MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 13

SOLUCIÓN NUMÉRICA P.V.F.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

★ Método de diferencias finitas lineal

El método de diferencias finitas para aproximar la solución del P.V.F. lineal

$$\boxed{\mathbf{L}} \quad \begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

consiste en reemplazar en la ecuación diferencial, los valores de y' y y'' por aproximaciones de ellos empleando diferenciación numérica. Empecemos primero con un breve repaso del concepto de diferenciación numérica.

Diferenciación numérica

Dada una función f definida en un intervalo I que contiene a x_0, queremos aproximar los valores de $f'(x_0)$ y $f''(x_0)$ buscando tener el menor error posible. Sabemos que, por definición

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

así que unas primeras aproximaciones para el valor de $f'(x_0)$ al aproximarse a x_0 por derecha e izquierda son

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{y} \qquad f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

pero, ¿cuál es el error que se comete? Para responder a esta pregunta, supongamos que f es *suave* y $0 < h < 1$, así por Teorema de Taylor en torno a x_0 tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \frac{1}{4!}f^{(iv)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{5!}f^{(v)}(x_0)(x - x_0)^5 + \cdots$$

tomando $x = x_0 + h$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(x_0) + \frac{h^5}{120}f^{(v)}(x_0) + \cdots \tag{1}$$

y tomando $x = x_0 - h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(iv)}(x_0) - \frac{h^5}{120}f^{(v)}(x_0) + \cdots \tag{2}$$

Despejando $f'(x_0)$ de (1)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \underbrace{- \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) - \frac{h^3}{24}f^{(iv)}(x_0) + \frac{h^4}{120}f^{(v)}(x_0) - \cdots}_{\mathcal{O}(h)}$$

y despejando $f'(x_0)$ de (2)

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \underbrace{+ \frac{h}{2}f''(x_0) - \frac{h^2}{6}f'''(x_0) + \frac{h^3}{24}f^{(iv)}(x_0) - \frac{h^4}{120}f^{(v)}(x_0) + \cdots}_{\mathcal{O}(h)}$$

La fórmula de ***diferencia progresiva*** o ***diferencia hacia adelante*** con error $\mathcal{O}(h)$ para $f'(x_0)$ esta dada por

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

y la fórmula de ***diferencia regresiva*** o ***diferencia hacia atrás*** con error $\mathcal{O}(h)$ para $f'(x_0)$ esta dada por

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}}$$

Ahora, si restamos (2) de (1)

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{3}f'''(x_0) + \frac{h^5}{60}f^{(v)}(x_0) + \cdots$$

y despejando $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \underbrace{- \frac{h^2}{3}f'''(x_0) + \frac{h^4}{60}f^{(v)}(x_0) + \cdots}_{\mathcal{O}(h^2)}.$$

La fórmula de ***diferencia centrada*** con error $\mathcal{O}(h^2)$ para $f'(x_0)$ esta dada por

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}}$$

Finalmente, si sumamos (1) y (2)

$$f(x_0-h) + f(x_0+h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{h^4}{12}f^{(iv)}(x_0) + \frac{2h^6}{6!}f^{(vi)}(x_0) + \cdots$$

podemos obtener una aproximación para $f''(x_0)$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} \underbrace{- \frac{h^2}{12}f^{(iv)}(x_0) - \frac{2h^4}{6!}f^{(vi)}(x_0) - \cdots}_{\mathcal{O}(h^2)}$$

La fórmula de ***diferencia centrada*** con error $\mathcal{O}(h^2)$ para $f''(x_0)$ esta dada por

$$\boxed{f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2}}$$

Ejemplo Completar los valores de la tabla, buscando tener la mayor exactitud posible

x	1.1	1.2	1.3	1.4
$f(x)$	9.025013	11.02318	13.46374	16.44465
$f'(x)$				

Solución: Teniendo en cuenta los valores dados, aproximaremos los valores de $f'(1.1)$ y $f(1.4)$ empleando las fórmulas de diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, respectivamente, con un error $\mathcal{O}(0.1)$. Para los valores aproximados de $f'(1.2)$ y $f'(1.3)$ podemos emplear la fórmula de diferencia finita centrada con un error $\mathcal{O}(0.01)$. Así

$$f'(1.1) \approx \frac{f(1.2) - f(1.1)}{0.1} = \frac{11.02318 - 9.025013}{0.1} = 19.98167,$$

$$f'(1.2) \approx \frac{f(1.3) - f(1.1)}{2(0.1)} = \frac{13.46374 - 9.025013}{0.2} \approx 22.193635,$$

$$f'(1.3) \approx \frac{f(1.4) - f(1.2)}{2(0.1)} = \frac{16.44465 - 11.02318}{0.2} \approx 27.10734,$$

$$f'(1.4) \approx \frac{f(1.4) - f(1.3)}{0.1} = \frac{16.44465 - 13.46374}{0.1} \approx 29.8091.$$

