*
- Loi de l'offre : quand le prix d'un bien augmente, l'offre (nette) de ce bien ne peut diminuer. Formellement, $(p-p').(q(p)-q(p')) \geq 0\ \forall\, p, p'$. En particulier, $(p_\ell - p'_\ell)(q_\ell(p) - q_\ell(p')) \geq 0$, $\ell = 1, ..., L$.
  Démonstration : $p.q(p') \leq p.q(p)$ car $q(p)$ est l'optimum en p ; de même, $p'.q(p) \leq p'.q(p')$, ce qui équivaut à $-p'.q(p) \geq -p'.q(p')$; il suffit alors de sommer.

4.3 Plusieurs producteurs : offre agrégée

Nous supposons maintenant qu'il y a M entreprises $j = 1, ..., M$, caractérisées chacune par un ensemble de production $Q^j \subseteq \mathbb{R}^\ell$.

On définit l'ensemble de production agrégé par :
$Q_{AG} = \sum_{j=1}^{M} Q^j = \{q \in \mathbb{R}^\ell | \exists\ q^j \in Q^j,\ j = 1, ..., M : q = \sum_{j=1}^{M} q^j\}$

Proposition 4.3 *Soit p un vecteur de prix, $q^{j*} \in Q^j$, $j = 1, ..., M$ et $q^*_{AG} = \sum_{j=1}^{M} q^{j*}$. q^*_{AG} est solution de $\max_{q\in Q_{AG}} p.q \Leftrightarrow q^{j*}$ est solution de $\max_{q\in Q^j} p.q$, $\forall\ j = 1, ..., M$. En particulier, l'offre agrégée $q^*_{AG}(p) = \sum_{j=1}^{M} q^{j*}(p)$, définie à partir des fonctions d'offre $q^{j*}(p)$ de chaque firme j, peut se voir comme la fonction d'offre d'une entreprise représentative et satisfait la loi de l'offre.*

Démonstration :

$\Rightarrow$: supposons par l'absurde qu'une entreprise, m, réalise un profit strictement plus élevé en choisissant q^m plutôt que q^{m*}, c.à.d. $p.q^m > p.q^{m*}$. Soit $q_{AG} = \sum_{j\neq m} q^{j*} + q^m$; $p.q_{AG} > p.q^*_{AG}$, contradiction.

$\Leftarrow$: supposons par l'absurde qu'il existe $q_{AG} \in Q_{AG}$ tel que $p.q_{AG} > p.q^*_{AG}$. Par définition de Q_{AG}, $q_{AG} = \sum_{j=1}^{M} q^j$, avec $q^j \in Q^j$, $j = 1, ..., M$; $p.\sum_{j=1}^{M} q^j > p.\sum_{j=1}^{M} q^{j*} \Rightarrow \exists\ m : p.q^m > p.q^{m*}$, contradiction. cqfd

4.4 Equilibre concurrentiel avec production

Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$.

Définition 4.1 *Un équilibre concurrentiel* (p, q, z) *pour* $\mathcal{E}$ *consiste en*

— *un vecteur de prix* $p = (p_1, ..., p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+$

— *une allocation* $(q, z) = (q^1, ..., q^M, z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}^\ell)^M \times (\mathbb{R}^\ell_+)^N$*, où* q *est un plan de production, tels que :*

1. $\forall j = 1, ..., M$*,* q^j *maximise le profit* $p.\chi^j$ *de l'entreprise* j *sous* $\chi^j \in Q^j$
2. $\forall i = 1, ..., N$*,* z^i *maximise l'utilité* $u^i(\zeta)$ *du consommateur* i *sous sa contrainte budgétaire* $p.\zeta \leq p.e^i + \sum_{j=1}^M \theta^{ij}(p.q^j)$
3. *les marchés* ($\ell = 1, ..., L$) *s'apurent :* $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i + \sum_{j=1}^M q^j$

Remarque 4.1 *On peut récrire les inégalités plus explicitement :*

Le profit de l'entreprise j *s'écrit* $p.\chi^j = \sum_{l=1}^\ell p_\ell \chi^j_\ell$

La contrainte budgétaire du consommateur i *s'écrit*

$\sum_{l=1}^\ell p_\ell \zeta_\ell \leq \sum_{l=1}^\ell p_\ell e^i_\ell + \sum_{j=1}^M \theta^{ij} \sum_{l=1}^\ell p_\ell q^j_\ell$

La condition d'apurement des marchés s'écrit

$\sum_{i=1}^N z^i_\ell = \sum_{i=1}^N e^i_\ell + \sum_{j=1}^M q^j_\ell$, $l = 1, ..., L$

L'existence d'un équilibre suppose que la maximisation du profit des entreprises ait une solution et exclut donc les rendements croissants. En ajoutant des hypothèses (typiquement de convexité) sur les ensembles de production, on généralise le théorème fondamental d'existence vu dans le cadre des économies d'échange.

