Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Τεχνητή Νοημοσύνη: Άσκηση 2

Διονύσης Ζήνδρος (03106601)

Ζήτημα πρώτο

(i) X / α, Y / c, Z / c

(ii) Είναι αδύνατη η ενοποίηση διότι θα πρέπει X = α = β, όμως δεν γνωρίζουμε αν α = β.

(iii) X / Bill, Y / c, και δίνουμε τέτοια ερμηνεία στη συνάρτηση farther ώστε father(Bill) = c.

(iv) X / David, Y / George, και δίνουμε τέτοια ερμηνεία στη συνάρτηση father ώστε father(David) = George.

Ζήτημα δεύτερο

(α)

Η πρόταση $\exists x \forall y\, R(x, y)$ συνεπάγεται την $\forall y \exists x\, R(x, y)$. Πράγματι, για εκείνο το x που υπάρχει και ισχύει η πρώτη πρόταση, ισχύει και η δεύτερη. Αυτό φαίνεται εύκολα από το γεγονός ότι στην πρώτη πρόταση, η ύπαρξη του x μπορεί να αντικατασταθεί από μία σταθερά Skolem c που δεν εξαρτάται από τίποτα, ενώ στη δεύτερη πρόταση, η ύπαρξη του x μπορεί να αντικατασταθεί από μία συνάρτηση Skolem f(y) που εξαρτάται από μία μεταβλητή (την y) την οποία μπορούμε να αγνοήσουμε.

Αντίθετα, αν γνωρίζουμε ότι ισχύει η δεύτερη πρόταση, ενδέχεται η συναρτηση Skolem f(y) να εξαρτάται από το y και να μην μπορεί να αντικατασταθεί από σταθερά. Πραγματικά, ένα τέτοιο αντιπαράδειγμα υπάρχει στους φυσικούς αριθμούς:

Κάθε αριθμός έχει αντίθετο:

$\forall y \exists x (x = -y)$

Όμως δεν υπάρχει ένας αριθμός που να είναι αντίθετος όλων:

$\neg(\exists x \forall y (x = -y))$

(β)

Η αρχική λογική πρόταση είναι η:

$\exists x \forall y \forall z ((P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(x) \Rightarrow Q(x)))$

Εισάγοντας τη σταθερά Skolem c και απελευθερώνοντας τις μεταβλητές x, y έχουμε την πρόταση δίχως ποσοδείκτες:

$(P(y) \Rightarrow Q(z)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(c))$

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνεπαγωγής έχουμε:

$(Q(z) \vee \neg P(y)) \Rightarrow (Q(c) \vee \neg P(c))$

$Q(c) \vee \neg P(c) \vee \neg(Q(z) \vee \neg P(y))$

Έπειτα εργαζόμενοι με το νόμο του DeMorgan παίρνουμε:

$(Q(c) \vee \neg P(c)) \vee (\neg Q(z) \wedge P(y))$

Τέλος, εφαρμόζοντας επιμεριστική ιδιότητα παίρνουμε:

$(Q(c) \vee \neg P(c) \vee \neg Q(z)) \wedge (Q(c) \vee \neg P(c) \vee P(y))$

Η πρόταση είναι τώρα σε conjunctive normal form:

$\{ [Q(c), \neg P(c), \neg Q(z)], [Q(c), \neg P(c), P(y)] \}$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τις πιθανές περιπτώσεις ερμηνείας με τον αλγόριθμο της ανάλυσης. Έστω ότι είναι $P(y)$. Τότε μέσω της ερμηνείας c / z έχουμε:

$\{ [Q(z), \neg P(z), \neg Q(z)], [Q(z), \neg P(z), P(y)] \}$

Ο δεύτερος όρος αληθεύει διότι $P(y)$ και άρα:

$\{ [Q(z), \neg P(z), \neg Q(z)] \}$

Ο πρώτος όρος αληθεύει διότι $Q(z) \vee \neg Q(z)$ και άρα το αποτέλεσμα θα είναι το κενό σύνολο και η αλήθεια της πρότασης έχει αποδειχθεί.

Έστω, τώρα, ότι $\neg P(y)$. Τότε μέσω της ερμηνείας c / y έχουμε:

$\{ [Q(y), \neg P(y), \neg Q(z)], [Q(y), \neg P(y), P(y)] \}$

Ο πρώτος όρος, τώρα, αληθεύει, διότι $\neg P(y)$ και άρα:

$\{ [Q(y), \neg P(y), P(y)] \}$

Ο δεύτερος όρος αληθεύει διότι $P(y) \vee \neg P(y)$ και άρα το αποτέλεσμα θα είναι το κενό σύνολο και η αλήθεια της πρότασης έχει αποδειχθεί.