Ahora, para aplicar el método de diferencias finitas para aproximar la solución del P.V.F L primero discretizamos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, así

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \Rightarrow \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n,$$

discretizamos la ecuación diferencial, esto es

$$y''(x_i) = p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) + r(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

con valores de frontera

$$y(x_0) = \alpha \qquad \text{y} \qquad y(x_n) = \beta.$$

Suponiendo que $y \in \mathcal{C}^4([a, b])$, aproximamos los valores de $y'(x_i)$ y $y''(x_i)$ por medio de las fórmulas de diferencias finitas centradas y obtenemos

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} - p(x_i)\,\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - q(x_i)y(x_i) = r(x_i) + \mathcal{O}(h^2) \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

así, si denotamos por p_i, q_i, r_i los valores de p, q, r en x_i y denotamos por w_i el valor aproximado de y en x_i, obtenemos

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} - p_i\,\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} - q_i\, w_i = r_i \qquad i = 1, \dots, n-1,$$

así, la solución aproximada del P.V.F. L se obtiene al resolver el sistema dado por

$$\left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}p_i\right) w_{i-1} - \left(\frac{2}{h^2} + q_i\right) w_i + \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}p_i\right) w_{i+1} = r_i \qquad i = 1, \dots, n-1$$

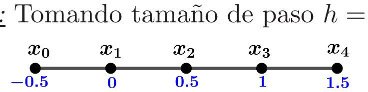
donde $w_0 = \alpha$ y $w_n = \beta$. Explícitamente, la solución aproximada del P.V.F. L se obtiene al resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} -\left(\frac{2}{h^2} + q_1\right) & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}p_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}p_2 & -\left(\frac{2}{h^2} + q_2\right) & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}p_2 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}p_{n-2} & -\left(\frac{2}{h^2} + q_{n-2}\right) & \frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}p_{n-2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}p_{n-1} & -\left(\frac{2}{h^2} + q_{n-1}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-2} \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 - \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{2h}p_1\right)\alpha \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2} \\ r_{n-1} - \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{2h}p_{n-1}\right)\beta \end{bmatrix}.$$

Ejemplo Aproximar la solución del siguiente P.V.F. usando el método de diferencias finitas con tamaño de paso $h = 0.5$

$$\begin{cases} e^{-x}y''(x) + \dfrac{4}{3+x^2}y'(x) - 3(x+1)^2y(x) = \ln(81 - x^2), \quad -\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{3}{2}, \\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = 5, \\ y\left(\frac{3}{2}\right) = -3. \end{cases}$$

Solución: Tomando tamaño de paso $h = 0.5$ la discretización del intervalos será



y queremos aproximar los valores $y(x_1)$, $y(x_2)$ y $y(x_3)$.

Multiplicando la ecuación diferencial por e^x y despejando y''

$$y''(x) = -\frac{4e^x}{3+x^2}y'(x) + 3(x+1)^2e^xy(x) + \ln(81-x^2)e^x$$

notamos que tenemos un P.V.F. lineal donde $p(x) = -\dfrac{4e^x}{3+x^2}$, $q(x) = 3(x+1)^2e^x$ y $r(x) = \ln(81-x^2)e^x$, las funciones $p,\ q,\ r \in \mathcal{C}\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ y $q(x) > 0$ para todo $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, por lo tanto, podemos concluir que el P.V.F. lineal tiene una única solución y en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Aplicando el método de diferencias finitas, esto es, reemplazando $y''(x_i)$ y $y'(x_i)$ por sus respectivas diferencias finitas centradas y teniendo en cuenta que w_i representa la aproximación de $y(x_i)$, obtenemos la expresión