4.5 L'économie de Robinson Crusoé

Un consommateur, une entreprise possédée par le consommateur.

Deux biens : nourriture (x) et loisir (y) ; travail $t = 24 - y$.

r = prix d'une unité de nourriture ; w = salaire horaire.

Robinson-firme est décrit par une fonction de production $g : t \to g(t)$ qui transforme du travail en nourriture ; il maximise son profit $\pi = rx - wt = rx - w(24 - y)$ sous $g(t) = x$.

Les droites d'isoprofit, dans le plan (y, x) ont une pente $\frac{-w}{r}$ (voir graphique).

Robinson-consommateur a une dotation initiale $(e_x, e_y) = (0, 24)$ et une fonction d'utilité u ; il maximise $u(x, y) = u(x, 24 - t)$ sous $rx + wy = 24w + \pi \Leftrightarrow rx = wt + \pi$: il consacre son salaire et son profit d'actionnaire à l'achat du bien de consommation ; la pente de la contrainte budgétaire dans le plan (y, x) est $\frac{-w}{r}$ (voir graphique).

Exemple 1. la fonction de production g est (strictement) concave et $g(0) = 0$; les rendements sont *décroissants* (voir graphique).

A l'équilibre, les quantités de nourriture produite (output) et de nourriture consommée doivent être égales et la quantité de travail utilisée comme input doit être égale à 24 - la quantité de loisir consommée ; de plus, le profit π de Robinson-firme apparaît dans la contrainte budgétaire de Robinson-consommateur. L'équilibre est une solution du problème unifié de Robinson, c.à.d. un optimum de Pareto (voir graphique).

Exemple 2. la fonction de production g est une droite ; les rendements sont *constants* ; les droites d'isoprofit, dans le plan (t, x) ont une pente $\frac{w}{r} > 0$; à l'optimum du producteur, le profit doit être nul.

Si la pente de g est $> \frac{w}{r}$, il n'y a pas de solution : $\pi \to \infty$.

Si la pente de g est $< \frac{w}{r}$, la seule solution possible est de ne rien produire (ce qui ne peut constituer un équilibre, vu les préférences de Robinson-consommateur).

Il faut donc que la pente de g soit $= \frac{w}{r}$; si un équilibre existe, son prix est déterminé indépendamment des préférences du consommateur (voir graphique).

Exemple 3. la fonction de production g est convexe ; les rendements sont *croissants.* On peut encore trouver une solution au problème unifié de Robinson, c.à.d. un optimum de Pareto, mais celui-ci n'est pas décentralisable par un système de prix : il n'y a pas d'équilibre (voir graphique).

4.6 Optimalité de Pareto

Définition 4.2 *Soit* $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1 \leq i \leq N}, (Q^j)_{1 \leq j \leq M}, (\theta^{ij})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq M}\}$

Soit $(q, z) = (q^1, ..., q^M, z^1, ..., z^N) \in (\mathbb{R}^\ell)^M \times (\mathbb{R}^\ell_+)^N$ *une allocation ;* (q, z) *est réalisable (dans* $\mathcal{E}$*) si* $q^j \in Q^j$, $j = 1, ..., M$ *et* $\sum_{i=1}^N z^i = \sum_{i=1}^N e^i + \sum_{j=1}^M q^j$ *c.à.d.*

$$\sum_{i=1}^{N} z^i_\ell = \sum_{i=1}^{N} e^i_\ell + \sum_{j=1}^{M} q^j_\ell, \;\; l = 1, ..., L$$

Une allocation (q, z) *réalisable est Pareto-optimale (dans* $\mathcal{E}$*) si*

$\nexists$ $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ *réalisable tel que* $\forall\ 1 \leq i \leq N$, $u^i(\widetilde{z}^i) \geq u^i(z^i)$ *et* $\exists\ 1 \leq j \leq N$, $u^j(\widetilde{z}^j) > u^j(z^j)$.

