MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 15

SOLUCIÓN NUMÉRICA E.D.P.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

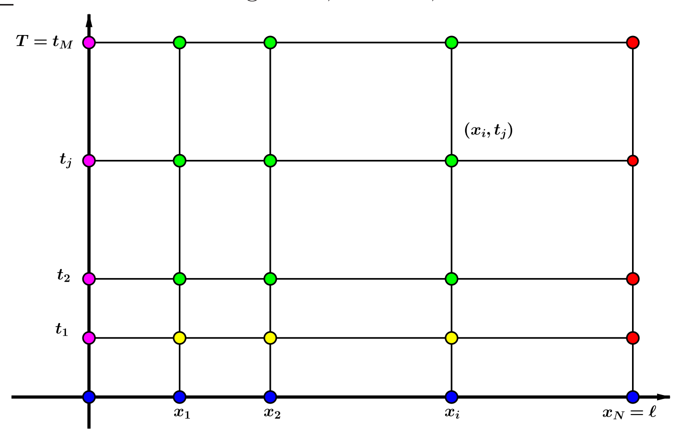
★ Solución numérica de E.D.P. Hiperbólica

Queremos aproximar la solución $u(x,t)$ del problema hiperbólico

$$\boxed{\mathbf{H}}\quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) = \alpha^2\, u_{xx}(x,t), & 0 < x < \ell, \qquad t > 0\,, \\ u(0,t) = s(t), \qquad u(\ell,t) = r(t), & t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le \ell\,, \end{cases}$$

donde ℓ es la longitud de la cuerda y α es una constante, hasta un tiempo final T. Para aproximar u en la región $D := [0,\ell]\times[0,T]$, emplearemos el método de diferencias finitas.

<u>1^{er} paso</u>: discretizamos la región D, es decir, discretizamos los intervalos espacial $[0,\ell]$ y temporal $[0,T]$.



tamaño de paso espacial: h

$$h = \frac{\ell}{N} \quad\rightarrow\quad x_i = i\,h, \quad i = 0,\dots,N$$

tamaño de paso temporal: k

$$k = \frac{T}{M} \quad\rightarrow\quad t_j = j\,k, \quad j = 0,\dots,M$$

☺ De la condición de frontera $u(0,t) = s(t)$ conocemos los valores de u en los puntos magenta ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_0,t_j),\ j = 1,\dots,M$.

☺ De la condición de frontera $u(\ell,t) = r(t)$ conocemos los valores de u en los puntos rojos ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_N,t_j),\ j = 1,\dots,M$.

☺ De la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ conocemos los valores de u en los puntos azules ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_i,0),\ i = 0,\dots,N$.

☺ De la condición inicial $u_t(x,0) = g(x)$ vamos a aproximar los valores de u en los puntos amarillos ●.

☹ El objetivo es aproximar u en los puntos verdes ●, es decir, queremos aproximar los valores de $u(x_i,t_j),\ i = 1,\dots,N-1,\ j = 1,\dots,M$.

<u>2^{do} paso</u>: discretizamos la ecuación diferencial parcial, esto es, evaluamos la ecuación diferencial parcial en un punto (x_i,t_j)

$$u_{tt}(x_i,t_j) = \alpha^2\, u_{xx}(x_i,t_j)\ , \qquad i = 1,\dots,N-1, \qquad j = 1,\dots,M.$$

Para las segundas derivadas parciales en las variables t y x usamos diferencias finitas centradas

$$u_{\boldsymbol{tt}}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_i,t_{\boldsymbol{j+1}}) - 2\,u(x_i,t_{\boldsymbol{j}}) + u(x_i,t_{\boldsymbol{j-1}})}{\boldsymbol{k^2}} + \mathcal{O}(k^2), \quad u_{\boldsymbol{xx}}(x_i,t_j) \approx \frac{u(x_{\boldsymbol{i+1}},t_j) - 2\,u(x_{\boldsymbol{i}},t_j) + u(x_{\boldsymbol{i-1}},t_j)}{\boldsymbol{h^2}} + \mathcal{O}(h^2).$$

