CÁLCULO NUMÉRICO

Aula 11

Sistemas de Equações não-Lineares

SISTEMAS NÃO-LINEARES

SISTEMA NÃO LINEAR

- Vamos considerar o problema de resolver um sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

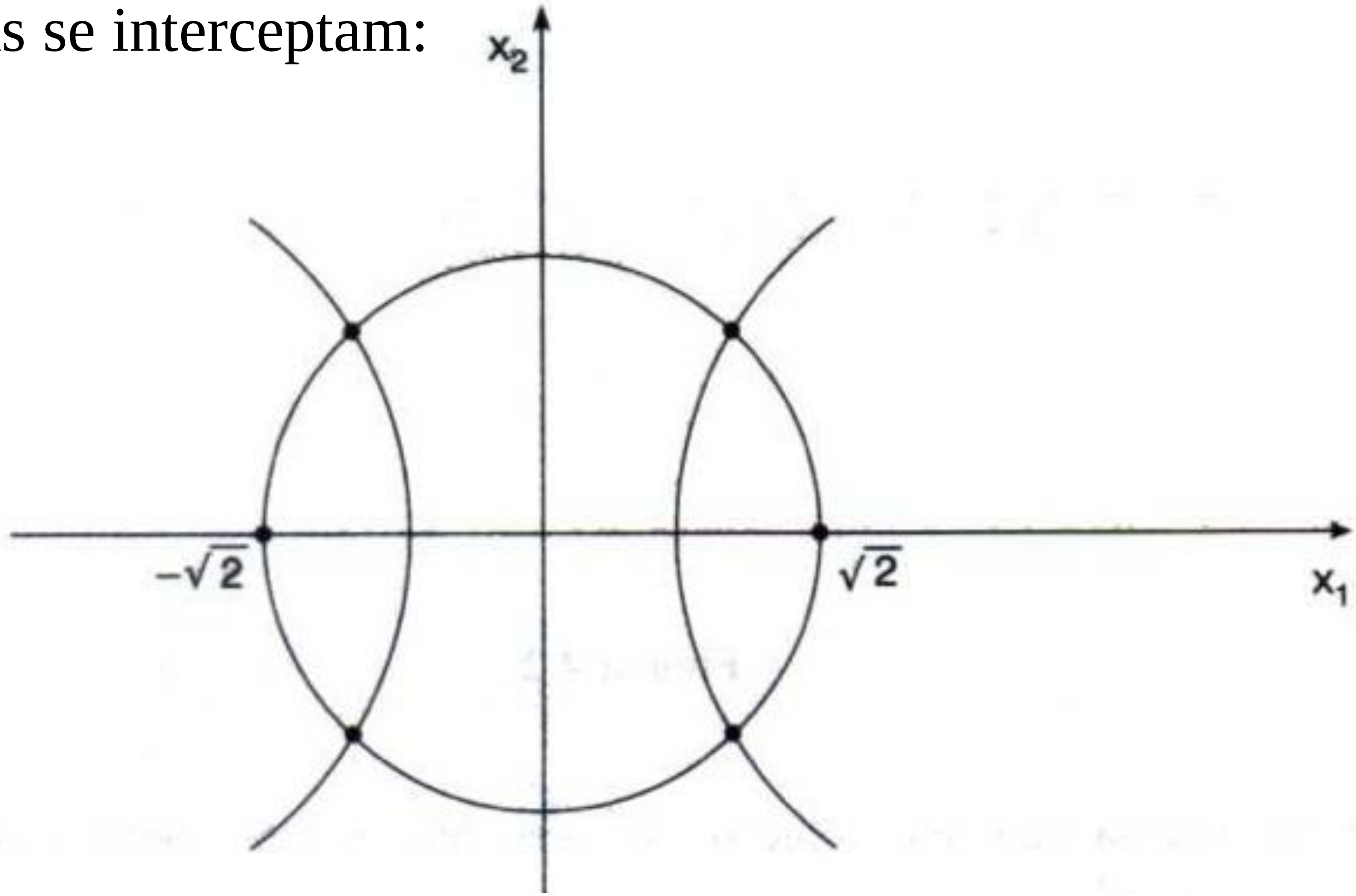
onde cada f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ é uma função real de n variáveis reais.

