MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 08

INTEGRACIÓN NUMÉRICA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Queremos aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando no conocemos la antiderivada de f. Para ello empleamos ***cuadratura numérica***

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i\, f(x_i)$$

donde w_i son los ***pesos de la cuadratura*** y x_i son los ***nodos de la cuadratura***, $x_i \in [a,b]$.

Estudiaremos *cuadratura* que se obtiene al aproximar f por el polinomio de interpolación p_n en los nodos $\{x_i\}_{i=0}^n$, así

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\mathcal{L}_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \mathcal{L}_i(x)\,dx$$

donde los pesos $w_i := \displaystyle\int_a^b \mathcal{L}_i(x)\,dx$.

Y dado que conocemos el error en la interpolación tendremos el error en la integración, esto es

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b p_n(x)\,dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\alpha(x))}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\,dx \qquad \alpha(x)\in[a,b].$$

★ Regla del trapecio

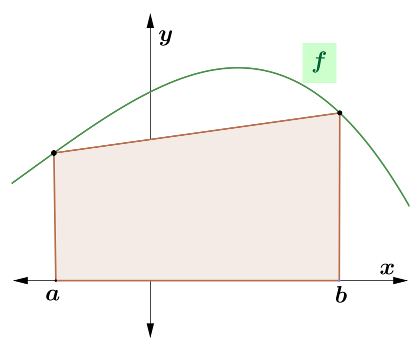
La regla del trapecio es la regla de cuadratura que se obtiene al tomar sólo dos nodos de cuadratura, más específicamente, al tomar los valores extremos del intervalo $[a,b]$.

Si $x_0 = a$, $x_1 = b$ y denotamos $h = b-a = x_1 - x_0$ tamaño del intervalo, el polinomio interpolante es

$$p_1(x) = f(x_0)\mathcal{L}_0(x) + f(x_1)\mathcal{L}_1(x) = f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = -f(x_0)\frac{x-x_1}{h} + f(x_1)\frac{x-x_0}{h}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_1} p_1(x)\,dx &= \int_{x_0}^{x_1}\left(-f(x_0)\frac{x-x_1}{h} + f(x_1)\frac{x-x_0}{h}\right)dx\\ &= -\frac{f(x_0)}{2h}(x-x_1)^2\Big|_{x_0}^{x_1} + \frac{f(x_1)}{2h}(x-x_0)^2\Big|_{x_0}^{x_1}\\ &= -\frac{f(x_0)}{2h}(-h)^2 + \frac{f(x_1)}{2h}h^2\\ &= \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right)\end{aligned}$$



así, la ***regla del trapecio*** está dada por

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right]} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]}$$

Recibe el nombre de regla del trapecio ya que si f toma valores positivos en $[a,b]$, el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ se aproxima por el área del trapecio.

Para estudiar el error cometido, vamos a recordar un resultado importante.

> **Teorema** (Teorema del valor medio ponderado para integrales). *Supongamos que $f \in \mathcal{C}[a,b]$, la integral de g existe en $[a,b]$ y g no cambia de signo en (a,b). Entonces existe un único $\beta \in (a,b)$ tal que*
> $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\beta)\int_a^b g(x)\,dx\,.$$

En particular, si $g \equiv 1$ tenemos el teorema del valor medio para integrales tradicional: si $f \in \mathcal{C}[a,b]$ entonces existe un único $\beta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\beta).$$

Supongamos que $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, el error cometido al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla del trapecio será

$$\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\,(f(a)+f(b)) = \int_a^b \frac{1}{2!}(x-a)(x-b)f''(\alpha(x))\,dx, \qquad \alpha(x) \in (a,b),$$

si denotamos $g(x) := (x-a)(x-b)$, g toma valores negativos en (a,b), así por el teorema del valor medio ponderado para integrales, existe un único $\beta \in (a,b)$ tal que

$$\int_a^b \frac{1}{2}(x-a)(x-b)f''(\alpha(x))\,dx = \frac{1}{2}f''(\beta)\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \frac{1}{2}f''(\beta)\frac{(a-b)^3}{6}.$$

Concluimos que el error cometido al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla del trapecio es $-\frac{h^3}{12}f''(\beta)$, así

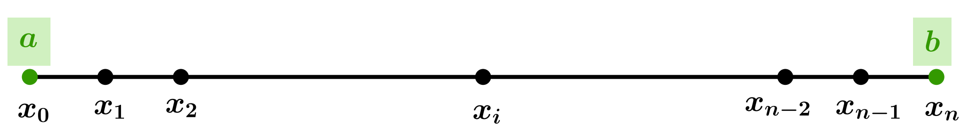
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\,[f(a)+f(b)] - \frac{h^3}{12}f''(\beta), \qquad \beta \in (a,b), \qquad h = b-a\,.}$$

Notemos que a la hora de estudiar el error cometido aparece la potencia h^3, así que la pregunta es ¿que hacemos cuando $h > 1$? ya que en esos casos el error no necesariamente es una cantidad pequeña (menor a 1) que es lo que *esperamos* siempre. La respuesta esta en tratar de aplicar la regla del trapecio sobre intervalos de tamaño menor a 1 y esto se obtiene usando una regla compuesta.

