ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα εργασία εντάσσεται στην περιοχή των C* -Αλγεβρών και γίνεται στα πλαίσια Διπλωματικής εργασίας που αφορά στο Δ.Π.Μ.Σ. «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες».

Αρχικά στο Κεφάλαιο 1 θα αναφέρουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και ορισμούς που απαιτούνται για την παρουσίαση και κατανόηση των επομένων κεφαλαίων. Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα μελετήσουμε τα θετικά στοιχεία των C*-αλγεβρών και θα δείξουμε ότι το σύνολο των θετικών στοιχείων μιας C* - άλγεβρας είναι ένας κλειστός κώνος. Επίσης θα μελετήσουμε ορισμένες ιδιότητες των ιδεωδών μιας C*-άλγεβρας καθώς και την έννοια της C*- άλγεβρας πηλίκο. Τέλος θα παρουσιάσουμε ορισμένα εισαγωγικά στοιχεία για τις αναπαραστάσεις C* - αλγεβρών για τις οποίες θα γίνει εκτενέστερη αναφορά στο Κεφάλαιο 3.

Στο Κεφάλαιο 2 θα αποδείξουμε βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα ιδεώδη και τους ομομορφισμούς C^* - αλγεβρών. Αν μια C^* - άλγεβρα δεν έχει μονάδα τότε θεωρούμε την $A_1 = A \times C$ η οποία είναι C^* -άλγεβρα με μονάδα (βλ. Εισαγωγή, ορισμό 4). Στις περιπτώσεις όμως που η προσάρτηση της μονάδας δεν είναι λειτουργική θα χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική μονάδα (approximate unit). Οπως π.χ. στην απόδειξη της πρότασης που μας λέει ότι κάθε κλειστό ιδεώδες μιας C^* - άλγεβρας είναι αυτοσυζυγές. Ως προσεγγιστική μονάδα κάθε C*- άλγεβρα δέχεται ένα αύξων δίκτυο θετικών στοιχείων που ανήκουν στην κλειστή μοναδιαία μπάλα της A. Η χρήση του δικτύου ως προσεγγιστικής μονάδας μιας C*- άλγεβρας γίνεται στις περιπτώσεις όπου η χρήση της ακολουθίας δεν επαρκεί. Έτσι εισάγουμε μια πιο γενική έννοια, αυτή του δικτύου. Επίσης θα μελετήσουμε την σύνδεση των θετικών γραμμικών συναρτησιακών με τα κλειστά ιδεώδη μιας C^* - άλγεβρας A (ιδιαιτέρα τα αριστερά) καθώς επίσης και μια ιδιαίτερη κλάση C^* - υπαλγεβρών, οι οποίες ονομάζονται κληρονομικές (Hereditary).

Τέλος στο Κεφάλαιο 3 θα μελετήσουμε τη σχέση των αναπαραστάσεων, των θετικών γραμμικών συναρτησιακών και των ιδεωδών μιας C^* - άλγεβρας A. Επίσης θα μελετήσουμε τη σχέση των αναπαραστάσεων και των ιδεωδών στις C*-άλγεβρες πηλίκο. Θα δούμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των γνήσια καταστάσεων και των πρότυπων μεγιστικών αριστερών ιδεωδών. Τέλος θα μελετήσουμε τα πρώτα και πρωταρχικά ιδεώδη μιας C*-άλγεβρας και αφού ορίσουμε την έννοια της πρωταρχικής C*-άλγεβρας, θα παρουσιάσουμε ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν τις άλγεβρες αυτές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ C*- ΑΛΓΕΒΡΩΝ

§ 1. Εισαγωγικές Έννοιες

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Έστω A μια προσεταιριστική μιγαδική Άλγεβρα. Αν η A είναι εφοδιασμένη με μια νόρμα $\| \ \|$, ως προς την οποία είναι πλήρης (χώρος Banach) λέγεται Νομική Άλγεβρα (Normed Algebra). Αν επιπλέον ισχύει :

1) $\|\alpha\beta\| \leq \|\alpha\|\|\beta\| \quad \forall\ \alpha,\beta \in$ A

2) Αν η A έχει μονάδα e ,τότε $\|e\|$ = 1

τότε η A λέγεται Banach άλγεβρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Έστω S$\neq\emptyset$ ένα σύνολο και ℓ^{∞}(S) το σύνολο όλων των φραγμένων μιγαδικών συναρτήσεων επί του S. Με τις πράξεις :

1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

2) $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$

3) $(\lambda\cdot f)(x)=\lambda\cdot f(x)$

και με supremum νόρμα $\|f\| = \sup_{x\in S}|f(x)|$ είναι μια Banach άλγεβρα με μονάδα και μάλιστα αντιμεταθετική.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Έστω $\bar{D}$ ο μοναδιαίος κλειστός δίσκος και A(D) το σύνολο όλων των συνεχών επί του $\bar{D}$ και αναλυτικών στον ανοιχτό δίσκο D συναρτήσεων. Η A(D) είναι μια υπάλγεβρα της άλγεβρας C($\bar{D}$) όλων των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων επί του $\bar{D}$ και είναι μια άλγεβρα Banach.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Έστω A μια άλγεβρα Banach. Μια απεικόνιση `` * `` : A→ A θα λέγεται ενέλιξη αν :

1) (a + b)* = a* + b*
2) (λa)* = $\bar{\lambda}$ a*
3) (a b)* = b* a*
4) a** = a

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Μια άλγεβρα Banach εφοδιασμένη με μια ενέλιξη `` * `` θα λέγεται C^* - άλγεβρα αν επιπλέον ισχύει :

$$\|\alpha\alpha^*\| = \|\alpha\|^2 \quad (C^* \text{ - συνθήκη })$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Έστω Η ένας χώρος Hilbert και B(H) το σύνολο των φραγμένων τελεστών επί του Η. Για κάθε A $\in$B(H) υπάρχει μοναδικός τελεστής A^* $\in$ B(H) τέτοιος ώστε $\langle Ax,y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ $\forall$ x,y $\in$H.

Η απεικόνιση `` *`` : A→ A^* είναι μια ενέλιξη στον B(H) και κάθε κλειστή * - υπάλγεβρα B του B(H) είναι μια C^* - άλγεβρα. (* - υπάλγεβρα σημαίνει $\forall$ A$\in \mathscr{A}$ έχουμε A* $\in$ $\mathscr{A}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 : Έστω X ένας συμπαγής χώρος Haussdorff και η άλγεβρα Banach C(X) όλων των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων επί του X. Η απεικόνιση $f \to f^* = \overline{f}$ είναι μια ανέλιξη στην C(X) την οποία κάνει C* - άλγεβρα, με μονάδα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 : (Άλγεβρα Banach με ενέλιξη, η οποία δεν είναι C* - άλγεβρα) Έστω $\overline{D}$ ο μοναδιαίος κλειστός δίσκος και A(D) το σύνολο όλων των συνεχών επί του $\overline{D}$ και αναλυτικών στον ανοιχτό δίσκο D συναρτήσεων. Η A(D) είναι μια υπάλγεβρα της άλγεβρας C($\overline{D}$) όλων των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων επί του $\overline{D}$ και είναι μια άλγεβρα Banach. Αν εφοδιάσουμε την παραπάνω άλγεβρα με την ενέλιξη $f \mapsto f^*$: $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ δεν προκύπτει C* - άλγεβρα, αφού για παράδειγμα $\|f\, f^*\| = 1 \neq \|f\|^2$, όταν $f(z) = e^{iz}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : Έστω A μια C* - άλγεβρα χωρίς μονάδα και έστω

$\widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \times C$, όπου C το σύνολο των μιγαδικών αριθμών, με πράξεις :

1. (α, λ) + (β, μ) = (α + β, λ + μ)

2. κ (α, λ) = (κ α, κ λ) , κ∈C

3. (α, λ)* = (α*, $\overline{\lambda}$) , κ∈C

4. (α, λ) (β, μ) = (α β + λ β + μ α, λ μ)

Η $\widetilde{\mathrm{A}}$ είναι C* - άλγεβρα με μονάδα , το στοιχείο (0, 1) είναι μονάδα στην $\widetilde{\mathrm{A}}$ και η απεικόνιση $\alpha \to (\alpha, 0)$ είναι αλγεβρικός ισομορφισμός της A στην $\widetilde{\mathrm{A}}$.

Σχόλιο :Η νόρμα στην $\widetilde{\mathrm{A}}$ είναι : $\|(\alpha, \lambda)\|_1 = \sup_{\|x\| \le 1} \|ax + \lambda x\|$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : Έστω A μια C^* - άλγεβρα με μονάδα e, ορίζουμε ως φάσμα του στοιχείου $\alpha \in A$ το σύνολο :

$$\sigma_A(\alpha) = \{\lambda \in C: \lambda e\text{-}\alpha \text{ δεν αντιστρέφεται στην } A\}$$

και ως φασματική ακτίνα τον αριθμό :

$$r(a) = \max\{|\lambda| / \lambda \in \sigma_A(a)\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης)
Έστω A μια C^* - άλγεβρα με μονάδα e, και P ένα μιγαδικό πολυώνυμο τότε :

$$\sigma(\mathrm{P}(\alpha)) = \{\mathrm{P}(\lambda) / \lambda \in \sigma_A(a)\} = \mathrm{P}(\sigma_{\mathrm{A}}(\alpha)).$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : Έστω X διανυσματικός χώρος και Y διανυσματικός υπόχωρος του X. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον X:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in Y,$$

Έστω [x] η κλάση ισοδυναμίας με αντιπρόσωπο το x. O χώρος πηλίκο X/Y είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας με πράξεις :

1. [x] + [y] = [x+y].

2. λ[x] = [λx].

Αν επιπλέον εφοδιάσουμε τον X/Y με την νόρμα :

$$\|[x]\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\|,$$

τότε ο X/Y είναι χώρος Banach.

Σχόλια :

— Αν A είναι Banach άλγεβρα και I κλειστό ιδεώδες της A τότε η A/I είναι Banach άλγεβρα.

— Αν A είναι C*- άλγεβρα και I κλειστό ιδεώδες της A τότε η A/I είναι C* - άλγεβρα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : Έστω Α μια C*- άλγεβρα **,** ένα στοιχείο $\alpha \in$ A λέγεται :

1. Αυτοσυζυγές (self-adjoint) αν : α = α*.
2. Φυσιολογικό (normal) αν : α α* = α* α.
3. Ορθομοναδιαίο (unitary) αν : α α* = α* α = e.
4. Προβολή (projection) αν : α = α* = α ^{2}.

§2.Θετικά στοιχεία C^*- αλγεβρών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Αν Α είναι C^* - άλγεβρα και α $\in$ A το στοιχείο Α ονομάζεται θετικό αν α = α* και $\sigma_A(\alpha) \subseteq [0, +\infty)$. Αν α θετικό τότε συμβολίζουμε α ≥ 0 και A^+ το σύνολο των θετικών στοιχείων της Α.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Αν Α είναι C^* - άλγεβρα και a, b αυτοσυζυγή στοιχεία αυτής τότε a $\leq$ b αν και μόνο αν b-a $\in A^+$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Αν Α = C(X) τότε f είναι θετικό στην Α αν και μόνο αν f(x) ≥ 0 $\forall$ x$\in$X.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Αν Α= L^∞(μ) και f$\in$ L^∞(μ) τότε f ≥ 0 αν και μόνο αν f(x) ≥ 0 σχεδόν παντού.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Αν Α είναι C^*- άλγεβρα και α αυτοσυζυγές στοιχείο αυτής τότε υπάρχουν μοναδικά θετικά στοιχεία u,v $\in$ A τέτοια ώστε α = u – v και uv = vu = 0.

Απόδειξη : Έστω $f(t) = \max(t,0)$ και $g(t) = -\min(t,0)$. Τότε $f, g \in C(\Re)$ και

$$f(t) - g(t) = t$$

Έστω $u = f(a)$ και $v = g(a)$ τότε u, v είναι αυτοσυζυγή στοιχεία και από το ‘‘Θεώρημα φασματικής απεικόνισης ’’ έχουμε $u, v \geq 0$. Επίσης $u - v = f(a) - g(a)$ και $uv = vu = (gf)(a) = 0$ αφού $fg \equiv 0$.

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα θεωρούμε $u_1, v_1 \in A^+$ τέτοια ώστε $u_1 - v_1 = a$ και $u_1 v_1 = v_1 u_1 = 0$. Έστω $\{p_n\}$ ακολουθία πολυωνύμων τέτοια ώστε $p_n(0) = 0$ για κάθε n και $p_n(t) \xrightarrow{n \to \infty} f(t)$ ομοιόμορφα στο σ(α). Άρα έχουμε $p_n(a) \to u$ όπου $u \in A$, όμως $u_1 a = a u_1$ άρα $u_1 p_n(a) = p_n(a) u_1$ για κάθε n. Συνεπώς $u_1 u = u u_1$. Άρα τα στοιχεία α, u, u_1, v_1 και v είναι ζεύγη αντιμεταθετικών ερμητιανών στοιχείων της A. Έστω B η C^*- άλγεβρα που παράγεται από τα στοιχεία α, u, u_1, v_1 και v. Η B είναι αβελιανή. Άρα B $\cong C(\Sigma)$ όπου Σ ο μεγιστικός χώρος ιδεωδών της B. Η μοναδικότητα των στοιχείων u, v προκύπτει από την μοναδικότητα του $C(\Sigma)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: Αν α θετικό στοιχείο μιας C^*- άλγεβρας A και ν≥ 1 όπου ν θετικός ακέραιος τότε υπάρχει μοναδικό β θετικό , β $\in$ A τέτοιο ώστε α = β^ν.

Σχόλια : — Η ανάλυση α = u – v ενός αυτοσυζυγούς στοιχείου α ονομάζεται ορθογώνια ανάλυση του α. Τα στοιχεία u,v ονομάζονται θετικό και αρνητικό μέρος του α, αντίστοιχα και συμβολίζουμε u = α_+ και v = α_-,($\alpha_- > 0$).

— Αν $\alpha \in A^+$ τότε το μοναδικό στοιχείο b της προηγούμενης πρότασης ονομάζεται ν - οστή ρίζα του α και συμβολίζεται $b = a^{\frac{1}{n}}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3: Αν A είναι C^*- Άλγεβρα τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

1) α ≥ 0.

2) α = β^2 για κάποιο β / β = β^*.

3) α = $\chi \chi^*$ για κάποιο $\chi \in$ A.

4) α = α^* και $\|\tau - \alpha\| \leq \tau$ για κάθε τ $\geq$ $\|\alpha\|$.

5) α = α^* και $\|\tau - \alpha\| \leq \tau$ για τυχόν τ $\geq$ $\|\alpha\|$.

Απόδειξη: (5) $\to$ (1). Αφού α = α*, C*(α) είναι αβελιανή. Αν X = σ(α) , X $\subseteq \Re$ και $f \mapsto f(a)$ είναι *- ομομορφισμός του C(X) στον C*(a) , τότε από το παραπάνω σχόλιο έχουμε x > 0, για κάθε $x \in X$ άρα $X = \sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$ άρα α > 0.

(3) $\to$(1) . Αν α = x* x για κάποιο $x \in A$ τότε α = α*. Έστω α = u – v όπου u, v > 0 και $vu = uv = 0$. Θα δείξουμε ότι v = 0. Αν $xv^{1/2} = b + ic$ όπου $b, c \in A_{sa}$ τότε :

$$(xv^{\frac{1}{2}})^*(xv^{\frac{1}{2}}) = (b - ic)(b + ic) = b^2 + c^2 + i(bc - cb)$$

Όμως,

$$(xv^{1/2})^*(xv^{1/2}) = v^{1/2}x^*xv^{1/2} = v^{1/2}(u - v)v^{1/2} = -v^2 .$$

Από την μοναδικότητα των στοιχείων του καρτεσιανού επιπέδου έχουμε :

$$b^2 + c^2 = -v^2 \text{ και } bc = cb.$$

Συνεπώς η C*- άλγεβρα B που παράγεται από τα b, c είναι αβελιανή. Άρα αν

$$\lambda \in \sigma(b^2 + c^2),$$

τότε υπάρχει ομομορφισμός $h : B \to C$ τέτοιος ώστε $\lambda = h(b^2 + c^2) = h^2(b) + h^2(c)$,

και αφού $h(b), h(c) \in \Re$, έχουμε $\lambda \geq 0$, άρα $b^2 + c^2 \in A^+$.
Όμως $-(b^2 + c^2) = v^2$ άρα $v^2 \in (-A^+)$, συνεπώς $v^2 \in A^+ \cap (-A^+)$ και από την επόμενη πρόταση έχουμε $v^2 = 0$. Και επειδή $v \geq 0$ έχουμε v = 0.

Σχόλιο : — Αν X είναι συμπαγές και $f \in C(X)^+$ τότε $|f(x) - t| \leq t$ για κάθε $t \geq \|t\|$. Αντιστρόφως αν $|f(x) - t| \leq t$ για τυχόν $t \geq \|t\|$, τότε $f(x) \geq 0, \ \forall x \in X$ και συνεπώς $f \geq 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4: Το σύνολο των θετικών στοιχείων της A , C*- άλγεβρας είναι ένας κλειστός κώνος.

Απόδειξη: Έστω $\{\alpha_n\} \subseteq -A^+$ και έστω $a_n \to a$, τότε $a \in A_{sa}$ και από το (4) του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε :

$$\left\| a_n - \|a_n\| \right\| \le \|a_n\| \ \Rightarrow \left\| a - \|a\| \right\| \le \|a\|$$

Και από το (5) του προηγούμενου θεωρήματος έχουμε $\alpha \geq 0$. Αν $\alpha \geq 0$ και $\lambda \geq 0$ τότε $\lambda\alpha \geq 0$.

Έστω $\alpha, b \in A_+$ θα δείξουμε ότι $a+b \geq 0$. Έχουμε,

$$\left\| 1 - \frac{1}{2}(a+b) \right\| = \frac{1}{2}\left\| (1-a) + (1-b) \right\| \le 1$$

Άρα $\frac{1}{2}(a+b) \geq 0$.

