MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

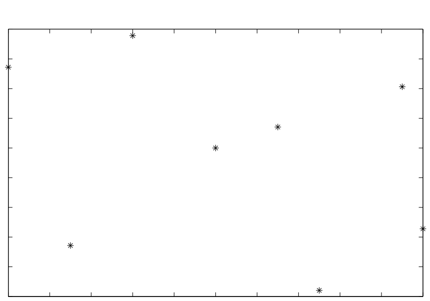
NOTAS DE CLASE - SEMANA 05

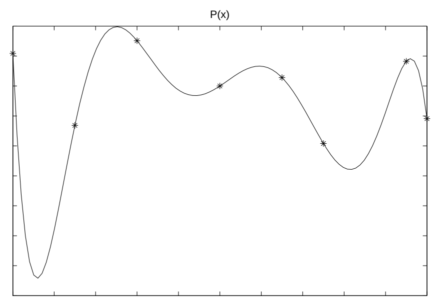
INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN POLINOMIAL

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

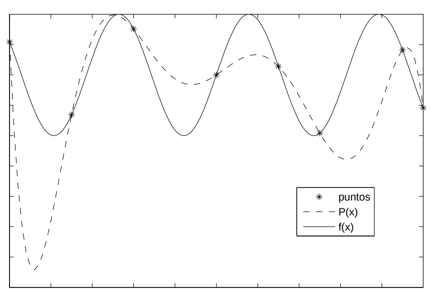
Consideremos los problemas:

- Dado un conjunto de $n+1$ puntos (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_i \neq x_j$ y queremos hallar un polinomio p de menor grado posible que satisface la condición $p(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, n$, llamada condición de interpolación. El polinomio p es de grado menor o igual a n y recibe el nombre de ***polinomio interpolante*** y los x_i reciben el nombre de *nodos de la interpolación*.





- Conocida una función f queremos aproximarla por medio de un polinomio. Una forma de hacerlo es basados en la interpolación, esto es, tomamos un conjunto de $n+1$ nodos x_0, $x_1, \ldots, x_n$ y hallamos el polinomio interpolante p para los $n+1$ puntos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.



Ambos casos se reducen a hallar el polinomio interpolante para la nube de $n+1$ puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$. Veamos como hallar tal polinomio.

★ POLINOMIO INTERPOLANTE DE LAGRANGE

Consideremos primero: dados los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1), hallemos el polinomio p de grado menor o igual a uno que pasa por ellos, es decir, $p(x_0) = y_0$ y $p(x_1) = y_1$. Dicho polinomio esta dado por (la ecuación de la recta):

$$p(x) = y_0 + \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}(x - x_0)$$

que también puede ser escrito por

$$p(x) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

si denotamos $\mathcal{L}_0(x) := \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ y $\mathcal{L}_1(x) := \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ el polinomio que interpola a los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) esta dado por:

$$p(x) = y_0\mathcal{L}_0(x) + y_1\mathcal{L}_1(x)$$

donde los polinomios $\mathcal{L}_0$ y $\mathcal{L}_1$ satisfacen la propiedad

$$\mathcal{L}_0(x_0) = 1, \qquad \mathcal{L}_0(x_1) = 0, \qquad \mathcal{L}_1(x_0) = 0, \qquad \mathcal{L}_1(x_1) = 1$$

que permiten verificar rápidamente que el polinomio p satisface la condición de interpolación.

Ahora consideremos los $n+1$ puntos (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_i \neq x_j$ y encontremos una expresión similar para el polinomio p:

$$p(x) = y_0\mathcal{L}_0(x) + y_1\mathcal{L}_1(x) + y_2\mathcal{L}_2(x) + \ldots + y_n\mathcal{L}_n(x)$$

donde los polinomios $\mathcal{L}_i$ deben cumplir con:

$$\mathcal{L}_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

para que p interpole todos los puntos. Si queremos que $\mathcal{L}_i$ se anule en $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ tomamos factores de la forma $(x - x_j)$, así:

$$(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

ahora necesitamos que $\mathcal{L}_i(x_i) = 1$ y para ello tenemos la expresión general:

$$\mathcal{L}_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

obteniendo un polinomio de grado menor o igual a n que interpola los $n+1$ puntos. El polinomio p es llamado ***polinomio interpolante de Lagrange***.

