Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

3η Γραπτή Άσκηση

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα

Σπουδαστής:
Διονύσης Ζηνδρος (06601)
<dionyziz@gmail.com>

Διδάσκοντες:
Στάθης Ζαχος
Δημήτρης Φωτακης

24 Ιανουαρίου 2011

Άσκηση 1

Για να ελέγξουμε αν ο γράφος είναι διμερής, χρωματίζουμε μία ακμή αυθαίρετα και στη συνέχεια για κάθε χρωματισμένη ακμή χρωματίζουμε τους γείτονές της με το αντίθετο χρώμα έως ότου ολοκληρωθεί η διαδικασία ή καταλήξουμε σε αντίφαση.

Algorithm 1 Άσκηση 1

```
procedure Bipartite(V, E)
    for v ∈ V do
        color[v] ← ∅
    q ← {V[0]}
    color[V[0]] ← ⊤
    while q ≠ ∅ do
        s ← remove and return an element of q
        paint ← ¬color[s]
        for neighbour t of s do
            if color[t] ≠ ∅ then
                if color[t] ≠ paint then
                    return ⊥
            else
                color[t] ← paint
                q ← q ∪ {t}
    return ⊤
```

Άσκηση 2

Algorithm 2 Άσκηση 2

```
procedure ShortestCount(V, E, s, t)
    for v ∈ V do
        visited[v] ← 0
        distance[v] ← ∞
    visited[s] ← 1
    distance[s] ← 0
    q ← EmptyQueue()
    Push(q, s)
    while ¬Empty(q) do
        u ← Pop(q)
        if u = t then
            return visited[t]
        for neighbour v of u do
            if distance[v] = ∞ then
                Push(q, u)
            if distance[u] + 1 ≤ distance[v] then
                distance[v] ← distance[u] + 1
                visited[v] ← visited[v] + visited[u]
```

Άσκηση 3

(α)

Ο γράφος της άσκησης 4 με $L = \{C\}$ είναι ένα παράδειγμα γράφου που έχει διαφορετικό ΕΣΔ υπό περιορισμούς.

(β)

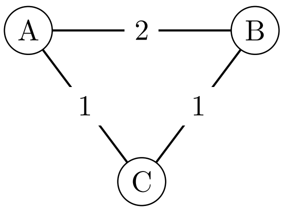
Algorithm 3 Άσκηση 3

procedure ConstraintedMST(V, E, L)
    if $|V| \leq 2$ **then**
        return E
    for $v \in V$ **do**
        $adj[v] \leftarrow \emptyset$
        $best[v] \leftarrow \infty$
    for $e = (u, v, w) \in E$ **do**
        if $u \in L \oplus v \in L$ **then**
            for $s \in \{u, v\}$ **do**
                if $s \in L$ **then**
                    if $w < best[s]$ **then**
                        $best[s] \leftarrow w$
                        $adj[s] \leftarrow \{e\}$
        else
            $adj[v] \leftarrow adj[v] \cup \{e\}$
    return Prim(V, adj)

Άσκηση 4

(α)

Ο ακόλουθος γράφος έχει μοναδικό ΕΣΔ, αλλά περιέχει ακμές ίδιου βάρους:



(β)

Ο γράφος του υποερωτήματος (α) έχει μοναδικό ΕΣΔ αλλά περιέχει ακμές ίδιου βάρους που είναι οι ελάχιστες που διασχίζουν την ίδια τομή.