Αν $a \in A^+ \cap (-A^+)$ τότε α = α* και σ(α) ={0}, όμως $\|a\| = r(a) = 0 \Rightarrow a = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : Αν H ένας χώρος Hilbert και A $\in$ B(H) τότε A ≥ 0 αν και μόνο αν $\langle \mathrm{A}h, h \rangle \geq 0 \ \ \forall \ h \in$ H.

Απόδειξη: Έστω A$\geq$0 τότε A = T* T για τυχόν T$\in$B(H), άρα $\langle \mathrm{A}h, h \rangle = \|\mathrm{T}h\|^2 \geq 0$.

Αντιστρόφως αν $\langle \mathrm{A}h, h \rangle \geq 0 \ \ \forall$ h $\in$ H τότε A* = A και απομένει να δείξουμε ότι $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$.

Αν $h \in H$ και $\lambda < 0$ τότε,

$$\|(A-\lambda)h\|^2 = \|Ah\|^2 - 2\lambda\langle Ah, h \rangle + \lambda^2\|h\|^2$$

$$\geq -2\lambda\langle Ah, h \rangle + \lambda^2\|h\|^2$$

$$\geq \lambda^2\|h\|^2.$$

Αφού $\lambda < 0$ και $\langle \mathrm{A}h, h \rangle \geq 0 \ \ \forall \ h \in$ H.

Όμως $\lambda \notin \sigma_{\alpha p}(A)$ το οποίο συνεπάγεται ότι ο A-λ είναι αριστερά αντιστρέψιμος και επειδή A-λ είναι αυτοσυζυγής, είναι και δεξιά αντιστρέψιμος άρα $\lambda \notin \sigma$(A) συνεπώς A $\geq$0.

§3.Ιδεώδη και Πηλίκα C*- Αλγεβρών

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 : Αν A είναι C^* - άλγεβρα , I κλειστό ιδεώδες αυτής και α$\in$I όπου α αυτοσυζυγές τότε αν :

$$f \in C(\sigma(\alpha)) \text{ και } f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) \in I.$$

Απόδειξη: Αν I είναι γνήσιο ιδεώδες τότε 0$\in$σ(α) αφού το α δεν μπορεί να είναι αντιστρέψιμο. Αφού $\sigma(a) \subseteq \Re$ από το 'θεώρημα Weiestrass' συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\{p_n\}$ των πολυωνύμων τείνει ομοιόμορφα στην f(t) για t$\in$σ(α). Άρα $p_n(0) \rightarrow f(0) = 0$. Όμως $q_n(t) = p_n(t) - p_n(0) \rightarrow f(t)$ ομοιόμορφα στο σ(α) και $q_n(0) = 0 \ \ \forall n \in N$. Άρα $q_n(a) \in I$ συνεπώς,

$$\|q_n(a) - f(a)\| \rightarrow 0$$

άρα f(α) $\in$ I.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2 : Αν A είναι C^* - άλγεβρα, I κλειστό ιδεώδες αυτής και α$\in$I όπου α αυτοσυζυγές τότε :

$$\alpha_+, \ \alpha_- \ \in I.$$

Σχόλιο : Αν I είναι αριστερό ιδεώδες της A τότε {α*/α $\in$ I} είναι δεξί ιδεώδες της A. Συνεπώς ένα αριστερό ιδεώδες της A είναι ιδεώδες της A αν α* $\in$I , $\forall \alpha \in$I.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Αν A είναι C^* - άλγεβρα, I κλειστό ιδεώδες αυτής τότε:

$$\alpha \in I \Rightarrow \alpha^* \in I.$$

Απόδειξη : Αν α∈I τότε και α* α∈I αφού το I είναι ιδεώδες. Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία {u_n} συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[0,+\infty)$ τέτοια ώστε :

i) $u_n(0) = 0$ και $u_n(t) > 0$ για κάθε t.

ii) $\|\alpha u_n(a^*a)-a\| \to 0 \quad ,n \to +\infty$.

Τότε σύμφωνα με την παραπάνω ακολουθία έχουμε $u_n(a^*a) \geq 0$ και $u_n(a^*a) \in I$ από την προηγούμενη πρόταση. Επίσης $u_n(a^*a)a^* \in I$ αφού I είναι ιδεώδες και από το ii) έχουμε :

$$\|u_n(a^*a)\alpha^* - a^*\| \to 0 \quad ,n \to +\infty$$

Συνεπώς α* ∈I για κάθε α∈I. Απομένει να κατασκευάσουμε την παραπάνω ακολουθία. Έχουμε,

$$\|\alpha u_n(a^*a)-a\|^2 = \|[\alpha u_n(a^*a)-a]^*[au_n(a^*a)-a]\|$$

$$= \|u_n(a^*a)a^*au_n(a^*a) - a^*au_n(a^*a) - u_n(a^*a)a^*a + a^*a\|$$

Αν b = a* a τότε η ισότητα $bu_n(b) = u_n(b)b$ μας δίνει :

$$\|\alpha u_n(a^*a)-a\|^2 = \|f_n(b)\| \leq \sup\{|f_n(t)| \quad / \quad t \geq 0\},$$

όπου $f_n(t) = tu_n(t)^2 - 2tu_n(t) + t = t[u_n(t)-1]^2$.

Αν $u_n(t) = nt$ για $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ και $u\ (t) = 1$ για $t \geq \frac{1}{n}$ τότε,

$$\sup\{|f_n(t)| \quad / \quad t \geq 0\} = \frac{4}{27n} \to 0, \qquad n \to \infty$$

και συνεπώς οι συνθήκες της ακολουθίας ικανοποιούνται.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4 : Αν Α είναι C^* - άλγεβρα , Ι ιδεώδες αυτής τότε $\forall \alpha \in \mathrm{I}$ υπάρχει ακολουθία $\{e_n\}$ θετικών στοιχείων στο Ι τέτοια ώστε :

i) $e_1 \le e_2 \le \ldots$ και $\|e_n\| = 1 \quad \forall n \in \aleph$.

ii) $\|ae_n - a\| \to 0, \quad n \to \infty$.

Σχόλιο : Η ακολουθία της παραπάνω πρότασης εξαρτάται από το στοιχείο $\alpha \in \mathrm{A}$. Επίσης υπάρχει αύξων δίκτυο $\{e_i\}$ θετικών στοιχείων στο Ι τέτοιο ώστε :

$$\|ae_i - a\| \to 0 \quad \text{και} \quad \|e_i a - a\| \to 0, \qquad \forall a \in \mathrm{I}.$$

ΛΗΜΜΑ 5 : Αν Α είναι C^* - άλγεβρα , Ι ιδεώδες αυτής και $\alpha \in \mathrm{A}$ τότε :

$$\|a + I\| = \inf \{\|a - ax\| : x \in I, x \ge 0, \|x\| \le 1\}.$$

Απόδειξη : Αν B_I η μπάλα του Ι, τότε $B_I^+ = \{x \in B_I \,/\, x > 0\}$. Επίσης έχουμε :

$$\|a + I\| \le \inf \{\|a - ax\| : x \in B_{I^+}\} \text{ όπου } \alpha \mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}. \quad (1)$$

Έστω $y \in \mathrm{I}$ και έστω $\{e_n\}$ ακολουθία στοιχείων του B_I^+ τέτοια ώστε,

$$\|y - ye_n\| \to 0 \quad \text{για} \quad n \to \infty.$$

Όμως,

$$\|(a + y)(1 - e_n)\| \le \|a + y\|$$

άρα,

$$\|a + y\| \ge \lim \inf \|(a + y)(1 - e_n)\|$$

$$= \liminf \|(a - ae_n) + (y - ye_n)\|$$

$$= \liminf \|(a - ae_n)\|$$

αφού $\|y - ye_n\| \to 0$.

Δηλαδή,

$$\|a + y\| \geq \inf \|(a - ae_n)\| \geq \inf \{\|a - ax\| / x \in B_{I^+}\}.$$

Άρα,

$$\|a + I\| \geq \inf \{\|a - ax\| : x \in I, x \geq 0, \|x\| \leq 1\}. \qquad (2)$$

Από τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : Αν A είναι C^* - άλγεβρα , I κλειστό ιδεώδες αυτής τότε $\forall a + \mathrm{I} \in \mathrm{A}/\mathrm{I}$ ορίζουμε $(a + I)^* = a^* + I$. Η A / I είναι C^* - άλγεβρα με την νόρμα – πηλίκο.

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι $\|a + I\|^2 = \|\alpha * \alpha + \mathrm{I}\|, \quad \forall \alpha \in \mathrm{A}$.

Έστω $x \in \mathrm{I}$ τότε,

$$\|a + x\|^2 = \|(\alpha + x) * (\alpha + x)\|$$

$$= \|a * a + a * x + x * a + x * x\|$$

$$\geq \inf\{ \|a * a + y\| / y \in I \}$$

$$= \|\alpha * \alpha + \mathrm{I}\| \qquad (1)$$

αφού,

$$a * x + x * a + x * x \in I, \qquad \forall x \in I.$$

Από την άλλη το προηγούμενο λήμμα μας δίνει,

$$\|a + I\|^2 = \inf \{\|a - ax\|^2 : x \in \mathrm{B}_{\mathrm{I}^+}\}$$

$$= \inf \left\{ \|a(1-x)\|^2 : x \in \mathrm{B}_{\mathrm{I}^+} \right\}$$

$$= \inf \left\{ \|(1-x)a^* a(1-x)\| : x \in \mathrm{B}_{\mathrm{I}^+} \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \|a^* a(1-x)\| : x \in \mathrm{B}_{\mathrm{I}^+} \right\}$$

$$\leq \inf \left\{ \|a^* a - a^* ax)\| : x \in \mathrm{B}_{\mathrm{I}^+} \right\}$$

$$= \|\alpha^* \alpha + \mathrm{I}\|. \qquad (2)$$

Από τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει η ισότητα,

$$\|a + I\|^2 = \|\alpha^* \alpha + \mathrm{I}\|, \qquad \forall \alpha \in \mathrm{A}.$$

Σχόλιο: Έστω A, B είναι C^* - άλγεβρες με ιδεώδη I, J αντίστοιχα και έστω $\rho : A \to B$ * - ομομορφισμός τέτοιος ώστε $\rho(I) \subseteq J$ τότε ο P επάγει έναν *-ομομορφισμό $\widetilde{\rho} : A/\mathrm{I} \to B/J$, $\widetilde{\rho}(\alpha + \mathrm{I}) = \rho(\alpha) + J$.
Αν επιπλέον I = Kerρ τότε $\widetilde{\rho} : A/Ker\rho \to B$ είναι * - ομομορφισμός και $\widetilde{\rho} o \pi = \rho$ όπου $\pi : A \to \mathrm{A}/Ker\rho$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : Αν A, B είναι C^* - άλγεβρες και $\rho : A \to B$ * - ομομορφισμός τότε $\|\rho(a)\| \leq \|a\|$ και το ran ρ είναι κλειστό στο B. Αν $\rho : A \to B$ * - μονομορφισμός τότε η ρ είναι ισομετρία.

Απόδειξη : Αν το $x \in A$ έχει αντίστροφο στην A τότε το $\rho(x^{-1})$ είναι το αντίστροφο του $\rho(x\ )$ στην B, άρα $\rho(x\ )\rho(x^{-1}) = \rho(1) = 1$. Συνεπώς για $\lambda \in \rho_A(\alpha) = C - \sigma_A(a)$ και για $x = \lambda e - a$ έχουμε $\rho_{\mathrm{A}}(\alpha) \subseteq P_B(\rho(\alpha))$ ή $\sigma_{\mathrm{B}}(\rho(\alpha)) \subseteq \sigma_{\mathrm{A}}(\alpha)$ δηλαδη, $r_{\mathrm{B}}(\rho(\alpha)) \leq r_{\mathrm{A}}(\alpha) \leq \|a\|$ (1).
Όμως επειδή η B είναι C^* - άλγεβρα έχουμε :

$$\| \ \rho(\alpha) \ \|^2 = \| \ \rho(\alpha)\rho(\alpha)^*\| = \| \ \rho(\alpha)\rho(\alpha^*)\| = \| \ \rho(\alpha\alpha^*)\|$$

Και επειδή το $\rho(\alpha\alpha^*)$ είναι αυτοσυζυγές στην B έχουμε :

$$\| \ \rho(\alpha) \ \|^2 = r_{\mathrm{B}}\big(\rho(\alpha\alpha^*)\big) \ (2)$$

Αν στην (1) θέσουμε όπου α το α α* έχουμε :

$$r_{\mathrm{B}}\big(\rho(\alpha\alpha^*)\big) \le \|\alpha\alpha^*\| \le \|\alpha\|^2 \ (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε $\|\rho(a)\| \le \|a\|$.

Θα δείξουμε ότι αν ρ είναι * - μονομορφισμός τότε η ρ είναι ισομετρία.

Επειδή $\sigma(\rho(\alpha)) \subseteq \sigma\ (\alpha)$, αν $\sigma(\rho(\alpha)) \ne \sigma(\alpha)$ τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο σ(α) τέτοια ώστε f(t) = 0 για κάθε t $\in$ σ(ρ(α)), χωρίς όμως να είναι η f ταυτοτικά μηδέν στο σ(α). Δηλαδή f (ρ(α)) = 0 όμως f (α) $\ne$ 0.

Έστω επίσης η ακολουθία πολυωνύμων $\{\ P_n\ \}$ τέτοια ώστε :

$$P_n(t) \xrightarrow{unif} f(t) \text{ ομοιόμορφα στο σ(α).}$$

Δηλαδή,

$$P_n(\alpha) \longrightarrow f(\alpha) \text{ και } P_n(\rho(\alpha)) \longrightarrow f(\rho(\alpha)) = 0 .$$

Όμως ,

$$\rho(P_n(\alpha)) \longrightarrow \rho(f(\alpha)) = 0$$

Δηλαδή,

$$f(\rho(\alpha)) = \rho(f(\alpha)) = 0$$

Και επειδή η ρ είναι 1-1 έχουμε $f(\alpha) = 0$.

Άρα αν α = α* τότε $\sigma(\rho(\alpha)) = \sigma\ (\alpha)$ και συνεπώς :

$$\|\alpha\| = r(a) = r(\rho(a)) = \|\rho(\alpha)\|.$$

Όμως τότε για τυχόν $\alpha \in A$ έχουμε :

$$\|\alpha\|^2 = \|\alpha\alpha^*\| = \|\rho(\alpha\alpha^*)\| = \|\rho(\alpha)\rho(\alpha^*)\| = \|\rho(\alpha)\|^2.$$

Άρα ρ – ισομετρία .

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης απομένει να δείξουμε ότι ran ρ είναι κλειστό στο B. Προς τούτο θεωρούμε $\widetilde{\rho} : A / Ker\rho \to B$ * - μονομορφισμός άρα $\widetilde{\rho}$ είναι ισομετρία συνεπώς ran $\widetilde{\rho}$ είναι κλειστό στο B, όμως ran $\widetilde{\rho}$ = ran ρ .

§4. Αναπαραστάσεις C*- Αλγεβρών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Αναπαράσταση μιας C* - άλγεβρας A ονομάζεται το ζεύγος (π, H) όπου H ένας χώρος Hilbert και $\pi : A \to B(\mathrm{H})$ ένας * - ομομορφισμός.

Σχόλιο : Αν η A έχει μονάδα τότε π(1) = 1.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Έστω H ένας χώρος Hilbert και A μια C*-υπάλγεβρα της B(H). Τότε η απεικόνιση $\mathrm{A} \to \mathrm{B}(\mathrm{H})$ είναι μια αναπαράσταση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 : Έστω H ένας χώρος Hilbert και n ένας φυσικός αριθμός, ορίζουμε $\mathrm{H}^{(n)}$ το ευθύ άθροισμα του H με τον εαυτό του n- φορές. Αν $\mathrm{A} \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$ τότε $A^{(n)}$ είναι το ευθύ άθροισμα του A με τον εαυτό του n- φορές και $A^{(n)} \in B(H^{(n)})$, καθώς και $\|A^{(n)}\| = \|A\|$.

Ο τελεστής $A^{(n)}$ ονομάζεται inflation του A. Αν $\pi : A \to B(\mathrm{H})$ είναι αναπαράσταση της A τότε το inflation του π είναι $\pi^{(n)} : A \to B(\mathrm{H}^{(n)})$ και ορίζεται $\pi^{(n)}(a) = \pi(\alpha)^{(n)} \quad , \forall a \in A$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 : Έστω $(\mathrm{X}, \Omega, \mu)$ ένας σ-μετρίσιμος χώρος και $H = L^2(\mu)$ τότε,

$$\pi : L^{\infty}(\mu) \to B(H), \quad \pi(\phi) = \mathrm{M}_{\phi}$$

είναι μια αναπαράσταση του χώρου $L^{\infty}(\mu)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4: Έστω X ένας συμπαγής χώρος και μ θετικό μέτρο Borel στον X τότε,

$$\pi : C(\mathrm{X}) \to B(L^{2}(\mu)), \qquad \pi(f) = \mathrm{M}_{f},$$

είναι μια αναπαράσταση του χώρου $C(\mathrm{X})$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Κυκλική αναπαράσταση ονομάζεται η αναπαράσταση στην οποία υπάρχει ένα διάνυσμα $e \in H$ τέτοιο ώστε $\overline{\pi(A)e} = H$. Το διάνυσμα e ονομάζεται κυκλικό για την αναπαράσταση π.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Αν $\{(\pi_{i}, H_{i}) / \ i \in I\}$ είναι οικογένεια αναπαραστάσεων της A τότε το ευθύ άθροισμα της οικογένειας είναι η αναπαράσταση (π, H) όπου $H = \oplus_{i} H_{i}$ και $\pi(a) = \{\pi_{i}(a)\}, \quad \forall a \in A.$

Σχόλιο : Αφού $\|\pi_{i}(\alpha)\| \leq \|\alpha\|$, $\forall i \in I$ $\pi(a)$ είναι φραγμένος τελεστής στον χώρο Hilbert H.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5: Έστω X ένας συμπαγής χώρος και έστω $\{\mu_n\}$ ακολουθία μέτρων στον X. Τότε υπάρχει,

$$\pi_{n} : C(\mathrm{X}) \to B(L^{2}(\mu_{n})), \qquad \pi_{n}(f) = \mathrm{M}_{f}$$

ώστε,

$$\pi = \oplus_{n} \pi_{n}$$

να είναι αναπαράσταση στον $C(\mathrm{X})$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : Έστω (π_1, H_1) και (π_2, H_2) αναπαραστάσεις της C^* - άλγεβρας A. Οι αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες αν υπάρχει ισομορφισμός $U : H_1 \to H_2$ τέτοιος ώστε :

$$U\pi_1(a)U^{-1} = \pi_2(a), \quad \forall a \in A.$$

Σχόλιο : Η σπουδαιότητα των κυκλικών αναπαραστάσεων έγκειται στο γεγονός ότι μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε αναπαράσταση είναι ισοδύναμη με το ευθύ άθροισμα κυκλικών αναπαραστάσεων (επόμενο θεώρημα).