Al reemplazar en la E.D.P. hiperbólica discretizada, si denotamos a $\boxed{\boldsymbol{w_{i,j}}}$ la aproximación de $u(x_i, t_j)$, obtenemos

$$\frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} = \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}\ , \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = \mathbf{1}, \ldots, M-1,$$

con un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$, donde

$$w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N, \qquad w_{0,j} = s(t_j), \quad w_{N,j} = r(t_j), \qquad j = 1, \ldots, M.$$

Dado que es un problema dependiente del tiempo, en este caso tenemos tres pasos de tiempo: t_{j-1}, t_j y t_{j+1}, así que al despejar el tiempo ***'nuevo'*** t_{j+1}, esté depende de los dos pasos de tiempo ***'anteriores'***:

$$w_{i,j+1} = \frac{\alpha^2\, k^2}{h^2}(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) + 2w_{i,j} - w_{i,j-1}, \quad i = 1, \ldots, N-1,\ j = \mathbf{1}, \ldots, M-1,$$

si denotamos $\boxed{\lambda := \frac{\alpha\, k}{h}}$, obtenemos

$$w_{i,j+1} = \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2(1-\lambda^2)w_{i,j} - w_{i,j-1}\ , \quad i = 1, \ldots, N-1,\ j = \mathbf{1}, \ldots, M-1,$$

el cual tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$. **Pero**, al tomar $j = 1$ para aproximar los valores de u en el tiempo t_2, necesitamos los valores aproximados de u en t_1 y t_0, y hasta acá solo tenemos los valores de u en t_0 dado por la condición $u(x, 0) = f(x)$. Para obtener los valores aproximados de u en t_1 empleamos la condición inicial que no hemos tenido en cuenta: $u_t(x, 0) = g(x)$. Vamos a estudiar dos métodos, el que se obtiene al aproximar u_t por medio de la diferencia finita progresiva con un error $\mathcal{O}(h^2 + k)$ y un segundo método que bajo una condición de estabilidad, nos permite conservar el buen error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

⋆ **Condición inicial progresiva**

Para aproximar los valores de u en el tiempo t_1 empleamos diferencia finita progresiva para $u_t(x, 0) = u_t(x, t_0)$, esto es

$$u_t(x,0) = u_t(x, t_0) = \frac{u(x,t_1) - u(x,t_0)}{k} + \mathcal{O}(k) \qquad \Rightarrow \qquad g(x) = \frac{u(x,t_1) - u(x,t_0)}{k} + \mathcal{O}(k)$$

al emplear la condición inicial $u_t(x, 0) = g(x)$. Así, u en el primer paso de tiempo se aproxima por

$$w_{i,1} = kg(x_i) + w_{i,0}, \quad i = 1, \ldots, N-1$$

con un error $\mathcal{O}(k)$. Por lo tanto, el ***método de diferencias finitas*** para aproximar la solución de **H** es

$$\boxed{\begin{array}{ll} w_{i,0} = f(x_i), \quad w_{i,1} = kg(x_i) + w_{i,0}, & i = 0, \ldots, N, \\ w_{0,j} = s(t_j), \quad w_{N,j} = r(t_j), & j = 1, \ldots, M, \\ w_{i,j+1} = \lambda^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2(1-\lambda^2)w_{i,j} - w_{i,j-1}\ , & i = 1, \ldots, N-1,\ j = \mathbf{1}, \ldots, M-1, \end{array}}$$

el cual tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k)$.