Λήμμα. *Κάθε ακμή ενός ΕΣΔ ενός συνεκτικού μη κατευθυνόμενου ζυγισμένου γράφου είναι η ελάχιστη που διασχίζει κάποιο κόψιμο.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ με ένα ΕΣΔ του $T \subseteq E$ και έστω ότι υπάρχει κάποια ακμή $e = (u, v) \in T$ τέτοια ώστε να μην υπάρχει κόψιμο του Γ το οποίο να είναι η ελάχιστη που το διασχίζει. Τότε έστω K το ΕΣΔ που κατασκευάζει ο αλγόριθμος του Kruskal. Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, υπάρχει κάποιο βήμα κατά το οποίο γίνεται ένωση των ανεξάρτητων συνόλων που περιέχουν τους κόμβους u και v μέσω κάποιας ακμής f η οποία είναι ελάχιστη σε ένα κόψιμο το οποίο διασχίζει και η e και άρα $w(f) < w(e)$. Όμως στο T η ακμή e μπορεί να αντικατασταθεί από την f και το δέντρο να παραμείνει συνεκτικό και με βάρος $w(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) < w(T)$. Άρα το T δεν είναι ΕΣΔ, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση. $\square$

Λήμμα. *Κάθε συνεκτικός μη κατευθυνόμενος ζυγισμένος γράφος στον οποίο για κάθε τομή η ακμή ελάχιστου βάρους που τη διασχίζει είναι μοναδική έχει μοναδικό ΕΣΔ.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ και δύο ΕΣΔ του, $T \subseteq E$ και $T' \subseteq E$, με $T \neq T'$ και $w(T) = w(T')$.

Τότε, επειδή $T \neq T$, θα υπάρχει κάποια ακμή $e = (u, v)$ με $e \in T \wedge e \notin T'$. Από το παραπάνω λήμμα, η e θα είναι η ελάχιστη που διασχίζει κάποιο κόψιμο του T, έστω S.

Τώρα, επειδή το T' είναι συνεκτικό δέντρο, θα υπάρχει μοναδικό μονοπάτι από τον κόμβο u στον κόμβο v που διασχίζει το S με κάποια ακμή, έστω $e' \neq e$. Αφού $w(e) < w(e')$, αντικαθιστώντας την ακμή e' με την e στο T' παίρνουμε ένα συνεκτικό δέντρο με βάρος $w(T' \cup \{e\} \setminus \{e'\}) < w(T')$. Άρα το T' δεν είναι ελάχιστο συνεκτικό δέντρο, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Άρα το ΕΣΔ είναι μοναδικό. $\square$

(γ)

Λήμμα. *Το ΕΣΔ ενός συνεκτικού ζυγισμένου μη κατευθυνόμενου γράφου είναι μοναδικό ανν κάθε ακμή του είναι η μοναδική ελάχιστη σε κάποιο κόψιμο του γράφου.*

Απόδειξη. Έστω $G = (V, E, w)$ ένας τέτοιος γράφος και έστω K ένα ΕΣΔ του.

Θα δείξουμε ότι αν κάθε ακμή του K είναι η μοναδική ελάχιστη σε κάποιο κόψιμο, τότε το δέντρο είναι μοναδικό. Πράγματι, έστω ότι υπάρχει ΕΣΔ $T \neq K$. Τότε θα υπάρχει ακμή $e = (u, v) \in K \wedge e \notin T$. Από την υπόθεση, υπάρχει κόψιμο S το οποίο η e διασχίζει ως μοναδική ελάχιστη. Επειδή το T είναι συνδετικό, θα υπάρχει μοναδικό μονοπάτι που συνδέει τους κόμβους u και v το οποίο διασχίζει το κόψιμο S χρησιμοποιώντας κάποια ακμή $f \neq e$. Επειδή η e είναι ελάχιστη, θα είναι $w(e) < w(f)$. Αντικαθιστώντας την f με την e στο T προκύπτει ΕΣΔ με $w(T \cup \{e\} \setminus \{f\}) < w(T)$ κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση. Άρα το K είναι μοναδικό.