Regla del trapecio compuesta

Queremos aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante la regla del trapecio tratando que el error sea realmente pequeño, para ello vamos a ***discretizar*** el intervalo $[a,b]$, esto es, vamos a dividir el intervalo $[a,b]$ en n subintervalos, así

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \Rightarrow \quad x_i = a + ih, \quad i = 0,\ldots,n.$$



Si $f \in \mathcal{C}[a,b]$, gracias a la propiedad aditiva de la integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx$$

aplicando la regla del trapecio a cada integral y teniendo presente que $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0,\ldots,n-1$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx = {} & \frac{h}{2}\,[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''(\beta_1) + \frac{h}{2}\,[f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^3}{12}f''(\beta_2) + \cdots \\ & + \frac{h}{2}\,[f(x_{n-2})+f(x_{n-1})] - \frac{h^3}{12}f''(\beta_{n-1}) + \frac{h}{2}\,[f(x_{n-1})+f(x_n)] - \frac{h^3}{12}f''(\beta_n)\end{aligned}$$

donde $\beta_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

La ***regla del trapecio compuesta*** está dada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.}$$

Si suponemos que $f \in \mathcal{C}^2[a,b]$, el error cometido al emplear la regla del trapecio compuesta esta dada por

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(\beta_i),$$

y por teorema de los valores extremos sobre f'' en $[a,b]$, existen m y M tales que

$$m \leq f''(x) \leq M \qquad \forall x \in [a,b]$$

en particular

$$m \leq f''(\beta_i) \leq M \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} mn = \sum_{i=1}^{n} m \leq \sum_{i=1}^{n} f''(\beta_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M = nM \\ m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\beta_i) \leq M \end{aligned}$$

y por teorema del valor intermedio para f'' en $[a,b]$, existe $\xi \in (a,b)$ tal que

$$f''(\xi) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(\beta_i).$$

Concluimos que el error cometido al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla del trapecio compuesta es $-\frac{n\,h^3}{12}f''(\xi)$ y dado que $h = \frac{b-a}{n}$, obtenemos

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi), \qquad \xi \in (a,b), \qquad h = \frac{b-a}{n}.}$$

Ejemplo Aproximar el valor de $\displaystyle\int_0^2 e^x \ln(x^2+1)\tan^{-1}(x^2+10\pi)\,dx$ empleando la regla del trapecio simple y compuesta con 2, 3 y 4 subintervalos.

Solución: Denotemos $f(x) = e^x \ln(x^2+1)\tan^{-1}(x^2+10\pi)$, claramente $f \in \mathcal{C}[0,2]$ ya que la única restricción será que el argumento de la función logaritmo natural sea positivo y en este caso se cumple $x^2+1 > 0$, es más, se puede chequear que $f \in \mathcal{C}^2[0,2]$ y por lo tanto los errores son del orden de $\mathcal{O}(h^3)$ y $\mathcal{O}(h^2)$ para las reglas del trapecio simple y compuesto, respectivamente.

- Trapecio simple: $h = b - a = 2 - 0 = 2$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{2}{2}\left[f(0) + f(2)\right] = e^0\ln(1)\tan^{-1}(10\pi) + e^2\ln(2^2+1)\tan^{-1}(2^2+10\pi) \approx 18.34457, \quad \text{error } \mathcal{O}(2^3).$$

- Trapecio compuesto:
  - $n = 2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{2-0}{2} = 1 \quad \rightarrow \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[f(0) + 2f(1) + f(2)\right] \approx \frac{1}{2}\left[0 + 2(2.90154) + 18.34457\right] \approx 12.073825, \quad \text{error } \mathcal{O}(1^2).$$

- $n = 3 \quad \to \quad h = \frac{2-0}{3} = \frac{2}{3} \quad \to \quad x_0 = 0,\ x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{4}{3},\ x_3 = 2$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\left[f(0) + 2f\left(\frac{2}{3}\right) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + f(2)\right] \approx 10.83082, \quad \text{error } \mathcal{O}\left(\frac{4}{9}\right).$$

