ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ HENON–HEILES

1 . Εισαγωγή

Το δυναμικό Henon – Heiles συναντάται σε προβλήματα αστροφυσικής , βιοφυσικής και υδροδυναμικής . Επίσης συναντάται σε προβλήματα χημικών αντιδράσεων όπου x(t), y(t) παριστάνουν τις συγκεντρώσεις των αντιδρώντων ουσιών συναρτήσει του χρόνου . Τέλος το παραπάνω δυναμικό μπορεί να συναντηθεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα δύο διαστάσεων .

Το δυναμικό αυτό είναι της μορφής

$$U = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + ax^2 y + bxy^2 - c(x^3 + y^3) \qquad (1)$$

Η αντίστοιχη Χαμιλτωνία παριστάνει την ολική ενέργεια του συστήματος . Άρα θα είναι της μορφής

$$H = E_{\kappa\iota\nu} + E_{\delta\upsilon\nu} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + U$$

Όμως $\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 = \left(\frac{P_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{P_y}{m}\right)^2$ οπου υ_x , υ_y , P_x , P_y οι συνιστώσες της

ταχύτητας και της ορμής αντίστοιχα .

Άρα

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + ax^2 y + bxy^2 - c\left(x^3 + y^3\right) \qquad (2)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση Χάμιλτων – Γιακόμπι θα είναι της μορφής

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, y, P_x, P_y\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + ax^2 y + bxy^2 - c\left(x^3 + y^3\right) = 0$$

Όμως για τις ορμές ισχύει

$$P_x = \frac{\partial S}{\partial x} \quad , \quad P_y = \frac{\partial S}{\partial y}$$

Άρα η εξίσωση Χάμιλτων – Γιακόμπι παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + ax^2 y + bxy^2 - c\left(x^3 + y^3\right) = 0 \qquad (3)$$

Πρόκειται για μια μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης , μη γραμμική , με τρείς μεταβλητές (x , y , t) , λύση της οποίας είναι η S = S(x , y , t) που καλείται κύρια συνάρτηση του Χάμιλτων ή δράση . Οι μεταβλητές (x , y) παριστάνουν τις συντεταγμένες της θέσεως ενώ η μεταβλητή t το χρόνο . Η θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων [1] μας λέει ότι η λύση της (3) ανάγεται στην λύση του χαρακτηριστικού συστήματος αυτής , το οποίο είναι το εξής

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m} \qquad (4) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m} \qquad (5)$$

$$\frac{dP_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x - 2axy - by^2 + 3cx^2 \qquad (6)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -m\omega^2 y - 2bxy - ax^2 + 3cy^2 \qquad (7)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) - ax^2 y - bxy^2 + c\left(x^3 + y^3\right) \qquad (9)$$

Η σχέση (8) μάς λέει ότι όταν η Χαμιλτωνία δεν εξαρτάται ρητώς από τον χρόνο , τότε αυτή διατηρείται σταθερή ως προς τον χρόνο . Επειδή η Χαμιλτωνία παριστάνει την ολική ενέργεια ενός φυσικού συστήματος , θεωρείται ότι φυσικά συστήματα στα οποία συμβαίνει αυτό , διατηρούν την ενέργεια τους , και ονομάζονται συντηρητικά .

Στα συντηρητικά συστήματα η εξίσωση Χάμιλτων - Γιακόμπι δέχεται είδικες λύσεις χωριζομένων μεταβλητών της μορφής

$$S(x, y, t) = W(x, y) + F(t) \qquad (10)$$

Η εξίσωση (3) λόγω της (10) γίνεται

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + ax^2 y + bxy^2 - c\left(x^3 + y^3\right) = -\frac{dF}{dt} = E$$

$$\frac{dF}{dt} = -E \qquad (11)$$

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + ax^2 y + bxy^2 - c\left(x^3 + y^3\right) = E \qquad (12)$$

Άρα η εξίσωση Χάμιλτων - Γιακόμπι δέχεται ειδικές λύσεις της μορφής

$$S(x,y,t)=W(x,y)-Et \tag{13}$$

Η επίλυση του χαρακτηριστικού συστήματος , καθώς και η εύρεση της ειδικής λύσης των χωριζομένων μεταβλητών , δεν είναι εύκολη υπόθεση , λόγω της μη γραμμικότητας των εξισώσεων . Πρός απλούστευση της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι , θεωρούμε τις περιπτώσεις όπου κάποιες από τις σταθερές α , b , c , είναι μηδέν . Οι περιπτώσεις είναι οι εξής :