> **Teorema.** *Si x_0, $x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ números (nodos) distintos y si f es una función cuyos valores están dados en esos números, entonces existe un único polinomio p_n de grado a lo más n, con la propiedad de que $f(x_i) = p_n(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Este polinomio está dado por*
>
> $$p_n(x) = f(x_0)\mathcal{L}_0(x) + f(x_1)\mathcal{L}_1(x) + f(x_2)\mathcal{L}_2(x) + \ldots + f(x_n)\mathcal{L}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x)$$
>
> *donde los **coeficientes polinómicos de Lagrange** $\mathcal{L}_i$ estan dados por*
>
> $$\mathcal{L}_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Ejemplo Un automóvil realiza un recorrido por una carretera recta y se cronometra su recorrido en varios puntos. Los datos recabados de las observaciones se incluyen en la tabla adjunta, donde el tiempo se indica en segundos y la distancia en pies.

Tiempo	0	3	5	8	13
Distancia	0	225	383	623	993

Use el polinomio interpolante de Lagrange para predecir la posición del automóvil y su velocidad cuando $t = 10s$.

Solución: Tenemos 5 nodos, por lo tanto el grado del polinomio es menor o igual a 4. El polinomio interpolante de Lagrange tiene la forma

$$p_4(x) = y_0\mathcal{L}_0(x) + y_1\mathcal{L}_1(x) + y_2\mathcal{L}_2(x) + y_3\mathcal{L}_3(x) + y_4\mathcal{L}_4(x)$$

donde

$x_0 = 0$	$x_1 = 3$	$x_2 = 5$	$x_3 = 8$	$x_4 = 13$
$y_0 = 0$	$y_1 = 225$	$y_2 = 383$	$y_3 = 623$	$y_4 = 993$

luego

$$p_4(x) = 0\,\mathcal{L}_0(x) + 225\,\mathcal{L}_1(x) + 383\,\mathcal{L}_2(x) + 623\,\mathcal{L}_3(x) + 993\,\mathcal{L}_4(x).$$

Calculamos $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ y $\mathcal{L}_4$ ya que el coeficiente que acompaña a $\mathcal{L}_0$ es el cero

$$\mathcal{L}_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} = \frac{(x-0)(x-5)(x-8)(x-13)}{(3-0)(3-5)(3-8)(3-13)} = \frac{1}{-300}x(x-5)(x-8)(x-13)$$

$$\mathcal{L}_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-8)(x-13)}{(5-0)(5-3)(5-8)(5-13)} = \frac{1}{240}x(x-3)(x-8)(x-13)$$

$$\mathcal{L}_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)(x-13)}{(8-0)(8-3)(8-5)(8-13)} = \frac{1}{-600}x(x-3)(x-5)(x-13)$$

$$\mathcal{L}_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-5)(x-8)}{(13-0)(13-3)(13-5)(13-8)} = \frac{1}{5200}x(x-3)(x-5)(x-8)$$

por lo tanto el polinomio interpolante de Lagrange es

$$p_4(x) = -\frac{225}{300}x(x-5)(x-8)(x-13) + \frac{383}{240}x(x-3)(x-8)(x-13) - \frac{623}{600}x(x-3)(x-5)(x-13) + \frac{993}{5200}x(x-3)(x-5)(x-8)$$

$$p_4(x) = \frac{37263}{520}x + \frac{831}{650}x^2 - \frac{131}{2600}x^3 - \frac{1}{650}x^4.$$

Dado que la velocidad es la derivada de la distancia, evaluando en $t = 10$

$$p_4(10) = \frac{40491}{52} \approx 778.6731$$
$$p_4'(10) = \frac{831}{325}10 - \frac{393}{2600}10^2 - \frac{2}{325}10^3 + \frac{37263}{520} \approx 75.9596$$

La posición del automóvil a los 10 segundos es aproximadamente de 778.6731 pies y su velocidad es aproximadamente 75.9596 pies por segundo.

Ejemplo Aproximar la función $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x^2+1))$ por un polinomio de grado 3 tomando $x_0 = -3$, $x_1 = -1.8$, $x_2 = 1.3$ y $x_3 = 2.9$. Aproximar el valor de $f(0.5)$, ¿cuál es el error relativo cometido?