- $n = 4 \quad \to \quad h = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2} \quad \to \quad x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1,\ x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = 2$

$$\int_0^2 f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[f(0) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f(1) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2)\right] \approx 10.390384, \quad \text{error } \mathcal{O}\left(\frac{1}{4}\right).$$

Observación Notemos de la expresión de error, que si la función f cumple que $f''(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$ entonces la regla del trapecio es exacta. En particular, si $f \in \mathbb{P}_1$ donde $\mathbb{P}_1$ representa el conjunto de todos los polinomios lineales, se cumple que $f'' \equiv 0$ en todo $\mathbb{R}$. Además, como estamos aproximando con polinomios de grado menor o igual a uno se entiende la exactitud de la regla del trapecio.

Esta observación nos da pie a introducir el concepto de exactitud de una regla de cuadratura.

Definición. *El* ***grado de precisión o exactitud*** *de una fórmula de cuadratura es el entero positivo más grande m tal que la fórmula sea exacta para x^k para $k = 0, \ldots, m$.*

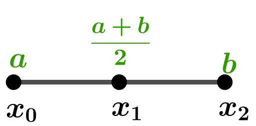
Notemos que al tomar las potencias x^k para $k = 0, \ldots, m$, estamos tomando los elementos de la base canónica de $\mathbb{P}_m$ conjunto de todos los polinomios de grado a lo más m. Así que el grado de precisión o exactitud de una fórmula de cuadratura esta directamente relacionado con el grado del polinomio para los cuales la regla de cuadratura es exacta.

Es directo de la definición y lo dicho en la observación que el grado de precisión o exactitud de la regla del trapecio es 1.

Ahora vamos a obtener más fórmulas de cuadratura que tengan mayor grado de precisión o exactitud.

★ Regla de Simpson $\frac{1}{3}$

La regla de Simpson $\frac{1}{3}$ es la regla de cuadratura que se obtiene al tomar tres nodos igualmente espaciados del intervalo $[a, b]$ incluyendo los extremos



$$h = \frac{b-a}{2} \quad \to \quad x_0 = a,\ x_1 = a + h = \frac{a+b}{2},\ x_2 = a + 2h = b$$

así

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx = f(x_0)\underbrace{\int_a^b \mathcal{L}_0(x)\,dx}_{A} + f(x_1)\underbrace{\int_a^b \mathcal{L}_1(x)\,dx}_{B} + f(x_2)\underbrace{\int_a^b \mathcal{L}_2(x)\,dx}_{C} = f(x_0)\,A + f(x_1)\,B + f(x_2)\,C.$$

Para hallar los valores de A, B y C, vamos a usar el hecho que esta fórmula de cuadratura debe tener al menos grado de precisión o exactitud 2. Más aún, primero consideremos un intervalo amigable $[0, 2]$ con nodos $z_0 = 0,\ z_1 = 1$ y $z_2 = 2$ para que hallemos los valores de A, B y C que hacen que la fórmula de cuadratura

$$\int_0^2 g(z)\,dz \approx g(0)\,A + g(1)\,B + g(2)\,C$$

tenga grado de precisión o exactitud 2 y posteriormente, vía cambio de variable obtenemos la fórmula que buscamos.

La fórmula tiene grado de precisión o exactitud 2 si al reemplazar $g(z)$ por z^k, $k = 0, 1, 2$ se tiene la igualada, esto es

$$\begin{array}{llcll} k=0: & g(z)=z^0=1 & \Rightarrow & \displaystyle\int_0^2 dz = 2 & \text{y} \quad \displaystyle\int_0^2 dz = A+B+C \\ k=1: & g(z)=z^1=z & \Rightarrow & \displaystyle\int_0^2 z\,dz = \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2 = \frac{2^2}{2}-0=2 & \text{y} \quad \displaystyle\int_0^2 z\,dz = B+2C \\ k=2: & g(z)=z^2 & \Rightarrow & \displaystyle\int_0^2 z^2\,dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3}-0=\frac{8}{3} & \text{y} \quad \displaystyle\int_0^2 z^2\,dz = B+4C \end{array}$$

obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=2 \\ B+2C=2 \\ B+4C=\frac{8}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{4}{3} \\ C=\frac{1}{3} \end{array}$$

así la fórmula de cuadratura

$$\int_0^2 g(z)\,dz \approx \frac{1}{3}g(0)+\frac{4}{3}g(1)+\frac{1}{3}g(2) = \frac{1}{3}\left[g(0)+4g(1)+g(2)\right]$$

tiene (hasta acá) grado de precisión o exactitud 2. Realizando el cambio de variable adecuado podemos obtener la fórmula de cuadratura $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir de $\int_0^2 g(z)\,dz$