Le bien-être est donc celui des consommateurs, qui possèdent les entreprises. Celles-ci sont juste des technologies de transformation des dotations en biens produits, source de satisfaction pour les consommateurs.

Théorème 4.1 (Premier théorème du bien-être)
Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ *une économie dans laquelle les fonctions d'utilité* u^i *,* $i = 1, ..., N$*, sont croissantes ; si* $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})$ *est un équilibre concurrentiel,* $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ *est Pareto-optimale.*

Démonstration : On procède comme dans le cas d'une économie d'échange. Soit $(\widetilde{p}, \widetilde{q}, \widetilde{z})$ un équilibre ; supposons, par l'absurde, que $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ soit Pareto-dominée par (q, z). On montre que $p.\sum_{j=1}^{M} q^j > p.\sum_{j=1}^{M} \widetilde{q}^j$, ce qui contredit que $\widetilde{q}^j$ maximise le profit du producteur j, $j = 1, ..., N$. cqfd

Théorème 4.2 (Second théorème du bien-être)
Soit $\mathcal{E} = \{L, N, M, (e^i, u^i)_{1\leq i\leq N}, (Q^j)_{1\leq j\leq M}, (\theta^{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq j\leq M}\}$ *une économie dans laquelle les fonctions d'utilité* u^i *,* $i = 1, ..., N$*, sont strictement croissantes et quasi-concaves et les ensembles de production* Q^j*,* $j = 1, ..., M$ *sont convexes ; si l'allocation* $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ *est Pareto-optimale dans* $\mathcal{E}$ *et telle que* $\widetilde{z}^i \gg 0$*,* $i = 1, ..., N$*, il existe un vecteur de prix* $\widetilde{p}$ *tel que*

1. $\widetilde{q}^j$ *maximise* $\widetilde{p}.q^j$ *sous* $q^j \in Q^j$
2. $\widetilde{z}^i$ *maximise* $u^i(z^i)$ *sous* $p.z^i \leq p.\widetilde{z}^i$*,* $i = 1, ..., N$*.*

Comme dans le cas d'une économie d'échange, une variante du second théorème du bien-être s'énonce sous la forme : si $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est une allocation Pareto-optimale dans $\mathcal{E}$, telle que $\widetilde{z}^i \gg 0$, $i = 1, ..., N$, $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ est une allocation d'équilibre avec transferts de $\mathcal{E}$.

4.7 Caractérisation des optima de Pareto

On suppose que les ensembles de production Q^j, $j = 1, ..., M$, sont de la forme $Q^j = \{q^j \in \mathbb{R}^\ell : G^j(q^j) \leq 0\}$ où $G^j : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe (d'où Q^j est un ensemble convexe) et telle que $G^j(0) \leq 0$; en un plan de production q^j efficace, $G^j(q^j) = 0$. On suppose aussi que les fonctions d'utilité u^i sont croissantes et concaves, $i = 1, ..., N$.

Soit $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$ une allocation Pareto-optimale. En procédant comme pour une économie d'échange, on montre que $\exists\ \gamma^i \geq 0$, $i = 1, ..., N$, non tous nuls ($\gamma \neq 0$), tels que $\widetilde{z}$ soit solution du problème d'optimisation sociale :

$$\begin{cases} \max_{q,z} \sum_{i=1}^{N} \gamma^i u^i(z^i) \\ s.c.\ G^j(q^j) = 0,\ j = 1, ..., M \\ \sum_{i=1}^{N} z_\ell^i = \sum_{i=1}^{N} e_\ell^i + \sum_{j=1}^{M} q_\ell^j,\ \ l = 1, ..., L \end{cases}$$

Si les fonctions G^j et u^i sont différentiables, on considère les conditions du premier ordre associées au problème, en $z \gg 0$:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \gamma^i u^i(z^i) - \sum_{j=1}^{M} \mu^j G^j(q^j) - \sum_{l=1}^{\ell} \lambda_\ell \left(\sum_{i=1}^{N} z_\ell^i - \sum_{i=1}^{N} e_\ell^i - \sum_{j=1}^{M} q_\ell^j \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_\ell^i} = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z_\ell^i}(z^i) - \lambda_\ell = 0 \text{ pour } i = 1, ..., N,\ \ l = 1, ..., L$$

$$\iff \lambda_\ell = \gamma^i \frac{\partial u^i}{\partial z_\ell^i}(z^i) \text{ pour } i = 1, ..., N,\ \ l = 1, ..., L$$