(i) α = 0 , b = 0 , c = 0
(ii) α = 0 , b $\neq$ 0 , c = 0
(iii) α = 0 , b = 0 , c $\neq$ 0
(iv) α = 0 , b $\neq$ 0, c $\neq$ 0
(v) α $\neq$ 0 , b = 0 , c = 0
(vi) α $\neq$ 0 , b $\neq$ 0 , c = 0
(vii) α $\neq$ 0 , b = 0 , c $\neq$ 0
(viii) α $\neq$ 0 , b $\neq$ 0 , c $\neq$ 0

Από την παραπάνω διερεύνηση προκύπτουν οκτώ δυναμικά τα οποία είναι υποπεριπτώσεις του δυναμικού Henon-Heiles . Η περίπτωση (i) ειναι γνωστή εφ' όσον πρόκειται για τον απλό αρμονικό ταλαντωτή . Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση (iii) , στην οποία είναι δυνατόν να ευρεθούν λύσεις , τόσο του χαρακτηριστικού συστήματος , όσο και της εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών Χάμιλτων – Γιακόμπι , όπως θα δείξουμε στην § 3 . Επίσης μπορούν να ευρεθούν λύσεις της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι και στην περίπτωση (viii) οταν , α = b = -3 c , οπως θα δειξουμε στην § 2 .

Μια επιπλέον απλοποίηση που μπορεί να γίνει στον τύπο του δυναμικού Henon – Heiles είναι αυτή που προκύπτει με παράλειψη του όρου x^3 και θέτωντας b = 0 , δηλαδή

$$U=\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+ax^2y-cy^3$$

Για το παραπάνω δυναμικό έχουν βρεθεί λύσεις [2] της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι σε δύο περιπτώσεις , i) α = 1 , c = 1/3 και ii) α =1 , c = -2 . Επίσης είναι δυνατόν να ευρεθούν λύσεις της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι και στην περίπτωση όπου α = - 3 c όπως θα δείξουμε στην § 4 . Οι υπόλοιπες περιπτώσεις της διερεύνησης παραμένουν ανοιχτές ως αντικείμενο έρευνας .

2. Μελέτη της περίπτωσης α = b = - 3 c .

Όταν α = b = - 3 c ο τύπος του δυναμικού Henon – Heiles παίρνει την μορφή

$$U = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{a}{3}(x+y)^3 \qquad (1)$$

η αντίστοιχη Χαμιλτωνία έχει την μορφή

$$H = \frac{1}{2m}\left(P_x^2 + P_y^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{a}{3}(x+y)^3 \qquad (2)$$

και η αντίστοιχη εξίσωση Χάμιλτων – Γιακόμπι παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{a}{3}(x+y)^3 = 0 \qquad (3)$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα είναι το εξής

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_x} = \frac{P_x}{m} \qquad (4) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_y} = \frac{P_y}{m} \qquad (5)$$

$$\frac{dP_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x - a(x+y)^2 \qquad (6)$$

$$\frac{dP_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -m\omega^2 y - a(x+y)^2 \qquad (7)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) - \frac{a}{3}(x+y)^3 \qquad (9)$$

Από τις εξισώσεις (4) , (5) , (6) και (7) έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \frac{a}{m}(x+y)^2 \qquad (10)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y - \frac{a}{m}(x+y)^2 \qquad (11)$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό z = x + y , w = x – y (12)

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (10) και (11) έχουμε

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 z - \frac{2a}{m} z^2 \qquad (13)$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = -\omega^2 w \qquad (14)$$

Πολαπλασιάζουμε την (13) με $\frac{dz}{dt}$ άρα

$$\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega^2 \frac{dz}{dt} z - \frac{2a}{m}\frac{dz}{dt} z^2$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{dt}\right)^2}{dt} = -\frac{\omega^2}{2}\frac{dz^2}{dt} - \frac{2a}{3m}\frac{dz^3}{dt}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω εξίσωση και παραλείπωντας την σταθερά ολοκλήρωσης χωρίς βλάβη της γενικότητας , έχουμε