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{x=a+\frac{b-a}{2}z}{\overset{\downarrow}{=}} \int_0^2 f\left(a+\frac{b-a}{2}z\right)\frac{b-a}{2}\,dz = \frac{b-a}{2}\int_0^2 \underbrace{f\left(a+\frac{b-a}{2}z\right)}_{g(z)}dz \approx \frac{b-a}{2}\frac{1}{3}\left[g(0)+4g(1)+g(2)\right]$$

donde $g(0)=f(a)=f(x_0)$, $g(1)=f\left(a+\dfrac{b-a}{2}\right)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(x_1)$ y $g(2)=f\left(a+\dfrac{b-a}{2}2\right)=f(b)=f(x_2)$, y dado que $h=\frac{b-a}{2}$, la ***regla de Simpson*** $\frac{1}{3}$ está dada por

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

Observaciones

- También se podía proceder de forma directa para obtener la regla de Simpson $\frac{1}{3}$, es decir, calculando las integrales $\int_a^b \mathcal{L}_i(x)\,dx$, $i=0, 1, 2$, para obtener los valores de A, B y C.
- La regla de Simpson $\frac{1}{3}$ tiene grado de precisión o exactitud 3. En efecto, verifiquemos con la $\int_0^2 g(z)\,dz$

  $$k=3: \quad g(z)=z^3 \quad \Rightarrow \quad \int_0^2 z^3\,dz = \left.\frac{z^4}{4}\right|_0^2 = \frac{2^4}{4}-0=4 \quad \text{y} \quad \int_0^2 z^3\,dz \overset{?}{\approx} \frac{1}{3}\left[4+2^3\right]=4$$

  se obtiene el mismo valor, empleando la regla y calculando la integral definida en forma exacta. Podemos preguntarnos: ¿será que es exacta para $\mathbb{P}_4$? **Ejercicio**

Se puede demostrar que el error cometido al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ es $-\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\beta)$, así

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]-\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\beta), \qquad \beta\in(a,b), \qquad h=\frac{b-a}{2}.}$$

Nuevamente, notemos que a la hora de estudiar el error cometido ahora aparece la derivada $f^{(iv)}$ y la potencia h^5. La derivada explica el por qué se tiene un grado de precisión o exactitud de 3 y en este caso si $h>1$ el error podría no ser pequeño, así que tenemos la opción de mejorarlo empleando la regla compuesta.

Regla de Simpson $\frac{1}{3}$ compuesta

Nuevamente vamos a discretizar el intervalo $[a, b]$ en un ***número par*** n par subintervalos

y empleamos la propiedad aditiva de la integral *cada dos* subintervalos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-4}}^{x_{n-2}} f(x)\,dx + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

aplicando la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ a cada integral, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\beta_2) + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\beta_4) + \cdots \\ &\quad + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-4}) + 4f(x_{n-3}) + f(x_{n-2})\right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\beta_{n-2}) + \frac{h}{3}\left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\beta_n) \\ &= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 4f(x_{n-3}) + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right] \\ &\quad - \frac{h^5}{90}\left[f^{(iv)}(\beta_2) + f^{(iv)}(\beta_4) + \cdots + f^{(iv)}(\beta_{n-2}) + f^{(iv)}(\beta_n)\right]\end{aligned}$$

donde $\beta_{2i} \in (x_{2i-2}, x_{2i})$, $i = 1, \ldots, \frac{n}{2}$.
La ***regla de Simpson*** $\frac{1}{3}$ ***compuesta*** está dada por

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right], \qquad h = \frac{b-a}{n}.}$$

Procediendo de manera similar a como se hizo en la regla del trapecio compuesta para obtener la expresión del error, podemos concluir que el error cometido al aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ compuesta es $-\frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\xi)$ y por lo tanto

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right] - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(iv)}(\xi), \qquad \xi \in (a, b), \qquad h = \frac{b-a}{n}.}$$

Ejemplo Aproximar el valor de $\displaystyle\int_1^3 \frac{5e^{2x}\tan^{-1}(3x)}{\ln(x^2+1)+2}\,dx$ empleando la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ simple y compuesta con 4 y 6 subintervalos.

