# MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

## NOTAS DE CLASE - SEMANA 12

## SOLUCIÓN NUMÉRICA P.V.F.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Un problema con valores en la frontera P.V.F. está compuesto por una ecuación diferencial de orden dos y los respectivos valores en los extremos del intervalo, esto es

$$\boxed{\mathbf{F}}\quad \begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

Queremos aproximar la solución de este P.V.F. $\boxed{\mathbf{F}}$ $y$ en $[a, b]$. Primero citaremos el resultado que nos permite garantizar la solución única $y$ de un P.V.F.

> **Teorema.** *Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \leq x \leq b, -\infty < y, z < \infty\}$ una región de $\mathbb{R}^3$. Supongamos que*
>
> - *las funciones $f,\ f_y$ y $f_z$ son continuas en $D$,*
> - *$f_y(x, y, z) > 0$ en $D$ y*
> - *existe una constante $M > 0$ tal que $|f_z(x, y, z)| \leq M$ en $D$*
>
> *entonces el P.V.F. $\boxed{\mathbf{F}}$ tiene una única solución $y$ en $[a, b]$.*

***Ejemplo*** Demuestre que el siguiente P.V.F. tiene solución única

$$\begin{cases} y''(x) + e^{-x^2 y(x)} \ln(x^2 + 2) + \cos(3y'(x)) = 0, \quad 1 \leq x \leq 2\,, \\ y(1) = 0, \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

*Solución:* Despejamos $y''$ de la ecuación diferencial y, para simplificar la notación, omitiremos dependencia de la variable $x$, así $f(x, y, y') = -e^{-x^2 y} \ln(x^2 + 2) - \cos(3y')$. Sea $D = [1, 2] \times \mathbb{R}^2$, en este caso, $f_y(x, y, y') = x^2 e^{-x^2 y} \ln(x^2 + 2)$ y $f_{y'}(x, y, y') = 3\,\mathrm{sen}(3y')$. Verificaremos las hipótesis del teorema

- las funciones $f,\ f_y$ y $f_{y'}$ son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, en particular en $D$,
- $f_y(x, y, y') = x^2 e^{-x^2 y} \ln(x^2 + 2)$, la función exponencial toma valores estrictamente positivos, la función logaritmo es estrictamente positiva siempre que su argumento sea mayor a 1 y dado que $x \in [1, 2]$, se cumple que $f_y(x, y, y') > 0$ en $D$ y
- $|f_{y'}(x, y, y')| = |3\,\mathrm{sen}(y')| \leq 3$ en $D$,

podemos concluir así que este P.V.F. tiene solución única.

> **Definición.** *La ecuación diferencial $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ es lineal cuando existen funciones $p(x),\ q(x)$ y $r(x)$ tales que*
>
> $$f(x, y(x), y'(x)) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x).$$

En adelante nos concentraremos en el P.V.F. lineal

$$\boxed{\mathbf{L}}\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases}$$

**Corolario.** *Si $p$, $q$ y $r$ son funciones continuas en $[a,b]$ y $q(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$ entonces el P.V.F. lineal* $\boxed{\mathbf{L}}$ *tiene única solución $y$ en $[a,b]$.*

Para aproximar la solución del P.V.F. lineal $\boxed{\mathbf{L}}$ estudiaremos los métodos de disparo lineal y método de diferencias finitas.

## ★ Método del disparo lineal

El método del disparo lineal para aproximar la solución de un P.V.F. $\boxed{\mathbf{L}}$ inicialmente ***se inspira*** en buscar la pendiente adecuada $\boldsymbol{m}$ de tal forma que la solución $y$ del P.V.I. de orden superior

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y'(a) = \boldsymbol{m} \end{cases}$$

cumpla con la condición de frontera $y(b) = \beta$. En ese caso $y$ será a solución del P.V.F $\boxed{\mathbf{L}}$.