$\implies$

$$TMS_{k\to l}^i(z^i) = \frac{\frac{\partial u^i}{\partial z_\ell^i}(z^i)}{\frac{\partial u^i}{\partial z_k^i}(z^i)} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k}\ \ \forall i, k, l \tag{2}$$

De même,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\ell^j} = \mu^j \frac{\partial G^j}{\partial q_\ell^j}(q^j) - \lambda_\ell = 0 \text{ pour } j = 1, ..., M,\ \ l = 1, ..., L$$

$$\iff \lambda_\ell = \mu^j \frac{\partial G^j}{\partial q_\ell^j}(q^j) \text{ pour } j = 1, ..., M,\ \ l = 1, ..., L$$

$\implies$

$$TMT_{k\to l}^j(q^j) = \frac{\frac{\partial G^j}{\partial q_\ell^j}(q^j)}{\frac{\partial G^j}{\partial q_k^j}(q^j)} = \frac{\lambda_\ell}{\lambda_k}\ \ \forall j, k, l \tag{3}$$

Eq. (2) et (3) $\implies$ En un optimum $(\widetilde{q}, \widetilde{z})$:

$$TMS_{k\to l}^i(\widetilde{z}^i) = TMT_{k\to l}^j(\widetilde{q}^j)\ \ \forall i, j, k, l$$

Le taux marginal de substitution de *chaque* agent entre deux biens quelconques doit être égal au taux marginal de *transformation* de chaque entreprise entre ces deux biens. En particulier, les taux marginaux de substitution des différents agents sont égaux entre eux.

5 Défaillances du marché : effets externes et biens publics

On étend le modèle canonique vu aux chapitres précédents pour prendre en compte 2 aspects importants des préférences et de la nature des biens :

Effets externes : effet indirect d'une activité de production ou de consommation sur les préférences ou les technologies de production des agents (exemple : pollution).

Biens publics : l'usage par un agent n'empêche pas son usage par un autre agent (exemple : éclairage public).

Remarque 5.1 *La présence d'effets externes et de biens publics complique sensiblement l'analyse. Dans ce chapitre, on n'établit pas de résultat général, on raisonnera sur des exemples simples, dans des économies à 2 agents et 2 biens.* **voir Tallon chapitre XI**.

5.1 Effets externes

Illustrations classiques :

1. Apiculteurs et cultivateurs : externalités de production, positive et réciproque.
2. Pollution : externalité de production ou de consommation, négative.

Formellement, on peut définir une économie d'échange avec des effets externes en considérant des fonctions d'utilité de chaque agent définies sur l'ensemble des paniers de consommations des agents. C'est à dire pour l'agent i : $(x^1, ..., x^i, .., x^N) \in (\mathbb{R}^L_+)^N \to u^i(x^1, ..., x^i, ..., x^N)$.

La consommation des paniers de biens $(x^j)_{j \neq i}$ modifie les préférences de l'agent i. Par contre, le comportement microéconomique de l'agent i est inchangé, il cherche toujours à maximiser son utilité sous contrainte budgétaire, mais il prend comme donnée l'externalité produite par les autres.

La définition de l'équilibre concurrentiel est donc inchangée : un prix et une allocation tels que chaque chaque maximise son utilité sous contrainte budgétaire (étant donnés le prix et les consommations des autres agents), les marchés s'apurent (définition inchangée).

Message principal : en présence d'externalités, l'équilibre concurrentiel n'est pas nécessairement optimal.

5.1.1 Exemple

- 2 consommateurs
- 2 biens x et y
- les dotations sont $e^1 = (1, 0)$ et $e^2 = (0, 1)$

Jusqu'ici les agents n'avaient d'utilité que pour leur propre consommation :
- x^i : quantité de bien x consommée par l'agent i
- y^i : quantité de bien y consommée par l'agent i

A présent, l'utilité de l'agent 1 dépend de la consommation en bien x de l'agent 2 :

$$u^1(x^1, y^1; x^2) = \sqrt{x^1 y^1} - x^2 \qquad \text{et} \qquad u^2(x^2, y^2) = \sqrt{x^2 y^2}$$

La définition d'équilibre est inchangée mais l'agent 1 ne contrôle pas x^2 lorsqu'il maximise son utilité !