Solución: Denotemos $f(x) = \dfrac{5e^{2x}\tan^{-1}(3x)}{\ln(x^2+1)+2}$. En este caso los errores son del orden de $\mathcal{O}(h^5)$ y $\mathcal{O}(h^4)$ para las reglas de Simpson $\frac{1}{3}$ simple y compuesto, respectivamente.

- Simpson $\frac{1}{3}$ simple: $h = \frac{3-1}{2} = 1 \quad \to \quad x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}\left[f(1) + 4f(2) + f(3)\right] \approx 375.6432, \quad \text{error } \mathcal{O}(1^5).$$

- Simpson $\frac{1}{3}$ compuesto:
  - $n = 4 \quad \to \quad h = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \quad \to \quad x_0 = 1,\ x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{5}{2},\ x_4 = 3$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{\frac{1}{2}}{3}\left[f(1) + 4f\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) + 4f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)\right] \approx 359.5914, \quad \text{error } \mathcal{O}\left(\frac{1}{2^4}\right).$$

- $n=6 \quad \to \quad h=\frac{3-1}{6}=\frac{1}{3} \quad \to \quad x_0=1,\ x_1=\frac{4}{3},\ x_2=\frac{5}{3},\ x_3=2,\ x_4=\frac{7}{3},\ x_5=\frac{8}{3},\ x_6=3$

$$\int_1^3 f(x)\,dx \approx \frac{\frac{1}{3}}{3}\left[f(1)+4f\left(\frac{4}{3}\right)+2f\left(\frac{5}{3}\right)+4f(2)+2f\left(\frac{7}{3}\right)+4f\left(\frac{8}{3}\right)+f(3)\right] \approx 358.4517, \quad \text{error } \mathcal{O}\left(\frac{1}{3^4}\right).$$

En general, las fórmulas de cuadratura que se obtienen al emplear nodos igualmente espaciados en $[a,b]$ ***incluyendo*** los extremos, reciben el nombre de ***fórmulas cerradas de Newton-Cotes***. Es decir, las ***fórmulas cerradas de Newton-Cotes*** de $\mathrm{M}+1$ puntos provienen de aproximar f por el polinomio p_{M} que interpola a f en los $\mathrm{M}+1$ nodos $x_i=a+ih$, $i=0,\dots,\mathrm{M}$, donde $h=\frac{b-a}{\mathrm{M}}$.

Teorema. *Sea* $\sum_{i=0}^{\mathrm{M}} w_i f(x_i)$ *la fórmula cerrada de Newton-Cotes de* $\mathrm{M}+1$ *puntos.*
Si M *es par y* $f\in C^{\mathrm{M}+2}[a,b]$, *existe* $\xi\in(a,b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{M} w_i f(x_i) + h^{M+3}\frac{f^{(\mathrm{M}+2)}(\xi)}{(\mathrm{M}+2)!}\int_0^{\mathrm{M}} t^2(t-1)\cdots(t-\mathrm{M})\,dt.$$

Si M *es impar y* $f\in C^{\mathrm{M}+1}[a,b]$, *existe* $\xi\in(a,b)$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\mathrm{M}} w_i f(x_i) + h^{\mathrm{M}+2}\frac{f^{(\mathrm{M}+1)}(\xi)}{(\mathrm{M}+1)!}\int_0^{\mathrm{M}} t(t-1)\cdots(t-\mathrm{M})\,dt.$$

Observaciones

- Del teorema se puede verificar la expresión del error demostrada para la regla del trapecio, tomando $\mathrm{M}=1$ y la que se dice para la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ tomando $\mathrm{M}=2$.
- Del mismo teorema se deduce que al tomar M entero par, el grado de precisión o exactitud es más de lo que se espera, es $\mathrm{M}+1$. Si se toma M entero impar, el grado de precisión o exactitud es el que se espera, M. Que fue lo que se vio en la regla de Simposon $\frac{1}{3}$, se parte de un polinomio interpolante de grado 2 y la regla tiene grado de precisión o exactitud 3.
- Del teorema concluimos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\mathrm{M}} w_i f(x_i) + \mathcal{O}(h^{\mathrm{M}+3}) \quad \boxed{\text{M par}} \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\mathrm{M}} w_i f(x_i) + \mathcal{O}(h^{\mathrm{M}+2}) \quad \boxed{\text{M impar}}$$

Otras fórmulas cerradas de Newton-Cotes son:

<u>Regla de Simpson $\frac{3}{8}$</u> ($\mathrm{M}=3 \quad \to \quad h=\frac{b-a}{3}$)

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}\left[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)\right] - \frac{3h^5}{80}f^{(iv)}(\xi), \qquad x_0<\xi<x_3.$$