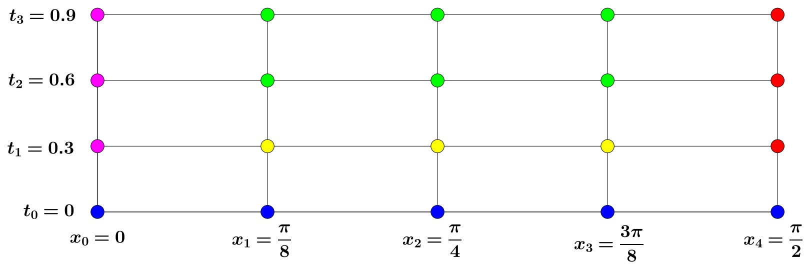
Observación Dado que se empleo diferencia finita progresiva para aproximar $u_t(x, 0)$, al igual que en el método de diferencia progresiva para aproximar la solución de **P** , tenemos una ***condición de estabilidad***: $\boxed{\lambda = \frac{\alpha\, k}{h} \leq 1}$.

Ejemplo Aproximar la solución del problema hiperbólico

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \qquad t > 0\ , \\ u(0,t) = 0, & u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right), & t > 0\,, \\ u(x,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(x), & u_t(x,0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{sen}(x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

con tamaños de paso $h = \frac{\pi}{8}$ y $k = 0.3$ hasta $T = 0.9$.

Solución: Notemos que $\lambda = \frac{0.3}{\pi/8} \approx 0.7639 \leq 1$, cumple la condición de estabilidad. Ahora, discretizamos la región donde vamos a aproximar la solución, $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 0.9]$ con tamaños de paso $h = \frac{\pi}{8}$ y $k = 0.3$



De la primera condición inicial y de las condiciones de frontera conocemos:

- $w_{0,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(0) = 0$
- $w_{1,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x_1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0.2706$
- $w_{2,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.5$
- $w_{3,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \approx 0.6533$
- $w_{4,0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x_4) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0.7071$

- $w_{0,j} = 0, \ j = 1, 2, 3$
- $w_{4,1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t_1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.3\right) \approx 0.4666$
- $w_{4,2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t_2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.6\right) \approx 0.1843$
- $w_{4,3} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t_3\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 0.9\right) \approx -0.1144$

vamos a ir llenando los valores de las aproximaciones $w_{i,j}$ en la siguiente tabla

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_0 = 0$	0	0.2706	0.5	0.6533	0.7071
$t_1 = 0.3$	0				0.4666
$t_2 = 0.6$	0				0.1843
$t_3 = 0.9$	0				−0.1144

ahora, si empleamos la segunda condición inicial $g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x) = u_t(x, 0)$ y la ecuación en diferencias para $w_{i,1}$

$$w_{i,1} = kg(x_i) + w_{i,0} = -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_i) + w_{i,0}, \qquad i = 1, 2, 3$$

- $w_{1,1} = -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_1) + w_{1,0} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.2706 \approx 0.1894$
- $w_{2,1} = -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_2) + w_{2,0} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.5 \approx 0.35$
- $w_{3,1} = -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_3) + w_{3,0} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 0.6533 \approx 0.4573$

tenemos así

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_0 = 0$	0	0.2706	0.5	0.6533	0.7071
$t_1 = 0.3$	0	0.1894	0.35	0.4573	0.4666

Proseguimos con los valores correspondientes a los tiempos $t_2 = 0.6$ y $t_3 = 0.9$, con la fórmula de diferencias

$$w_{i,j+1} \approx 0.7639^2(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2(1 - 0.7639^2)w_{i,j} - w_{i,j-1}$$

$$w_{i,j+1} \approx 0.5835(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 0.8329\, w_{i,j} - w_{i,j-1}\ , \qquad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

para el tiempo $t_2 = 0.6$, es decir, los valores $w_{i,2}$ (cuando $j = 1$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,2} \approx 0.5835(w_{2,1} + w_{0,1}) + 0.8329\, w_{1,1} - w_{1,0} \approx 0.5835(0.35) + 0.8329(0.1894) - 0.2706 \approx 0.0914$$

$$w_{2,2} \approx 0.5835(w_{3,1} + w_{1,1}) + 0.8329\, w_{2,1} - w_{2,0} \approx 0.5835(0.4573 + 0.1894) + 0.8329(0.35) - 0.5 \approx 0.1689$$

$$w_{3,2} \approx 0.5835(w_{4,1} + w_{2,1}) + 0.8329\, w_{3,1} - w_{3,0} \approx 0.5835(0.4666 + 0.35) + 0.8329(0.4573) - 0.6533 \approx 0.2041$$

tenemos así

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_1 = 0.3$	0	0.1894	0.35	0.4573	0.4666
$t_2 = 0.6$	0	0.0914	0.1689	0.2041	0.1843