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dz}{dt}\right)^2 = -\omega^2 z^2 - \frac{2a}{3m} z^3 \qquad \text{ή} \qquad \frac{dz}{dt} = \pm\left(-\frac{4a}{3m} z^3 - \omega^2 z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$dz = \pm\left(-\frac{4a}{3m} z^3 - \omega^2 z^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \qquad \text{ή} \qquad \int_{z_0}^{z}\left(-\frac{4a}{3m} z^3 - \omega^2 z^2\right)^{\frac{1}{2}} dz = t + t_0$$

$$F(z) - F(z_0) = t + t_0 \qquad \text{ή} \qquad F(z) = t + C_1$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $\qquad u = \left(-\frac{4a}{3m} z - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Άρα $\qquad u^2 = -\frac{4a}{3m} z - \omega^2 \qquad$ ή $\qquad z = -\frac{3m}{4a}\left(u^2 + \omega^2\right) \quad$ και $\quad dz = -\frac{3m}{2a} u du$

Άρα $\qquad F(z) = \int \frac{2}{\omega^2 + u^2} du = \frac{2}{\omega}\arctan\frac{u}{\omega} = \frac{2}{\omega}\arctan\frac{\left(-\frac{4a}{3m} z - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\omega}$

Άρα $$\frac{2}{\omega}\arctan\frac{\left(-\frac{4a}{3m}z-\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\omega}=t+C_1 \quad \text{ή} \quad z=-\frac{3m\omega^2}{4a}\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right) \qquad (15)$$

Η εξίσωση (14) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης , λύση της οποίας είναι η εξής :

$$w=c_2\cos\omega t+c_3\sin\omega t \qquad (16)$$

Από τις εξισώσεις (15) και (16) και λόγω του μετασχηματισμού (12) έχουμε

$$x(t)=-\frac{3m\omega^2}{8a}\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right)+C_2\cos\omega t+C_3\sin\omega t \qquad (17)$$

$$y(t)=-\frac{3m\omega^2}{8a}\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right)-C_2\cos\omega t-C_3\sin\omega t \qquad (18)$$

όπου $C_2=\frac{c_2}{2}$ και $C_3=\frac{c_3}{2}$

Οι εξισώσεις (17) και (18) μάς δίνουν την γενική λύση των συντεταγμένων της θέσεως. Με παραγώγιση των παραπάνω εξισώσεων έχουμε τις ταχύτητες, οι οποίες είναι οι εξής :

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{3m\omega^3}{8a}\tan\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right)\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right)-C_2\omega\sin\omega t+C_3\omega\cos\omega t \qquad (19)$$

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{3m\omega^3}{8a}\tan\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right)\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t+C_1)\right)+C_2\omega\sin\omega t-C_3\omega\cos\omega t \qquad (20)$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (17) , (18) , (19) και (20) στην εξίσωση (9) προκύπτει η συνάρτηση $\frac{dS}{dt} = \Lambda$ που δεν είναι άλλη από την συνάρτηση του Λαγκράνζ , του φυσικού συστήματος . Στην συνέχεια με ολοκλήρωση της συνάρτησης του Λαγκράνζ προκύπτει η συνάρτηση $S(t, C_1, C_2, C_3)$, η οποία δεν είναι ακόμη η επιθυμητή λύση της εξίσωσης (3) . Η εύρεση της λύσης $S = S(x, y, t)$ επιτυγχάνεται δι' απαλειφής των σταθερών C_1, C_2, C_3 από την συνάρτηση $S(t, C_1, C_2, C_3)$. Προς τούτο θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων (17) και (18) , ως ένα σύστημα με αγνώστους τις σταθερές C_1, C_2, C_3 . Το εν λόγω σύστημα έχει άπειρες λύσεις , άρα άπειρες λύσεις θα έχει και η εξίσωση Χάμιλτων – Γιακόμπι . Λόγω της πολύπλοκης μορφής της συνάρτησης $S(t, C_1, C_2, C_3,)$ και κατ'επέκταση της συνάρτησης $S(x, y, t)$ δεν θα ασχοληθούμε με την εύρεση αυτών , στην παρούσα εργασία .