EXEMPLOS

- Exemplo 1:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - \dfrac{x_2^2}{9} - 1 = 0 \end{cases}$$

- Este sistema admite 4 soluções, que são os pontos onde as curvas se interceptam:

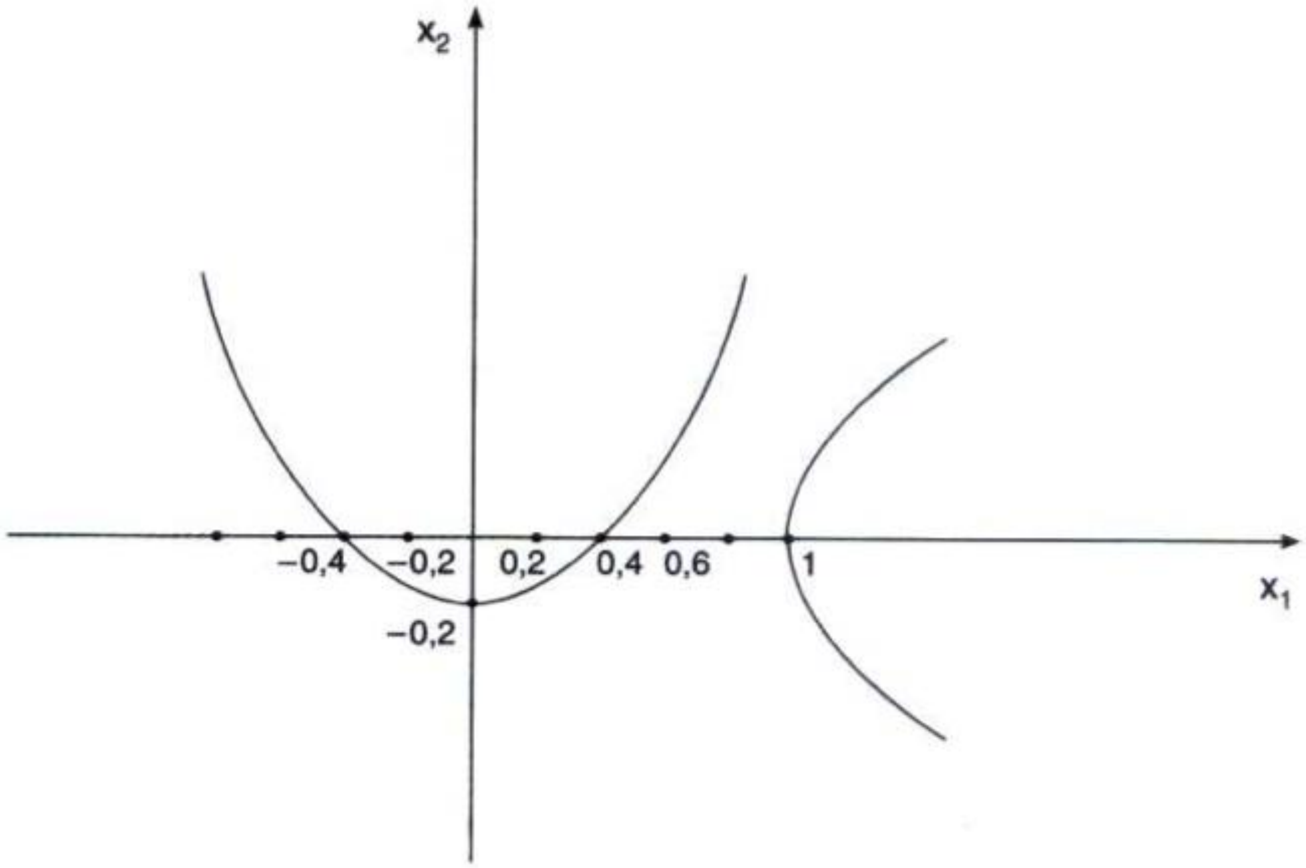


EXEMPLOS

- Exemplo 2:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 0{,}2 = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

- Este sistema não tem solução, ou seja, não existem pontos onde as curvas se interceptam:



- Vamos usar a seguinte notação:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad F(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

Cada função $f_i(x)$ é uma função não linear em x.

Vetor gradiente

- O vetor das derivadas parciais da função $f_i\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ é denominado **vetor gradiente** de $f_i\ (x)$ e será denotado por:

$$\nabla f_i(x) = \left[\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_2} \quad \ldots \quad \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_n} \right]$$

Matriz Jacobiana

- A matriz das derivadas parciais de $F(x)$ é chamada **matriz Jacobiana** e será denotada por:

$$J(x)=\begin{bmatrix}\nabla f_1(x)\\ \nabla f_2(x)\\ \vdots\\ \nabla f_n(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

Exemplo 3

- Para o sistema de equações não lineares abaixo, obtenha a matriz Jacobiana:

$$\begin{cases} x_1^3 - 3x_1 x_2^2 + 1 = 0 \\ 3x_1^2 x_2 - x_2^3 = 0 \end{cases}$$