Y terminamos con los valores correspondientes al tiempo $t_3 = 0.9$, es decir, los valores $w_{i,3}$ (cuando $j = 2$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,3} \approx 0.5835(w_{2,2} + w_{0,2}) + 0.8329\, w_{1,2} - w_{1,1} \approx 0.5835(0.1689) + 0.8329(0.0914) - 0.1894 \approx -0.0147$$

$$w_{2,3} \approx 0.5835(w_{3,2} + w_{1,2}) + 0.8329\, w_{2,2} - w_{2,1} \approx 0.5835(0.2041 + 0.0914) + 0.8329(0.1689) - 0.35 \approx -0.0369$$

$$w_{3,3} \approx 0.5835(w_{4,2} + w_{2,2}) + 0.8329\, w_{3,2} - w_{3,1} \approx 0.5835(0.1843 + 0.1689) + 0.8329(0.2041) - 0.4573 \approx -0.0812$$

tenemos así que la aproximación a la solución del problema esta dada por la siguiente nube de puntos

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_0 = 0$	0	0.2706	0.5	0.6533	0.7071
$t_1 = 0.3$	0	0.1894	0.35	0.4573	0.4666
$t_2 = 0.6$	0	0.0914	0.1689	0.2041	0.1843
$t_3 = 0.9$	0	-0.0147	-0.0369	-0.0812	-0.1144

$\star$ Condición inicial mejorada

Tomando la expansión de Taylor para u respecto a la variable t en torno a $(x_i, t_0) = (x_i, 0)$ evaluada en (x_i, t_1)

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\, u_t(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} u_{tt}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k^3),$$

de la ecuación diferencial parcial: $u_{tt}(x, t) = \alpha^2\, u_{xx}(x, t)$

$$u(x_i, t_1) = u(x_i, 0) + k\, u_t(x_i, 0) + \frac{k^2}{2} \alpha^2\, u_{xx}(x_i, 0) + \mathcal{O}(k^3),$$

y las condiciones iniciales $u(x, 0) = f(x)$ y $u_t(x, 0) = g(x)$

$$u(x_i, t_1) = f(x_i) + k\, g(x_i) + \frac{k^2 \alpha^2}{2} f''(x_i) + \mathcal{O}(k^3),$$

ahora, si usamos diferencia finita centrada para $f''(x_i)$

$$u(x_i, t_1) = f(x_i) + k\, g(x_i) + \frac{k^2 \alpha^2}{2} \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + \mathcal{O}(k^3 + k^2 h^2)$$

Por lo tanto, el ***método de diferencias finitas*** para aproximar la solución de $\boxed{\mathbf{H}}$ con un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2 + k^2 h^2)$ es

$$\boxed{\begin{array}{ll}
w_{i,0} = f(x_i), & i = 0, \ldots, N, \\
w_{i,1} = k\, g(x_i) + (1 - \lambda^2) f(x_i) + \dfrac{\lambda^2}{2} (f(x_{i+1}) + f(x_{i-1})), & i = 0, \ldots, N, \\
w_{0,j} = s(t_j), \quad w_{N,j} = r(t_j), & j = 1, \ldots, M, \\
w_{i,j+1} = \lambda^2 (w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2(1 - \lambda^2) w_{i,j} - w_{i,j-1}\ , & i = 1, \ldots, N-1,\ j = \mathbf{1}, \ldots, M-1,
\end{array}}$$

Observación Si se cumple la condición de de estabilidad $\lambda = \dfrac{\alpha\, k}{h} \leq 1$, este método tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

Ejemplo Aproximar la solución del problema hiperbólico

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), & & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0\,, \\ u(0,t) = 0, & u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right), & t > 0\,, \\ u(x,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x), & u_t(x,0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x), & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\,, \end{cases}$$

con tamaños de paso $h = \frac{\pi}{8}$ y $k = 0.3$ hasta $T = 0.9$.

