MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 09

CUADRATURA GAUSSIANA - INTEGRALES IMPROPIAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

★ Cuadratura Gaussiana

La *cuadratura gaussiana* selecciona los nodos de manera óptima (no equiespaciados), buscando que el grado de precisión o exactitud de la cuadratura sea mayor. Buscamos fórmulas de la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

donde c_i son pesos de la cuadratura y $x_i \in [a,b]$ nodos de la cuadratura. En este caso tendremos $2n$ incógnitas, así que el grado de precisión o exactitud será al menos $2n-1$.

Ejemplo Hallar los valores de $c_1,\ c_2, x_1$ y x_2 tales que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

sea exacta para $\mathbb{P}_3$, es decir, tenga grado de precisión o exactitud 3.

<u>*Solución:*</u> Si fórmula tiene grado de precisión o exactitud 3, debemos reemplazar $f(x)$ por x^k, $k = 0,\,1,\,2,\ 3$ para obtener el sistema que debemos resolver para hallar los valores de las incógnitas $c_1,\ c_2, x_1$ y x_2.

- $k=0:\quad f(x)=x^0=1$

$$2 = \int_{-1}^{1} dx = c_1 + c_2 \tag{1}$$

- $k=1:\quad f(x)=x^1=x$

$$0 = \int_{-1}^{1} x\,dx = c_1x_1 + c_2x_2 \tag{2}$$

- $k=2:\quad f(x)=x^2$

$$\frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = c_1x_1^2 + c_2x_2^2 \tag{3}$$

- $k=3:\quad f(x)=x^3$

$$0 = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = c_1x_1^3 + c_2x_2^3 \tag{4}$$

De (2) y (4)

$$\left.\begin{aligned} c_1x_1 &= -c_2x_2 \\ c_1x_1^3 &= -c_2x_2^3 \end{aligned}\right\} \underset{\text{dividiendo}}{\Rightarrow} \quad x_1^2 = x_2^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_1-x_2)(x_1+x_2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \ \text{ ó } \ x_1 = -x_2$$

si $x_1 = x_2$, al reemplazar en (2) se tiene que $0 = (c_1+c_2)x_1$, pero de (1) tendríamos $0 = 2x_1$, luego $x_1 = 0$ y por tanto $x_2 = 0$, pero si ambos son cero se llega a la contradicción $\frac{2}{3} = 0$, lo cual implica que $x_1 = -x_2$. Reemplazando en (2) y de (1) obtenemos

$$\left.\begin{aligned} -c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

reemplazando en (3)

$$\frac{2}{3} = (-x_2)^2 + x_2^2 = 2x_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Concluimos así que la fórmula de cuadratura gaussiana con grado de precisión o exactitud 3 es

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

De manera similar, podríamos obtener valores $c_1,\ c_2, c_3,\ x_1,\ x_2$ y x_3 tales que la fórmula de cuadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

tenga grado de precisión o exactitud 5. En este caso, se puede demostrar que nodos $x_i \in (-1,1)$, $i = 1,\ 2,\ 3$, son los ceros del polinomio de Legendre de grado 3. Los primeros polinomios de Legendre son

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x, \qquad p_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \qquad p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \qquad p_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

Teorema. *Supongamos que* $x_1,\ \ldots,\ x_n$ *son los ceros del polinomio de Legendre* $p_n(x)$ *y* $c_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$*, entonces la fórmula de cuadratura*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

es exacta para $\mathbb{P}_{2n-1}$*, es decir, tiene grado de precisión o exactitud* $2n-1$*.*

Ejemplo Hallar los valores de $c_1,\ c_2,\ c_3,\ x_1,\ x_2$ y x_3 tales que la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

sea exacta para $\mathbb{P}_5$, es decir, que tenga grado de precisión o exactitud 5.