$$\frac{w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}}{h^2}+\frac{4e^{x_i}}{3+x_i^2}\,\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2h}-3(x_i+1)^2e^{x_i}\,w_i=\ln(81-x_i^2)e^{x_i}\qquad i=1,2,3,$$

donde $w_0=5$ y $w_4=-3$. Dado que $h=0.5=\frac{1}{2}$, el sistema se obtiene de la expresión

$$4(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1})+\frac{4e^{x_i}}{3+x_i^2}(w_{i+1}-w_{i-1})-3(x_i+1)^2e^{x_i}\,w_i=\ln(81-x_i^2)e^{x_i}\qquad i=1,2,3,$$

$$w_{i-1}\left(4-\frac{4e^{x_i}}{3+x_i^2}\right)-w_i\left(8+3(x_i+1)^2e^{x_i}\right)+w_{i+1}\left(4+\frac{4e^{x_i}}{3+x_i^2}\right)=\ln(81-x_i^2)e^{x_i}\qquad i=1,2,3,$$

así

$$i=1:\qquad w_0\left(4-\frac{4e^{x_1}}{3+x_1^2}\right)-w_1\left(8+3(x_1+1)^2e^{x_1}\right)+w_2\left(4+\frac{4e^{x_1}}{3+x_1^2}\right)=\ln(81-x_1^2)e^{x_1}$$

$$5\left(4-\frac{4e^0}{3+0}\right)-w_1\left(8+3(0+1)^2e^0\right)+w_2\left(4+\frac{4e^0}{3+0}\right)=\ln(81-0)e^0$$

$$-11w_1+\frac{16}{3}w_2=\ln(81)-\frac{40}{3},$$

$$i=2:\qquad w_1\left(4-\frac{4e^{x_2}}{3+x_2^2}\right)-w_2\left(8+3(x_2+1)^2e^{x_2}\right)+w_3\left(4+\frac{4e^{x_2}}{3+x_2^2}\right)=\ln(81-x_2^2)e^{x_2}$$

$$w_1\left(4-\frac{4e^{0.5}}{3+0.5^2}\right)-w_2\left(8+3(0.5+1)^2e^{0.5}\right)+w_3\left(4+\frac{4e^{0.5}}{3+0.5^2}\right)=\ln(81-0.5^2)e^{0.5}$$

$$1.9708\,w_1-19.1289\,w_2+6.0292\,w_3\approx 7.2401,$$

$$i=3:\qquad w_2\left(4-\frac{4e^{x_3}}{3+x_3^2}\right)-w_3\left(8+3(x_3+1)^2e^{x_3}\right)+w_4\left(4+\frac{4e^{x_3}}{3+x_3^2}\right)=\ln(81-x_3^2)e^{x_3}$$

$$w_2\left(4-\frac{4e^1}{3+1}\right)-w_3\left(8+3(1+1)^2e^1\right)-3\left(4+\frac{4e^1}{3+1}\right)=\ln(81-1)e^1$$

$$1.2817\,w_2-40.6194\,w_3\approx 32.0664.$$

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$\left.\begin{array}{rl} -11w_1+\frac{16}{3}w_2 & \approx\ -8.9389\\ 1.9708\,w_1-19.1289\,w_2+6.0292\,w_3 & \approx\ 7.2401\\ 1.2817\,w_2-40.6194\,w_3 & \approx\ 32.0664\end{array}\right\}\quad \Rightarrow\quad \begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.5323\\ -0.5782\\ -0.8077\end{bmatrix}$$

por lo tanto, la solución aproximada del P.V.F. empleando el método de diferencias finitas es

x	-0.5	0	0.5	1	1.5
$y(x)\approx$	5	0.5323	-0.5782	-0.8077	-3

MATLAB Para obtener la aproximación de la solución del P.V.F. lineal, empleando el método de diferencia finita centrada empleamos la rutina `findiff`, más exactamente, `F = findiff (p, q, r, a, b, alpha, beta, N)`. Para el ejemplo anterior debemos definir en la ventana de comandos de MATLAB las funciones y utilizar la rutina con los datos del problema, esto es

```
>> p=@(x) -4*exp(x)./(3+x.^2)
>> q=@(x) 3*(x+1).^2.*exp(x)
>> r=@(x) log(81-x.^2).*exp(x)
>> F = findiff (p, q, r, -0.5, 1.5, 5, -3, 4)
```

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Las ecuaciones diferenciales parciales (E.D.P.) son clasificadas en forma similar a las cónicas. Ecuaciones diferenciales parciales:

- ***Elípticas***: estas ecuaciones aparecen, por ejemplo, en el estudio de la distribución de calor en estado estable en una región plana.
- ***Parabólicas***: estas ecuaciones aparecen, por ejemplo, en la difusión del flujo de calor a lo largo de una barra.
- ***Hiperbólicas***: estas ecuaciones aparecen, por ejemplo, en el desplazamiento de una cuerda vibrante.