<u>*Solución:*</u> Del ejemplo anterior, la discretización de la región $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 0.9]$, los valores asociados a la primera condición inicial y a las fronteras, son

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_0 = 0$	0	0.2706	0.5	0.6533	0.7071
$t_1 = 0.3$	0				0.4666
$t_2 = 0.6$	0				0.1843
$t_3 = 0.9$	0				-0.1144

Ahora, si empleamos la segunda condición inicial $g(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}(x) = u_t(x,0)$ y la ecuación en diferencias mejorada para $w_{i,1}$ donde $1 - \lambda^2 \approx 0.4165$, $\frac{\lambda^2}{2} \approx 0.2918$ y $k = 0.3$

$$w_{i,1} = 0.3\, g(x_i) + 0.2361 f(x_i) + 0.382(f(x_{i+1}) + f(x_{i-1}))$$

$$w_{i,1} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_i) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}(x_{i-1}) + 0.4165\operatorname{sen}(x_i) + 0.2918\operatorname{sen}(x_{i+1})\right), \qquad i = 1, 2, 3$$

- $$w_{1,1} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_1) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}(x_0) + 0.4165\operatorname{sen}(x_1) + 0.2918\operatorname{sen}(x_2)\right)$$
  $$\approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}(0) + 0.4165\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.2918\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.1774$$
- $$w_{2,1} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}(x_1) + 0.4165\operatorname{sen}(x_2) + 0.2918\operatorname{sen}(x_3)\right)$$
  $$\approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) + 0.4165\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.2918\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \approx 0.3278$$
- $$w_{3,1} \approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}(x_3) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}(x_2) + 0.4165\operatorname{sen}(x_3) + 0.2918\operatorname{sen}(x_4)\right)$$
  $$\approx -0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0.2918\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0.4165\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 0.2918\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \approx 0.4283$$

tenemos así

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_0 = 0$	0	0.2706	0.5	0.6533	0.7071
$t_1 = 0.3$	0	0.1774	0.3278	0.4283	0.4666

Para obtener los valores correspondientes a los tiempos $t_2 = 0.6$ y $t_3 = 0.9$, procedemos como en el ejemplo anterior, con la fórmula de diferencias

$$w_{i,j+1} \approx 0.5835(w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 0.8329\, w_{i,j} - w_{i,j-1}\,, \qquad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

para el tiempo $t_2 = 0.6$, es decir, los valores $w_{i,2}$ (cuando $j = 1$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,2} \approx 0.5835(w_{2,1} + w_{0,1}) + 0.8329\, w_{1,1} - w_{1,0} \approx 0.5835(0.3278) + 0.8329(0.1774) - 0.2706 \approx 0.0684$$

$$w_{2,2} \approx 0.5835(w_{3,1} + w_{1,1}) + 0.8329\, w_{2,1} - w_{2,0} \approx 0.5835(0.4283 + 0.1774) + 0.8329(0.3278) - 0.5 \approx 0.1265$$

$$w_{3,2} \approx 0.5835(w_{4,1} + w_{2,1}) + 0.8329\, w_{3,1} - w_{3,0} \approx 0.5835(0.4666 + 0.3278) + 0.8329(0.4283) - 0.6533 \approx 0.167$$

tenemos así

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_1 = 0.3$	0	0.1774	0.3278	0.4283	0.4666
$t_2 = 0.6$	0	0.0684	0.1265	0.167	0.1843

Y terminamos con los valores correspondientes al tiempo $t_3 = 0.9$, es decir, los valores $w_{i,3}$ (cuando $j = 2$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,3} \approx 0.5835(w_{2,2} + w_{0,2}) + 0.8329\, w_{1,2} - w_{1,1} \approx 0.5835(0.1265) + 0.8329(0.0684) - 0.1774 \approx -0.0466$$