<u>Regla de Boole</u> ($\mathrm{M}=4 \quad \to \quad h=\frac{b-a}{4}$)

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{2h}{45}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right] - \frac{8h^7}{495}f^{(vi)}(\xi), \qquad x_0<\xi<x_4.$$

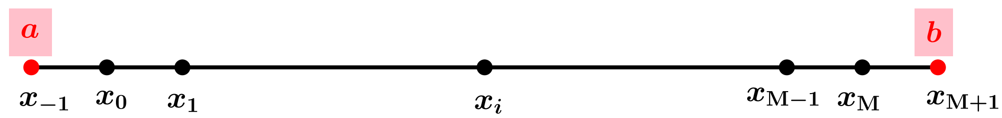
Ejercicios

- Deducir fórmulas de Simpson $\frac{3}{8}$ y Boole compuestas, tomando n subintervalos, n múltiplo de 3 para Simpson $\frac{3}{8}$ compuesta y n múltiplo de 4 para Boole compuesta.

- Escribir rutinas propias MATLAB para las fórmulas Simpson $\frac{3}{8}$ y Boole simples y compuestas. Para ello, mirar la rutina `simprl.m` de Simpson $\frac{1}{3}$ compuesta.

Ahora, las fórmulas de cuadratura que se obtienen al emplear nodos igualmente espaciados en $[a, b]$ ***sin incluir*** los extremos, reciben el nombre de fórmulas abiertas de Newton-Cotes. Es decir, las ***fórmulas abiertas de Newton-Cotes*** de $\mathrm{M}+1$ puntos provienen de aproximar f por el polinomio p_{M} que interpola a f en los $\mathrm{M}+1$ nodos $x_i = a + \boldsymbol{(i+1)}h$, $i = 0, \ldots, \mathrm{M}$, donde $h = \frac{b-a}{\mathbf{M+2}}$.

$$h = \frac{b-a}{\mathbf{M+2}} \quad \Rightarrow \quad x_i = a + \boldsymbol{(i+1)}h, \quad i = -1, \ldots, \mathrm{M}+1.$$



En este caso obtenemos un teorema similar al de las fórmulas cerradas que nos permite concluir que al emplear M entero par el error es $\mathcal{O}(h^{\mathrm{M}+3})$ y al emplear M entero impar el error es $\mathcal{O}(h^{\mathrm{M}+2})$. Unas fórmulas abiertas de Newton-Cotes son:

Regla del punto medio: $\mathrm{M} = 0 \quad \rightarrow \quad h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_{x_{-1}}^{x_1} f(x)\,dx = 2h\,f(x_0) + \frac{h^3}{3} f''(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_1.$$

Regla abierta: $\mathrm{M} = 1 \quad \rightarrow \quad h = \frac{b-a}{3}$

$$\int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{3h^3}{4} f''(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_2.$$

Regla abierta: $\mathrm{M} = 2 \quad \rightarrow \quad h = \frac{b-a}{4}$

$$\int_{x_{-1}}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{4h}{3}\left[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)\right] + \frac{14h^5}{45} f^{(iv)}(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_3.$$

Regla abierta: $\mathrm{M} = 3 \quad \rightarrow \quad h = \frac{b-a}{5}$

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx = \frac{5h}{24}\left[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)\right] + \frac{95h^5}{144} f^{(iv)}(\xi), \qquad x_{-1} < \xi < x_4.$$

Ejercicios

- Demuestre que la ***regla del punto medio compuesta*** esta dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_{n+1}} f(x)\,dx = 2h\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i}) + \frac{b-a}{6} h^2 f''(\mu) \qquad a < \mu < b.$$

  n entero par, $h = \dfrac{b-a}{n+2}$ y $x_i = a + (i+1)h,\ i = -1, 0, \ldots, n+1$.

- Escribir rutinas propias MATLAB para la regla del punto medio compuesta.

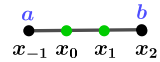
- Aproximar el valor de $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{3x^2+5}\right) e^{-x}\,dx$ empleando la regla de punto medio compuesta tomando $n = 6$.

- Deducir fórmulas abiertas de Newton-Cotes compuestas para cuando $\mathrm{M} = 2,\ 3$.

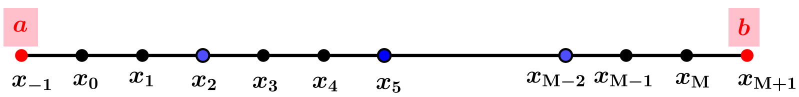
- Escribir rutinas propias MATLAB para las fórmulas abiertas de Newton-Cotes compuestas.