Para aproximar la solución emplearemos el método de diferencias finitas.

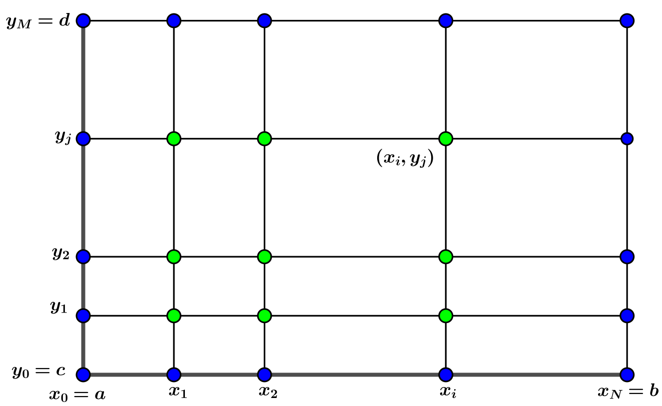
★ Solución numérica de E.D.P. Elíptica

Consideremos la región $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ a < x < b, \ c < y < d\}$ y denotemos por ∂R la frontera de la región R. Queremos aproximar u solución del problema:

$$\boxed{\mathbf{E}} \begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), & (x,y) \in R, \\ u(x,y) = g(x,y), & (x,y) \in \partial R, \end{cases}$$

donde u_{xx} y u_{yy} representan las derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, respectivamente.

<u>1^{er} paso</u>: discretizamos la región R, es decir, discretizamos los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$.



tamaño de paso en la variable x: h

$$h = \frac{b-a}{N} \quad \to \quad x_i = a + i\,h, \quad i = 0, \ldots, N$$

tamaño de paso en la variable y: k

$$k = \frac{d-c}{M} \quad \to \quad y_j = c + j\,k, \quad j = 0, \ldots, M$$

☺ De la condición de frontera $u(x, y) = g(x, y)$, conocemos los valores de u en los puntos azules ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_i, y_0)$, $u(x_i, y_M)$, para $i = 0, \ldots, N$ y $u(x_0, y_j)$, $u(x_N, y_j)$, para $j = 0, \ldots, M$.

☹ El objetivo es aproximar u en los puntos verdes ●, es decir, queremos aproximar los valores de la solución $u(x_i, y_j)$, para $i = 1, \ldots, N-1, \ j = 1, \ldots, M-1$.

2do paso: discretizamos la ecuación diferencial parcial, esto es, evaluamos la ecuación diferencial parcial en un punto (x_i, y_j)

$$u_{xx}(x_i, y_j) + u_{yy}(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)\ , \qquad i = 1, \ldots, N-1, \qquad j = 1, \ldots, M-1.$$

Para las segundas derivadas parciales usamos diferencias finitas centrada

$$u_{\boldsymbol{xx}}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_{\boldsymbol{i+1}}, y_j) - 2\,u(x_{\boldsymbol{i}}, y_j) + u(x_{\boldsymbol{i-1}}, y_j)}{\boldsymbol{h^2}} \qquad \text{y} \qquad u_{\boldsymbol{yy}}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_{\boldsymbol{j+1}}) - 2\,u(x_i, y_{\boldsymbol{j}}) + u(x_i, y_{\boldsymbol{j-1}})}{\boldsymbol{k^2}}$$

con errores $\mathcal{O}(h^2)$ y $\mathcal{O}(k^2)$, respectivamente. Al reemplazar en la ecuación diferencial parcial discretizada, si denotamos $w_{i,j}$ la aproximación de $u(x_i, y_j)$, obtenemos

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{k^2} = f(x_i, y_j)\ , \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 1, \ldots, M-1,$$

con un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$, donde

$$\begin{aligned} w_{i,0} &= g(x_i, c), \quad w_{i,M} = g(x_i, d), \qquad i = 0, \ldots, N, \\ w_{0,j} &= g(a, y_j), \quad w_{N,j} = g(b, y_j), \qquad j = 0, \ldots, M. \end{aligned}$$