Posteriormente, se demuestra que, en lugar de buscar la pendiente adecuada, es suficiente resolver los P.V.I. de orden superior

$$\boxed{\text{D1}}\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y'(a) = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \boxed{\text{D2}}\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \mathbf{0}, \\ y'(a) = \mathbf{1}, \end{cases}$$

si denotamos por $u$ la solución del P.V.I. $\boxed{\text{D1}}$ y $v$ la solución del P.V.I. $\boxed{\text{D2}}$, entonces la solución $y$ del P.V.F. $\boxed{\mathbf{L}}$, siempre que $v(b) \neq 0$, esta dada por

$$\boxed{y(x) = u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\, v(x).}$$

Demostración: Sean $u$ y $v$ las soluciones de P.V.I. $\boxed{\text{D1}}$ y P.V.I. $\boxed{\text{D2}}$, respectivamente, esto es

$$\begin{cases} u''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b, \\ u(a) = \alpha, \\ u'(a) = \mathbf{0} \end{cases} \qquad \begin{cases} v''(x) = p(x)v'(x) + q(x)v(x), \quad a \leq x \leq b, \\ v(a) = \mathbf{0}, \\ v'(a) = \mathbf{1}. \end{cases}$$

Veamos que $y(x) = u(x) + \dfrac{\beta - u(b)}{v(b)}v(x)$, $x \in [a,b]$, es solución del P.V.F. $\boxed{\mathbf{L}}$, esto es, veamos que $y$ satisface las condiciones de frontera

$$y(a) = u(a) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}v(a) = \alpha + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}0 = \alpha \qquad \checkmark$$

$$y(b) = u(b) + \frac{\beta - u(b)}{\cancel{v(b)}}\cancel{v(b)} = \cancel{u(b)} + \beta - \cancel{u(b)} = \beta \qquad \checkmark$$

y que satisface la ecuación diferencial, para ello tenemos que

$$y'(x) = u'(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}v'(x), \qquad y''(x) = u''(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}v''(x),$$

reemplazando en la ecuación diferencial del P.V.F. $\boxed{\mathbf{L}}$

$$y''(x) = u''(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}v''(x) = p(x)u'(x) + q(x)u(x) + r(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}(p(x)v'(x) + q(x)v(x))$$

$$y''(x) = p(x)\left(u'(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}v'(x)\right) + q(x)\left(u(x) + \frac{\beta - u(b)}{v(b)}\,v(x)\right) + r(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x). \qquad \checkmark$$

**Ejemplo** Considere el P.V.F.

$$\begin{cases} y''(x) + e^{-x}y'(x) - y(x)\tan^{-1}(x) = \cos(x), \quad 1 \le x \le 2.2, \\ y(1) = 5, \\ y(2.2) = -2 \end{cases}$$

- Demostrar que el P.V.F. tiene una única solución.
- Aproximar la solución del P.V.F. (usando tamaño de paso $h = 0.4$ y el método de Euler) por el método del disparo.

<u>*Solución:*</u> Primero despejamos $y''$, esto es

$$y''(x) = \cos(x) - e^{-x}y'(x) + y(x)\tan^{-1}(x),$$

es una ecuación diferencial lineal con

$$p(x) = -e^{-x}, \qquad q(x) = \tan^{-1}(x) \quad \text{y} \quad r(x) = \cos(x).$$

- Las funciones $p\,q\,r$ son continuas en todo $\mathbb{R}$, en particular, son continuas en $[1, 2.2]$. La función tangente inversa es positiva para todo $x > 0$, en particular $q(x) > 0$ para todo $x \in [1, 2.2]$. Por corolario, podemos concluir que el P.V.F. tiene una única solución.

- Para aproximar la solución del P.V.F. debemos aproximar las soluciones de los P.V.I.s de orden superior

$$\text{(D1)} \begin{cases} y'' = \cos(x) - e^{-x}y' + y\tan^{-1}(x), \ x \in [1, 2.2], \\ y(1) = 5, \\ y'(1) = 0, \end{cases} \qquad \text{(D2)} \begin{cases} y'' = -e^{-x}y' + y\tan^{-1}(x), \ x \in [1, 2.2], \\ y(1) = 0, \\ y'(1) = 1, \end{cases}$$

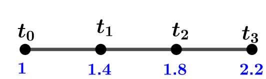
y para ello, introducimos las variables: $u_1(x) = y(x)$, $u_2(x) = y'(x)$ y definimos las funciones

$$\boldsymbol{U}(x) := \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{U}) := \begin{bmatrix} u_2 \\ \cos(x) - e^{-x}u_2 + u_1\tan^{-1}(x) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{G}(x, \boldsymbol{U}) := \begin{bmatrix} u_2 \\ -e^{-x}u_2 + u_1\tan^{-1}(x) \end{bmatrix},$$

los P.V.I.s de orden superior (D1) y (D2) se pueden escribir como los P.V.I.s vectoriales