Ejemplo Deduzca la *fórmula de Newton-Cotes abierta compuesta* que se obtiene al tomar $h = \dfrac{b-a}{\mathrm{M}+2}$, M entero de la forma $\mathrm{M} = 3m+1$ $(m \in \mathbb{N}, m \geq 1)$, para la fórmula de Newton-Cotes abierta que se obtiene al tomar 3 subintervalos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_{-1}}^{x_2} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{2}[f(x_0)+f(x_1)].$$



<u>*Solución:*</u> Notemos que para la fórmula usa los nodos interiores x_0 y x_1, para la fórmula compuesta tomamos $h = \dfrac{b-a}{\mathrm{M}+2}$, $x_i = a + \boldsymbol{(i+1)}h$, $i = -1, \ldots, \mathrm{M}+1$, donde $\mathrm{M} = 3m+1$ $(m \in \mathbb{N}, m \geq 1)$



$$\int_{x_{-1}}^{x_{\mathrm{M}+1}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{3h}{2}[f(x_3)+f(x_4)] + \frac{3h}{2}[f(x_6)+f(x_7)] + \cdots + \frac{3h}{2}[f(x_{\mathrm{M}-1})+f(x_{\mathrm{M}})],$$

$$\int_{x_{-1}}^{x_{\mathrm{M}+1}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{2}[f(x_0)+f(x_1)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_7)+\cdots+f(x_{\mathrm{M}-1})+f(x_{\mathrm{M}})],$$

como $\mathrm{M} = 3m+1, m \in \mathbb{N}$ entonces $\mathrm{M}-1 = 3m$ múltiplo de 3, así

$$\int_{x_{-1}}^{x_{\mathrm{M}+1}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{2}\left(\sum_{i=0,3,6,\ldots}^{\mathrm{M}-1} f(x_i) + \sum_{j=1,4,7,\ldots}^{\mathrm{M}} f(x_j)\right).$$

Para la primera sumatoria basta tomar $i = 3k$, $i = 0$ cuando $k = 0$ y $i = \mathrm{M}-1$ cuando $k = \frac{\mathrm{M}-1}{3}$. Y para la segunda sumatoria podemos tomar $j = 3k+1$, $j = 1$ cuando $k = 0$ y $j = \mathrm{M}$ cuando $k = \frac{\mathrm{M}-1}{3}$. Concluimos así que la fórmula de Newton-Cotes abierta compuesta es

$$\int_{x_{-1}}^{x_{\mathrm{M}+1}} f(x)\,dx \approx \frac{3h}{2}\left(\sum_{k=0}^{\frac{\mathrm{M}-1}{3}} f(x_{3k}) + \sum_{k=0}^{\frac{\mathrm{M}-1}{3}} f(x_{3k+1})\right).$$

Ejemplo Hallar el grado de precisión o exactitud de la siguiente fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{9}{4}hf(a+h) + \frac{3}{4}hf(b) \qquad \text{donde} \quad h = \frac{b-a}{3}$$

y aproxime el valor de $\displaystyle\int_{-5}^{-2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{3x^2+5}\right) e^{-x}\,dx$ empleando la fórmula de cuadratura.

<u>*Solución:*</u> Notemos que la fórmula dada no hace parte de las fórmulas de Newton-Cotes, en este caso se tomaron nodos arbitrarios en $[a,b]$. Ahora, para obtener el grado de precisión o exactitud 2 reemplazamos $f(x)$ por x^k, $k = 0, \ldots$ hasta que no se tenga la igualdad

- $k = 0: \quad f(x) = x^0 = 1$

$$\star \int_a^b dx = b-a \qquad \star \int_a^b dx \approx \frac{9}{4}h + \frac{3}{4}h = 3h = b-a \qquad \checkmark$$

- $k = 1: \quad f(x) = x^1 = x$

$$\star \int_a^b x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\star \int_a^b x\,dx \approx \frac{9}{4}h(a+h) + \frac{3}{4}hb = h\left(\frac{9}{4}a + \frac{\cancelto{3}{9}}{4}\frac{b-a}{\cancel{3}} + \frac{3}{4}b\right) = \frac{b-a}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{6}a+\cancel{6}b}{\cancel{4}}\right) = \frac{(b-a)(a+b)}{2} \qquad \checkmark$$