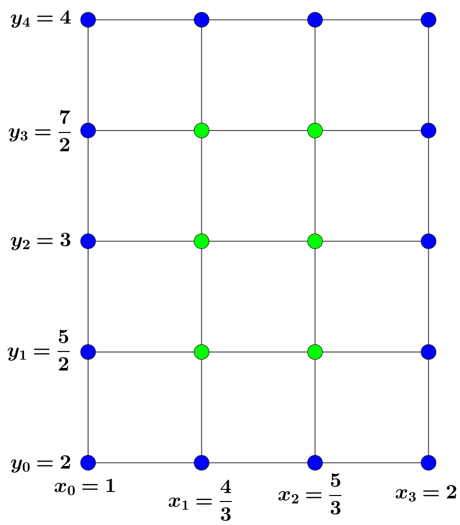
Hay que resolver un sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz tridiagonal por bloques si ordenamos las incógnitas así $\boldsymbol{w} = [w_{1,1}\ w_{2,1}\ \ldots\ w_{N-1,1}\ \ldots\ w_{1,M-1}\ w_{2,M-1}\ \ldots\ w_{N-1,M-1}]^{\mathrm{T}}$.

Ejemplo Aproximar la solución del problema elíptico

$$\begin{cases} u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 6(x+y), & 1 < x < 2,\ 2 < y < 4, \\ u(1,y) = y^3 + 1, \quad u(2,y) = y^3 + 8, & 2 \le y \le 4\,, \\ u(x,2) = x^3 + 8, \quad u(x,4) = x^3 + 64, & 1 \le x \le 2\,, \end{cases}$$

por el método de diferencias finitas tomando tamaños de paso $h = \frac{1}{3}$ y $k = \frac{1}{2}$.

<u>*Solución:*</u> Primero discretizamos la región $R = (1,2) \times (2,4)$ y empleamos las condiciones de frontera



$$\underline{w_{0,j} = y_j^3 + 1}$$
$$w_{0,1} = 2.5^3 + 1 = 16.625$$
$$w_{0,2} = 3^3 + 1 = 28$$
$$w_{0,3} = 3.5^3 + 1 = 43.875$$

$$\underline{w_{3,j} = y_j^3 + 8}$$
$$w_{3,1} = 2.5^3 + 8 = 23.625$$
$$w_{3,2} = 3^3 + 8 = 35$$
$$w_{3,3} = 3.5^3 + 8 = 50.875$$

$$\underline{w_{i,0} = x_i^3 + 8}$$
$$w_{1,0} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 8 \approx 10.3704$$
$$w_{2,0} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 + 8 \approx 12.6296$$

$$\underline{w_{i,4} = x_i^3 + 64}$$
$$w_{1,4} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + 64 \approx 66.3704$$
$$w_{2,4} = \left(\frac{5}{3}\right)^3 + 64 \approx 68.6296$$

La E.D.P. elíptica discretizada será

$$\frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 6(x_i + y_j)\ , \qquad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3$$

$$9(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) + 4(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}) = 6(x_i + y_j)\ , \qquad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

- $i = j = 1:$ $$9(w_{2,1} - 2w_{1,1} + w_{0,1}) + 4(w_{1,2} - 2w_{1,1} + w_{1,0}) = 6\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{2}\right)$$

$$9(w_{2,1} - 2w_{1,1} + 16.625) + 4(w_{1,2} - 2w_{1,1} + 10.3704) \approx 23$$
$$-26w_{1,1} + 9w_{2,1} + 4w_{1,2} \approx -168.1066$$

- $i = 2,\ j = 1:$ $$9(w_{3,1} - 2w_{2,1} + w_{1,1}) + 4(w_{2,2} - 2w_{2,1} + w_{2,0}) = 6\left(\frac{5}{3} + \frac{5}{2}\right)$$

$$9(23.625 - 2w_{2,1} + w_{1,1}) + 4(w_{1,2} - 2w_{1,1} + 12.6296) \approx 25$$
$$9w_{1,1} - 26w_{2,1} + 4w_{2,2} \approx -238.1434$$