$$\text{(DD1)} \begin{cases} \boldsymbol{U}'(x) = \boldsymbol{F}(x, \boldsymbol{U}(x)), \qquad 1 \le x \le 2.2, \\ \boldsymbol{U}(1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \end{cases} \qquad \text{(DD2)} \begin{cases} \boldsymbol{U}'(x) = \boldsymbol{G}(x, \boldsymbol{U}(x)), \qquad 1 \le x \le 2.2, \\ \boldsymbol{U}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Tomando tamaño de paso $h = 0.4$, denotando por $\boldsymbol{W}_i \approx \boldsymbol{U}(t_i)$ donde $\boldsymbol{U}$ es la solución del P.V.I. (DD1) con $\boldsymbol{W}_0 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ y empleando la fórmula de avance de Euler




$$\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + 0.4\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i), \quad i = 0, 1, 2,$$

obtenemos

$$\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}_0 + 0.4\boldsymbol{F}(t_0, \boldsymbol{W}_0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.4\boldsymbol{F}\left(1, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.4 \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(1) + 5\tan^{-1}(1) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.4 \begin{bmatrix} 0 \\ 4.47 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 1.79 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{W}_1 + 0.4\boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1) \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 1.79 \end{bmatrix} + 0.4\boldsymbol{F}\left(1.4, \begin{bmatrix} 5 \\ 1.79 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 5 \\ 1.79 \end{bmatrix} + 0.4 \begin{bmatrix} 1.79 \\ \cos(1.4) - 1.79e^{-1.4} + 5\tan^{-1}(1.4) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 5.72 \\ 3.58 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{W}_3 = \boldsymbol{W}_2 + 0.4\boldsymbol{F}(t_2, \boldsymbol{W}_2) \approx \begin{bmatrix} 5.72 \\ 3.58 \end{bmatrix} + 0.4\boldsymbol{F}\left(1.8, \begin{bmatrix} 5.72 \\ 3.58 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 5.72 \\ 3.58 \end{bmatrix} + 0.4 \begin{bmatrix} 3.58 \\ \cos(1.8) - 3.58e^{-1.8} + 5.72\tan^{-1}(1.8) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 7.15 \\ 5.69 \end{bmatrix}.$$

Denotando por $\boldsymbol{Z}_i \approx \boldsymbol{U}(t_i)$ donde $\boldsymbol{U}$ es la solución del P.V.I. (DD2)

$$\boldsymbol{Z}_1 = \boldsymbol{Z}_0 + 0.4\boldsymbol{G}(t_0, \boldsymbol{Z}_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.4\boldsymbol{G}\left(1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 1 \\ -e^{-1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.85 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Z}_2 = \boldsymbol{Z}_1 + 0.4\boldsymbol{G}(t_1, \boldsymbol{Z}_1) \approx \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.85 \end{bmatrix} + 0.4\boldsymbol{G}\left(1.4, \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.85 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.85 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 0.85 \\ -0.85e^{-1.4} + 0.4\tan^{-1}(1.4) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.92 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Z}_3 = \boldsymbol{Z}_2 + 0.4\boldsymbol{G}(t_2, \boldsymbol{Z}_2) \approx \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.92 \end{bmatrix} + 0.4\boldsymbol{G}\left(1.8, \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.92 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.92 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 0.92 \\ -0.92e^{-1.8} + 0.74\tan^{-1}(1.8) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.11 \\ 1.17 \end{bmatrix}.$$

Así, si denotamos por $w_i \approx u(x_i)$, $u$ solución del (D1) y si denotamos por $z_i \approx v(x_i)$, $v$ solución del (D2), obtuvimos

| $x_i$ | 1 | 1.4 | 1.8 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 5 | 5 | 5.72 | 7.15 |
| $z_i$ | 0 | 0.4 | 0.74 | 1.11 |

y teniendo en cuenta que

$$y(x) = u(x) + \frac{-2 - u(2.2)}{v(2.2)} v(x) \quad \Rightarrow \quad y(x_i) \approx u(x_i) + \frac{-2 - 7.15}{1.11} v(x_i) \approx u(x_i) - 8.24v(x_i), \quad i = 1, 2,$$

así

$$y(x_1) \approx w_1 - 8.24z_1 \approx 5 - 8.24(0.4) \approx 1.704, \qquad y(x_2) \approx w_2 - 8.24z_2 \approx 5.72 - 8.24(0.74) \approx -0.378.$$

Por lo tanto, la solución aproximada del P.V.F. es

| $x_i$ | 1 | 1.4 | 1.8 | 2.2 |
|---|---|---|---|---|
| $w_i$ | 5 | 1.704 | $-0.378$ | $-2$ |