(x^1, y^1) solution de $\max u^1(x^1, y^1; x^2)$ sous la contrainte $p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$

i.e. (x^1, y^1) solution de $\max \sqrt{x^1 y^1} - x^2$ sous la contrainte $p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$

Rem. : identique à $\max \sqrt{x^1 y^1}$ sous la contrainte $p_x x^1 + p_y y^1 \leq p_x$

$\Longrightarrow$ solution : $d_x^1(p) = \frac{1}{2}$ et $d_y^1(p) = \frac{p_x}{2p_y}$

Pour le consommateur 2, pas d'externalité

$\Longrightarrow$ solution : $d_x^2(p) = \frac{p_y}{2p_x}$ et $d_y^2(p) = \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow p_x = p_y$, chaque agent obtient $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, exactement comme sans externalité (**ce n'est pas un résultat général !**) mais les utilités à l'équilibre sont : $u_*^1 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0$ et $u_*^2 = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

L'équilibre n'est pas Pareto optimal :

Prenons par exemple $(x_0^1, y_0^1) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{5})$ et $(x_0^2, y_0^2) = (\frac{1}{3}, \frac{4}{5})$. L'allocation est réalisable : $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ et $\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$; et on a $u_0^1 = \sqrt{\frac{2}{3} . \frac{1}{5}} - \frac{1}{3}$, $u_0^2 = \sqrt{\frac{1}{3} . \frac{4}{5}}$.
On remarque que $u_0^1 > u_*^1$ ssi $\frac{2}{3} . \frac{1}{5} > \frac{1}{9}$ ssi $2 > \frac{15}{9}$ (OK)
Et, $u_0^2 > u_*^2$ ssi $\frac{1}{3} . \frac{4}{5} > \frac{1}{4}$ ssi $\frac{1}{15} > \frac{1}{16}$ (OK)

Remarque 5.2 *Lorsque les utilités avec externalités sont séparables, c'est-à-dire que les effets externes entrent dans les préférences des agents sous forme additive comme dans l'exemple précédent, l'équilibre correspond à l'équilibre dans le modèle sans externalité. Pourquoi ? (écrire le programme de maximisation du consommateur pour s'en convaincre).*

5.1.2 Externalités : conditions d'optimalité de Pareto

A partir d'un exemple qui généralise le précédent.

— 2 agents 1 et 2

— 2 biens (x et y)

— la consommation de bien x par un agent affecte l'autre

Le programme d'optimisation social peut s'écrire :

$$\begin{cases} \max_{x,y} & \rho^1 u^1(x^1, y^1; x^2) + \rho^2 u^2(x^2, y^2; x^1) \\ s.c. & x^1 + x^2 = e_x \\ & y^1 + y^2 = e_y \end{cases}$$

où $\rho^1, \rho^2 > 0$

On obtient :

$$\mathcal{L} = \rho^1 u^1(x^1, y^1; x^2) + \rho^2 u^2(x^2, y^2; x^1) - \lambda_x(x^1 + x^2 - e_x) - \lambda_y(y^1 + y^2 - e_y)$$

CNS :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^1} = \rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1} - \lambda_x = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^2} = \rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^2} + \rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \lambda_x = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^1} = \rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial y^1} - \lambda_y = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^2} = \rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial y^2} - \lambda_y = 0 \tag{7}$$

En utilisant (4), (6) et (7), on obtient :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \frac{\rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial x^1}}{\rho^1 \frac{\partial u^1}{\partial y^1}} + \frac{\rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial x^1}}{\rho^2 \frac{\partial u^2}{\partial y^2}}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = TMS^1_{y^1 \to x^1} + TMS^2_{y^2 \to x^1} \tag{8}$$

En procédant de même avec (5), (6) et (7)

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = TMS^1_{y^1 \to x^2} + TMS^2_{y^2 \to x^2} \tag{9}$$

<u>La notion de TMS social</u>

A l'optimum on a donc

$$TMS^1_{y^1\to x^1} + TMS^2_{y^2\to x^1} = TMS^1_{y^1\to x^2} + TMS^2_{y^2\to x^2}$$

