ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΣΧΟΛΙΑ :

Είναι γνωστό ότι για μια συνεχή συνάρτηση f(t) σε ένα διάστημα Δ , το ολοκλήρωμα $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$ ορίζει έναν πραγματικό αριθμό όπου x_0 είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ και α ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό όμως σημείο του Δ.

Αν τώρα σε κάθε σημείο x_0 του Δ αντιστοιχίσουμε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ, τιμές στο R και τύπο $F(x)=\int_a^{x} f(t)dt$.

Στον τύπο αυτής της συνάρτησης , με το x συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της , ενώ με το t την μεταβλητή ολοκλήρωσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Έστω μια συνεχή συνάρτηση f(t) σε ένα διάστημα Δ , με x_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ και α ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό όμως σημείο του Δ . Τότε η συνάρτηση όπως ορίσθηκε παραπάνω

$F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για κάθε χ του Δ ισχύει:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)=f(t) \quad (1)$$

Μέσα από το θεώρημα αυτό φαίνεται η σχέση μεταξύ της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης .

Επίσης βλέπουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f είναι παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης F που είναι και αυτή συνεχής. Η συνεχής αυτή συνάρτηση f ορίζει με μοναδικό τρόπο την παραγωγίσιμη συνάρτηση F χωρίς να ισχύει το αντίστροφο (διότι για κάθε σταθερά c του R ισχύει (F(x)+c)΄ =f(x)) .

Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι : $\int\limits_a^x f(t)dt \neq \int\limits_\beta^x f(t)dt$ (αφού εκφράζουν διαφορετικά εμβαδά στο καρτεσιανό επίπεδο). Όμως ισχύει :

$$\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int\limits_\beta^x f(t)dt\right)=f(t)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο θεώρημα όπως παρακάτω :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση και g παραγωγίσιμη στο Δ τότε η

$F(x)=\int\limits_a^{g(x)} f(t)dt$, $\alpha\in\Delta$, $g(\chi)\in\Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

F΄(x)=f(g(x))·g΄(x) .

Απόδειξη : Αν $H(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow H'(x)=f(x)$ και H(g(x))=F(x) $\Rightarrow$

(H(g(x)))΄=F΄(x) $\Rightarrow$ f(g(x))g΄(x)=F΄(x) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1 :

I. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, x∈R τότε να βρεθεί η τιμή της F΄΄ στη θέση x=1 στην περίπτωση που είναι f(1)=995 και f΄(1)=5 .

II. Αν είναι f(x) > 0 και $(f^2(x))'>0$ για κάθε x > 0 τότε : Να αποδειχθεί ότι F΄(1995) > F΄(1994)

Να βρεθούν οι τιμές του K, K > 6 / 5 για τις οποίες αληθεύει η ισότητα : $\int_0^{K^2} f(t)dt+K^2 f(K^2)=\int_0^{5K-6} f(t)dt+(5K-6)\cdot f(5K-6)$

ΑΣΚΗΣΗ 2 :

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln[(e^x-1)/x]$, x > 0

- Να αποδειχθεί ότι :f(x) > 0
- Να υπολογισθεί το $\lim_{x\to+\infty}\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

- Να παραγωγιθεί η συνάρτηση $F(x)=\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

ΑΣΚΗΣΗ 3 :

Δίνεται η συνάρτηση : $F(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{4-t^2}\,dt$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

ΑΣΚΗΣΗ 4 :

1. Να βρεθεί ο τύπος μιας συνεχούς συνάρτησης f που ικανοποιεί την ισότητα : F(x)=x με $F(x)=\int_{0}^{x}(8t-4)f(4t^2-4t)dt$ για κάθε x < 0
2. Αν για την ταχύτητα U(t) ενός κινητού που κινείται πάνω σε ένα άξονα συντεταγμένων είναι U(t)=f(t) σε m/sec , να βρεθεί το διάστημα που διανύει το κινητό από τη χρονική στιγμή t=3sec μέχρι τη στιγμή t=15sec .

ΑΣΚΗΣΗ 5 :

Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε έναν άξονα συντεταγμένων με επιτάχυνση $\gamma(t)=4\ /\ (4-t)^2$ cm/sec^2.

Να υπολογισθεί το διάστημα που διανύει το σωματίδιο μεταξύ των χρονικών στιγμών t=1sec , t=2sec αν είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t=0sec είναι 2cm / sec .