3. Μελέτη της περίπτωσης α = b = 0 και c ≠ 0

Όταν $a = b = 0$ και $c \neq 0$ ο τύπος του δυναμικού Henon – Heiles παίρνει την μορφή

$$U = \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) - c\left(x^3 + y^3\right) \tag{1}$$

Η αντίστοιχη Χαμιλτωνία είναι της μορφής

$$H = \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) - c\left(x^3 + y^3\right) \tag{2}$$

και η αντίστοιχη εξίσωση Χάμιλτων – Γιακόμπι παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right) + \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) - c\left(x^3 + y^3\right) = 0 \tag{3}$$

Α. Λύση χωριζομένων μεταβλητών

Όπως δείξαμε στην § 1 , η γενική μορφή της λύσης χωριζομένων μεταβλητών θα είναι της μορφής

$$S(x,y,t)=W(x,y)-Et$$

όπου η συνάρτηση $W(x,y)$ προσδιορίζεται από την μερική διαφορική εξίσωση (12) της §1 , που στην περίπτωση $a=b=0$ και $c\neq 0$ παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)-c\left(x^3+y^3\right)=E \tag{5}$$

Η εξίσωση (5) είναι χωριζομένων μεταβλητών . Άρα δέχεται λύσεις της μορφής

$$W(x,y)=f(x)+g(y) \tag{6}$$

Η εξίσωση (5) λόγω της εξίσωσης (6) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{dg}{dy}\right)^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)-c\left(x^3+y^3\right)=E \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\frac{m\omega^2}{2}x^2-cx^3=E-\frac{1}{2m}\left(\frac{dg}{dy}\right)^2-\frac{m\omega^2}{2}y^2+cy^3=M$$

Άρα $\qquad \dfrac{df}{dx}=\pm\left(M-2mE+2mcx^3-m^2\omega^2x^2\right)$

και $$\frac{dg}{dy} = \pm\left(-M + 2mcy^3 - m^2\omega^2 y^2\right)$$

Με ολοκλήρωση των θετικών λύσεων έχουμε

$$f(x) = \int \left(2mcx^3 - m^2\omega^2 x^2 + M - 2mE\right)^{\frac{1}{2}} dx = I(x)$$

$$g(y) = \int \left(2mcy^3 - m^2\omega^2 y^2 - M\right)^{\frac{1}{2}} dy = J(y)$$

Τα ολοκληρώματα $I(x), J(y)$ είναι ελλειπτικά [3] . Εάν επιλέξουμε τιμές για τις σταθερές , M και M – 2mE , τέτοιες ώστε να μηδενίζονται , δηλαδή M = E = 0 , τότε τα ολοκληρώματα μετατρέπονται σε ψευδοελλειπτικά , και το σύστημα γίνεται υπερσυντηρητικό [4] . Στην περίπτωση αυτή τα ολοκληρώματα παίρνουν την μορφή

$$I(x) = \int \left(2mcx - m^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}} x dx \quad \text{και} \quad J(y) = \int \left(2mcy - m^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}} y dy$$

Θέτω $h = \left(2mcx - m^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}$ αρα $x = \frac{h^2}{2mc} + \frac{m\omega^2}{2c}$ και $dx = \frac{h}{mc} dh$

Άρα $$I(x) = \frac{1}{2m^2c^2}\left(\int h^4 dh + m^2\omega^2 \int h^2 dh\right) = \frac{1}{2mc}\left(\frac{h^5}{5} + m^2\omega^2 \frac{h^3}{3}\right)$$

Άρα $$I(x) = \frac{1}{2m^2c^2}\left(2mcx - m^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{5}\left(2mcx - m^2\omega^2\right) + \frac{m^2\omega^2}{3}\right) \qquad (7)$$

Το ολοκλήρωμα $J(y)$ είναι ακριβώς ίδιο άρα

$$J(y)=\frac{1}{2m^2c^2}\left(2mcy-m^2\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{5}\left(2mcy-m^2\omega^2\right)+\frac{m^2\omega^2}{3}\right) \qquad (8)$$

Η σχέση (4) λόγω των σχέσεων (7) , (8) και της συνθήκης Ε = 0 παίρνει την μορφή

$$S(x,y,t)=S(x,y)=I(x)+J(y)$$

η οποία είναι η ειδική λύση χωριζομένων μεταβλητών της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι , όταν το φυσικό σύστημα είναι υπερσυντηρητικό .