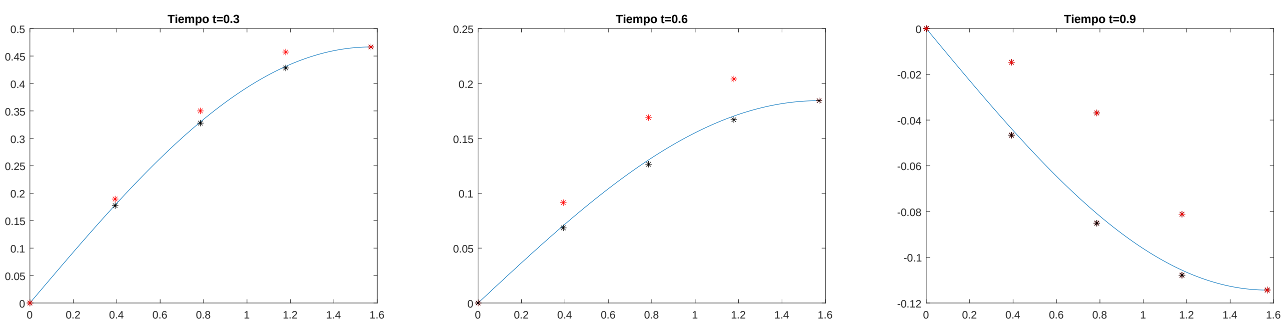
$$w_{2,3} \approx 0.5835(w_{3,2} + w_{1,2}) + 0.8329\, w_{2,2} - w_{2,1} \approx 0.5835(0.167 + 0.0684) + 0.8329(0.1265) - 0.3278 \approx -0.0851$$

$$w_{3,3} \approx 0.5835(w_{4,2} + w_{2,2}) + 0.8329\, w_{3,2} - w_{3,1} \approx 0.5835(0.1843 + 0.1265) + 0.8329(0.167) - 0.4283 \approx -0.1079$$

tenemos así que la aproximación a la solución del problema esta dada por la siguiente nube de puntos

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{\pi}{8}$	$x_2 = \frac{\pi}{4}$	$x_3 = \frac{3\pi}{8}$	$x_4 = \frac{\pi}{2}$
$t_0 = 0$	0	0.2706	0.5	0.6533	0.7071
$t_1 = 0.3$	0	0.1774	0.3278	0.4283	0.4666
$t_2 = 0.6$	0	0.0684	0.1265	0.167	0.1843
$t_3 = 0.9$	0	-0.0466	-0.0851	-0.1079	-0.1144

Se puede verificar que la solución de este problema hiperbólico es $u(x,t) = \operatorname{sen}(x)\cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$, así que podemos comparar las aproximaciones obtenidas al emplear la condición inicial progresiva ($*$) y la condición inicial mejorada ($*$)



MATLAB Para obtener la aproximación de la solución de la E.D.P. hiperbólica **H** , empleando el método de diferencia finita con condición inicial mejorada, empleamos la rutina `finedif2`, más exactamente, `U = finedif2 (f, g, q1, q2, a, b, c, d, n, m)` donde `f, g, q1, q2` representan las funciones asociadas a las condiciones iniciales y de frontera como se indica en el problema **H** , `a, b, c, d` representan los valores de 0, ℓ, α y T, respectivamente y `n, m` representan el número de nodos de las discretizaciones espacial y temporal. Para obtener los resultados del ejemplo anterior debemos definir las funciones y utilizar la rutina con los datos del problema, esto es

```
f = @(x) (sqrt(2)/2)*sin(x)
g = @(x) -(sqrt(2)/2)*sin(x)
q1 = @(t) 0*t
q2 = @(t) cos(pi/4+t)
U = finedif2 (f, g, q1, q2, 0, pi/2, 1, 0.9, 5, 4)
```

la matriz `U` contiene los valores de la aproximaciones de u como se muestra en la tabla obtenida. Con las instrucciones `x=0:pi/8:pi/2` y `plot(x,U(4,:),'*k')` graficamos la nube de puntos en el último paso de tiempo.