- $i=1,\ j=2:$ $$9(w_{2,2}-2w_{1,2}+w_{0,2})+4(w_{1,3}-2w_{1,2}+w_{1,1})=6\left(\frac{4}{3}+3\right)$$
$$9(w_{2,2}-2w_{1,2}+28)+4(w_{1,2}-2w_{1,1}+12.6296)=26$$
$$4w_{1,1}-26w_{1,2}+9w_{2,2}+4w_{1,3}=-226$$

- $i=j=2:$ $$9(w_{3,2}-2w_{2,2}+w_{1,2})+4(w_{2,3}-2w_{2,2}+w_{2,1})=6\left(\frac{5}{3}+3\right)$$
$$9(w_{3,2}-2w_{2,2}+35)+4(w_{2,3}-2w_{2,2}+w_{2,1})=28$$
$$4w_{1,2}-26w_{1,3}+9w_{2,3}=-287$$

- $i=1,\ j=3:$ $$9(w_{2,3}-2w_{1,3}+w_{0,3})+4(w_{1,4}-2w_{1,3}+w_{1,2})=6\left(\frac{4}{3}+\frac{7}{2}\right)$$
$$9(w_{2,3}-2w_{1,3}+43.875)+4(66.3704-2w_{1,3}+w_{1,2})\approx 29$$
$$4w_{1,2}-26w_{1,3}+9w_{2,3}\approx -631.3566$$

- $i=2,\ j=3:$ $$9(w_{3,3}-2w_{2,3}+w_{1,3})+4(w_{2,4}-2w_{2,3}+w_{2,2})=6\left(\frac{5}{3}+\frac{7}{2}\right)$$
$$9(50.875-2w_{2,3}+w_{1,3})+4(68.6296-2w_{2,3}+w_{2,2})\approx 31$$
$$4w_{2,2}+9w_{1,3}-26w_{2,3}\approx -701.3934$$

El sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix}-26 & 9 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 9 & -26 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 4 & 0 & -26 & 9 & 4 & 0\\ 0 & 4 & 9 & -26 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 0 & -26 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & -26\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{1,1}\\ w_{2,1}\\ w_{1,2}\\ w_{2,2}\\ w_{1,3}\\ w_{2,3}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}-168.1066\\ -238.1434\\ -226\\ -287\\ -631.3566\\ -701.3934\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}w_{1,1}\\ w_{2,1}\\ w_{1,2}\\ w_{2,2}\\ w_{1,3}\\ w_{2,3}\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}17.9954\\ 20.2546\\ 29.3704\\ 31.6296\\ 45.2454\\ 47.5046\end{bmatrix}.$$

La solución aproximada de u en región R esta dada por

$\boldsymbol{w_{i,j}}$	$x_1=\frac{4}{3}$	$x_2=\frac{5}{3}$
$y_1=\frac{5}{2}$	17.9954	20.2546
$y_2=3$	29.3704	31.6296
$y_3=\frac{7}{2}$	45.2454	47.5046

por ejemplo
$w_{2,3}\approx u(x_2,y_3)=u\left(\frac{5}{3},\frac{7}{2}\right)\approx 47.5046.$

MATLAB Para obtener la aproximación de la solución de la E.D.P. elíptica **E**, empleando el método de diferencias finitas centradas empleamos la rutina `poisson`, más exactamente, `U = poisson(g,f1,f2,f3,f4,a,b,c,d,m,n)` donde `g` hace las veces de la función asociada a la ecuación diferencial f, las funciones `f1,f2,f3,f4` son las funciones asociadas a la condición de frontera, para $y=c$, $x=b$, $y=d$ y $x=a$, respectivamente.Finalmente, `m,n` son los números de nodos asociados a las discretizaciones de los intervalos $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente, que en términos de las variables empleadas `m`$=N+1$ y `n`$=M+1$. Para el ejemplo anterior debemos definir en la ventana de comandos de MATLAB las funciones, utilizar la rutina con los datos del problema y graficar el resultado, esto es

```
>> g=@(x,y) 6*(x+y)
>> f1=@(x) x.^3+8
>> f2=@(y) y.^3+8
>> f3=@(x) x.^3+64
>> f4=@(y) y.^3+1
>> U = poisson(g,f1,f2,f3,f4,1,2,2,4,4,5)
>> x=1:1/3:2; y=y=2:1/2:4;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);
>> surf(X,Y,U)
```