Στην περίπτωση όπου $M \neq 0$ και $M \neq 2mE$ ο υπολογισμός των ελλειπτικών ολοκληρωμάτων γίνεται με την χρήση του Mathematica , το οποίο δίνει τα εξής αποτελέσματα

$$I(x)=\left[\frac{1}{15c}\left(-m\left(-2cx^3+2E+m\omega^2x^2\right)+M\right)^{\frac{1}{2}}\left(6cx-m\omega^2+\frac{k}{\lambda}\right)\right] \qquad (9)$$

όπου $k=-2m^3\omega^4\left(x-x_2\right)\left(\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[EllipticE(\phi,\mu)-x_1EllipticF(\phi,\mu)+\right.$

$\left.+m^3\omega^4x_3EllipticE(\phi,\mu)+9c(2mE-M)EllipticF(\phi,\mu)\right]$

όπου $\lambda=\left(\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-m\left(-2cx^3+2E+m\omega^2x^2\right)+M\right)$

όπου $\phi=\arcsin\left(\frac{x-x_3}{x_2-x_3}\right)^{\frac{1}{2}}$ και όπου $\mu=\frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$

όπου EllipticE και EllipticF είναι τα ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα . Επίσης όπου x_1, x_2, x_3 οι ρίζες του πολυωνύμου , $2mcx^3 - m^2\omega^2 x^2 + M - 2mE$.

Και $$J(y) = \frac{1}{15c}\left[\left(-m\left(-2cy^3 + m\omega^2 y^2\right) + M\right)^{\frac{1}{2}}\left(6cy - m\omega^2 + \frac{k_1}{\lambda_1}\right)\right] \quad (10)$$

όπου

$$k_1 = 2m^3\omega^4 M(y - y_2)\left(\frac{y - y_3}{y_2 - y_3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{y - y_1}{y_3 - y_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left[EllipticE(\phi_1, \mu_1) - y_1 EllipticF(\phi_1, \mu_1) + \right.$$

$$\left. + m^3\omega^4 y_3 EllipticE(\phi_1, \mu_1) + 9cEllipticF(\phi_1, \mu_1)\right]$$

όπου $$\lambda_1 = \left(\frac{y - y_2}{y_3 - y_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-m\left(-2cy^3 + m\omega^2 y^2\right) + M\right)$$

όπου $\phi_1 = \arcsin\left(\frac{y - y_3}{y_2 - y_3}\right)^{\frac{1}{2}}$ και όπου $\mu_1 = \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_3}$

επίσης όπου y_1, y_2, y_3 οι ρίζες του πολυωνύμου , $2mcy^3 - m^2\omega^2 y^2 - M$.

Άρα η σχέση (4) λόγω των σχέσεων (6) , (9) , (10) μας δίνει την μορφή της συνάρτησης $S(x, y, t)$, η οποία είναι η λύση των χωριζομένων μεταβλητών της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι .

Β. Επίλυση του χαρακτηριστικού συστήματος

Το χαρακτηριστικό σύστημα της εξίσωσης Χάμιλτων – Γιακόμπι (3) είναι το εξής :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{P_x}{m} \qquad (11) \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = \frac{P_y}{m} \qquad (12)$$

$$\frac{dP_x}{dt} = -m\omega^2 x + 3cx^2 \qquad (13) \qquad\qquad \frac{dP_y}{dt} = -m\omega^2 y + 3cy^2 \qquad (14)$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \qquad (15)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right) - \frac{m\omega^2}{2}\left(x^2 + y^2\right) + c\left(x^3 + y^3\right) \qquad (16)$$

από τις σχέσεις (11) , (12) , (13) , και (14) έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x + \frac{3c}{m}x^2 \qquad (17) \qquad \text{και} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y + \frac{3c}{m}y^2 \qquad (18)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (17) και (18) δέχοναι λύσεις (βλέπε § 2) της μορφής

$$x(t) = \frac{m\omega^2}{2c}\sec^2\left(\frac{\omega}{2}\left(t + C_1\right)\right) \qquad (19)$$

$$y(t) = \frac{m\omega^2}{2c}\sec^2\left(\frac{\omega}{2}\left(t + C_2\right)\right) \qquad (20)$$

με παραγώγιση των σχέσεων (19) και (20) έχουμε τις ταχύτητες οι οποίες είναι οι εξής :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m\omega^3}{2c}\tan\left(\frac{\omega}{2}\left(t + C_1\right)\right)\sec^2\left(\frac{\omega}{2}\left(t + C_1\right)\right) \qquad (21)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{m\omega^3}{2c}\tan\left(\frac{\omega}{2}(t+C_2)\right)\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t+C_2)\right) \tag{22}$$