Cette équation signifie que la somme (sur les agents) des TMS doit être constante : lorsque, par exemple, la consommation en bien 1 du premier consommateur augmente, il faut tenir compte du fait que cela affecte également le bien-être du second consommateur. On peut voir la quantité :

$$\frac{\frac{\partial u^1}{\partial x^1}}{\frac{\partial u^1}{\partial y^1}} + \frac{\frac{\partial u^2}{\partial x^1}}{\frac{\partial u^2}{\partial y^2}}$$

comme étant le TMS social du bien 1 détenu par le premier consommateur. C'est ce TMS qui est déterminant dans l'allocation des ressources dans une économie avec externalités. Les prix d'équilibre concurrentiel, dans une économie où chacun ne tient pas compte du fait qu'il affecte, par ses décisions, le bien-être d'autrui, ne reflètent pas cette dimension sociale de la consommation de certains biens. L'inefficacité de l'équilibre provient précisément de ceci.

On rappelle que dans l'exemple initial, à l'équilibre concurrentiel on a :

$$TMS^1_{y^1\to x^1} = TMS^2_{y^2\to x^2} = \frac{p_x}{p_y} = 1$$

$$TMS^2_{y^2\to x^1} = 0$$

$$TMS^1_{y^1\to x^2} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

On remarque que (8) donne $1 + 0 \neq -2 + 1$ qui est (9). Donc l'équilibre concurrentiel de l'économie avec externalité n'est pas Pareto optimal.

CONC. Optimum de Pareto : notion tout à fait générale - Equilibre concurrentiel : approprié quand il y a des marchés.

Remarque 5.3 *A savoir faire : retrouver les conditions d'optimalité dans une économie à 2 agents et 2 biens, interpréter ces conditions comme un TMS social et les comparer avec la caractérisation de l'équilibre.*

5.2 Biens publics

5.2.1 Allocations Pareto optimales : conditions de Bowen-Lindahl-Samuelson

Exemple :

— 2 agents 1 et 2

— 2 biens x et y, le bien x est un bien privé, le bien y est un bien public

— x^i : quantité de bien x consommée par l'agent i

— y : quantité de bien public

— Préférences des agents : $u^i(x^i, y)$, u^i strictement croissantes et différentiables.

— Le bien public est produit (financé) à partir de bien privé : $y = g(z)$ où z est l'input de bien privé et y est l'output en bien public.

— donc $z = g^{-1}(y)$: quantité de bien privé nécessaire à la production de y unités de bien public.

— g^{-1} : "fonction de coût" (du bien public en bien privé).

— On suppose que la dotation totale initiale en bien privé est e.

— Allocation : (x^1, x^2, z, y), avec $x^i \geq 0$, $z \geq 0$, $y \geq 0$. Elle est réalisable si

$$\begin{cases} x^1 + x^2 + z = e \\ g(z) = y \end{cases}$$

<u>Optima de Pareto de cette économie :</u>

$$\begin{cases} \max_{x^1,x^2,y,z} & a^1u^1(x^1,y) + a^2u^2(x^2,y) & \\ s.c. & x^1 + x^2 + z = e & (\lambda) \\ & g(z) = y & (\nu) \end{cases}$$

On obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = a^i \frac{\partial u^i}{\partial x^i}(x^i, y) - \lambda = 0 \text{ avec } i = 1, 2$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = a^1 \frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1, y) + a^2 \frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2, y) - \nu = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\lambda + g'(z) = 0$$

En combinant les équations on obtient les **conditions BLS :**

$$\frac{\frac{\partial u^1}{\partial y}(x^1, y)}{\frac{\partial u^1}{\partial x^1}(x^1, y)} + \frac{\frac{\partial u^2}{\partial y}(x^2, y)}{\frac{\partial u^2}{\partial x^2}(x^2, y)} = \frac{1}{g'(z)}$$

Interprétation des conditions BLS

On sait que :

$$\frac{\frac{\partial u^i}{\partial y}(x^i, y)}{\frac{\partial u^i}{\partial x^i}(x^i, y)} := TMS^i_{x^i \to y}$$

= le taux marginal de substitution du bien privé au bien public, pour l'agent i

= contribution supplémentaire maximale en x^i que le consommateur accepte pour bénéficier d'une unité supplémentaire de bien public

= disponibilité marginale à payer de la part du consommateur i

Par ailleurs, on a :

$$\frac{1}{g'(z)} = (g^{-1})'(g(z)) = (g^{-1})'(y)$$

=coût marginal de production du bien public

CONC. les conditions BLS représentent la somme des disponibilités marginales à payer est égale au coṱ marginal du bien public.