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Αν π είναι αναπαράσταση της C^* - άλγεβρας A τότε υπάρχει οικογένεια **κυκλικών** αναπαραστάσεων της A τέτοια ώστε π και $\oplus_i \pi_i$ να είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη : Έστω P(E) το δυναμοσύνολο του συνόλου E των μη μηδενικών διανυσμάτων στον H τέτοιων ώστε,

$$\pi(\mathrm{A})e \perp \pi(\mathrm{A})f \ , \quad \forall e, f \in E$$

με $e \neq f$.

Από το λήμμα Zorn έχουμε ότι το P(E) έχει maximal στοιχείο, έστω E_0.

Έστω επίσης,

$$\mathrm{H}_0 = \oplus\left\{\overline{\pi(\mathrm{A})e} / e \in E_0\right\}$$

Αν $h \in H \oplus H_0$ τότε,

$$\langle \pi(\alpha)e, h \rangle = 0 \ , \ \forall a \in A \text{ και } \forall e \in E_0.$$

Άρα αν $a, b \in A$ και $e \in E_0$ τότε,

$$\langle \pi(b^*\alpha)e, h \rangle = \langle \pi(b^*)\pi(\alpha)e, h \rangle = \langle \pi(\alpha)e, \pi(b)h \rangle = 0.$$

Δηλαδή,

$$\pi(\mathrm{A})e \perp \pi(\mathrm{A})h\,, \quad \forall e \in E_0$$

Άρα, $E_0 \cup \{\ h\ \} \in P(E)$, συνεπώς E_0 όχι maximal το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $H = H_0$.

Ορίζουμε,

$$\mathrm{H}_e = \overline{\pi(\mathrm{A})e}, \qquad \forall e \in E_0\,.$$

Αν $\alpha \in A$ τότε,

$$\pi(\alpha)H_e \subseteq H_e\,.$$

Αφού $\alpha^* \in A$ και $\pi(\alpha^*) = \pi(\alpha)^*$ έχουμε,

$$\pi_e : A \to B(H_e)\,, \qquad \pi_e(a) = \pi(\alpha)|\,H_e$$

άρα π_e είναι αναπαράσταση. Δηλαδή,

$$\pi = \oplus\{\pi_e \,/\, e \in E_0\}.$$

Σχόλιο : Ορίζουμε,

$$f : A \to C \quad , \quad f(a) = \langle \pi(\alpha)e, e\rangle$$

Το f είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό και μάλιστα φραγμένο επειδή,

$$\|f\| \le \|e\|^2 \ \text{ και } \ f(1) = \|e\|^2 \ \text{ έχουμε } \ \|f\| = \|e\|^2\,.$$

Επίσης,

$$f(a^*a)=\langle \pi(\alpha^*a)e,e\rangle=\langle \pi(a^*)\pi(\alpha)e,e\rangle=\|\pi(\alpha)e\|^2\geq 0\,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : Αν Α είναι μια C^* - άλγεβρας το γραμμικό συναρτησιακό $f:A\to C$ είναι θετικό αν $f(a)\geq 0\ \ \forall a\in A$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : Αν Α είναι μια C^* - άλγεβρας το θετικό γραμμικό συναρτησιακό $\tau:A\to C$ με νόρμα την μονάδα ονομάζεται κατάσταση της C^* - άλγεβρας Α.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 : Αν Α είναι μια C^* - άλγεβρα και f είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό τότε :

$$|f(y^*x)|^2\leq f(y^*y)f(x^*x)\qquad \forall x,y\in A$$

Απόδειξη : Έστω $\lambda\in C$ τότε έχουμε,

$$f((\lambda x+y)^*(\lambda x+y))=|\lambda|^2 f(x^*x)+\lambda f(y^*x)+\overline{\lambda}f(x^*y)+f(y^*y)\geq 0$$

αφού η f είναι θετική.

Έστω $\lambda=\kappa e^{i\vartheta}$, $\kappa\in\Re$ και $\vartheta=\arg f(y^*x)$ τότε η παραπάνω ανισότητα παίρνει την μορφή,

$$\kappa^2 f(x^*x)+2\kappa|\ f(y^*x)\ |+f(y^*y)\geq 0,\qquad \forall\kappa\in\Re$$

Άρα πρέπει η διακρίνουσα να είναι αρνητική,

$$\Delta=4|\ f(y^*x)\ |-4f(y^*y)f(x^*x)\leq 0,\quad \text{ή}$$

$$|\ f(y^*x)\ |^2\leq f(y^*y)f(x^*x)\ \ \text{(Cauchy- Schwartz ανισότητα)}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3 : Αν Α είναι μια C^* - άλγεβρα και f είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό της Α τότε είναι φραγμένο και $\|f\| = f(1)$.

Απόδειξη : Έστω α$\in$ Α τέτοιο ώστε α = α* και $\|\alpha\| \leq 1$. Τότε $\sigma(\alpha) \subseteq [-1,1]$ και από το Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης έχουμε $\sigma(1-\alpha) \subseteq [0,2]$. Από την πρόταση 2 της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι υπάρχει στοιχείο b$\in$ Α τέτοιο ώστε να είναι αυτοσυζυγές και να ισχύει,

$$b^2 = 1 - a \qquad \alpha, b \in A.$$

Τότε έχουμε,

$$f(1-a) = f(bb^*) \geq 0$$

και συνεπώς,

$$f(a) \leq f(1) \qquad (1)$$

Αν στην ανισότητα της προηγούμενης πρότασης θέσουμε $y^* = 1$ έχουμε,

$$|\ f(x)\ |^2 \leq f(1) f(x^* x)$$

$$\leq f(1)^2 \|xx^*\|$$

$$\leq f(1)^2 \|x\|^2$$

Άρα,

$$|\ f(x)\ | \leq f(1)\|x\|.$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει ότι η f είναι συνεχής και $\|f\| \leq f(1)$.

Όμως,

$$|f(1)| = f(1) \le \|f\|$$

Άρα,

$$\|f\| = f(1).$$

ΛΗΜΜΑ 4 : Αν Α είναι μια C^* - άλγεβρα και f είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό τότε :

$$|f(y^*xy)| \le \|x\| f(y^*y) \quad \forall x, y \in A$$

Απόδειξη : Έστω $g(\alpha) = |f(y^*\alpha y)|$ τότε,

$$g(\alpha^*\alpha) = |f(y^*\alpha^*\alpha y)| = |f((\alpha y)^*\alpha y)| \ge 0$$

άρα η g είναι θετική.

Από το προηγούμενο πόρισμα τα συναρτησιακά f, g είναι φραγμένα άρα έχουμε,

$$g(1) = \|g\| = f(y^*y).$$

Επομένως,

$$|f(y^*xy)| = |g(x)| \le \|g\|\|x\| = \|x\| f(y^*y) \quad \forall x, y \in A.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : (Gelfand – Naimark - Segal κατασκευή)

Για κάθε κατάσταση f μιας C^* - άλγεβρας Α υπάρχει μια αναπαράσταση π_f επί ενός χώρου Hilbert H_f τέτοια ώστε :

$$f(a) = \langle \pi_f(a)\xi, \xi \rangle,$$

όπου $\xi \in H_f$ και $\|\xi\| = 1$.

Απόδειξη : Έστω $N = \{x \in A / f(x^* x) = 0\}$. Στον χώρο πηλίκο Α / Ν ορίζουμε την απεικόνιση,

$$\pi_f(a)[x] = [ax], \qquad \forall [x] \in A/N,$$

από τον Α / Ν στον Α / Ν, η οποία είναι καλά ορισμένη, γιατί το Ν είναι αριστερό ιδεώδες της Α.

Η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική. Θα δείξουμε ότι είναι μια αναπαράσταση της Α επί του H_f.

Έχουμε,

$$\pi_f(a)[x]^2 = \| [ax] \|^2 = f(x^* a^* ax), \qquad \forall [x] \in A/N,$$

από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου.

Όμως από το προηγούμενο λήμμα έχουμε,

$$|f(x^* a^* ax)| = \|a^* a\| f(x^* x) \quad \forall x, a \in A$$

$$\leq \|a\|^2 \langle [x], [x] \rangle$$

$$\leq \|a\|^2 \| [x] \|^2 .$$

Άρα,

$$\| \pi_f(a)[x] \| \leq \| [a] \|$$

και συνεπώς η π_f είναι φραγμένη.

Επίσης έχουμε,

$$\langle \pi_f(a)[x], [y] \rangle = \langle [ax], [y] \rangle = f(y^* ax)$$

$$\langle\, [x]\,, \pi_f(a^*)[y] \,\rangle = \langle\, [x]\,, [\alpha^* y] \,\rangle = f((\alpha^* y)^* x)$$

άρα $\pi_f(a)^* = \pi_f(a^*)$.

Επομένως η απεικόνιση διατηρεί τους συζυγείς άρα είναι αναπαράσταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 : Έστω Α, Β C^* - άλγεβρες και $B \subseteq A$. Αν f_1 είναι μια κατάσταση επί της Β τότε υπάρχει κατάσταση f επί της Α τέτοια ώστε :

$$f|B = f_1.$$

Απόδειξη : Έστω A_{sa} και B_{sa} τα σύνολα των αυτοσυζυγών στοιχείων της Α και Β αντίστοιχα. Έστω $\alpha \in A^+$. Τότε $\|\alpha\| \geq \alpha$ στην Α, και αφού $1 \in B_{sa}$ το σύνολο των αυτοσυζυγών έχει μονάδα.

Αν $f_1 \in S_B$ τότε υπάρχει θετικό γραμμικό συναρτησιακό επί της A_{sa} τέτοιο ώστε,

$$f|B_{sa} = f_1 \quad .$$

Όμως $e \in B$ και $f(e) = f_1(e) = 1$.

Έστω,

$$f(a) = f\left(\frac{a + a^*}{2}\right) + if\left(\frac{a - a^*}{2i}\right)$$

Άρα $f \in S_A$ και συνεπώς $f|B = f_1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7 : Έστω Α μια C^* - άλγεβρα με μονάδα. Τότε το S_A (το σύνολο όλων των καταστάσεων της Α) είναι ασθενώς συμπαγές κυρτό υποσύνολο της Α* και αν $\alpha \in A_+$ τότε :

$$\|\alpha\| = \sup\{f(a)/\ f \in S_A\}.$$

Απόδειξη : Είναι $S_A \subseteq B_{A^*}$, όπου B_{A^*} η μπάλα του Α*. Για να δείξουμε ότι το S_A είναι ασθενώς συμπαγές πρέπει να δείξουμε ότι είναι ασθενώς κλειστό. Το ότι είναι κυρτό είναι προφανές. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί στο Κεφάλαιο 3 με την χρήση δικτύων.

Έστω $\alpha \in A^+$, τότε $\|\alpha\| \geq \sup\{f(a)/\ f \in S_A\}$. Επειδή η Α είναι αβελιανή υπάρχει f_1 μια κατάσταση επί της C*(α) τέτοια ώστε $f_1(\alpha) = \|\alpha\|$. Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι η f_1 είναι ο περιορισμός της f στην Α. Αυτό θα γίνει στην επόμενη πρόταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : Έστω μια C^* - άλγεβρα Α υπάρχει αναπαράσταση π επί της Α ώστε η π να είναι ισομετρία . Αν η Α είναι διαχωρίσιμη τότε μπορούμε να επιλέξουμε τον Η ως διαχωρίσιμο.

Απόδειξη : Έστω F ασθενώς πυκνό υποσύνολο του S_A και έστω,

$$\pi = \oplus\{\pi_f\ /\ f \in F\} \text{ και } H = \oplus\{H_f\ /\ f \in F\}.$$

Έχουμε,

$$\|\alpha\|^2 \geq \|\ \pi\ (a)\ \|^2 = \sup{}_f \|\pi_f(a)\|^2 .$$

Αν e_f είναι κυκλικό διάνυσμα για την π_f τότε,

$$\|e_f\|^2 = \langle\ e_f, e_f\ \rangle\ = \langle \pi_f(1)\, e_f, e_f\ \rangle = f(1) = 1.$$

Άρα,

$$\|\pi_f(\alpha)\|^2 \geq \|\pi_f(\alpha) e_f\|^2 = \langle\ \pi_f(a^* a) e_f, e_f\ \rangle = f(a^* a)$$

και,

$$\|\alpha\|^2 \geq \| \ \pi \ (a) \ \|^2 \geq \sup_f \{f(a^*a)/ f \in F\}.$$

Αφού το F είναι ασθενώς πυκνό στην S_A έχουμε,

$$\sup_f \{f(a^*a)/ f \in F\} = \|a^*a\| = \|a\|^2$$

Άρα η π είναι ισομετρία.

Αν η A είναι διαχωρίσιμη η B_{A^*} είναι συμπαγής μετρικός χώρος, άρα S_A είναι ασθενώς διαχωρίσιμος και συνεπώς το σύνολο F μπορεί να επιλεχθεί αριθμήσιμο.

Αν $f \in F$ τότε $\pi(\mathrm{A})f$ είναι υποσύνολο του H_f, αφού η A είναι διαχωρίσιμη. Άρα H_f είναι διαχωρίσιμος και συνεπώς ο H είναι διαχωρίσιμος.

Σχόλιο : Κάθε διαχωρίσιμη C*-άλγεβρα έχει κυκλική αναπαράσταση η οποία είναι ισομετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΣΤΟΙΧΕΙΑ C*- ΑΛΓΕΒΡΩΝ

§1. Ιδεώδη και πηλίκα C*-αλγεβρών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Έστω D ένα μη κενό σύνολο και μια σχέση $\succ$ η οποία είναι ανακλαστική, μεταβατική και κατευθυνόμενη, δηλαδή $\forall n, m$, $\exists k \in D$ τέτοιο ώστε $k \succ n$ και $k \succ m$. Το ζεύγος $(D, \succ)$ ονομάζεται κατευθυνόμενο σύνολο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Έστω $(D, \succ)$ κατευθυνόμενο σύνολο και έστω X ένα σύνολο διαφορετικό από το κενό. Μια συνάρτηση $S : D \to X$, ονομάζεται δίκτυο στο X και συμβολίζεται με $(S, \succ)$. Η τιμή $S(n)$ συμβολίζεται με S_n .

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Αν A είναι μια C* - άλγεβρα τότε προσεγγιστική μονάδα αυτής ονομάζουμε ένα αύξων δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ θετικών στοιχείων στην κλειστή μοναδιαία μπάλα της A, τέτοιο ώστε:

$$a = \lim_\lambda a u_\lambda = \lim u_\lambda a, \quad \forall a \in A$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Έστω Η ένας χώρος Hilbert με την ορθοκανονική βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Η C* - άλγεβρα K(H) των συμπαγών τελεστών από το Η στο Η, είναι μια άλγεβρα χωρίς μονάδα αφού dimH = ∞. Αν p_n είναι η προβολή στον χώρο που παράγεται από τα διανύσματα $e_1, e_2, ..., e_n$, τότε η αύξουσα ακολουθία (p_n) είναι προσεγγιστική μονάδα για την K(H). Για να το αποδείξουμε αυτό αρκεί να δείξουμε ότι,

$$u = \lim_{n\to\infty} p_n u \qquad \forall u \in F(H)$$

όπου F(H) το σύνολο των τελεστών πεπερασμένης τάξης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : Έστω Α μια C* - άλγεβρα και έστω Λ το σύνολο των θετικών στοιχείων της Α όπου $\|\alpha\| \leq 1$. Το σύνολο Λ είναι ένα άνω κατευθυνόμενο (upwards-directed) σύνολο, δηλαδή αν $\alpha, b \in \Lambda$ τότε υπάρχει $c \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\alpha, b \leq c$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Έστω μια C^* - άλγεβρα Α. Τότε δέχεται προσεγγιστική μονάδα. Αν Λ είναι άνω κατευθυνόμενο σύνολο στοιχείων της Α τέτοιο ώστε:

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathrm{A} / \alpha \in \mathrm{A}_+ \ , \ \|\alpha\| \leq 1\}$$

και $u_\lambda = \lambda, \qquad \forall \lambda \in \Lambda$,

τότε η $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την Α, η οποία ονομάζεται κανονική προσεγγιστική μονάδα.