Solución: Del teorema (y lo mencionado antes de él) se tiene que los valores $x_1,\ x_2$ y x_3 son los ceros del polinomio de Legendre de grado 3, es decir, los ceros del polinomio $p_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, las cuales son $x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $x_2 = 0$ y $x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Tenemos hasta acá

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + c_2 f(0) + c_3 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

y para obtener las constantes $c_1,\ c_2,\ c_3$, podemos calcularlos integrando $c_i = \displaystyle\int_{-1}^{1} \prod_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\,dx$, $i = 1,\ 2\,3$ o basta con tomar $f(x) = x^k$ con $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Si lo hacemos empleando la definición de exactitud no es necesario tomar todas las potencias x^k, con tres de ellas encontramos las tres incógnitas faltantes

- $k = 0:\quad f(x) = x^0 = 1 \quad \rightarrow \quad 2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} dx = c_1 + c_2 + c_3\,,$
- $k = 1:\quad f(x) = x^1 = x \quad \rightarrow \quad 0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} x\,dx = -\sqrt{\frac{3}{5}}c_1 + \sqrt{\frac{3}{5}}c_3\,,$
- $k = 2:\quad f(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{3} = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{3}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_3\,,$

al resolver el sistema $c_1 = \frac{5}{9},\ c_2 = \frac{8}{9}$ y $c_3 = \frac{5}{9}$.

Concluimos así que la fórmula de cuadratura gaussiana con grado de precisión o exactitud 5 ó simplemente ***fórmula de Gauss-Legendre*** con 3 nodos es

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)}$$

Se puede demostrar que la forma general del término del error en las fórmulas de Gauss-Legendre con n nodos es

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) + \frac{2^{2n+1} n!^4}{(2n+1)(2n)!^3} f^{(2n)}(\xi) \qquad -1 \leq \xi \leq 1.}$$

Ahora, para obtener las fórmulas de cuadratura gaussiana en un intervalo $[a, b]$ empleamos un cambio de variable, así

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2} y + \frac{b+a}{2}\right) dy}$$

Las fórmulas de Gauss-Legendre con n nodos serán

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} c_i f\left(\frac{b-a}{2} y_i + \frac{b+a}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1} \frac{2^{n+1} n!^4}{(2n+1)(2n)!^3} f^{(2n)}(\xi)\,, \qquad a \leq \xi \leq b,}$$

donde $y_i \in (-1, 1)$ son los ceros del polinomio de Legendre de grado n.

Ejemplo Aproximar $\displaystyle\int_{1}^{1.5} x^2 \ln(x) \cos(3x)\,dx$ usando cuadratura gaussiana con $n = 2,\ 3$ nodos.

Solución: Sea $f(x) = x^2 \ln(x) \cos(3x)$. Empleando el cambio de variable

$$\int_{1}^{1.5} f(x)\,dx = \frac{1.5-1}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1.5-1}{2} y + \frac{1.5+1}{2}\right) dy = \frac{1}{4} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{1}{4} y + \frac{5}{4}\right) dy$$

y las cuadraturas gaussianas para 2 y 3 nodos obtenemos

$$\int_{1}^{1.5} f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[f\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{5}{4}\right)\right] \approx \frac{1}{4}\left(-0.1209 - 0.3264\right) \approx -0.1118$$

$$\int_{1}^{1.5} f(x)\,dx \approx \frac{1}{4}\left[\frac{5}{9} f\left(-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{5}{4}\right) + \frac{8}{9} f\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{5}{9} f\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{5}{4}\right)\right] \approx \frac{1}{4}\left(-0.0611 - 0.2861 - 0.2849\right) \approx -0.1116$$

★ Integrales Impropias

Las integrales impropias aparecen cuando queremos

- aproximar $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ cuando f no es acotada: ya sea por f tener una singularidad en uno o ambos extremos del intervalo o f tiene una singularidad en un valor $c \in (a, b)$,
- aproximar $\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx,\ a > 0,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx,\ b < 0$ y/o $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Intervalo no acotado.

