ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

3η Γραπτή Άσκηση

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα

Σπουδαστής:
Διονύσης ΖΗΝΔΡΟΣ (06601)
<dionyziz@gmail.com>

Διδάσκοντες:
Στάθης ΖΑΧΟΣ
Δημήτρης ΦΩΤΑΚΗΣ

24 Ιανουαρίου 2011

Άσκηση 1

Για να ελέγξουμε αν ο γράφος είναι διμερής, χρωματίζουμε μία ακμή αυθαίρετα και στη συνέχεια για κάθε χρωματισμένη ακμή χρωματίζουμε τους γείτονές της με το αντίθετο χρώμα έως ότου ολοκληρωθεί η διαδικασία ή καταλήξουμε σε αντίφαση.

Algorithm 1 Άσκηση 1

```
procedure BIPARTITE(V, E)
    for v ∈ V do
        color[v] ← ∅
    q ← {V[0]}
    color[V[0]] ← ⊤
    while q ≠ ∅ do
        s ← remove and return an element of q
        paint ← ¬color[s]
        for neighbour t of s do
            if color[t] ≠ ∅ then
                if color[t] ≠ paint then
                    return ⊥
            else
                color[t] ← paint
                q ← q ∪ {t}
    return ⊤
```

Άσκηση 2

Algorithm 2 Άσκηση 2

```
procedure ShortestCount(V, E, s, t)
    for v ∈ V do
        visited[v] ← 0
        distance[v] ← ∞
    visited[s] ← 1
    distance[s] ← 0
    q ← EmptyQueue()
    Push(q, s)
    while ¬Empty(q) do
        u ← Pop(q)
        if u = t then
            return visited[t]
        for neighbour v of u do
            if distance[v] = ∞ then
                Push(q, u)
            if distance[u] + 1 ≤ distance[v] then
                distance[v] ← distance[u] + 1
                visited[v] ← visited[v] + visited[u]
```

Άσκηση 3

(α)

Ο γράφος της άσκησης 4 με $L = \{C\}$ είναι ένα παράδειγμα γράφου που έχει διαφορετικό ΕΣΔ υπό περιορισμούς.

(β)

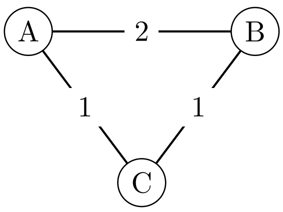
Algorithm 3 Άσκηση 3

```
procedure ConstraintedMST(V, E, L)
    if |V| ≤ 2 then
        return E
    for v ∈ V do
        adj[v] ← ∅
        best[v] ← ∞
    for e = (u, v, w) ∈ E do
        if u ∈ L ⊕ v ∈ L then
            for s ∈ {u, v} do
                if s ∈ L then
                    if w < best[s] then
                        best[s] ← w
                        adj[s] ← {e}
        else
            adj[v] ← adj[v] ∪ {e}
    return Prim(V, adj)
```

Άσκηση 4

(α)

Ο ακόλουθος γράφος έχει μοναδικό ΕΣΔ, αλλά περιέχει ακμές ίδιου βάρους:



(β)

Ο γράφος του υποερωτήματος (α) έχει μοναδικό ΕΣΔ αλλά περιέχει ακμές ίδιου βάρους που είναι οι ελάχιστες που διασχίζουν την ίδια τομή.

Λήμμα. *Κάθε ακμή ενός ΕΣΔ ενός συνεκτικού μη κατευθυνόμενου ζυγισμένου γράφου είναι η ελάχιστη που διασχίζει κάποιο κόψιμο.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ με ένα ΕΣΔ του $T \subseteq E$ και έστω ότι υπάρχει κάποια ακμή $e = (u, v) \in T$ τέτοια ώστε να μην υπάρχει κόψιμο του Γ το οποίο να είναι η ελάχιστη που το διασχίζει. Τότε έστω K το ΕΣΔ που κατασκευάζει ο αλγόριθμος του Kruskal. Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, υπάρχει κάποιο βήμα κατά το οποίο γίνεται ένωση των ανεξάρτητων συνόλων που περιέχουν τους κόμβους u και v μέσω κάποιας ακμής f η οποία είναι ελάχιστη σε ένα κόψιμο το οποίο διασχίζει και η e και άρα $w(f) < w(e)$. Όμως στο T η ακμή e μπορεί να αντικατασταθεί από την f και το δέντρο να παραμείνει συνεκτικό και με βάρος $w(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) < w(T)$. Άρα το T δεν είναι ΕΣΔ, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση. □

Λήμμα. *Κάθε συνεκτικός μη κατευθυνόμενος ζυγισμένος γράφος στον οποίο για κάθε τομή η ακμή ελάχιστου βάρους που τη διασχίζει είναι μοναδική έχει μοναδικό ΕΣΔ.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ και δύο ΕΣΔ του, $T \subseteq E$ και $T' \subseteq E$, με $T \neq T'$ και $w(T) = w(T')$.

Τότε, επειδή $T \neq T$, θα υπάρχει κάποια ακμή $e = (u, v)$ με $e \in T \land e \notin T'$. Από το παραπάνω λήμμα, η e θα είναι η ελάχιστη που διασχίζει κάποιο κόψιμο του T, έστω S.

Τώρα, επειδή το T' είναι συνεκτικό δέντρο, θα υπάρχει μοναδικό μονοπάτι από τον κόμβο u στον κόμβο v που διασχίζει το S με κάποια ακμή, έστω $e' \neq e$. Αφού $w(e) < w(e')$, αντικαθιστώντας την ακμή e' με την e στο T' παίρνουμε ένα συνεκτικό δέντρο με βάρος $w(T' \cup \{e\} \setminus \{e'\}) < w(T')$. Άρα το T' δεν είναι ελάχιστο συνεκτικό δέντρο, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Άρα το ΕΣΔ είναι μοναδικό. □

(γ)

(δ)

Άσκηση 5

(α)

Λήμμα. *Σε ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο ζυγισμένο γράφο, για κάθε κύκλο υπάρχει ΕΣΔ που δεν περιέχει την ακμή μέγιστου βάρους του κύκλου αυτού.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ με κάποιον κύκλο C και έστω ένα ΕΣΔ $T \subseteq E$ που περιέχει την ακμή e μέγιστου βάρους του C. Τότε έστω το δάσος $T \setminus \{e\}$ που θα αποτελείται από δύο συνδεδεμένους υπογράφους. Θα υπάρχει μία ακμή $f \in E$ που θα συνδέει αυτούς τους δύο συνδεδεμένους υπογράφους με $f \neq e$ και άρα $w(f) \leq w(e)$. Αντικαθιστώντας την e με την f στο T προκύπτει ένα συνεκτικό δέντρο με βάρος $w(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) \leq w(T)$. Άρα το $T \cup \{f\} \setminus \{e\}$ είναι ΕΣΔ. □

(β)

(γ)