Απόδειξη : Έστω ένα αύξων δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ θετικών στοιχείων στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του Α. Αρκεί να δείξουμε ότι,

$$\alpha = \lim_{\lambda} \alpha u_\lambda \qquad \forall a \in A.$$

Όμως αφού το Α είναι γραμμική θήκη του Λ αρκεί να δείξουμε ότι,

$$\alpha = \lim_{\lambda} \alpha u_\lambda \qquad \forall a \in \Lambda.$$

Έστω $\alpha \in \Lambda$ και έστω ε > 0. Η αναπαράσταση Gelfand,

$$\phi : C^*(a) \to C_0(\Omega)$$

και η υπόθεση $f = \phi(\alpha)$ μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το

$$K = \{\omega \in \Omega / |f(\omega)| \geq \varepsilon\}$$

είναι συμπαγές, άρα από το λήμμα Urysohn υπάρχει συνεχής συνάρτηση, $g : \Omega \to [0,1]$ με συμπαγές στήριγμα τέτοια ώστε, $g(\omega) = 1 \quad \forall \omega \in K$. Επιλέγουμε δ > 0 τέτοιο ώστε δ < 1 και 1-δ < ε. Τότε έχουμε,

$$\|f - \delta g f\| \leq \varepsilon .$$

Αν $\lambda_0 = \phi^{-1}(\delta g)$ τότε $\lambda_0 \in \Lambda$ και $\|a - u_{\lambda_0} a\| \leq \varepsilon$.

Έστω $\lambda \in \Lambda$ και $\lambda \geq \lambda_0$ τότε,

$$1 - u_\lambda \leq 1 - u_{\lambda_0}$$

και

$$a(1 - u_\lambda)a \leq a(1 - u_{\lambda_0})a .$$

Άρα,

$$\|a - u_\lambda a\|^2 = \left\|(1 - u_\lambda)^{1/2}(1 - u_\lambda)^{1/2} a\right\|^2$$

$$\leq \left\|(1 - u_\lambda)^{1/2} a\right\|^2$$

$$\leq \|a(1 - u_\lambda)a\|^2$$

$$\leq \left\| a\left(1-u_{\lambda 0}\right)a \right\|^2$$

$$\leq \left\| \left(1-u_{\lambda 0}\right)a \right\| \ \leq \varepsilon .$$

Άρα,

$$\alpha = \lim_{\lambda} \alpha u_{\lambda} \qquad \forall a \in \Lambda .$$

Σχόλιο : Αν μια C* - άλγεβρα A είναι διαχωρίσιμη τότε δέχεται ως προσεγγιστική μονάδα μια ακολουθία. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $F_1 \subseteq F_2 \subseteq ... \subseteq F_n \subseteq ...$ τέτοια ώστε $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ να είναι πυκνό στην A.

Έστω $(u_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα για την A. Αν ε > 0 και $F_n = \{a_1, ..., a_m\}$ τότε υπάρχουν $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \Lambda$ τέτοια ώστε,

$$\left\| a_j - a_j u_{\lambda} \right\| \leq \varepsilon \qquad \forall \alpha \in F_n, \quad \forall \lambda \geq \lambda_{\varepsilon}$$

Έστω n ένας θετικός ακέραιος και έστω ε = 1 / n τότε υπάρχει $\lambda_n = \lambda_\varepsilon \in \Lambda$ τέτοιο ώστε,

$$\left\| a - a u_{\lambda} \right\| \leq 1/n \qquad \forall \alpha \in F_n .$$

Επίσης μπορούμε να επιλέξουμε λ_n τέτοιο ώστε $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ οπότε έχουμε,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| a - a u_{\lambda n} \right\| = 0 \qquad \forall \alpha \in F .$$

Τότε όμως το F είναι πυκνό στην A άρα η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε α στην A. Άρα $(u_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την A.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Έστω μια C^* - άλγεβρα Α και έστω L αριστερό ιδεώδες αυτής τότε υπάρχει αύξων δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ θετικών στοιχείων στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του L τέτοιο ώστε :

$$a = \lim_\lambda au_\lambda = \lim u_\lambda a, \quad \forall a \in L.$$

Απόδειξη : Έστω $B = L \cap L^*$. Αφού η B είναι C^* - άλγεβρα δέχεται προσεγγιστική μονάδα $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ (προηγούμενο θεώρημα). Αν $\alpha \in L$ τότε $\alpha^*\alpha \in B$ άρα,

$$\lim_\lambda a^*a(1-u_\lambda) = 0\,.$$

Συνεπώς,

$$\lim_\lambda \| \; a^*a(1-u_\lambda) \; \|^2 = \lim_\lambda \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda) \; \|$$

$$\leq \lim_\lambda \| \; a^*a(1-u_\lambda) \; \| = 0\,.$$

Άρα,

$$\lim_\lambda \| \; a - au_\lambda \; \| = 0\,.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Έστω μια C^* - άλγεβρα Α και έστω Ι κλειστό ιδεώδες αυτής. Τότε αυτό είναι αυτοσυζυγές και επιπλέον C^* - υπάλγεβρα της Α. Αν $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για το Ι τότε :

$$\|\alpha + \mathrm{I}\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\| \;, \forall a \in A.$$

Απόδειξη : Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει αύξον δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ θετικών στοιχείων στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του Ι τέτοια ώστε,

$$\lim_\lambda \alpha u_\lambda = \alpha \qquad \forall a \in I\,.$$

Άρα,

$$\lim_\lambda u_\lambda a^* = \alpha^* \qquad \forall a^* \in I$$

επειδή κάθε $u_\lambda \in I$. Άρα το I είναι αυτοσυζυγές.

Έστω $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μια προσεγγιστική μονάδα του I, $\alpha \in A$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει στοιχείο $b \in I$ τέτοιο ώστε,

$$\|\alpha + b\| \leq \|a + I\| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αφού,

$$\lim_\lambda u_\lambda b = b \qquad\qquad \forall b \in I$$

υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε,

$$\|\alpha - u_\lambda a\| \leq \|(1-u_\lambda)(a+b)\| + \|b - u_\lambda b\|$$

$$\leq \|(a+b)\| + \|b - u_\lambda b\|$$

$$\leq \|(a+I)\| + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Άρα,

$$\|\alpha + \mathrm{I}\| = \lim_\lambda \|a - u_\lambda a\|$$

και συνεπώς,

$$\|a + I\| = \|\alpha^* + \mathrm{I}\| = \lim_\lambda \|a^* - u_\lambda a^*\| = \lim_\lambda \|a - au_\lambda\|.$$

Σχόλιο :Αν I κλειστό ιδεώδες της C^* - άλγεβρας A και J κλειστό ιδεώδες της C^* - υπάλγεβρας I της A τότε το J είναι ιδεώδες και της A. Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι αν $\alpha \in A$ και $b \in B^+$ τότε $ab \in J$ και $b\alpha \in J$.

Έστω $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα του I, τότε,

$$\lim_{\lambda} u_{\lambda} b^{1/2} = b^{1/2} \qquad \forall b^{1/2} \in I .$$

Άρα,

$$\lim_{\lambda} \alpha u_{\lambda} b^{1/2} b^{1/2} = \alpha b.$$

Συνεπώς αb$\in$J επειδή $b^{1/2} \in J$ και $au_{\lambda} b^{1/2} \in I$. Όμως J είναι ιδεώδες της I. Άρα $\alpha^* b \in J$ και $b\alpha \in J$, αφού J είναι αυτοσυζυγές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : Έστω μια C^* - άλγεβρα A και έστω I κλειστό ιδεώδες αυτής τότε το πηλίκο A / I είναι μια C^* - άλγεβρα με τις επαγόμενες πράξεις και με την νόρμα πηλίκο.

Απόδειξη : Έστω $(u_{\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα του I. Αν α$\in$A και b$\in$I έχουμε,

$$\|\alpha + \mathrm{I}\|^2 = \lim_{\lambda} \|a - u_{\lambda} a\|^2 \text{ (Θεώρημα 3)}$$

$$= \lim_{\lambda} \|(1-u_{\lambda}) a^* a (1-u_{\lambda})\|$$

$$\leq \sup_{\lambda} \|(1-u_{\lambda})(a^* a + b)(1-u_{\lambda})\| + \lim_{\lambda} \|(1-u_{\lambda}) b (1-u_{\lambda})\|$$

$$\leq \|(a^* a + b)\| + \lim_{\lambda} \|(1-u_{\lambda}) b (1-u_{\lambda})\|$$

$$= \|(a^* a + b)\|.$$

Άρα,

$$\|\alpha + \mathrm{I}\|^2 \leq \|a^* a + I\|,$$

συνεπώς, η A / I είναι C^* - άλγεβρα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : Έστω Α, Β C^* - άλγεβρες και έστω $\varphi : A \to B$ ένας 1-1 * - ομομορφισμός, τότε η φ είναι ισομετρία.

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι,

$$\|\phi(\alpha)\|^2 = \|\alpha\|^2 \text{ ή } \|\phi(\alpha * \alpha)\| = \|\alpha * \alpha\|.$$

Έστω Α, Β αβελιανές. Επιπλέον η επέκταση,

$$\widetilde{\phi} : \widetilde{A} \to \widetilde{B} \text{ όπου } \widetilde{A} = A \times C \text{ και } \widetilde{B} = B \times C$$

μας επιτρέπει να επιλέξουμε τις άλγεβρες Α, Β, έτσι ώστε να έχουν μονάδα.

Αν τ είναι χαρακτήρας στην Β τότε η τοφ είναι χαρακτήρας στην Α.

Η απεικόνιση,

$$\Phi' : \Omega(B) \to \Omega(\mathrm{A}) \,, \qquad \tau \mapsto \tau o \phi$$

είναι συνεχής.(όπου $\Omega(B), \Omega(\mathrm{A})$ τα σύνολα των χαρακτήρων στις B, A αντίστοιχα). Άρα $\Phi'(\Omega(\mathrm{B}))$ είναι συμπαγές επειδή $\Omega(\mathrm{A})$ είναι συμπαγές και συνεπώς $\Phi'(\Omega(\mathrm{B}))$είναι κλειστό στο $\Omega(\mathrm{A})$. Αν $\Phi'(\Omega(\mathrm{B})) \neq \Omega(\mathrm{A})$ τότε από το λήμμα Urysohn υπάρχει μη μηδενική συνεχής συνάρτηση $f : \Omega(\mathrm{A}) \to C$ τέτοια ώστε να μηδενίζεται στο $\Phi'(\Omega(\mathrm{B}))$.

Από την αναπαράσταση Gelfand $f = \hat{a}$ για τυχόν α$\in A$. Άρα $\forall \tau \in \Omega(B)$ έχουμε,

$$\tau(\phi(\alpha)) = \hat{\alpha}(\tau o \varphi) = 0$$

Άρα $\phi(\alpha) = 0$ και α = 0.

Αυτό όμως μας λέει ότι η f είναι μηδενική, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα,

$$\Phi'(\Omega(\mathrm{B})) = \Omega(\mathrm{A})$$

Συνεπώς για κάθε α $\in$ Α έχουμε,

$$\|\alpha\| = \left\|\hat{\alpha}\right\|_{\infty} = \sup_{\tau \in \Omega(\alpha)} |\tau(\alpha)| = \sup_{\tau \in \Omega(\mathrm{B})} |\tau(\phi(\alpha))| = \|\phi(\alpha)\| .$$

Άρα η φ είναι ισομετρία.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : Έστω Α, Β C^* - άλγεβρες και έστω $\varphi : A \to B$ ένας 1-1 * - ομομορφισμός, τότε το φ(Α) είναι C^* - υπάλγεβρα της Β.

Απόδειξη : Η απεικόνιση,

$$A / \mathrm{Ker}\varphi \to B \quad , \qquad \alpha + \mathrm{Ker}\varphi \mapsto \varphi(\alpha)$$

είναι 1-1 * - ομομορφισμός μεταξύ των C^* - αλγεβρών και συνεπώς είναι ισομετρία.
Η εικόνα φ(Α) είναι πλήρης χώρος και συνεπώς κλειστή στην Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : Έστω Β C^* - υπάλγεβρα της Α και Ι ένα κλειστό ιδεώδες της Α. Τότε Β + Ι είναι C^* - υπάλγεβρα της Α.

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι Β + Ι είναι πλήρης. Αφού το Ι είναι πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι το πηλίκο Β + Ι / Ι είναι πλήρες. Η τομή Β $\cap$ Ι είναι κλειστό ιδεώδες της Β και η απεικόνιση,

$$\phi : B / B \cap I \to A / I, \qquad \phi(b + B \cap I) = b + I \qquad (b \in B)$$

είναι * - ομομορφισμός με πεδίο τιμών το (Β+Ι) / Ι. Από το προηγούμενο θεώρημα η (Β+Ι) / Ι είναι μια C^* - άλγεβρα άρα, το (Β+Ι) / Ι είναι πλήρες.

Σχόλιο: Η απεικόνιση,

$$\phi : B / B \cap I \to A / I, \qquad \phi(b + B \cap I) = b + I \qquad (b \in B)$$

είναι ένας * - ομομορφισμός.

§2. Κληρονομικές C^*-άλγεβρες

Οι κληρονομικές C*- υπάλγεβρες είναι μια κλάση C*- αλγεβρών οι οποίες έχουν καλή ``συμπεριφορά`` ειδικά σε σχέση με τα θετικά γραμμικά συναρτησιακά. Θα εξηγήσουμε την καλή συμπεριφορά σε σχέση με τις απλές άλγεβρες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Αν A είναι μια C^* - άλγεβρα και B μια υπάλγεβρα της A, η B είναι κληρονομική αν $\forall \alpha \in A^+$ και $\forall b \in B^+$ τέτοια ώστε $a \leq b$ να έχουμε $\alpha \in B$.

Σχόλιο: — Οι C^* - άλγεβρες **0** και A είναι κληρονομικές C^* - υπάλγεβρες της A.

— Κάθε καρτεσιανό γινόμενο κληρονομικών είναι κληρονομική C*- υπάλγεβρα.

— Η κληρονομική C*- υπάλγεβρα που παράγεται από ένα υποσύνολο S του A είναι η μικρότερη κληρονομική C*- υπάλγεβρα του A η οποία περιέχει το S.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Αν ρ είναι μια προβολή σε μια C^* - άλγεβρα τότε η ρAρ είναι κληρονομική C*- υπάλγεβρα της A.

Στο θεώρημα που ακολουθεί διασαφηνίζεται η σχέση μεταξύ των κληρονομικών C*- υπαλγεβρών και των κλειστών αριστερών ιδεωδών μιας C^* - άλγεβρας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Έστω A μια C^* - άλγεβρα :

(1) Αν το L είναι αριστερό κλειστό ιδεώδες της A τότε το $L \cap L^*$ είναι κληρονομική C*- υπάλγεβρα της A. Η απεικόνιση $L \mapsto L \cap L^*$ είναι αμφιμονοσήμαντη από το σύνολο των αριστερών κλειστών ιδεωδών στο σύνολο των κληρονομικών C*- υπαλγεβρών της A.

(2) Αν L_1, L_2 είναι κλειστά αριστερά ιδεώδη της A

τότε,

$$L_1 \subseteq L_2 \Leftrightarrow L_1 \cap L_1{}^* \subseteq L_2 \cap L^*{}_2$$

(3) Αν Β μια κληρονομική C*- υπάλγεβρα της Α τότε το σύνολο

$$L(B) = \{a \in A / a^* a \in B\}$$

είναι το μοναδικό κλειστό αριστερό ιδεώδες της Α.

Απόδειξη : (1) Αν το L είναι αριστερό κλειστό ιδεώδες της Α τότε προφανώς Β $= L \cap L^*$ είναι C*- υπάλγεβρα της Α. Έστω $\alpha \in \mathrm{A}^+$ και $b \in B^+$ τέτοια ώστε $a \leq b$, από το Θεώρημα 2 της προηγούμενης παραγράφου, υπάρχει αύξων δίκτυο $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του L^+ τέτοιο ώστε,

$$b = \lim_\lambda bu_\lambda = \lim u_\lambda b.$$

Όμως,

$$\| a^{1/2}(1-u_\lambda) \|^2 = \|(1-u_\lambda)a(1-u_\lambda)\|$$

$$\leq \| (1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\|$$

$$\leq \| b - bu_\lambda \|.$$

Άρα,

$$a^{1/2} = \lim_\lambda \alpha^{1/2} u_\lambda$$

Συνεπώς $a^{1/2} \in L$ αφού $(u_\lambda) \in L(\lambda \in \Lambda)$. Άρα α$\in B$ συνεπώς η Β είναι κληρονομική.
(2) Αν L_1, L_2 είναι κλειστά αριστερά ιδεώδη της Α, τότε είναι προφανές ότι,

$$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1 \cap L_1{}^* \subseteq L_2 \cap L^*{}_2$$

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα της $L_1 \cap L_1{}^*$ και έστω α$\in L_1$. Τότε,

$$\lim{}_\lambda \|a - u_\lambda a\|^2 = \lim{}_\lambda \|(1-u_\lambda)a^* a(1-u_\lambda)\|$$

$$\leq \lim{}_\lambda \| \ a^* a(1-u_\lambda)\ \| = 0,$$

αφού α*α$\in L_1 \cap L_1{}^*$. Συνεπώς,

$$\alpha = \lim{}_\lambda \alpha u_\lambda = \lim u_\lambda \alpha .$$

Άρα α$\in$L2 αφού, $(u_\lambda) \in L_1 \cap L_1{}^* \subseteq L_2$.

(3). Έστω B μια κληρονομική C*- υπάλγεβρα της A. Θεωρούμε το σύνολο

$$L = L(B) = \{a \in A / a^* a \in B\}.$$

Αν $a,b \in L$ τότε,

$$(\alpha+b)^*(a+b) \leq (\alpha+b)^*(a+b) + (\alpha-b)^*(a-b) = 2a^*a + 2b^*b \in B .$$

Άρα $(a+b) \in L$.

Αν $b \in L$ και $a \in A$ τότε,

$$(\alpha b)^*(ab) \leq b^* a^* ab \leq \|a\|^2 b^* b \in B .$$

Άρα $(ab) \in L$. Ομοίως το L είναι κλειστό κάτω από το βαθμωτό γινόμενο. Τότε το L είναι αριστερό ιδεώδες της A, και προφανώς κλειστό, επειδή το B είναι κλειστό.