En el primer caso, para evitar las singularidades en los extremos, basta con emplear una fórmula de cuadratura abierta o las fórmulas de cuadratura gaussiana puesto que los ceros de los polinomios de Legendre están en $(-1, 1)$ (no incluye los extremos) y por ende al trasladar los nodos están en (a, b). Ahora, si la singularidad esta en $c \in (a, b)$ empleamos fórmulas de cuadratura abiertas o gaussianas para las integrales $\displaystyle\int_{a}^{c} f(x)\,dx$ y $\displaystyle\int_{c}^{b} f(x)\,dx$.

Ejemplo Aproximar $\displaystyle\int_{2}^{2.5} e^{2x} \tan^{-1}(2x) \ln(x-2)\,dx$.

Solución: Sea $f(x) = e^{2x} \tan^{-1}(2x) \ln(x-2)$. Notemos que f no esta acotada en $x = 2$, por lo tanto no debemos emplear fórmulas de cuadratura que involucren el nodo $x = 2$. Vamos a aproximar la integral empleando primero la fórmula abierta con M $= 3$ donde $h = \frac{b-a}{5}$

$$\int_{x_{-1}}^{x_4} f(x)\,dx \approx \frac{5h}{24}\left[11 f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11 f(x_3)\right]$$

que en este caso $h = \frac{2.5-2}{5} = 0.1,\ x_{-1} = 2,\ x_0 = 2.1,\ x_1 = 2.2,\ x_2 = 2.3,\ x_3 = 2.4,\ x_4 = 2.5$, así

$$\int_2^{2.5} f(x)\,dx \approx \frac{0.5}{24}\left[11f(2.1) + f(2.2) + f(2.3) + 11f(2.4)\right] \approx -88.9528$$

y empleando el cambio de variable

$$\int_2^{2.5} f(x)\,dx = \frac{2.5-2}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{2.5-2}{2}y + \frac{2.5+2}{2}\right)\,dy = 0.25\int_{-1}^{1} f\left(0.25y + 2.25\right)\,dy$$

para las fórmulas de cuadratura gaussiana con 2 y 3 nodos, obtenemos

$$\int_2^{2.5} f(x)\,dx \approx 0.25\left[f\left(-0.25\sqrt{\frac{1}{3}} + 2.25\right) + f\left(0.25\sqrt{\frac{1}{3}} + 2.25\right)\right] \approx -88.8413$$

$$\int_2^{2.5} f(x)\,dx \approx 0.25\left[\frac{5}{9}f\left(-0.25\sqrt{\frac{3}{5}} + 2.25\right) + \frac{8}{9}f\left(2.25\right) + \frac{5}{9}f\left(0.25\sqrt{\frac{3}{5}} + 2.25\right)\right] \approx -90.5091$$

Para el segundo caso, procedemos primero a realizar un cambio de variable que permita escribir la integral con intervalo acotado. Para aproximar $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\ a > 0$ empleamos el cambio de variable $y = \frac{1}{x}$ tenemos $dy = -x^{-2}dx$, así

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = -\int_{\frac{1}{a}}^{0} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{f(1/y)}{y^2}\,dy$$

notemos que esta última integral tiene una singularidad en $y = 0$, esta integral cae en el primer caso. De manera similar

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = -\int_0^{\frac{1}{b}} f\left(\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y^2}\,dy = \int_{\frac{1}{b}}^{0} \frac{f(1/y)}{y^2}\,dy$$

y para aproximar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ empleamos la propiedad aditiva de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Ejemplo Aproximar $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\tan^{-1}(3x-1)\,dx$.

<u>*Solución:*</u> Sea $f(x) = e^{-x^2}\tan^{-1}(3x-1)$. Primero reescribimos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx}_{I_2} + \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{I_3}.$$