5.2.2 Equilibre de Lindhal

Définition informelle : pseudo équilibre concurrentiel pour une éonomie avec biens publics, avec des prix personnalisés pour le bien public (assez artificiels).

On reprend l'exemple précédent, avec $e = e^1 + e^2$ et $p_x = 1$.
Chaque consommateur résout :

$$\begin{cases} \max_{x^i, y} u^i(x^i, y) \\ s.c.\ \ x^i \geq 0,\ y \geq 0 \\ x^i + p^i y = e^i \end{cases}$$

où p^i est le prix d'une unité de bien public pour le consommateur i.
$\Longrightarrow$ les demandes $x^i(p^i)$ et $y^i(p^i)$ pour $i = 1, 2$.

Le bien public est produit par une entreprise, qui considère que le prix d'une unité d'output (y) est $p = p^1 + p^2$. L'entreprise maximise son profit :

$$\begin{cases} \max_{y,z} (p^1 + p^2) y - z \\ s.c.\ \ g(z) = y \\ z, y \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ offre de bien public $y(p^1+p^2)$; demande d'input $z(p^1+p^2)$.

DEF. Un équilibre de Lindhal est un système de prix personnalisés $(\tilde{p}^1,\tilde{p}^2)$ et une allocation associée telle

$$y(\tilde{p}^1+\tilde{p}^2)=y^1(\tilde{p}^1)=y^2(\tilde{p}^2)$$

et

$$x^1(\tilde{p}^1)+x^2(\tilde{p}^2)+z(\tilde{p}^1+\tilde{p}^2)=e^1+e^2$$

En écrivant les conditions du 1er ordre des consommateurs et des producteurs, on montre que l'allocation de l'équilibre de Lindahl satisfait BLS : elle donc Pareto optimale mais la mise en œuvre du mécanisme de marché sous-jacent paraît difficile en pratique !

5.2.3 Equilibre avec souscription

Problème de décision interactive : chaque agent choisit la quantité de bien privé qu'il consacre au bien public.

Les ingrédients principaux sont les suivants :

— On suppose les choix indépendants et simultanées. $\neq$ équilibre concurrentiel.

— Externalité : la décision d'un agent influence le sort des autres.

— Equilibre de Nash : chaque agent détermine sa contribution au bien public comme une réponse optimale à celle des autres agents, considéré comme donnée.

En reprenant l'exemple précédent :

L'agent 1 cherche sa réponse optimale à la contribution z^2 de l'agent 2 :

$$\begin{cases} \max_{x^1,z^1,y} u^1(x^1,y) \\ s.c.\ x^1=e^1-z^1 \\ y=g(z^1+z^2) \\ z^1,x^1\geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ solution $\tilde{z}^1(z^2)$: fonction de meilleure réponse.

Pour chaque contribution possible z^2 de l'agent 2 au bien public, l'agent 1 calcule sa contribution optimale $\tilde{z}^1(z^2)$ qui maximise son utilité u^1. De même , pour chaque contribution z^1 de l'agent 1, l'agent 2 calcule sa contribution optimale $\tilde{z}^2(z^1)$.

DEF. Un équilibre avec souscription est une paire de contributions (z^{1*},z^{2*}) telle que $z^{1*}=\tilde{z}^1(z^{2*})$; $z^{2*}=\tilde{z}^2(z^{1*})$.

La solution semble plus réaliste en terme de mise en œuvre et de comportements par rapport à la solution de Lindahl. Mais on remarque que par les contraintes, $x^{1*} = e^1 - z^{1*}$; $x^{2*} = e^2 - z^{2*}$; $y^* = g(z^{1*} + z^{2*})$, l'équilibre n'est pas Pareto optimal en général !

6 Bibliographie

1. Pierre Picard : *Eléments de microéconomie*, tome I, 7e Edition. Montchrestien, 2007
2. Bruno Jullien, Pierre Picard : *Microéconomie* , tome 2 Exercices et Corrigés, 3e Edition. Montchrestien, 2002.
3. Jean-Marc Tallon : *équilibre général : une introduction*. Vuibert, 1997.
4. Hal Varian : *Analyse microéconomique*, 2e Edition. De Boeck Université, 2008.
5. Gregory Mankiw et Mark Taylor : *Microeconomics*, Eds .Thompson Learning, 2006.
6. Mas-Colell, Whinston, et Green : *Microeconomic Theory*; Ofxord University Press, 1995.