Αν $b \in B$ τότε $b^* b \in B$ και άρα $b \in L$. Άρα B $\subseteq L \cap L^*$. Αν $0 \leq b \in L \cap L^*$ τότε $b^2 \in B$ άρα $b \in B$ και συνεπώς B $\supseteq L \cap L^*$. Άρα B $= L \cap L^*$. Άρα η απεικονίση στο **(1)** είναι αμφιμονοσήμαντη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Έστω Β μια C^* - υπάλγεβρα της C^* - άλγεβρας Α. Τότε η Β είναι κληρονομική αν και μόνο αν $bab' \in B, \quad \forall b, b' \in B, \forall a \in A$.

Απόδειξη : Αν η Β είναι κληρονομική C^* - υπάλγεβρα τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $B = L \cap L^*$ για κάποιο κλειστό αριστερό ιδεώδες L της Α. Άρα αν $b, b' \in B$ και $\alpha \in A$, έχουμε $b(ab') \in L$ και $b'^*(a^* b^*) \in L$ άρα $bab' \in B$.

Αντιστρόφως αν το Β έχει την ιδιότητα,

$$bab' \in B, \quad \forall b, b' \in B, \forall a \in A,$$

τότε αν $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα για την Β και $\alpha \in A^+$, $b \in B^+$ και $a \leq b$ τότε,

$$0 \leq (1 - u_\lambda) a (1 - u_\lambda) \leq (1 - u_\lambda) b (1 - u_\lambda)$$

και συνεπώς,

$$\| \, a^{1/2}(1 - u_\lambda) \, \|^2 \leq \| \, b^{1/2}(1 - u_\lambda) \, \|.$$

Άρα,

$$b^{1/2} = \lim_\lambda b^{1/2} u_\lambda \qquad\qquad a^{1/2} = \lim_\lambda a^{1/2} u_\lambda.$$

Άρα,

$$\lim_\lambda a \, u_\lambda = \alpha \ \in B.$$

Συνεπώς η Β είναι κληρονομική C^* - υπάλγεβρα της Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3 : Κάθε κλειστό ιδεώδες μιας C^* - άλγεβρας είναι κληρονομική C^* - υπάλγεβρα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4 : Αν η Α είναι C^* - άλγεβρα και $\alpha \in A^+$, τότε η $\overline{(\alpha A \alpha)}$ είναι κληρονομική C^* - υπάλγεβρα της Α που παράγεται από το α.

Απόδειξη : Αρκεί να δείξουμε ότι α$\in \overline{(\alpha A \alpha)}$. Έστω $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα για την A τότε,

$$a^2 = \lim_\lambda a\ u_\lambda \alpha.$$

Άρα $\alpha^2 \in \overline{(\alpha A \alpha)}$. Αφού όμως η $\overline{(\alpha A \alpha)}$ είναι C*- άλγεβρα έχουμε,

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2} \in \overline{(\alpha A \alpha)}.$$

Στην διαχωρίσιμη περίπτωση, κάθε κληρονομική C^* - υπάλγεβρα είναι της μορφής που περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : Έστω B μια διαχωρίσιμη κληρονομική C^* - υπάλγεβρα της C^* - άλγεβρας A. Τότε υπάρχει ένα θετικό στοιχείο $a \in B$ τέτοιο ώστε B = $\overline{(\alpha A \alpha)}$.

Απόδειξη : Αφού η B είναι διαχωρίσιμη δέχεται ακολουθία ως προσεγγιστική μονάδα $(u_n)_{n=1}^\infty$. Έστω α = $\sum_{n=1}^\infty \frac{u_n}{2^n}$. Τότε α$\in B^+$, άρα $\overline{(\alpha A \alpha)} \subseteq B$. Αφού $\frac{u_n}{2^n} \leq a$ και η $\overline{(\alpha A \alpha)}$ είναι κληρονομική από το πόρισμα 4 της παρούσας παραγράφου, έχουμε $u_n \in \overline{(\alpha A \alpha)}$.

Αν b$\in B$ τότε,

$b = \lim_{n\to\infty} u_n b u_n$ και $u_n b u_n \in \overline{(\alpha A \alpha)}$. Άρα b $\in \overline{(\alpha A \alpha)}$, δηλαδή $B \subseteq \overline{(\alpha A \alpha)}$ και συνεπώς B = $\overline{(\alpha A \alpha)}$.

Σχόλιο: Στην μη διαχωρίσιμη περίπτωση το θεώρημα 5 δεν ισχύει. Ένα αντιπαράδειγμα είναι το εξής :

Έστω H ένας χώρος Hilbert και έστω u ένα θετικό στοιχείο του B(H) τέτοιο ώστε,

$$K(H) = \overline{(uB(H)u)}.$$

Αν $x \in H$ τότε $x \otimes x = \lim_{n\to\infty} uU_n u$ για την ακολουθία (U_n) στον $\mathrm{B}(\mathrm{H})$ και συνεπώς το x είναι η κλειστότητα του πεδίου τιμών του u.

Άρα H = $\left(\overline{u(H)}\right)$ και συνεπώς ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, αφού το πεδίο τιμών ενός συμπαγούς τελεστή είναι διαχωρίσιμο.

Όμως αν H είναι μη διαχωρίσιμος χώρος Hilbert τότε, η κληρονομική C^* - υπάλγεβρα $\mathrm{K}(\mathrm{H})$ της C^* - άλγεβρας $\mathrm{B}(\mathrm{H})$ δεν είναι της μορφής $\left(\overline{uB(H)u}\right)$ για κανένα $\mathrm{u} \in \mathrm{B}(\mathrm{H})^+$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : Έστω B μια κληρονομική C^* - υπάλγεβρα της C^* - άλγεβρας A (με μονάδα), και έστω $\alpha \in \mathrm{A}^+$. Αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b \in B^+$ τέτοιο ώστε $a \le b + \varepsilon$ τότε $a \in B$.

Απόδειξη : Αν $\varepsilon > 0$ από την υπόθεση υπάρχει $b_\varepsilon \in B^+$ τέτοιο ώστε $a \le b_\varepsilon^2 + \varepsilon^2$ άρα $a \le (b_\varepsilon + \varepsilon)^2$. Άρα $(b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} a\, (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} \le 1$ και συνεπώς,

$$\| \, (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} a\, (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} \, \| \le 1.$$

Επειδή,

$$1 - b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} = \varepsilon\, (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1}$$

έχουμε,

$$\| a^{1/2} - a^{1/2} b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} \|^2 = \varepsilon^2 \| \, a^{1/2}\, (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} \, \|^2$$

$$= \| \, (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} \alpha (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1} \, \|$$

$$\le \varepsilon^2.$$

Άρα,

$$\alpha^{1/2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \alpha^{1/2} b_\varepsilon (b_\varepsilon + \varepsilon)^{-1}$$

και συνεπώς,

$$\alpha^{1/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(b_\varepsilon + \varepsilon\right)^{-1} b_\varepsilon a^{1/2}.$$

Τέλος έχουμε,

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(b_\varepsilon + \varepsilon\right)^{-1} b_\varepsilon a b_\varepsilon \left(b_\varepsilon + \varepsilon\right)^{-1}$$

δηλαδή,

$$b_\varepsilon \left(b_\varepsilon + \varepsilon\right)^{-1} \in B \text{ και } \left(b_\varepsilon + \varepsilon\right)^{-1} b_\varepsilon a b_\varepsilon \left(b_\varepsilon + \varepsilon\right)^{-1} \in B.$$

Άρα η B είναι κληρονομική στην A και συνεπώς $\alpha \in B$.

Στην συνέχεια θα δείξουμε την σχέση μεταξύ των ιδεωδών μιας C^* - άλγεβρας και των κληρονομικών C^* - υπαλγεβρών αυτής, όμως εκτενέστερη ανάλυση του θέματος αυτού θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : Έστω B μια κληρονομική C^* - υπάλγεβρα της C^* - άλγεβρας A (με μονάδα), και έστω J ένα κλειστό ιδεώδες της B. Τότε υπάρχει κλειστό ιδεώδες της A, έστω I τέτοιο ώστε J = $B \cap I$.

Απόδειξη : Αν I = AJA τότε το I είναι κλειστό ιδεώδες της A.
Αφού η J είναι C^* - άλγεβρα έχουμε $J = J^3$ και αφού η B είναι κληρονομική στην A, έχουμε $B \cap I = BIB$. Οι δυο προηγούμενοι ισχυρισμοί προκύπτουν από την ύπαρξη της προσεγγιστικής μονάδας.

Συνεπώς έχουμε,

$$B \cap I = BIB = B(AJA)B = BAJ^3AB \subseteq BJB.$$

Επειδή το J είναι κλειστό ιδεώδες της B έχουμε,

$$B \cap I \subseteq J.$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι φανερός, άρα $B \cap I = J$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Αν Α είναι μια C^* - άλγεβρα τότε αυτή λέγεται απλή (simple) αν το 0 και το Α είναι τα μοναδικά κλειστά ιδεώδη αυτής.

Σχόλιο: — Οι απλές C^* - άλγεβρες αποτελούν τα θεμέλια της θεωρίας των C^* - αλγεβρών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: Αν Η είναι ένας χώρος Hilbert, τότε η C^* - άλγεβρα $K(H)$ είναι απλή. Έστω Ι ένα κλειστό και μη μηδενικό ιδεώδες της $K(H)$ το Ι είναι επίσης ιδεώδες της B(H), άρα το Ι περιέχει το ιδεώδες $F(H)$ και συνεπώς I = $K(H)$.

Σχόλιο: — Οι C^* - υπάλγεβρες μιας απλής C*- άλγεβρας δεν είναι κατ' ανάγκη απλές. Για παράδειγμα αν p, q είναι πεπερασμένης τάξης μη μηδενικές προβολές ενός χώρου Hilbert τέτοιες ώστε p q = 0, τότε $A = A_p + A_q$ είναι μια μη απλή C*- υπάλγεβρα της απλής C*- άλγεβρας $K(H)$(όπου $A_p = \{u_p / u \in A\}$ είναι κλειστό ιδεώδες της Α).

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : Κάθε κληρονομική C^* - υπάλγεβρα μιας απλής C^* - άλγεβρας Α είναι απλή.

Απόδειξη : Αν Β μια κληρονομική C^* - υπάλγεβρα μιας απλής C^* - άλγεβρας Α και J κλειστό ιδεώδες της Β τότε $J = B \cap I$ (από το προηγούμενο θεώρημα) για κάποιο κλειστό ιδεώδες Ι της Α. Από το γεγονός ότι η Α είναι απλή έχουμε Ι = 0 ή Ι = Α άρα J = 0 ή J = B.

§3. Θετικά Γραμμικά Συναρτησιακά

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τις βασικές ιδιότητες των θετικών γραμμικών συναρτησιακών, τα οποία όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο σχετίζονται με τις αναπαραστάσεις C* - αλγεβρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Αν Α, Β είναι C^* - άλγεβρες και $\phi : A \to B$ μια γραμμική απεικόνιση, τότε ονομάζουμε την ϕ θετική αν $\phi(A^+) \subseteq B^+$.

Σχόλιο: — Στην περίπτωση όπου ϕ θετική έχουμε $\phi(A_{sa}) \subseteq B_{sa}$ και ο περιορισμός $\phi : A_{sa} \to B_{sa}$ είναι αύξων.

— Κάθε * - ομομορφισμός είναι θετικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Έστω $A = M_n(C)$ τότε το γραμμικό συναρτησιακό,

$$tr : A \to C, \qquad \lambda_{ij} \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}$$

είναι θετικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Έστω Α μια C^* - άλγεβρα και τ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό $\tau : A \to C$, τότε το τ είναι φραγμένο.

Απόδειξη : Αν το τ δεν είναι φραγμένο, έχουμε $\sup_{a \in S} \tau(a) = +\infty$, όπου S το σύνολο των θετικών στοιχείων της Α με $\|a\| \le 1$. Άρα υπάρχει ακολουθία (a_n) στο S τέτοια ώστε $2^n \le \tau(a_n) \quad \forall n \in N$.

Έστω $a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$, οπότε $a \in A^+$. Όμως $1 \le \tau\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ και συνεπώς,

$$N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \tau\left(\frac{a_n}{2^n} \right) = \tau\left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{2^n} \right) \leq \tau(a).$$

Άρα το $\tau(a)$ είναι φράγμα του συνόλου N, το οποίο είναι άτοπο. Άρα το τ είναι φραγμένο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Έστω A μια C^* - άλγεβρα και έστω τ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό $\tau : A \to C$ τότε,

$$\tau(\alpha^*) = \overline{\tau(\alpha)} \text{ και } |\tau(\alpha)|^2 \leq \|\tau\| \tau(\alpha^* \alpha).$$

Απόδειξη : Έστω $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα της A, τότε:

$$\tau(\alpha^*) = \lim_\lambda \tau(a^* u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(a u_\lambda)^- = \tau(a)^-$$

Επίσης,

$$|\ \tau(\alpha)\ |^2 = \lim_\lambda |\ \tau(a u_\lambda)\ |^2 \leq \sup_\lambda \tau(u_\lambda^2) \tau(a^* a) \leq \|\tau\| \tau(a^* a).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Έστω A μια C^* - άλγεβρα και έστω τ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\tau : A \to C$ τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα :

(1). Το $\tau : A \to C$ είναι θετικό.

(2). Για κάθε προσεγγιστική μονάδα της A, $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ έχουμε $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

(3). Για τυχόν προσεγγιστική μονάδα της A, $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ έχουμε $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

Απόδειξη : (1)$\to$(2). Έστω ότι $\|\tau\| = 1$ και έστω ότι τ είναι θετικό. Αν η προσεγγιστική μονάδα της A, $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ τότε το $\tau(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ένα αύξων δίκτυο στο $\Re$ και συγκλίνει στο supremum αυτού το οποίο δεν είναι μεγαλύτερο του 1. Δηλαδή,

$$\lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda}) \leq 1.$$

Έστω $\alpha \in$ Ακαι $\|\alpha\| \leq 1$. Τότε,

$$|\tau(u_{\lambda}a)|^2 \leq \tau(u_{\lambda}^2)\tau(a^*a)$$

$$\leq \tau(u_{\lambda})\tau(a^*a)$$

$$\leq \lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda}).$$

Άρα,

$$|\tau(a)|^2 \leq \lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda}).$$

Συνεπώς $\lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda}) \geq 1$, άρα $\lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda}) = 1 = \|\tau\|$.

(3)$\rightarrow$(1) : Έστω προσεγγιστική μονάδα της Α, $(u_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ τέτοια ώστε $\lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda}) = 1$. Έστω αυτοσυζυγές στοιχείο της Α τέτοιο ώστε $\|\alpha\| \leq 1$, τότε $\tau(\alpha) = \alpha + \beta i$ όπου α, $\beta \in \Re$. Προκειμένου να δείξουμε ότι $\tau(\alpha) \in \Re$ υποθέτουμε ότι $\beta \leq 0$. Αν n είναι θετικός ακέραιος τότε έχουμε,

$$\|\alpha - u_{\lambda}ni\|^2 = \|(a + nu_{\lambda}i)(a - nu_{\lambda}i)\|$$

$$= \|a^2 + n^2u_{\lambda}^2 - n(au_{\lambda} - u_{\lambda}a)i\|$$

$$\leq 1 + n^2 + n\|(au_{\lambda} - u_{\lambda}a)\|.$$

Άρα,

$$|\tau(a - nu_{\lambda}i)|^2 \leq 1 + n^2 + n\|au_{\lambda} - u_{\lambda}a\|.$$

Όμως,

$$\lim_{\lambda} \tau(a - inu_{\lambda}) = \tau(a) - in \quad \text{και} \quad \lim_{\lambda} au_{\lambda} - u_{\lambda}a = 0\,.$$

Αν πάρουμε τα όρια στην παραπάνω σχέση έχουμε,

$$|a + i\beta - in|^2 \leq 1 + n^2$$

$$a^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2 \leq 1 + n^2$$

$$-2n\beta \leq 1 - a^2 - \beta^2\,.$$

Επειδή $\beta \leq 0$ από την παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι β = 0 άρα $\tau(\alpha) \in \Re$, συνεπώς το α είναι αυτοσυζυγές.

Έστω ότι α είναι θετικό και $\|\alpha\| \leq 1$, τότε $u_{\lambda} - a$ είναι αυτοσυζυγές και $\|u_{\lambda} - a\| \leq 1$, οπότε $\tau(u_{\lambda} - a) \leq 1$. Τότε έχουμε,

$$\lim_{\lambda} \tau(u_{\lambda} - a) = 1 - \tau(a) \leq 1$$

και συνεπώς $\tau(a) \geq 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4 : Έστω Α μια C^* - άλγεβρα με μονάδα και έστω τ ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\tau : A \to C$. Το τ είναι θετικό αν και μόνο αν $\tau(1) = \|\tau\|$.

Απόδειξη : Η ακολουθία η οποία συγκλίνει στο 1 είναι προσεγγιστική μονάδα για την Α, με εφαρμογή του προηγούμενου θεωρήματος η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5 : Έστω Α μια C^* - άλγεβρα με μονάδα και έστω τ, τ΄ θετικά γραμμικά συναρτησιακά $\tau : A \to C$ και $\tau' : A \to C$. Τότε,

$$\|\tau+\tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\|.$$

Απόδειξη : Αν η προσεγγιστική μονάδα της A είναι η $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, τότε :

$$\|\tau+\tau'\| = \lim_\lambda (\tau+\tau')(u_\lambda)$$

$$= \lim_\lambda (\tau)(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau'(u_\lambda)$$

$$= \|\tau\| + \|\tau'\|$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Αν A είναι C^* - άλγεβρα και $\tau : \mathrm{A} \to C$ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό για το οποίο ισχύει $\|\tau\| = 1$ τότε το τ ονομάζεται κατάσταση (State).