Solución: Primero hallamos las imagenes

$$f(x_0) = f(-3) = \operatorname{sen}(\ln(9+1)) \approx 0.744$$
$$f(x_1) = f(-1.8) = \operatorname{sen}(\ln(3.24+1)) \approx 0.992$$
$$f(x_2) = f(1.3) = \operatorname{sen}(\ln(1.69+1)) \approx 0.8358$$
$$f(x_3) = f(2.9) = \operatorname{sen}(\ln(8.41+1)) \approx 0.7832$$

el polinomio será

$$p_3(x) = f(x_0)\,\mathcal{L}_0(x) + f(x_1)\,\mathcal{L}_1(x) + f(x_2)\,\mathcal{L}_2(x) + f(x_3)\,\mathcal{L}_3(x)$$
$$p_3(x) \approx 0.744\,\mathcal{L}_0(x) + 0.992\,\mathcal{L}_1(x) + 0.8358\,\mathcal{L}_2(x) + 0.7832\,\mathcal{L}_3(x)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x+1.8)(x-1.3)(x-2.9)}{(-3+1.8)(-3-1.3)(-3-2.9)} \approx \frac{1}{-30.444}(x+1.8)(x-1.3)(x-2.9)\\
\mathcal{L}_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+3)(x-1.3)(x-2.9)}{(-1.8+3)(-1.8-1.3)(-1.8-2.9)} \approx \frac{1}{17.484}(x+3)(x-1.3)(x-2.9)\\
\mathcal{L}_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+3)(x+1.8)(x-2.9)}{(1.3+3)(1.3+1.8)(1.3-2.9)} \approx \frac{1}{-21.328}(x+3)(x+1.8)(x-2.9)\\
\mathcal{L}_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+3)(x+1.8)(x-1.3)}{(2.9+3)(2.9+1.8)(2.9-1.3)} \approx \frac{1}{44.368}(x+3)(x+1.8)(x-1.3)
\end{aligned}$$

luego el polinomio de grado 3 que aproxima a la función f en los nodos dados es

$$p_3(x) \approx -\frac{0.744}{30.444}(x+1.8)(x-1.3)(x-2.9)+\frac{0.992}{17.484}(x+3)(x-1.3)(x-2.9)-\frac{0.8358}{21.328}(x+3)(x+1.8)(x-2.9)+\frac{0.7832}{44.368}(x+3)(x+1.8)(x-1.3)$$

$$p_3(x) \approx 0.010764x^3 - 0.022107x^2 - 0.089319x + 0.96563.$$

El valor aproximado de $f(0.5)$ esta dado por $p_3(0.5) \approx 0.91679$ y el error relativo cometido esta dado por:

$$\left|\frac{f(0.5)-p_3(0.5)}{f(0.5)}\right| \approx \left|\frac{0.2213-0.91679}{0.2213}\right| \approx 3.14275.$$

Notemos que si adicionamos un nodo más x_{n+1}, el polinomio interpolante será p_{n+1} y para construirlo, prácticamente toca empezar de cero. Así que la pregunta ahora es ¿se podrá construir el polinomio interpolante de forma recursiva? la respuesta es sí y se construye a continuación.

★ POLINOMIO INTERPOLANTE DE NEWTON

Uno de los problemas del polinomio interpolante de Lagrange es que no hay una relación entre p_n y p_{n+1}, cada polinomio debe construirse individualmente, por lo tanto consideramos una nueva forma de construir el polinomio interpolante. Una forma recursiva de construir el polinomio que interpola a una función f en los $n+1$ nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ con $x_i \neq x_j$ consiste en:

Sea p_k el polinomio de grado menor o igual a k que interpola a f en los primeros $k+1$ nodos, dados por

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= a_0 + a_1(x-x_0)\\
p_2(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1)\\
p_3(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\\
&\vdots\\
p_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})
\end{aligned}$$

es claro que $p_k(x) = p_{k-1}(x) + a_k(x-x_0)\ldots(x-x_{k-1})$. Las incógnitas a_i para $i = 0, 1, \ldots, n$ las obtenemos de la condición de interpolación, esto es, p_1 debe interpolar a f en los nodos x_0 y x_1

$$\begin{aligned}
p_1(x_0) = f(x_0) \qquad &\to \qquad a_0 = f(x_0)\\
p_1(x_1) = f(x_1) \qquad &\to \qquad a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}
\end{aligned}$$

p_2 debe interpolar a f en los nodos x_0, x_1 y x_2, de los nodos x_0 y x_1 obtenemos ls resultados anteriores, por lo tanto empleamos el nodo nuevo

$$p_2(x_2) = f(x_2) \qquad \to \qquad a_2 = \frac{f(x_2)-f(x_0)-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x_2-x_0)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

podemos rescribirlo de la forma

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

a_1 y a_2 son cocientes de diferencias, al emplear la condición de interpolación sobre p_3 en el nodo x_3 llegamos a una expresión similar para a_3. Para simplificar la construcción de los a_i emplearemos el siguiente concepto.