Vamos a emplear la regla de cuadratura gaussiana con 3 nodos para aproximar $I_1,\ I_2$ y I_3 después de los respectivos cambios de variable necesarios

$$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{f(1/y)}{y^2}\,dy \overset{\overset{y=0.5z-0.5}{\downarrow}}{=} 0.5\int_{-1}^{1} \frac{f(1/(0.5z-0.5))}{(0.5z-0.5)^2}\,dz$$

$$\approx 0.5\left[\frac{5}{9}\,\frac{f\left(\frac{1}{-0.5\sqrt{3/5}-0.5}\right)}{(-0.5\sqrt{3/5}-0.5)^2} + \frac{8}{9}\,\frac{f\left(\frac{1}{-0.5}\right)}{(-0.5)^2} + \frac{5}{9}\,\frac{f\left(\frac{1}{0.5\sqrt{3/5}-0.5}\right)}{(0.5\sqrt{3/5}-0.5)^2}\right] \approx -0.1799$$

$$I_2 \approx \left[\frac{5}{9}f\left(-\sqrt{3/5}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\sqrt{3/5}\right)\right] \approx -0.8063$$

$$I_3 = \int_0^{1} \frac{f(1/y)}{y^2}\,dy \overset{\overset{y=0.5z+0.5}{\downarrow}}{=} 0.5\int_{-1}^{1} \frac{f(1/(0.5z+0.5))}{(0.5z+0.5)^2}\,dz$$

$$\approx 0.5\left[\frac{5}{9}\,\frac{f\left(\frac{1}{-0.5\sqrt{3/5}+0.5}\right)}{(-0.5\sqrt{3/5}+0.5)^2} + \frac{8}{9}\,\frac{f\left(\frac{1}{0.5}\right)}{0.5^2} + \frac{5}{9}\,\frac{f\left(\frac{1}{0.5\sqrt{3/5}+0.5}\right)}{(0.5\sqrt{3/5}+0.5)^2}\right] \approx 0.1609$$

así

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \approx -0.1799 - 0.8063 + 0.1609 = -0.8253.$$

Ejemplo Calcule la siguiente integral impropia con la fórmula de cuadratura de Gauss-Legendre con 2, 3 y 4 nodos

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}\,dy$$

<u>*Solución:*</u> Primero reescribimos la integral

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}\,dy = \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}\,dy}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}\,dy}_{I_2}.$$

Para I_2 haciendo las sustitución $y = \frac{1}{t}$ y $t = \frac{(1-0)x+(0+1)}{2} = \frac{x+1}{2}$, obtenemos

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^2(1/t)}{t^2 e^{1/t}}\,dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x+1}\right)}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 e^{\frac{2}{x+1}}}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x+1}\right)}{(x+1)^2 e^{\frac{2}{x+1}}}dx$$

Así,

$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}\,dy = \int_{-1}^{1}\left[\frac{\operatorname{sen}^2(x)}{e^x} + \frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x+1}\right)}{(x+1)^2 e^{\frac{2}{x+1}}}\right]dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{f(x)} = \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{e^x} + \frac{2\operatorname{sen}^2\left(\frac{2}{x+1}\right)}{(x+1)^2 e^{\frac{2}{x+1}}}$$

y empleando las fórmulas de Gauss-Legendre con 2, 3 y 4 nodos

- $n = 2$
$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}dy \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0.629242 + 0.373327 \approx 1.0026.$$

- $n = 3$
$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}dy \approx \frac{5}{9}f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx \frac{5}{9}1.06294 + \frac{8}{9}0.223796 + \frac{5}{9}0.393301 \approx 1.007953.$$

- La fórmula de cuadratura gaussiana con $n = 4$ nodos, nodos dados por los ceros del polinomio de Legendre de grado 4, $p_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3+2\sqrt{6/5}}{7}} \approx \pm 0.861136$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{3-2\sqrt{6/5}}{7}} \approx \pm 0.339981$ y con pesos $c_{1,2} = \frac{18-\sqrt{30}}{36} \approx 0.347855$ y $c_{3,4} = \frac{18+\sqrt{30}}{36} \approx 0.652145$, así
$$\int_{-1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(y)}{e^y}dy \approx 0.652145\left[f(-0.339981) + f(0.339981)\right] + 0.347855\left[f(-0.861136) + f(0.861136)\right] \approx 0.928825.$$

x_j	-3	1	4	6	9
y_j	7	-1	15	3	-3