Αντίστροφα, έστω ότι το K είναι μοναδικό. Τότε ο αλγόριθμος του Kruskal θα δώσει το K. Έστω, τώρα, ότι υπάρχει κάποια ακμή $e \in K$ που δεν είναι ελάχιστη σε κανένα κόψιμο του G. Τότε ο αλγόριθμος δεν θα μπορούσε να την έχει επιλέξει ποτέ, και άρα $e \notin K$. Αυτό αποτελεί αντίφαση, και άρα όλες οι ακμές είναι ελάχιστες σε κάποιο κόψιμο. $\square$

(δ)

Άσκηση 5

(α)

Λήμμα. *Σε ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο ζυγισμένο γράφο, για κάθε κύκλο υπάρχει ΕΣΔ που δεν περιέχει την ακμή μέγιστου βάρους του κύκλου αυτού.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ με κάποιον κύκλο C και έστω ένα ΕΣΔ $T \subseteq E$ που περιέχει την ακμή e μέγιστου βάρους του C. Τότε έστω το δάσος $T \setminus \{e\}$ που θα αποτελείται από δύο συνδεδεμένους υπογράφους. Θα υπάρχει μία ακμή $f \in E$ που θα συνδέει αυτούς τους δύο συνδεδεμένους υπογράφους με $f \neq e$ και άρα $w(f) \leq w(e)$. Αντικαθιστώντας την e με την f στο T προκύπτει ένα συνεκτικό δέντρο με βάρος $w(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) \leq w(T)$. Άρα το $T \cup \{f\} \setminus \{e\}$ είναι ΕΣΔ. $\square$

(β)

Λήμμα. *Ο αντίστροφος αλγόριθμος του Kruskal είναι ορθός.*

Απόδειξη. Σε κάθε βήμα i, ο αλγόριθμος διατηρεί τον ελάχιστου κόστους συνδετικό υπόγραφο G_i με ακριβώς $j(i) = m - i + 1$ ακμές. Πράγματι, στο 1ο βήμα, ο υπόγραφος είναι ίσος με τον αρχικό γράφο και άρα συνδετικός και ελάχιστος. Έστω ότι ο υπόγραφος είναι συνδετικός και ελάχιστος στο i-οστό βήμα. Τότε έστω $e = (u, v)$ η επόμενη ακμή που θα επιλεγεί.

Στην περίπτωση που η e είναι γέφυρα του G_i ανάμεσα σε δύο συνδεδεμένα τμήματα C_1 και C_2, δηλαδή διασχίζει το κόψιμο $S = (C_1, C_2)$ του αρχικού γράφου, η ακμή αυτή δε θα λείπει από κανέναν ελάχιστο συνδετικό υπογράφο G_k με $k > i$. Αυτό φαίνεται ως εξής. Έστω ότι η e έλειπε από τον G_k· τότε αυτός θα περιείχε κάποια ακμή $f \neq e$ που διασχίζει το S για να είναι συνδεδεμένος. Όμως θα είναι $w(f) > w(e)$ διότι, λόγω άπληστης ιδιότητας, η f είχε αφαιρεθεί πριν το i-οστό βήμα αφού η e ήταν γέφυρα του G_i. Αντικαθιστώντας την f με την e λαμβάνουμε ένα συνδετικό υπόγραφο ίδιου πλήθος ακμών με βάρος $w(G_k \cup \{e\} \setminus \{f\}) < w(G_k)$. Άρα το G_k δεν θα ήταν ελάχιστο χωρίς την ύπαρξη της e. Συνεπώς μπορούμε με ασφάλεια να διατηρήσουμε την e στον υπογράφο και να προχωρήσουμε στην επόμενη ακμή στο ίδιο βήμα.

Στην περίπτωση που η e δεν είναι γέφυρα του G_i τότε ανήκει σε ένα κύκλο του G_i. Εργαζόμενοι παρόμοια όπως στο παραπάνω θεώρημα, είναι εμφανές ότι η e δεν ανήκει στον υπόγραφο G_{i+1}. Την αφαιρούμε, λοιπόν, και προχωράμε στο επόμενο βήμα.

Χρησιμοποιώντας, τώρα, τη μαθηματική επαγωγή, έχουμε αποδείξει την αμετάβλητη ιδιότητα της επανάληψης. Τέλος, ο ελάχιστος συνδετικός υπόγραφος με ακριβώς $n-1$ είναι ΕΣΔ. $\square$

(γ)