Με αντικατάσταση των εξισώσεων (19) , (20) , (21) και (22) στην εξίσωση (16) προκύπτει η συνάρτηση του Λαγκράνζ , του φυσικού συστήματος . Στην συνέχεια με ολοκλήρωση της συνάρτησης του Λαγκράνζ προκύπτει η συνάρτηση $S(t,C_1,C_2)$, η οποία δεν είναι ακόμη η επιθυμητή λύση της εξίσωσης (3) . Η εύρεση της $S(x,y,t)$ επιτυγχάνεται δι’ απαλειφής των σταθερών C_1,C_2 από την συνάρτηση $S(t,C_1,C_2)$. Προς τούτο θεωρούμε το σύστημα των εξισώσεων (19) και (20) , ως ένα σύστημα με αγνώστους τις σταθερές C_1,C_2 , η λύση του οποίου είναι η εξής :

$$C_1=\frac{2}{\omega}arc\sec\left(\frac{2cx}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}-t \qquad \text{και} \qquad C_2=\frac{2}{\omega}arc\sec\left(\frac{2cy}{m\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}-t$$

Λόγω της πολύπλοκης μορφής της συνάρτησης $S(t,C_1,C_2)$ και κατ’ επέκταση της συνάρτησης $S(t,x,y)$ δεν θα ασχοληθούμε με την εύρεση αυτών , στην παρούσα εργασία .

4. Μελέτη της περίπτωσης α = - 3 c , b = 0 χωρίς τον όρο x^3

Όταν α = - 3 c ο τύπος του δυναμικού Henon – Heiles παίρνει την μορφή

$$U=\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+ay\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right) \tag{1}$$

η αντίστοιχη Χαμιλτωνία είναι της μορφής

$$H=\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+ay\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right) \tag{2}$$

και η αντίστοιχη εξίσωση Χάμιλτων – Γιακόμπι είναι της μορφής

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)+ay\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right)=0 \qquad (3)$$

Το χαρακτηριστικό σύστημα της (3) είναι το εξής :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{P_x}{m} \qquad (4) \qquad\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{P_y}{m} \qquad (5)$$

$$\frac{dP_x}{dt}=-m\omega^2 x-2axy \qquad (6) \qquad\qquad \frac{dP_y}{dt}=-m\omega^2 y-ax^2-ay^2 \qquad (7)$$

$$\frac{dH}{dt}=0 \qquad (8)$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right)-\frac{m\omega^2}{2}\left(x^2+y^2\right)-ay\left(x^2+\frac{y^2}{3}\right) \qquad (9)$$

Από τις εξισώσεις (4) , (5) , (6) και (7) έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2 x-\frac{2a}{m}xy \qquad (10)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2 y-\frac{a}{m}\left(x^2+y^2\right) \qquad (11)$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $z=x+y \;\; , \;\; w=x-y$ (12)

Προσθέτωντας τις εξισώσεις (10) και (11) έχουμε

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z - \frac{a}{m} z^2 \qquad (13)$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = -\omega^2 w + \frac{a}{m} w^2 \qquad (14)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις (13) και (14) δέχονται λύσεις (βλέπε §.2) της μορφής

$$z = -\frac{3m\omega^2}{2a} \sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t + C_1)\right) \qquad (15)$$

$$w = \frac{3m\omega^2}{2a} \sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t + C_2)\right) \qquad (16)$$

Ο μετασχηματισμός (12) λόγω των σχέσεων (15) και (16) μάς δίνει τις συντεταγμένες της θέσεως $x(t)$, $y(t)$.

Αρα $$x(t) = \frac{3m\omega^2}{4a}\left(\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t + C_2)\right) - \sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t + C_1)\right)\right) \qquad (17)$$

και $$y(t) = -\frac{3m\omega^2}{4a}\left(\sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t + C_1)\right) - \sec^2\left(\frac{\omega}{2}(t + C_2)\right)\right) \qquad (18)$$

Λόγω της πολύπλοκης μορφής των εκφράσεων δεν θα ασχοληθούμε με την εύρεση της κύριας συνάρτησης του Χάμιλτων .

****

****

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] R. Courant. D. Hilbert , Methods in Mathematical Physics. Vol. II , Intersience , New York 1962 και Ε. Ιωαννίδου , Θέματα Μαθηματικής Φυσικής.

[2] V. Ravonson , L. Gavrilov, R. Caboz : “ Separability and Lax pairs for Henon – Heiles system ’’ , J. Math. Phys. 34 No. 6 , June 1993.

[3] H. Ioannidou, “ Probability Densities in Configuration Space and the Hamilton – Jacobi Equation ’’ International Journal of Theoretical Physics, Vol. 34 No. 1, 1995.

[4] Abramowitz – Stegeu, Handbook of Mathematical Functions.

****