- $k = 2: \quad f(x) = x^2$

  $\star$ $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3}$

  $\star$ $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx \approx \frac{9}{4}h(a+h)^2 + \frac{3}{4}hb^2 = \frac{h}{4}\left(9a^2 + 18ah + 9h^2 + 3b^2\right)$

  $$= \frac{b-a}{12}\left(9a^2 + \frac{b-a}{\cancel{3}}\cancelto{6}{18}a + \cancel{9}\frac{(b-a)^2}{\cancel{9}} + 3b^2\right) = \frac{b-a}{12}(4a^2 + 4ab + 4b^2) = \frac{b-a}{3}(a^2 + ab + b^2) \qquad \checkmark$$

- $k = 3: \quad f(x) = x^3$

  $\star$ $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_a^b = \frac{b^4 - a^4}{4}$

  $\star$ $\displaystyle\int_a^b x^3\,dx \approx \frac{9}{4}h(a+h)^3 + \frac{3}{4}hb^3 = \frac{3h}{4}\left(3a^3 + 9a^2h + 9ah^2 + 3h^3 + b^2\right) = \frac{b-a}{36}(8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3 + 9b^2)$ ☹

Concluimos que el grado de precisión o exactitud de la fórmula de cuadratura es 2.

Ahora, para aproximar el valor de $\displaystyle\int_{-4}^{-2} \cos^{-1}\left(\frac{1}{3x^2+5}\right) e^{-x}\,dx$ empleando la fórmula de cuadratura, tenemos que h esta dado por $h = \frac{-2-(-4)}{3} = \frac{2}{3}$ y si denotamos $f(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3x^2+5}\right) e^{-x}$, entonces

$$\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx \approx \frac{9}{4}\frac{2}{3}f\left(-4 + \frac{2}{3}\right) + \frac{3}{4}\frac{2}{3}f(-2) = \frac{3}{2}f\left(-\frac{10}{3}\right) + \frac{1}{2}f(-2) \approx \frac{3}{2}\,43.3006 + \frac{1}{2}\,11.1718 \approx 70.5368.$$

Ejemplo Encuentre la fórmula de cuadratura

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx \approx a_0 f(0) + a_1 f(\pi)$$

que es exacta para funciones de la forma $f(x) = a + b\cos x$.

Solución: Para obtener los valores de a y b basta tomar a $f(x)$ en el conjunto $\{1, \cos x\}$, base de las funciones de la forma $f(x) = a + b\cos x$.

- Si $f(x) = 1$

  $$\int_0^{\pi} dx = x|_0^{\pi} = \pi = a_0(1) + a_1 \qquad \Rightarrow \qquad a_0 + a_1 = \pi$$

- Si $f(x) = \cos x$

  $$\int_0^{\pi} \cos x\,dx = \text{sen}(x)|_0^{\pi} = 0 = a_0\cos(0) + a_1\cos(\pi) \qquad \Rightarrow \qquad a_0 - a_1 = 0$$

  resolviendo se llega a que $a_0 = a_1 = \frac{\pi}{2}$, así la fórmula de cuadratura

  $$\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}(f(0) + f(\pi))$$

  será exacta para funciones de la forma $a + b\cos x$.

Ejemplo Hallar las constantes A, B y C tales que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-2}^{1} xf(x)dx \approx Af(-2) + Bf(0) + Cf(1)$$

sea exacta para funciones de la forma $f(x) = a + bx^2 + cx^3$.

Solución: Nuevamente, para hallar la fórmula de cuadratura basta formar $f(x)$ en el conjunto $\{1, x^2, x^3\}$, base para las funciones de la $f(x) = a + bx^2 + cx^3$.

- Si $f(x) = 1$

$$\int_{-2}^{1} xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{1} = -\frac{3}{2} = A(1) + B(1) + C(1) \qquad \Rightarrow \qquad A + B + C = -\frac{3}{2}$$

- Si $f(x) = x^2$

$$\int_{-2}^{1} x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{1} = -\frac{15}{4} = A(4) + B(0) + C(1) \qquad \Rightarrow \qquad 4A + C = -\frac{15}{4}$$

- Si $f(x) = x^3$

$$\int_{-2}^{1} x^4dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{-2}^{1} = \frac{33}{5} = A(-8) + B(0) + C(1) \qquad \Rightarrow \qquad -8A + C = \frac{33}{5}$$

Primero resolvemos primero para A y C, $A = -\frac{69}{80}$ y $C = -\frac{3}{10}$, reemplazando estos valores se obtiene $B = -\frac{27}{80}$, así la fórmula de cuadratura

$$\int_{-2}^{1} xf(x)dx = -\frac{69}{80}f(-2) - \frac{27}{80}f(0) - \frac{3}{10}f(1)$$

es exacta para funciones de la forma $a + bx^2 + cx^3$.