Σχόλιο: Θα συμβολίζουμε με $S(A)$ το σύνολο των καταστάσεων της C^* - άλγεβρας A.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : Έστω A μια C^* - άλγεβρα και έστω τ κατάσταση, $\tau : A \to C$ τότε αν $\alpha \in$ A έχουμε,

$$\|\alpha\| = |\tau(\alpha)|.$$

Απόδειξη : Υποθέτουμε ότι $\alpha \neq 0$. Έστω B η C* - άλγεβρα που παράγεται από το 1 και το $\alpha \in \widetilde{\mathrm{A}} = \mathrm{A} \times C$. Αφού η B είναι αβελιανή και η $\hat{a}$ είναι συνεχής στο χώρο $\Omega(\mathrm{B})$ υπάρχει χαρακτήρας $\tau_2 \in \Omega(\mathrm{B})$ τέτοιος ώστε,

$$\|\alpha\| = \left\|\hat{\alpha}\right\|_\infty = |\tau_2(\alpha)|.$$

Από το θεώρημα Hahn – Banach, υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό τ_1 στην $\widetilde{\mathrm{A}}$ που επεκτείνει το τ_2, με νόρμα $\|\tau_1\| = 1$.

Αφού $\tau_1(1)=\tau_2(1)=1$, το τ_1 είναι θετικό στην A, από το πόρισμα 4 της παρούσας παραγράφου.

Αν τ είναι ο περιορισμός του τ_1 στην A, τότε το τ είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό στην A τέτοιο ώστε $\|\alpha\|=|\tau(\alpha)|$.

Άρα,

$$\|\alpha\|=|\tau(\alpha)|\le\|\tau\|\|\alpha\|.$$

Συνεπώς $\|\tau\|\ge 1$. Η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής, άρα $\|\tau\|=1$ και συνεπώς το τ είναι μια κατάσταση στην A.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : Έστω A μια C^* - άλγεβρα και έστω τ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό $\tau: A\to C$ τότε :

(1). Για κάθε $\alpha\in$ A , $\tau(\alpha^*\alpha)=0$ αν και μόνο αν $\tau(ba)=0,\ \forall b\in A$.

(2). Ισχύει $\tau(b^*a^*ab)\le\|a^*a\|\tau(b^*b), \qquad \forall a,b\in A$.

Απόδειξη : (1) Προφανές από την ανισότητα Cauchy – Schwarz.

(2). Έστω $\tau(b^*b)\ge 0$, τότε το συναρτησιακό,

$$p: A\to C\ ,\ c\mapsto \tau(b^*cb)/\tau(b^*b)$$

είναι θετικό και γραμμικό άρα, αν $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μια προσεγγιστική μονάδα της A τότε,

$$\|p\|=\lim_\lambda p(u_\lambda)$$

$$=\lim_\lambda \tau(b^*u_\lambda b)/\tau(b^*b)=\tau(b^*b)/\tau(b^*b)$$

$$=1.$$

Άρα,

$$p(a^*a) \le \|a^*a\|,$$

και συνεπώς,

$$\tau(b^*a^*ab) \le \|a^*a\|\tau(b^*b).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : Έστω Β μια C^* - υπάλγεβρα της Α και έστω τ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό $\tau : \mathrm{B} \to C$. Τότε υπάρχει θετικό γραμμικό συναρτησιακό τ΄ στην Α που επεκτείνει το τ και ισχύει $\|\tau\| = \|\tau'\|$.

Απόδειξη : Έστω $\mathrm{A} = \widetilde{\mathrm{B}}$. Ορίζουμε το τ' στην Α ως εξής :

$$\tau'(b+\lambda) = \tau(b) + \lambda\|\tau\| \qquad (b \in B,\ \lambda \in C).$$

Αν $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μια προσεγγιστική μονάδα της Β, από το θεώρημα 3 της παρούσας παραγράφου,

$$\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda).$$

Έστω $b \in B$ και $\mu \in C$ τότε,

$$|\tau'(b+\mu)| = |\lim_\lambda \tau(bu_\lambda) + \mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)|$$

$$= |\lim_\lambda \tau((b+\mu)(u_\lambda))|$$

$$\le \sup_\lambda \|\tau\|\|(b+\mu)u_\lambda\|$$

$$\le \|\tau\|\|(b+\mu)\|.$$

Άρα $\|\tau'\| \leq \|\tau\|$. Η αντίστροφη ανισότητα είναι προφανής άρα,

$$\|\tau'\| = \|\tau\| = \tau'(1).$$

Επομένως το τ είναι θετικό, από το πόρισμα 4.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν όταν $\mathrm{A} = \widetilde{\mathrm{B}}$. Έστω τώρα τυχούσα C* - άλγεβρα A και B μια C* - υπάλγεβρα αυτής. Αν αντικαταστήσουμε την B με την $\widetilde{\mathrm{B}}$ και την A με την $\widetilde{\mathrm{A}}$ και λόγω του θεωρήματος Hahn – Banach έχουμε ότι υπάρχει συναρτησιακό $\tau' \in \mathrm{A}^*$ το οποίο επεκτείνει το τ και διατηρεί την νόρμα.

Άρα αφού,

$$\|\tau'\| = \|\tau\| = \tau'(1) = \tau(1)$$

Έχουμε, από το πόρισμα 4, ότι το τ είναι θετικό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9 : Έστω B μια κληρονομική C^* - υπάλγεβρα της A και έστω τ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό $\tau : \mathrm{B} \to C$. Τότε υπάρχει μοναδικό θετικό γραμμικό συναρτησιακό τ΄ στην A που επεκτείνει το τ και ισχύει $\|\tau\| = \|\tau'\|$. Επιπλέον για την προσεγγιστική μονάδα της B, $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ισχύει:

$$\tau'(\alpha) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda a u_\lambda) \qquad \forall a \in A.$$

Απόδειξη : Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει η ύπαρξη. Μένει να δείξουμε την μοναδικότητα. Έστω τ' θετικό γραμμικό συναρτησιακό στην A που επεκτείνει το τ και ισχύει $\|\tau\| = \|\tau'\|$. Αν $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα της B τότε :

$$\|\tau\| = \|\tau'\| = |\tau'(1)| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda).$$

Άρα,

$$\lim_\lambda \tau'(1 - u_\lambda) = 0.$$

Συνεπώς για κάθε $\alpha \in$ Α έχουμε:

$$|\tau'(\alpha)-\tau(u_\lambda a u_\lambda)| \le |\tau'(\alpha - u_\lambda a)| + |\tau'(u_\lambda a - u_\lambda a u_\lambda)|$$

$$\le \tau'\left((1-u_\lambda)^2\right)^{1/2} \ \tau'(a^* a)^{1/2} +$$

$$+ \ \tau'\left((1-u_\lambda)^2\right)^{1/2} \ \tau'\left(a^* u_\lambda^2 a\right)^{1/2}$$

$$\le (\ \tau'\left((1-u_\lambda)^2\right) \ \tau'(a^* a) \ +$$

$$+\tau'\left((1-u_\lambda)^2\right) \tau'\left(a^* u_\lambda^2 a\right) \ )^{1/2}.$$

Άρα,

$$\lim_\lambda \tau'(1-u_\lambda) = 0,$$

και συνεπώς,

$$\tau'(\alpha) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda a u_\lambda) \qquad \forall a \in A.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ C*- ΑΛΓΕΒΡΩΝ

§1. Ανάγωγες (Irreducible) αναπαραστάσεις και γνήσιες καταστάσεις (pure states) C*-αλγεβρών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Αν A είναι μια C* - άλγεβρα και (H,ϕ) μια αναπαράσταση της A, το $x \in H$ ονομάζεται κυκλικό διάνυσμα για την αναπαράσταση αν το x είναι κυκλικό για την C*- άλγεβρα $\phi(A)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Αν A είναι μια C* - άλγεβρα και (H,ϕ) μια αναπαράσταση της A η οποία δέχεται κυκλικό διάνυσμα, τότε ονομάζεται κυκλική αναπαράσταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Έστω μια C* - άλγεβρα A και $\tau \in S(A)$ τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $x_\tau \in H_\tau$ τέτοιο ώστε:

$$\tau(a) = \langle a + N_\tau, x_\tau \rangle \qquad (a \in A).$$

όπου $N_\tau = \{a \in A / \tau(a^* a) = 0\}$.

Επιπλέον x_τ είναι μοναδιαίο κυκλικό διανυσμα για την (H_τ, ϕ_τ) και

$$\phi_\tau(\alpha)x_\tau = a + N_\tau \qquad (a \in A).$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση,

$$\rho_0 : A/N_\tau \to C, \quad a + N_\tau \mapsto \tau(\alpha)$$

είναι καλώς ορισμένη, γραμμική και νόρμ - φθίνουσα. Από το θεώρημα αναπαραστάσεως του Riesz υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $x_\tau \in H_\tau$ τέτοιο ώστε:

$$\rho(y) = \langle y, x_\tau \rangle \qquad (y \in H_\tau).$$

Το x_τ είναι το μοναδικό στοιχείο στον H_τ για το οποίο ισχύει,

$$\tau(a) = \langle a + N_\tau, x_\tau \rangle \qquad (a \in A).$$

Προκειμένου να δείξουμε ότι το x_τ είναι μοναδικό θεωρούμε $a, b \in \mathrm{A}$ τότε έχουμε,

$$\langle b + N_\tau, \phi_\tau(a)x_\tau \rangle = \langle a * b + N_\tau, x_\tau \rangle = \tau(a * b).$$

Όμως,

$$\tau(a * b) = \langle b + N_\tau, a + N_\tau \rangle$$

Και συνεπώς έχουμε,

$$\phi_\tau(\alpha)x_\tau = a + N_\tau \qquad (a \in A)$$

αφού το $\phi_\tau(\alpha)x_\tau$ είναι πυκνό στο H_τ.

Συνεπώς το x_τ είναι κυκλικό για την (H_τ, ϕ_τ), άρα η $\phi_\tau(\mathrm{A})$ δρα μη-εκφυλισμένα στον H_τ.

Αν $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την A τότε η $(\phi_\tau(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την $\phi_\tau(\mathrm{A})$ και συνεπώς συγκλίνει ισχυρά στο id$_{\mathrm{H}}$. Άρα,

$$\|x_\tau\|^2 = \langle x_\tau, x_\tau \rangle = \lim{}_\lambda \langle \phi_\tau(u_\lambda)(x_\tau), x_\tau \rangle = \lim \tau(u_\lambda) = \|\tau\| = 1$$

Άρα το x_τ είναι μοναδιαίο διάνυσμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Αν ρ, τ είναι θετικά γραμμικά συναρτησιακά μιας C*- άλγεβρας A ορίζουμε $\rho \le \tau$ αν $\tau - \rho \ge 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Έστω μια C^* - άλγεβρα A και $\tau \in S(A)$ και ρ θετικό γραμμικό συναρτησιακό στην A και έστω $\rho \le \tau$ τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $\upsilon \in \phi_\tau(\mathrm{A})'$ τέτοιος ώστε:

$$\rho(\alpha) = \langle \phi_\tau(\alpha)\upsilon x_\tau, x_\tau \rangle \qquad (a \in A).$$

όπου $\phi_\tau(\mathrm{A})'$ ο αντιμεταθέτης της $\phi_\tau(\mathrm{A})$.

Απόδειξη: Ορίζουμε την σ στον A/N_τ,

$$\sigma(\alpha + \mathrm{N}_\tau, b + N_\tau) = \rho(b^* a).$$

Επειδή $\|\sigma\| \le 1$ τότε,

$$|\rho(b^* a)| \le \rho(b^* b)^{1/2} \rho(a^* a)^{1/2}.$$

Όμως,

$$\rho(b*b)^{1/2}\rho(a*a)^{1/2} \le \tau(b*b)^{1/2}\tau(a*a)^{1/2}.$$

Άρα, $\tau(b*b)^{1/2}\tau(a*a)^{1/2} = \|b+N_\tau\| \, \|a+N_\tau\|$.

Τότε υπάρχει τελεστής $\upsilon \in \mathrm{B}(H_\tau)$ τέτοιος ώστε,

$$\langle \upsilon(x), y\rangle = \sigma(x,y) \qquad \forall x,y \in H_\tau \ \text{ και } \|\upsilon\| \le 1.$$

Συνεπώς,

$$\sigma(\alpha+\mathrm{N}_\tau, b+N_\tau) = \rho(b*a) = \left\langle \upsilon(\ \alpha+N_\tau\ ), b+N_\tau\ \right\rangle$$

$$= \langle \upsilon\phi_\tau(a)x_\tau, \phi_\tau(b)x_\tau\rangle \ .$$

Άρα,

$$\left\langle \upsilon(\ \alpha+N_\tau\ ), a+N_\tau\ \right\rangle \ge 0 \qquad \forall a \in A.$$

Και συνεπώς ο υ είναι θετικός.

Αν $a,b \in A$ τότε,

$$\langle \phi_\tau(a)\upsilon(b+N_\tau), c+N_\tau\rangle = \langle \upsilon(b+N_\tau), a*c+N_\tau\rangle = \rho(c*ab).$$

Όμως,

$$\rho(c*ab) = \langle \upsilon(ab+N_\tau), c+N_\tau\rangle = \langle \upsilon\phi_\tau(a)(b+N_\tau), c+N_\tau\rangle$$

Άρα,

$$\phi_\tau(a)\upsilon = \upsilon\phi_\tau(a)$$

και συνεπώς $\upsilon \in \phi_\tau(\mathrm{A})'$.

Επίσης,

$$\rho(a^*b) = \langle \upsilon(b+N_\tau), a+N_\tau \rangle = \langle \upsilon\phi_\tau(b)x_\tau, \phi_\tau(a)x_\tau \rangle = \langle \upsilon\phi_\tau(a^*b)x_\tau, x_\tau \rangle$$

και αν η $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την A τότε:

$$\rho(u_\lambda b) = \langle \upsilon\phi_\tau(u_\lambda b)x_\tau, x_\tau \rangle \ .$$

Συνεπώς,

$$\rho(b) = \langle \upsilon\phi_\tau(b)x_\tau, x_\tau \rangle \ .$$

Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι $w \in \phi_\tau(\mathrm{A})'$και

$$\rho(a) = \langle \phi_\tau(a)wx_\tau, x_\tau \rangle \ , \qquad (a \in A).$$

Τότε,

$$\langle w\phi_\tau(a^*b)x_\tau, x_\tau \rangle = \rho(a^*b) = \langle \upsilon\phi_\tau(u_\lambda b)x_\tau, x_\tau \rangle$$

και συνεπώς,

$$\rho(a^*b) = \langle w(b+N_\tau), a+N_\tau \rangle = \langle \upsilon(b+N_\tau), a+N_\tau \rangle \qquad \forall a,b \in A.$$

Άρα $w = \upsilon$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : Έστω A μια C*- άλγεβρα. Τότε λέμε ότι η A δρα μη-εκφυλισμένα στον χώρο Hilbert H αν $\overline{\mathrm{AH}} = \mathrm{H}$, όπου AH η γραμμική θήκη του συνόλου $\{u(x)/u \in A,\ x \in H\}$. Ισοδύναμα έχουμε ότι $\forall x \neq 0,\ x \in H, \quad \exists u \in A / u(x) \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5 : Μια αναπαράσταση (H,ϕ) μιας C*- άλγεβρας A είναι μη-εκφυλισμένη αν η C*-άλγεβρα $\phi(\mathrm{A})$ δρα μη-εκφυλισμένα στον H.

Σχόλιο: — Το ευθύ άθροισμα αναπαραστάσεων είναι μη-εκφυλισμένη αναπαράσταση.

— Επίσης οι κυκλικές αναπαραστάσεις είναι μη-εκφυλισμένες αναπαραστάσεις.

Σχόλιο: Αν (H,ϕ) είναι μη-εκφυλισμένη αναπαράσταση στην A και $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την A τότε η $(\phi_\tau(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ είναι προσεγγιστική μονάδα για την $\phi_\tau(\mathrm{A})$ και συνεπώς συγκλίνει ισχυρά στο id_H.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Έστω μια αναπαράσταση (H,ϕ) μιας C*- άλγεβρας A η οποία είναι μη-εκφυλισμένη. Τότε αυτή είναι το ευθύ άθροισμα κυκλικών αναπαραστάσεων στην A.

Απόδειξη: Αν $x \in H$ τότε ορίζουμε $H_x = [\phi(A)x]$ και από το λήμμα Zorn's έχουμε ότι υπάρχει maximal σύνολο Λ μη μηδενικών στοιχείων του H τέτοιων ώστε τα στοιχεία H_x να είναι ανά ζεύγη ορθογώνια, $x \in \Lambda$.

Αν $y \in (\ \cup_{x\in\Lambda} H_x \ )^\perp$ τότε έχουμε,

$$\langle y \ ,\phi(a*b)(x)\rangle = 0 \ \text{ ή } \ \langle \phi(\alpha)y \ ,\phi(b)(x)\rangle = 0 \,.$$

Άρα οι χώροι $H_x \ H_y$ είναι ορθογώνιοι και επειδή (H,ϕ) είναι μη-εκφυλισμένη, $y \in H_y$. Και επειδή το Λ είναι μεγιστικό έχουμε ότι $y = 0$.

Συνεπώς, ο H είναι ευθύ άθροισμα χώρων Hilbert και προφανώς οι χώροι αυτοί είναι αναλλοίωτοι στον $\phi(\mathrm{A})$, άρα η αναπαράσταση $\phi_x : A \to B(H_x)$ έχει κυκλικό διάνυσμα, δηλαδή η αναπαράσταση (H,ϕ) είναι ευθύ άθροισμα των (H_x,ϕ_x).

