ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

3η Γραπτή Άσκηση

Αλγόριθμοι & Πολυπλοκότητα

Σπουδαστής:
Διονύσης ΖΗΝΔΡΟΣ (06601)
<dionyziz@gmail.com>

Διδάσκοντες:
Στάθης ΖΑΧΟΣ
Δημήτρης ΦΩΤΑΚΗΣ

24 Ιανουαρίου 2011

Άσκηση 1

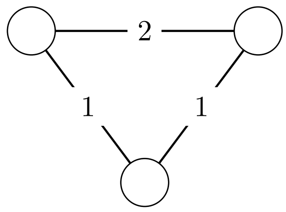
Άσκηση 2

Άσκηση 3

Άσκηση 4

(α)

Ο ακόλουθος γράφος έχει μοναδικό ΕΣΔ, αλλά περιέχει ακμές ίδιου βάρους:



(β)

Ο γράφος του υποερωτήματος (α) έχει μοναδικό ΕΣΔ αλλά περιέχει ακμές ίδιου βάρους που είναι οι ελάχιστες που διασχίζουν την ίδια τομή.

Λήμμα. *Κάθε ακμή ενός ΕΣΔ ενός συνεκτικού μη κατευθυνόμενου ζυγισμένου γράφου είναι η ελάχιστη που διασχίζει κάποιο κόψιμο.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ με ένα ΕΣΔ του $T \subseteq E$ και έστω ότι υπάρχει κάποια ακμή $e = (u, v) \in T$ τέτοια ώστε να μην υπάρχει κόψιμο του Γ το οποίο να είναι η ελάχιστη που το διασχίζει. Τότε έστω K το ΕΣΔ που κατασκευάζει ο αλγόριθμος του Kruskal. Κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου, υπάρχει κάποιο βήμα κατά το οποίο γίνεται ένωση των ανεξάρτητων συνόλων που περιέχουν τους κόμβους u και v μέσω κάποιας ακμής f η οποία είναι ελάχιστη σε ένα κόψιμο το οποίο διασχίζει και η e και άρα $w(f) < w(e)$. Όμως στο T η ακμή e μπορεί να αντικατασταθεί από την f και το δέντρο να παραμείνει συνεκτικό και με βάρος $w(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) < w(T)$. Άρα το T δεν είναι ΕΣΔ, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση. □

Λήμμα. *Κάθε συνεκτικός μη κατευθυνόμενος ζυγισμένος γράφος στον οποίο για κάθε τομή η ακμή ελάχιστου βάρους που τη διασχίζει είναι μοναδική έχει μοναδικό ΕΣΔ.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ και δύο ΕΣΔ του, $T \subseteq E$ και $T' \subseteq E$, με $T \neq T'$ και $w(T) = w(T')$.

Τότε, επειδή $T \neq T$, θα υπάρχει κάποια ακμή $e = (u, v)$ με $e \in T \wedge e \notin T'$. Από το παραπάνω λήμμα, η e θα είναι η ελάχιστη που διασχίζει κάποιο κόψιμο του T, έστω S.

Τώρα, επειδή το T' είναι συνεκτικό δέντρο, θα υπάρχει μοναδικό μονοπάτι από τον κόμβο u στον κόμβο v που διασχίζει το S με κάποια ακμή, έστω $e' \neq e$. Αφού $w(e) < w(e')$, αντικαθιστώντας την ακμή e' με την e στο T' παίρνουμε ένα συνεκτικό δέντρο με βάρος $w(T' \cup \{e\} \setminus \{e'\}) < w(T')$. Άρα το T' δεν είναι ελάχιστο συνεκτικό δέντρο, κάτι το οποίο αποτελεί αντίφαση.

Άρα το ΕΣΔ είναι μοναδικό. □

(γ)

(δ)

Άσκηση 5

(α)

Λήμμα. *Σε ένα συνεκτικό κατευθυνόμενο ζυγισμένο γράφο, για κάθε κύκλο υπάρχει ΕΣΔ που δεν περιέχει την ακμή μέγιστου βάρους του κύκλου αυτού.*

Απόδειξη. Έστω τέτοιος γράφος $G = (V, E, w)$ με κάποιον κύκλο C και έστω ένα ΕΣΔ $T \subseteq E$ που περιέχει την ακμή e μέγιστου βάρους του C. Τότε έστω το δάσος $T \setminus \{e\}$ που θα αποτελείται από δύο συνδεδεμένους υπογράφους. Θα υπάρχει μία ακμή $f \in E$ που θα συνδέει αυτούς τους δύο συνδεδεμένους υπογράφους με $f \neq e$ και άρα $w(f) \leq w(e)$. Αντικαθιστώντας την e με την f στο T προκύπτει ένα συνεκτικό δέντρο με βάρος $w(T \cup \{f\} \setminus \{e\}) \leq w(T)$. Άρα το $T \cup \{f\} \setminus \{e\}$ είναι ΕΣΔ. □

(β)

(γ)