MÉTODO DE NEWTON

MÉTODO DE NEWTON

- O método mais amplamente estudado e conhecido para resolver sistemas de equações não lineares é o **Método de Newton**.
- Para uma única equação não-linear, vimos que, pelo Método de Newton-Raphson, tínhamos:

$$\boxed{f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0}$$

- Ampliando para um sistema de equações não lineares:

$$\boxed{f_i\left(x^{(k)}\right) + \nabla f_i\left(x^{(k)}\right)\left(x - x^{(k)}\right) = 0,\ i = 1, \cdots, n}$$

MÉTODO DE NEWTON

- Logo, para $F\ (x)$, teremos:

$$\boxed{F\left(x^{(k)}\right)+J\left(x^{(k)}\right)\left(x-x^{(k)}\right)=0}$$

ou ainda:

$$\boxed{J\left(x^{(k)}\right)\left(x-x^{(k)}\right)=-F\left(x^{(k)}\right)}$$

MÉTODO DE NEWTON

- Se denotarmos $(x - x^{(k)})$ por $s^{(k)}$, temos que:

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}}$$

onde s é a solução do sistema linear:

$$\boxed{J\left(x^{(k)}\right)s^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)}$$

MÉTODO DE NEWTON

- Portanto, uma iteração de Newton requer basicamente:

  - A avaliação da matriz Jacobiana em $x^{(k)}$;
  - A resolução do sistema linear:

$$\boxed{J\left(x^{(k)}\right)s^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)}$$

e por esses motivos, cada iteração é considerada computacionalmente cara.

CRITÉRIO DE PARADA

- Um critério de parada consiste em verificar se todas as componentes de $F(x^{(k)})$ têm módulo pequeno.
- Como $F(x^{(k)})$ é um vetor do R^n, verificamos se a norma vetorial do máximo é menor que o erro:

$$\boxed{\left\| F\left(x^{(k)}\right) \right\|_M < \varepsilon_s}$$

- Outro critério é verificar se:

$$\boxed{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_M < \varepsilon_s}$$

CRITÉRIO DE PARADA

- A norma vetorial do máximo é denotada por:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_M$$

- E definida como:

$$\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_M = \max_{i=1,\cdots,n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|$$

- Para se detectar a divergência e interromper o processo de cálculos, podemos estabelecer um número máximo de iterações, ou ainda, interromper se, para algum k, a norma do máximo de $F\ (x^{(k)})$ for maior que uma tolerância, por exemplo:

$$\boxed{\left\| F\left(x^{(k)}\right) \right\|_M > 10^{20}}$$

- Sob condições adequadas, a sequência gerada pelo Método de Newton tem convergência quadrática.

Exemplo 4

- Aplicar o Método de Newton à resolução do sistema não linear $\boldsymbol{F(x)} = 0$, onde $\boldsymbol{F(x)}$ é dada por:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{pmatrix}$$

- As soluções são: $x^* = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x^{**} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

- Use: $e = 10^{-4}$ e $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

- Para diminuir o custo computacional, podemos modificar o Método de Newton, fazendo com que a cada iteração k, a matriz $J(x^{(0)})$ seja utilizada, ao invés de $J(x^{(k)})$.
- Assim, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$, teremos a solução do sistema linear:

$$\boxed{J\left(x^{(0)}\right)s^{(k)} = -F\left(x^{(k)}\right)}$$

- e a matriz Jacobiana é avaliada apenas uma vez, para todo k.

MÉTODO DE NEWTON MODIFICADO

- Se usarmos fatoração LU para resolver o sistema linear, calcularemos apenas uma vez os fatores L e U e, a partir da segunda iteração, será necessário resolver apenas os sistemas triangulares.

- **DESVANTAGEM:** Perde-se a propriedade de taxa quadrática de convergência e em lugar consegue-se apenas taxa linear.

Exemplo 5

- Resolva o sistema do Exemplo 4 usando o Método de Newton Modificado.

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{pmatrix}$$

- Use: $e = 10^{-4}$ e $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Referências

- BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise numérica**. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2008. xiii, 721 p. ISBN 8522106010.

- RUGGIERO, Marcia A. Gomes; LOPES, Vera Lucia da Rocha. **Cálculo numérico:** aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo, SP: Makron, c1997. xvi, 406 p. ISBN 8534602042.

- CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. **Métodos numéricos para engenharia**. 5. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2008. 809 p. ISBN 978-85-86804-87-8.