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : Έστω (H_1,ϕ_1), (H_2,ϕ_2) αναπαραστάσεις μιας C*- άλγεβρας A με κυκλικά διανύσματα x_1,x_2 αντίστοιχα. Τότε υπάρχει $u: H_1 \to H_2$ τέτοια ώστε:

$$x_2 = u(x_1) \text{ και } \phi_2(a) = u\phi_1(a)u^* \Leftrightarrow \langle \phi_1(\alpha)x_1, x_1\rangle = \langle \phi_2(\alpha)x_2, x_2\rangle \ \forall a \in A.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε το αντίστροφο. Έστω ότι,

$$\langle \phi_1(\alpha)x_1, x_1\rangle = \langle \phi_2(\alpha)x_2, x_2\rangle \ \forall a \in A.$$

Τότε ορίζουμε την απεικόνιση,

$$u_0 : \phi_1(A)x_1 \to H_2 \ , \quad \text{με} \qquad u_0(\phi_1(A)x_1) = \phi_2(\mathrm{A})x_2,$$

η οποία είναι καλώς ορισμένη και ισομετρία επειδή,

$$\| \ \phi_2(\mathrm{A})x_2 \ \|^2 = \langle \phi_2(\alpha^*\alpha)(x_2), x_2\rangle = \langle \phi_1(\alpha^*\alpha)(x_1), x_1\rangle = \| \ \phi_1(\mathrm{A})x_1 \ \|^2.$$

Επεκτείνουμε το u_0 σε μια ισομετρική γραμμική απεικόνιση $u: H_1 \to H_2$ και αφού, $u\ (H_1) = [\phi_2(\mathrm{A})x_2] = H_2$ η u είναι μοναδιαία.

Αν $a,b \in A$ τότε $u\phi_1(a)\phi_1(b)x_1 = \phi_2(ab)(x_2) = \phi_2(a)u(x_2)\phi_1(b)x_1$ και συνεπώς,

$$u\phi_1(a) = \phi_2(a)u \quad \forall a \in A.$$

Όμως,

$$\phi_2(a)u(x_1) = u\phi_1(\alpha)(x_1) = \phi_2(a)(x_2) \text{ ή } \phi_2(a)(u(x_1) - x_2) = 0,$$

και επειδή η ϕ_2 είναι μη-εκφυλισμένη έχουμε, $x_2 = u(x_1)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6 : Μια αναπαράσταση (H,ϕ) μιας C*- άλγεβρας A είναι ανάγωγη (irreducible) αν η C*-άλγεβρα $\phi(\mathrm{A})$ είναι ανάγωγη στον H.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7 : Έστω (H_1,ϕ_1) και (H_2,ϕ_2) αναπαραστάσεις της C^* - άλγεβρας A. Οι αναπαραστάσεις είναι ορθομοναδιαίως ισοδύναμες αν υπάρχει μοναδιαίος ισομορφισμός $U: H_1 \to H_2$ τέτοιος ώστε :

$$U\phi_1(a)U^* = \phi_2(a) \quad ,\forall a \in A$$

Σχόλιο: — Αν δυο αναπαραστάσεις είναι ορθομοναδιαίως ισοδύναμες και η μια είναι ανάγωγη τότε θα είναι και η άλλη.

— Αν H είναι χώρος Hilbert μιας διάστασης τότε η τετριμμένη αναπαράσταση κάθε C* - άλγεβρας είναι ανάγωγη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : Έστω (H,ϕ) αναπαράσταση μιας C*- άλγεβρας A.

(1) Η (H,ϕ) είναι ανάγωγη αν και μόνο αν $\phi(\mathrm{A})' = C1$ όπου 1 = id_H.

(2) Αν η (H,ϕ) είναι ανάγωγη τότε κάθε μη – μηδενικό διάνυσμα του H είναι κυκλικό για την (H,ϕ).

Απόδειξη: Το (1) προκύπτει από το Θεώρημα 3 της παραγράφου 1 του Κεφαλαιου1. Έστω ότι η (H,ϕ) είναι ανάγωγη και έστω x μη – μηδενικό διάνυσμα του H. Ο χώρος $[\phi(\mathrm{A})x\ ]$ είναι αναλλοίωτος του $\phi(\mathrm{A})$ άρα είναι 0 ή H.

Επειδή όμως η ϕ είναι μη – μηδενική θα υπάρχει στοιχείο $y \in H$ τέτοιο ώστε $\phi(\alpha)(y) \neq 0$ για κάποιο στοιχείο $a \in A$. Άρα $[\phi(\mathrm{A})y\ ] = H$ άρα το ϕ είναι μη-εκφυλισμένη. Άρα το $\phi(\mathrm{A})x$ είναι μη μηδενικός χώρος άρα $[\phi(\mathrm{A})x\ ] = H$ το οποίο σημαίνει ότι το x είναι κυκλικό διάνυσμα της (H,ϕ).

ΟΡΙΣΜΟΣ 8 : Έστω μια C*- άλγεβρα A και τ μια κατάσταση τέτοια ώστε $\tau \geq \rho$, όπου ρ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό της A. Τότε η κατάσταση τ ονομάζεται γνήσια κατάσταση (pure state) της C*- άλγεβρας A.

Σχόλιο: — Υπάρχει $t \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\rho = t\tau$.

— Το σύνολο των γνήσιων καταστάσεων μιας C* -άλγεβρας συμβολίζεται ως PS(A).

ΘΕΩΡΗΜΑ 6 : Έστω τ κατάσταση μιας C*- άλγεβρας A.

(1) Το τ είναι γνήσιο αν και μόνο αν $(\mathrm{H}_\tau, \phi_\tau)$ είναι ανάγωγη.

(2) Αν η A είναι αβελιανή τότε το τ είναι γνήσιο αν και μόνο αν το τ είναι χαρακτήρας στην A.

Απόδειξη: Έστω τ γνήσια κατάσταση και $\upsilon \in \phi_\tau(\mathrm{A})'$ με $0 \le \upsilon \le 1$. Τότε το συναρτησιακό,

$$\rho : \mathrm{A} \to C, \qquad a \mapsto \langle \phi_\tau(\alpha)\upsilon(x_\tau), x_\tau \rangle$$

είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό τέτοιο ώστε $\rho \le \tau$. Άρα υπάρχει $t \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\rho = t\tau$ και συνεπώς,

$$\langle \phi_\tau(\alpha)\upsilon(x_\tau), x_\tau \rangle = \langle t\phi_\tau(\alpha)\upsilon(x_\tau), x_\tau \rangle.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\langle \upsilon(a + N_\tau), b + N_\tau \rangle &= \langle \upsilon\phi_\tau(\alpha)(x_\tau), \phi(b)x_\tau \rangle \\ &= \langle \upsilon\phi_\tau(b^* a)(x_\tau), x_\tau \rangle \\ &= \langle t\phi_\tau(b^* a)(x_\tau), x_\tau \rangle \\ &= \langle t(a + N_\tau), b + N_\tau \rangle.\end{aligned}$$

Άρα, $\upsilon = t1$ αφού A/N_τ είναι πυκνό στον H_τ. Άρα $\phi_\tau(\mathrm{A})' = C1$ και συνεπώς η αναπαράσταση $(\mathrm{H}_\tau, \phi_\tau)$ είναι ανάγωγη από το θεώρημα 5 της παρούσας παραγράφου.

Αντιστρόφως, έστω ότι η αναπαράσταση $(\mathrm{H}_\tau, \phi_\tau)$ είναι ανάγωγη τότε αν ρ θετικό γραμμικό συναρτησιακό τέτοιο ώστε $\rho \leq \tau$ από το θεώρημα 2 της παρούσας παραγράφου υπάρχει,

$$\upsilon \in \phi_\tau(\mathrm{A})' \text{ με } 0 \leq \upsilon \leq 1$$

και

$$\rho(\alpha) = \langle \phi_\tau(\alpha)\upsilon(x_\tau), x_\tau \rangle.$$

Όμως, $\phi_\tau(\mathrm{A})' = C1$ και από το θεώρημα 5 υπάρχει $t \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\upsilon = t1$. Άρα $\rho = t\tau$, άρα τ είναι γνήσιο και έχουμε αποδείξει το (1).

Έστω τώρα ότι η A είναι αβελιανή, τότε αν το τ είναι γνήσιο τότε $\phi_\tau(\mathrm{A})' = C1$.

Όμως,

$$\phi_\tau(\mathrm{A}) \subseteq \phi_\tau(\mathrm{A})'.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{B}(\mathrm{H}_\tau) \subseteq \phi_\tau(\mathrm{A})'.$$

Άρα, $\mathrm{B}(\mathrm{H}_\tau) = C1$. Έστω $u, v \in B(H_\tau)$, τότε:

$$\langle uv(x_\tau), (x_\tau) \rangle = u \langle v(x_\tau), (x_\tau) \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle uv(x_\tau), (x_\tau) \rangle = u \langle x_\tau, x_\tau \rangle \; u \langle v(\; x_\tau \;), x_\tau \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle uv(x_\tau),(x_\tau)\rangle = \langle u(x_\tau),(x_\tau)\rangle \langle v(x_\tau),x_\tau\rangle .$$

Άρα, $\tau = \langle \phi_\tau(\bullet)x_\tau , x_\tau \rangle$ είναι πολλαπλασιαστική και συνεπώς χαρακτήρας στην Α.
Αντίστροφα, έστω τ χαρακτήρας στην Α, και έστω ρ ένα θετικό γραμμικό συναρτησιακό στην Α τέτοιο ώστε $\rho \leq \tau$. Αν $\tau(\alpha)=0$ τότε $\tau(\alpha^*\alpha)=0$ και συνεπώς $\rho(\alpha^*\alpha)=0$. Επειδή $|\rho(\alpha)| \leq \rho(\alpha^*\alpha)^{1/2}$ έχουμε, $\rho(\alpha)=0$. Άρα,

$$Ker(\tau) \subseteq Ker(\rho),$$

δηλαδή υπάρχει t τέτοιο ώστε $\rho = t\tau$. Επιλέγουμε α τέτοιο ώστε $\tau(\alpha)=1$. Τότε $\tau(\alpha^*\alpha)=1$. Άρα,

$$0 \leq \rho(\alpha^*\alpha) = t\tau(\alpha^*\alpha) = t \leq \tau(\alpha^*\alpha) = 1.$$

Επομένως $t \in [0,1]$, δηλαδή το τ είναι γνήσιο άρα έχουμε αποδείξει το (2) και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 : Έστω (H,ϕ) μια αναπαράσταση της C*- άλγεβρας Α. Και έστω x ένα μοναδιαίο κυκλικό διάνυσμα της (H,ϕ). Τότε η συνάρτηση,

$$\tau : A \to C \quad , \quad a \mapsto \langle \phi(a)(x), x \rangle$$

είναι κατάσταση της Α και η αναπαράσταση (H,ϕ) είναι ορθομοναδιαίως ισοδύναμη με την αναπαράσταση $(\mathrm{H}_\tau, \phi_\tau)$.
Επιπλέον αν η (H,ϕ) είναι ανάγωγη τότε το τ είναι γνήσιο.

Απόδειξη: Αν $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα της Α τότε επειδή η (H,ϕ) είναι μη-εκφυλισμένη το δίκτυο $(\phi(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει ισχυρά στο id_H. Άρα,

$$\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda) = \lim_\lambda \langle \phi(u_\lambda)(x), x \rangle$$

$$= \langle x, x \rangle = 1.$$

Άρα $\tau \in S(A)$ και για κάθε $a \in A$ έχουμε,

$$\langle \phi_\tau(\alpha)(x_\tau), (x_\tau) \rangle = \tau(\alpha) = \langle \phi(\alpha)(x), (x) \rangle.$$

Άρα $(\mathrm{H}_\tau, \phi_\tau)$ και (H, ϕ) είναι ορθομοναδιαίως ισοδύναμες από το θεώρημα 4. Αν η αναπαράσταση (H, ϕ) είναι ανάγωγη τότε και η αναπαράσταση $(\mathrm{H}_\tau, \phi_\tau)$ είναι ανάγωγη οπότε από το προηγούμενο θεώρημα, το τ είναι γνήσιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 : Έστω H ένας μη- μηδενικός χώρος Hilbert και A = K(H). Αν το $x \in H$ τότε το συναρτησιακό,

$$\omega_x : A \to C, \quad u \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

είναι θετικό και αν το x είναι μοναδιαίο διάνυσμα τότε το ω_x είναι κατάσταση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8 : Έστω A μια C*- άλγεβρα και α ένα στοιχείο της, τότε υπάρχει ανάγωγη αναπαράσταση (H, ϕ) της A τέτοια ώστε:

$$\|\alpha\| = \|\varphi(\alpha)\|, \qquad \alpha \in \mathrm{A}.$$

Απόδειξη: Υπάρχει γνήσια κατάσταση ρ της A τέτοια ώστε,

$$\rho(\alpha^* \alpha) = \|\alpha\alpha^*\|.$$

Από το θεώρημα 6 της παρούσας παραγράφου έχουμε ότι η αναπαράσταση (H_ρ, ϕ_ρ) είναι ανάγωγη. Άρα,

$$\|\alpha\|^2 = \rho(\alpha^*\alpha) = \langle \phi_\rho(\alpha^*\alpha)(x_\rho), x_\rho \rangle$$

$$= \|\phi_\rho(\alpha)(x_\rho)\|^2 \le \|\phi_\rho(\alpha)\|^2 \qquad (1)$$

Όμως,

$$\|\alpha\|^2 \ge \|\phi_\rho(\alpha)\|^2 \qquad (2)$$

Από τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε ότι $\|\alpha\| = \|\varphi_\rho(\alpha)\|$, $\forall \alpha \in \mathrm{A}$.

Άρα υπάρχει αναπαράσταση ϕ τέτοια ώστε $\|\alpha\| = \|\varphi(\alpha)\|$, $\forall \alpha \in \mathrm{A}$

§2. Αριστερά ιδεώδη C*- Αλγεβρών και Κληρονομικές C*- Άλγεβρες

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Έστω B_1 , B_2 κληρονομικές C*- υπάλγεβρες της C*- άλγεβρας A. Και έστω $\mathrm{B}_1 \subseteq \mathrm{B}_2$ και ότι κάθε γραμμικό συναρτησιακό τ της A το οποίο μηδενίζεται στο B_1 να μηδενίζεται και στο B_2. Τότε $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$.

Απόδειξη: Έστω A C*- άλγεβρα με μονάδα και έστω $\alpha \in \mathrm{B}_2$ θετικό στοιχείο. Αν ε >0 τότε το σύνολο,

$$F = \{\tau \in S(A) / \tau(\alpha) \ge \varepsilon\}$$

είναι ασθένως κλειστό στην κλειστή μοναδιαία μπάλα του A* και συνεπώς από το θεώρημα Banach- Alaoglu είναι ασθενώς συμπαγές.

Αν $\tau \in F$ τότε το τ δεν μηδενίζεται παντού στο B_2 άρα δεν μηδενίζεται παντού στο B_1. Επιλέγουμε $\alpha_\tau \in \mathrm{B}_1$ τέτοιο ώστε $\tau(\alpha_\tau) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα ασθενώς ανοιχτό σύνολο U_τ που περιέχει το τ και είναι τέτοιο ώστε $\rho(\alpha_\tau) \neq 0$ για κάθε $\rho \in U_\tau$. Άρα η οικογένεια $(U_\tau)_{\tau \in F}$ σχηματίζει ένα ασθενώς ανοιχτό κάλυμμα του F και επειδή το

F είναι ασθενώς συμπαγές υπάρχει πεπερασμένο σύνολο συναρτησιακών $\tau_1,...,\tau_n \in F$ τέτοιο ώστε $U_{\tau_1} \cup ... \cup U_{\tau_n} \subseteq F$.

Έστω $b = \sum_{j=1}^{n} a^*_{\tau j}\ a_{\tau j}$. Τότε $b \in \mathrm{B}_1$ και για κάθε $\tau \in F$ έχουμε $\tau(b) > 0$ και

$$\tau(b) \geq \tau(\alpha_{\tau j} * \alpha_{\tau j}) \geq \left|\tau(\alpha_{\tau j})\right|^2 .$$

Επειδή το ασθενώς γραμμικό συναρτησιακό $\hat{b} : A^* \to C,\ \tau \mapsto \tau(b)$ είναι θετικό στο F $\exists M > 0$ τέτοιο ώστε $\tau(b) \geq M$ για κάθε $\tau \in F$.

Έστω $c = \frac{\|a\|}{M} \cdot b$. Τότε $c > 0$ και $c \in B_1$. Επίσης,

$$\tau(c) \geq \|a\| \geq \tau(\alpha) \quad (\tau \in F).$$

Έστω τ τυχαία κατάσταση της Α. Αν $\tau(\alpha) < \varepsilon$ τότε,

$$\tau(c + \varepsilon - \alpha) \geq \tau(\varepsilon - \alpha) > 0 .$$

Αν $\tau(\alpha) \geq \varepsilon$ τότε $\tau \in F$ και $\tau(c + \varepsilon - \alpha) \geq \tau(\alpha) + \tau(\varepsilon - \alpha) = \varepsilon > 0$.
Άρα για κάθε τ θετικό στην Α έχουμε $\tau(c + \varepsilon - \alpha) \geq 0$, άρα $c + \varepsilon - \alpha \geq 0$.
Επομένως έχουμε δείξει ότι $\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists c \in B_1^+$ τέτοιο ώστε $c + \varepsilon \geq \alpha$. Όμως η B_1 είναι κληρονομική στην Α άρα από το θεώρημα 6 της §2 του Κεφαλαίου 2, έχουμε $\alpha \in B_1$. Συνεπώς $B_2^+ \subseteq B_1$ άρα $\mathrm{B}_1 \supseteq \mathrm{B}_2$, δηλαδή $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Έστω L_1 , L_2 κλειστά αριστερά ιδεώδη της C*- άλγεβρας Α. Και έστω $L_1 \subseteq L_2$ και ότι κάθε γραμμικό συναρτησιακό τ της Α το οποίο μηδενίζεται στο L_1 να μηδενίζεται και στο L_2. Τότε $L_1 = L_2$.