Definición. *Sea f una función definida en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, denotamos y definimos las diferencias divididas para f en los respectivos nodos*

$f[x_i] = f(x_i)$ — *Diferencia dividida cero de f respecto a x_i*

$f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$ — *Primera diferencia dividida de f respecto a x_i y x_{i+1}*

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$ — *Segunda diferencia dividida*

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}] - f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_{i+3} - x_i}$ — *Tercera diferencia dividida*

en general la $k-$ésima diferencia dividida de f respecto a x_i, x_{i+1} $\ldots, x_{i+k}$

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

Observamos de la definición anterior

$$a_0 = f[x_0], \qquad a_1 = f[x_0, x_1], \qquad a_2 = f[x_0, x_1, x_2]$$

en general se cumple que

$$a_i = f[x_0, \ldots, x_i].$$

El polinomio que interpola a f en los $n+1$ nodos x_0, $x_1, \ldots$, x_n con $x_i \neq x_j$

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

con $a_i = f[x_0, \ldots, x_i]$ para todo i, recibe el nombre de ***polinomio interpolante de Newton***.

Las diferencias divididas para f las podemos hallar por medio de la siguiente tabla de diferencias

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1]$			
x_2	$f[x_2]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_1, x_2]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1, x_2]$		
x_3	$f[x_3]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_2, x_3]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_1, x_2, x_3]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	
x_4	$f[x_4]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_3, x_4]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_2, x_3, x_4]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$

Observación El polinomio interpolante de Lagrange y de Newton para una función f en los $n+1$ nodos o para un conjunto de $n+1$ puntos son el mismo, **solo** que tienen diferentes formas de representarse.

Ejemplo **a.** Hallar el polinomio que interpola los valores de la tabla

x	-3	-1	0	4	5
y	5	6	1	-12	3

b. Si adicionalmente, sabemos que $y(2) = 12$, ¿cuál es el polinomio que interpola todos los puntos conocidos?

<u>Solución:</u> **a.** Como tenemos 5 nodos hallamos el polinomio interpolante p_4 de grado menor o igual a 4 de la forma

$$p_4(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + a_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Construimos la tabla de diferencias con $f(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
$x_0 = -3$	$f[x_0] = 5$		
$x_1 = -1$	$f[x_1] = 6$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1] = \dfrac{6-5}{-1-(-3)} = \dfrac{1}{2}$	
$x_2 = 0$	$f[x_2] = 1$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_1, x_2] = \dfrac{1-6}{0-(-1)} = -5$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{-5-\frac{1}{2}}{0-(-3)} = -\dfrac{11}{6}$
$x_3 = 4$	$f[x_3] = -12$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_2, x_3] = \dfrac{-12-1}{4-0} = -\dfrac{13}{4}$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{-\frac{13}{4}-(-5)}{4-(-1)} = \dfrac{7}{20}$
$x_4 = 5$	$f[x_4] = 3$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_3, x_4] = \dfrac{3-(-12)}{5-4} = 15$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_2, x_3, x_4] = \dfrac{15-(-\frac{13}{4})}{5-0} = \dfrac{73}{20}$

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}, x_{i+4}]$
$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{\frac{7}{20}-(-\frac{11}{6})}{4-(-3)} = \dfrac{131}{420}$	
$f[x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{\frac{73}{20}-\frac{7}{20}}{5-(-1)} = \dfrac{11}{20}$	$\overset{\nwarrow}{\longleftarrow} f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] = \dfrac{\frac{11}{20}-\frac{131}{420}}{5-(-3)} = \dfrac{5}{168}$

luego el polinomio que interpola los valores de la tabla es:

$$p_4(x) = 5 + \frac{1}{2}(x+3) - \frac{11}{6}(x+3)(x+1) + \frac{131}{420}(x+3)(x+1)x + \frac{5}{168}(x+3)(x+1)x(x-4).$$

b. Ahora, si $y(2) = 12$ la nueva tabla es

x	-3	-1	0	4	5	2
y	5	6	1	-12	3	12

tenemos 6 nodos así que hallamos el polinomio de grado menor o igual a 5 que interpola los datos, pero, dado que el polinomio interpolante de Newton se construye es forma recursiva sabemos que

$$p_5(x) = p_4(x) + a_5(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$
$$p_5(x) = p_4(x) + a_5(x+3)(x+1)x(x-4)(x-5)$$

la incógnita a_5 la obtenemos por la condición de interpolación faltante, es decir, $p_5(2) = 12$

$$p_5(2) = 5 + \frac{1}{2}(2+3) - \frac{11}{6}(2+3)(2+1) + \frac{131}{420}(2+3)(2+1)2 + \frac{5}{168}(2+3)(2+1)2(2-4) + a_5(2+3)(2+1)2(2-4)(2-5)$$

$$12 = -\frac{87}{7} + 180\, a_5 \qquad \rightarrow \qquad a_5 = \frac{19}{140}$$

luego

$$p_5(x) = 5 + \frac{1}{2}(x+3) - \frac{11}{6}(x+3)(x+1) + \frac{131}{420}(x+3)(x+1)x + \frac{5}{168}(x+3)(x+1)x(x-4) + \frac{19}{140}(x+3)(x+1)x(x-4)(x-5).$$

Ejemplo Aproximar la función $f(x) = e^x - \cos(\ln(x^2+3))$ por un polinomio de grado 3 tomando $x_0 = -4$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = -0.5$ y $x_3 = 2.9$.