Απόδειξη: Από το θεώρημα 1 της παραγράφου 2 του κεφαλαίου 2 έχουμε ότι οι $B_1 = L_1 \cap L_1^*$ και η $B_2 = L_2 \cap L_2^*$ είναι κληρονομικές C*-υπάλγεβρες της A. Αν το τ είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό της A το οποίο μηδενίζεται στην $B_1 = L_1 \cap L_1^*$ τότε από την ανισότητα,

$$|\tau(\alpha)|^2 \leq \|\tau\| \tau(\alpha^* \alpha)$$

έχουμε ότι το τ μηδενίζεται στο L_1. Άρα από την υπόθεση έχουμε ότι το τ μηδενίζεται στο L_2 και συνεπώς στην B_2. Άρα από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2$ και συνεπώς $L_1 = L_2$ (από το θεώρημα 1 της παραγράφου 2 του κεφαλαίου 2).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Έστω C κυρτό υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου X. Αν $x \in C$ και $x = ty + (1-t)z \Rightarrow x = y = z$ (όπου, $y, z \in C$ και $0 < t < 1$) τότε, το x ονομάζεται ακραίο σημείο του C.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Έστω L γνήσιο κλειστό αριστερό ιδεώδες της C*- άλγεβρας A. Τότε το σύνολο :

$$R = \{N_\rho \,/\, \rho \in PS(A),\ L \subseteq N_\rho\}$$

Είναι μη – κενό και $L = \bigcap R$.

Απόδειξη: Έστω S το σύνολο των θετικών γραμμικών συναρτησιακών στην A με αύξουσα νόρμα και έστω F το σύνολο των στοιχείων του S για τα οποία ισχύει $L \subseteq N_\tau$. Το συναρτησιακό 0 ανήκει στο F άρα $N_0 = A$ και συνεπώς το F είναι μη-κενό. Επίσης το F είναι ασθενώς κλειστό αφού είναι το εξωτερικό γινόμενο των ασθενώς κλειστών συνόλων, $\{\tau \in S / \tau(a^* a) = 0\}$. Συνεπώς από το θεώρημα Banach-Alaoglu το F είναι ασθενώς συμπαγές.

Έστω E το σύνολο των ακραίων σημείων του F το οποίο είναι μη-κενό και επίσης το F είναι ασθενώς κλειστή κυρτή θήκη του Ε. Από το θεώρημα 4 του παραρτήματος έχουμε ότι,

$$E \subseteq \{0\} \cup PS(A).$$

Αν $E = \{0\}$, τότε $F = 0$ άρα για κάθε $\tau \in S$ το οποίο μηδενίζεται στο L έχουμε ότι $\tau = 0$(αφού $L \subseteq N_\tau$ και συνεπώς $\tau \in F$). Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $L = A$ το οποίο είναι άτοπο επειδή το L είναι γνήσιο. Άρα $E \neq \{0\}$ και συνεπώς $E = \{0\} \cup PS(A)$ άρα το R είναι μη-κενό.

Έστω $L_1 = \bigcap R$, άρα το L_1 είναι κλειστό αριστερό ιδεώδες του A το οποίο περιέχει το L. Αν το τ είναι μη μηδενικό στοιχείο του E τότε $L \subseteq N_\tau$ και συνεπώς $L_1 \subseteq N_\tau$ από τον ορισμό του R. Άρα αν $\alpha \in L_1$ τότε $\tau(\alpha^* \alpha) = 0$ για κάθε $\tau \in E$ άρα, $\tau(\alpha^* \alpha) = 0$ για κάθε $\tau \in F$ αφού το F είναι ασθενώς κλειστή κυρτή θήκη του E. Άρα κάθε συναρτησιακό $\tau \in F$ μηδενίζεται στο L_1. Άρα αφού κάθε συναρτησιακό $\tau \in S$ που μηδενίζεται στο L είναι στοιχείο του F και από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $L = L_1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : Έστω τ κατάσταση της C*- άλγεβρας Α. Τότε η κατάσταση τ είναι γνήσια αν και μόνο αν,

$$Ker(\tau) = N_\tau + N_\tau^*.$$

Απόδειξη: Έστω τ κατάσταση της C*- άλγεβρας Α η οποία είναι γνήσια, τότε η αναπαράσταση (H_τ, ϕ_τ) είναι ανάγωγη. Έστω α αυτοσυζυγές στοιχείο τέτοιο ώστε $a \in Ker(\tau)$ και $a \notin N_\tau$. Τότε τα στοιχεία $a + \mathrm{N}_\tau$ και x_τ είναι ορθογώνια στοιχεία του H_τ αφού,

$$\langle a + N_\tau, x_\tau \rangle = \tau(\alpha) = 0.$$

Άρα αν p είναι προβολή του H_τ στον $C(a+N_\tau)$ τότε,

$$p(a+N_\tau)=a+N_\tau \text{ και } p(x_\tau)=0+N_\tau$$

Από το θεώρημα μεταβατικότητας έχουμε ότι υπάρχει αυτοσυζυγές στοιχείο $b\in A$ τέτοιο ώστε,

$$\phi(b)(a+N_\tau)=a+N_\tau \text{ και } \phi(b)(x_\tau)=0+N_\tau.$$

Άρα τα στοιχεία $c=ba-a$ και b ανήκουν στο N_τ.
Αφού το $a=ba-c$ είναι αυτοσυζυγές έχουμε ότι,

$$a=ba-c=a*b-c*\in N_\tau+N_\tau^*,$$

το οποίο μας δείχνει ότι τα αυτοσυζυγή στοιχεία του $Ker(\tau)$ ανήκουν στο $N_\tau+N_\tau^*$.
Άρα έχουμε $Ker(\tau)\subseteq N_\tau+N_\tau^*$ και συνεπώς $Ker(\tau)=N_\tau+N_\tau^*$.
Αντίστροφα, έστω ότι $Ker(\tau)=N_\tau+N_\tau^*$. Επίσης έστω ότι το ρ είναι θετικό γραμμικό συναρτησιακό της Α τέτοιο ώστε $N_\rho\supseteq N_\tau$. Τότε έχουμε,

$$Ker(\tau)=N_\tau+N_\tau^*\subseteq N_\rho+N_\rho^*\subseteq Ker(\rho).$$

και από τη στοιχειώδη θεωρία της γραμμικής άλγεβρας έχουμε ότι $\rho=t\tau$. Αν $\rho\neq 0$ τότε υπάρχει $a\in A^+$ τέτοιο ώστε $\rho(a)>0$ και συνεπώς ο αριθμός t είναι θετικός. Επιπλέον αν $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ προσεγγιστική μονάδα της A τότε,

$$t=\|\rho\|=\lim_\lambda \rho(u_\lambda)\ \leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda)=1.$$

Άρα $t\in[0,1]$, συνεπώς η κατάσταση τ είναι γνήσια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Έστω Α μια C*- άλγεβρα και I ιδεώδες της Α. Το I ονομάζεται πρότυπο αν υπάρχει $u \in A$ τέτοιο ώστε $a - au$ και $a - ua \in I$, $\forall a \in A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5 : Έστω τ κατάσταση της C*- άλγεβρας A. Τότε η αντιστοιχία $\tau \mapsto \mathrm{N}_\tau$ είναι αμφιμονοσήμαντη από το σύνολο των γνήσιων καταστάσεων της A στο σύνολο R των πρότυπων μεγιστικών αριστερών ιδεωδών της A.

Απόδειξη: Έστω $\tau, \rho \in PS(A)$ και έστω $N_\tau \subseteq N_\rho$ τότε από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε,

$$Ker(\tau) = N_\tau + N_\tau{}^* \subseteq N_\rho + N_\rho{}^* = Ker(\rho).$$

Άρα υπάρχει t τέτοιο ώστε $\rho = t\tau$. Το t είναι θετικό και ίσο με 1, άρα $\rho = \tau$, το οποίο σημαίνει ότι η απεικόνιση $\rho \mapsto \mathrm{N}_\rho$ είναι 1-1.

Αν $\tau \in PS(A)$ τότε $H_\tau = A / N_\tau$ άρα υπάρχει στοιχείο $u \in A$ τέτοιο ώστε $x_\tau = u + N_\tau$. Άρα για κάθε $a \in A$ έχουμε,

$$a + N_\tau = \phi_\tau(a)(x_\tau) = au + N_\tau.$$

Άρα $a - au \in N_\tau$ και συνεπώς N_τ είναι πρότυπο ιδεώδες. Έστω τώρα ότι το L είναι γνήσιο αριστερό ιδεώδες της A το οποίο περιέχει το N_τ. Αφού το L είναι πρότυπο το $\overline{L}$ είναι γνήσιο αριστερό ιδεώδες της A. Άρα, από το θεώρημα 3 της παρούσας παραγράφου, υπάρχει $\rho \in PS(A)$ τέτοιο ώστε $\overline{L} \subseteq N_\rho$ και επειδή $N_\tau \subseteq N_\rho$ έχουμε $\tau = \rho$ άρα,

$$N_\tau = L \Rightarrow N_\tau \in R.$$

Τέλος έστω ότι L είναι τυχόν στοιχείο του R, αφού το L είναι γνήσιο κλειστό αριστερό ιδεώδες της A υπάρχει $\tau \in PS(A)$ τέτοιο ώστε $L \subseteq N_\tau$ (βλέπε θεώρημα 3) και επειδή το L είναι μεγιστικό έχουμε $L = N_\tau$.

§3. Πρωταρχικά Ιδεώδη

Για αβελιανές C* - άλγεβρες η δομή των ιδεωδών σχετίζεται με τα πρότυπα μεγιστικά ιδεώδη τα οποία είναι οι πυρήνες των χαρακτήρων. Στην περίπτωση των μη αβελιανών αλγεβρών το ρόλο των πρότυπων μεγιστικών ιδεωδών τον έχουν τα πρωταρχικά ιδεώδη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 : Έστω L πρότυπο αριστερό ιδεώδες της C*- άλγεβρας A. Τότε υπάρχει ιδεώδες I της A το οποίο είναι το μεγαλύτερο δυνατό που περιέχεται στο L. Αυτό είναι το :

$$I = \{\alpha \in \mathrm{A} / \alpha\mathrm{A} \subseteq L\}.$$

Απόδειξη: Το $I = \{\alpha \in A / \alpha A \subseteq L\}$ είναι ιδεώδες της A. Αφού το L είναι πρότυπο τότε υπάρχει στοιχείο $u \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha - \alpha u \in L$, $\forall \alpha \in A$. Αν $\alpha \in I$ τότε, $\alpha u \in I$ και $\alpha - \alpha u \in I$, άρα $\alpha \in L$. Συνεπώς, $I \subseteq L$. Αν το J είναι ιδεώδες της A που περιέχεται στο L τότε για κάθε $\alpha \in J$ έχουμε,

$$\alpha A \subseteq J \subseteq L \Rightarrow J \subseteq I.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 : Το ιδεώδες $I = \{\alpha \in \mathrm{A} / \alpha\mathrm{A} \subseteq L\}$ της A που αναφέρεται στο θεώρημα 1 ονομάζεται πρωταρχικό ιδεώδες αντίστοιχο του αριστερού ιδεώδους L.

Σχόλιο: — Συμβολίζουμε με Prim(A) το σύνολο των πρωταρχικών ιδεωδών της C*-άλγεβρας A.

— Αν τ είναι γνήσια κατάσταση της C*-άλγεβρας A τότε ο πυρήνας $\ker(\varphi_\tau)$ είναι ιδεώδες το οποίο συνδέεται με το πρότυπο αριστερό ιδεώδες N_τ αφού,

$$\ker(\varphi_\tau) = \{a \in A / \varphi_\tau(a)(A / N_\tau) = 0\}$$

$$= \{a \in A / (aA \subseteq N_\tau) = 0\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 : Έστω Ι ιδεώδες της C*- άλγεβρας A. Τότε το Ι είναι πρωταρχικό αν και μόνο αν υπάρχει μη - μηδενική αναπαράσταση (H, ϕ) της A τέτοια ώστε,

$$\mathrm{I} = \ker(\phi).$$

Απόδειξη: Αν το Ι είναι πρωταρχικό ιδεώδες της A τότε υπάρχει ένα πρότυπο μεγιστικό αριστερό ιδεώδες το οποίο είναι της μορφής N_ρ (θεώρημα 5 της παραγράφου 3 του παρόντος κεφαλαίου) για κάποιο $\rho \in PS(A)$ άρα από το προηγούμενο σχόλιο έχουμε $\mathrm{I} = \ker(\phi_\rho)$. Και επειδή η αναπαράσταση $(\mathrm{H}_\rho, \phi_\rho)$ είναι μη μηδενική ανάγωγη αναπαράσταση το ευθύ του θεωρήματος αποδείχτηκε.

Αντίστροφα, έστω $\mathrm{I} = \ker(\phi)$, όπου (H, ϕ) μη μηδενική ανάγωγη αναπαράσταση της A. Από το θεώρημα 5 της παραγράφου 1 του παρόντος κεφαλαίου έχουμε ότι η (H, ϕ) έχει μοναδιαίο κυκλικό διάνυσμα x.

Το συναρτησιακό

$$\rho : A \to C \quad , \quad a \mapsto \langle \phi(a)(x), x \rangle$$

είναι γνήσια κατάσταση της A και οι αναπαραστάσεις $(\mathrm{H}_\rho, \phi_\rho)$ και (H, ϕ) είναι ορθομοναδιαίως ισοδύναμες, από το θεώρημα 7 της παραγράφου 1 του παρόντος κεφαλαίου. Συνεπώς το ιδεώδες $\mathrm{I} = \ker(\phi_\rho)$ είναι πρωταρχικό ιδεώδες το οποίο σχετίζεται με το πρότυπο μεγιστικό ιδεώδες N_ρ.

Σχόλιο: Αν S είναι ένα υποσύνολο της C*-άλγεβρας A τότε συμβολίζουμε hull(S) το σύνολο των πρωταρχικών ιδεωδών της A που περιέχουν το S.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 : Έστω Ι γνήσιο πρότυπο ιδεώδες της C*- άλγεβρας A. Τότε το hull(I) είναι μη-κενό. Αν το Ι είναι γνήσιο κλειστό ιδεώδες της A τότε:

$$\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\mathrm{hull}(\mathrm{I}))$$

Το οποίο σημαίνει ότι το I είναι το εξωτερικό γινόμενο πρωταρχικών ιδεωδών που το περιέχουν.

Απόδειξη: Αν I είναι γνήσιο πρότυπο ιδεώδες της A τότε από το λήμμα Zorn έχουμε ότι υπάρχει πρότυπο μεγιστικό αριστερό ιδεώδες L της A το οποίο περιέχει το I. Αν J είναι πρωταρχικό ιδεώδες τότε $\mathrm{I} \subseteq J$, αφού $\mathrm{I} \subseteq L$ και συνεπώς $J \in \mathrm{hull}(\mathrm{I})$. Άρα $\mathrm{hull}(\mathrm{I})$ δεν μπορεί να είναι το κενό σύνολο.

Έστω ότι το I είναι γνήσιο κλειστό ιδεώδες της A τότε από τα θεωρήματα 3 και 5 της προηγούμενης παραγράφου έχουμε ότι το σύνολο R των πρότυπων μεγιστικών αριστερών ιδεωδών της A τα οποία περιέχουν το I είναι μη κενό και ότι $\mathrm{I} = \bigcap R$. Αν L είναι πρότυπο μεγιστικό αριστερό ιδεώδες της A τότε,

$$\mathrm{I} \subseteq J \Leftrightarrow \mathrm{I} \subseteq L$$

Και επειδή το $\mathrm{hull}(\mathrm{I})$ δεν μπορεί να είναι το κενό σύνολο και επιπλέον,

$$\mathrm{I} \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{hull}(\mathrm{I})) \subseteq \bigcap R = \mathrm{I}$$

Έχουμε ότι $\mathrm{I} = \mathrm{Ker}(\mathrm{hull}(\mathrm{I}))$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4 : Έστω I ιδεώδες της C*- άλγεβρας A η οποία είναι αβελιανή. Τότε το I είναι πρωταρχικό αν και μόνο αν είναι πρότυπο μεγιστικό ιδεώδες.

Απόδειξη: Αν I είναι πρωταρχικό ιδεώδες της A τότε από το θεώρημα 5 της προηγούμενης παραγράφου υπάρχει $\rho \in PS(A)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{I} = \ker(\phi_\rho)$. Από το θεώρημα 6 της παραγράφου 1 του παρόντος κεφαλαίου έχουμε ότι το ρ είναι χαρακτήρας στην A, άρα $N_\rho = Ker(\rho)$ και συνεπώς $\mathrm{I} = Ker(\rho)$. Άρα I είναι πρότυπο μεγιστικό ιδεώδες της A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2 : Μια C*- άλγεβρα A ονομάζεται πρωταρχική αν το μηδενικό ιδεώδες αυτής είναι πρωταρχικό, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι η A έχει πιστή μη – μηδενική ανάγωγη αναπαράσταση.

Σχόλια: — Αφού κάθε μη μηδενική S C*-άλγεβρα δέχεται γνήσια κατάσταση και κατά συνέπεια μη μηδενική ανάγωγη αναπαράσταση, έχουμε ότι κάθε μη μηδενική απλή C*- άλγεβρα είναι πρωταρχική, επειδή ο πυρήνας κάθε μη μηδενικής ανάγωγης αναπαράστασης είναι το μηδενικό ιδεώδες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 : Ένα κλειστό ιδεώδες μιας C*- άλγεβρας A ονομάζεται πρώτο αν για κάθε J_1, J_2 κλειστά ιδεώδη της A τέτοια ώστε $J_1, J_2 \subseteq I$ να έχουμε $J_1 \subseteq I$ ή $J_2 \subseteq I$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 : Μια C*- άλγεβρα A ονομάζεται πρώτη αν το μηδενικό ιδεώδες αυτής είναι πρώτο. Ισοδύναμα κάθε ζευγάρι μη μηδενικών κλειστών ιδεωδών της A έχει μη μηδενική τομή.
Αποδεικνύεται ότι αν I είναι ένα πρωταρχικό ιδεώδες της C*- άλγεβρας A τότε το I είναι πρώτο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Gerard J. Murphy, C*-algebras and Operator Theory, Academic Press, 1990

[2] J.B. Conway, A course in Functional Analysis, Springer-Verlag, 1985

[3] R.V Kadison – J.R. Ringrose, Fundamentals of the Theory of Operator Algebras, Academic Press, 1983.

[4] Σ. Καρανάσιος, Σημειώσεις Παραδόσεων C*-Αλγεβρών, Ε.Μ.Π., 2006.