<u>Solución:</u> Tenemos 4 nodos, el polionomio interpolante de grado menor o igual a 3 tiene la forma

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

y la tabla de diferencias divididas esta dada por

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$
$x_0 = -4$	$f[x_0] \approx 0.9989$	
$x_1 = 1.3$	$f[x_1] \approx 3.6439$	$\nwarrow\!\!\!\longleftarrow f[x_0, x_1] = \dfrac{3.6439 - 0.9989}{1.3 - (-4)} \approx 0.4991$
$x_2 = -0.5$	$f[x_2] \approx 0.2244$	$\nwarrow\!\!\!\longleftarrow f[x_1, x_2] = \dfrac{0.2244 - 3.6439}{-0.5 - 1.3} \approx 1.8997$
$x_3 = 2.9$	$f[x_3] \approx 18.9344$	$\nwarrow\!\!\!\longleftarrow f[x_2, x_3] = \dfrac{18.9344 - 0.2244}{2.9 - (-0.5)} \approx 5.5029$

$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{1.8997 - 0.4991}{-0.5 - (-4)} \approx 0.4002$	
$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{5.5029 - 1.8997}{2.9 - 1.3} \approx 2.252$	$\nwarrow\!\!\!\longleftarrow f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{2.252 - 0.4002}{2.9 - (-4)} \approx 0.2684$

luego

$$p_3(x) \approx 0.9989 + 0.4991(x+4) + 0.4002(x+4)(x-1.3) + 0.2684(x+4)(x-1.3)(x+0.5).$$

La pregunta ahora es: ¿cuál es el error que se comete al aproximar f por el polinomio interpolante?

Teorema. *Supongamos que $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son $n+1$ números distintos en el intervalo $[a,b]$ y que $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$ existe un número $\xi(x)$ en (a,b) con*

$$f(x) = p_n(x) + E(x)$$

donde p_n es el polinomio que interpola a f en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y E es el término del error dado por

$$E(x) = \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Ejemplo Hallar una cota para el error que se comete al aproximar la función $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ por medio del polinomio interpolante de grado 3 en el intervalo $[1,3]$, tomando los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 1.3$, $x_2 = 2.1$ y $x_3 = 3$.

<u>*Solución:*</u> La cota está dada por el máximo valor que puede tomar $|E(x)|$. El error esta dado por:

$$E(x) = \frac{f^{(4)}(\widetilde{x})}{4!}(x-1)(x-1.3)(x-2.1)(x-3),$$

calculamos las derivadas de f

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4},$$

luego

$$|E(x)| = \frac{1}{4!}\left|-\frac{6}{\widetilde{x}^4}(x-1)(x-1.3)(x-2.1)(x-3)\right| = \frac{1}{4!}\left|\frac{6}{\widetilde{x}^4}\right|\left|x^4 - 7.4x^3 + 19.33x^2 - 21.12x + 8.19\right|$$

el máximo valor de $\left|\frac{6}{\widetilde{x}^4}\right|$ para $\widetilde{x} \in (1,3)$ se alcanza cuando $\widetilde{x} = 1$ (la función $\frac{6}{\widetilde{x}^4}$ es decreciente en $[1,3]$, por la tanto alcanza su valor máximo en el extremo izquierdo), y para $x^4 - 7.4x^3 + 19.33x^2 - 21.12x + 8.19 = g(x)$, hallamos sus valores extremos en $[1,3]$. Las raíces de $g'(x) = 4x^3 - 22.2x^2 + 38.66x - 21.12$ son 1.1326, 2.6740 y 1.7434, evaluamos en los números críticos y en los extremos del intervalo

$$g(1) = 0, \qquad g(1.7434) \approx 0.1477, \qquad g(1.1326) \approx -4.01 \times 10^{-2}, \qquad g(3) = 0, \qquad g(2.6740) \approx -0.4304,$$

así $|g(x)|$ es menor a 0.4304 y la cota del error es $|E(x)| \leq \dfrac{6(0.4304)}{4!} \approx 0.1076.$