MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 11

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES - P.V.I.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

★ Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta estan construidos a partir de los métodos de Taylor pero con la ventaja de que no requieren la evaluación de las derivadas de la función f, pues en lugar de ello se evalúa, en cada paso, dicha función en varios puntos específicos. Retomemos el P.V.I.

$$\boxed{\mathbf{A}} \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ a \leq t \leq b, \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Por ejemplo, suponiendo que y solución del P.V.I. $\boxed{\mathbf{A}}$ cumple $y \in \mathcal{C}^3[a, b]$, la ecuación de avance del método de Taylor de orden 2 es

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)\, f(t_i, w_i)\right] = w_i + h \underbrace{\left(f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}\left[f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)\, f(t_i, w_i)\right]\right)}_{\Phi(t_i, w_i)}$$

donde el error en cada paso es $\mathcal{O}(h^3)$. Buscamos valores $a, \ \hat{\alpha}$ y β tales que

$$af(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta) \approx \Phi(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}\left[f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)\, f(t_i, w_i)\right],$$

de tal forma que la ecuación de avance

$$w_{i+1} = w_i + h\, a\, f(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta) \tag{1}$$

conserve el mismo error, esto es, tenga un error en cada paso $\mathcal{O}(h^3)$, para ello

$$af(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta) \approx f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}\left[f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)\, f(t_i, w_i)\right],$$

por teorema de Taylor para f en el punto $(t + \hat{\alpha}, y + \beta)$ alrededor del punto (t, y), existe (ξ, μ) tal que

$$f(t + \hat{\alpha}, y + \beta) = f(t, y) + f_t(t, y)\hat{\alpha} + f_y(t, y)\beta + \frac{1}{2}\left[f_{tt}(\xi, \mu)\hat{\alpha}^2 + 2f_{ty}(\xi, \mu)\hat{\alpha}\beta + f_{yy}(\xi, \mu)\beta^2\right]$$

así, evaluando en $(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta)$ alrededor del punto (t_i, w_i)

$$af(t_i, w_i) + af_t(t_i, w_i)\hat{\alpha} + af_y(t_i, w_i)\beta \approx f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}\left[f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)\, f(t_i, w_i)\right]$$

"igualando" obtenemos $a = 1, \ a\hat{\alpha} = \frac{h}{2}$ y $a\beta = \frac{h}{2}f(t_i, w_i)$ y por lo tanto $a = 1, \ \hat{\alpha} = \frac{h}{2}, \ \beta = \frac{h}{2}f(t_i, w_i)$, reemplazando en el término que omitimos

$$\frac{1}{2}\left[f_{tt}(\xi, \mu)\hat{\alpha}^2 + 2f_{ty}(\xi, \mu)\hat{\alpha}\beta + f_{yy}(\xi, \mu)\beta^2\right] = \frac{h^2}{8}\left[f_{tt}(\xi, \mu) + 2f_{ty}(\xi, \mu)f(t_i, w_i) + f_{yy}(\xi, \mu)f^2(t_i, w_i)\right] = \mathcal{O}(h^2)$$

concluyendo así

$$af(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta) = f\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right) + \mathcal{O}(h^2)$$

y reemplazando en (1)

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right) + \mathcal{O}(h^3).$$

La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Runge-Kutta de orden*** 2 esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

Es un método de Runge-Kutta de orden 2, ya que el error de truncamiento local es $\mathcal{O}(h^2)$. Este método en particular, recibe el nombre de ***método de Punto medio***.

Ahora, si en lugar de buscar $af(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta) \approx \Phi(t_i, w_i)$, buscamos $a,\ b,\ \hat{\alpha},\ \delta$ tales que

$$af(t_i, w_i) + bf(t_i + \hat{\alpha}, w_i + \beta f(t_i, w_i)) \approx \Phi(t_i, w_i)$$

podemos obtener otro método de Runge-Kutta de orden 2. Tomando $a = b = \frac{1}{2}$ y $\hat{\alpha} = \beta = h$, obtenemos que, la ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Euler Modificado*** esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right], \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

Para obtener un método de Runge-Kutta de orden 3, proponemos buscar $a,\ b,\ \hat{\alpha}_1,\ \hat{\alpha}_2,\ \delta_1,\ \delta_2$ tales que

$$af(t_i, w_i) + bf(t_i + \hat{\alpha}_1, w_i + \delta_1 f(t_i + \hat{\alpha}_2, w_i + \delta_2 f(t_i, w_i))) \approx T^{(3)}(t_i, w_i)$$

donde $T^{(3)}(t_i, w_i)$ no es mas que $\Phi(t_i, w_i)$ dado por el método de Taylor de orden 3, esto es

$$T^{(3)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2}\left[f_t + f_y\, f\right]\Big|_{(t_i, w_i)} + \frac{h^2}{6}\left[f_{tt} + f_{ty}\, f + f_y(f_t + f_y\, f) + f(f_{yt} + f_{yy} f)\right]\Big|_{(t_i, w_i)}$$

Tomando $a = \frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4},\ \hat{\alpha}_1 = \delta_1 = \frac{2h}{3},\ \hat{\alpha}_2 = \delta_2 = \frac{h}{3}$, obtenemos que, la ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Heun*** esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + \frac{h}{4}\left[f(t_i, w_i) + 3f\left(t_i + \frac{2h}{3}, w_i + \frac{2h}{3} f\left(t_i + \frac{h}{3}, w_i + \frac{h}{3} f(t_i, w_i)\right)\right)\right], \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

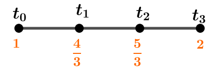
Procediendo de una forma similar obtenemos que la ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Runge-Kutta de orden*** 4 esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + \frac{h}{6}\left[k_1 + 2\,k_2 + 2\,k_3 + k_4\right], \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ &\text{donde:} \\ &\quad k_1 = f(t_i, w_i), \\ &\quad k_2 = f\left(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{h}{2} k_1\right), \\ &\quad k_3 = f\left(t_i + \tfrac{h}{2}, w_i + \tfrac{h}{2} k_2\right), \\ &\quad k_4 = f(t_{i+1}, w_i + h\, k_3). \end{aligned}}$$

Ejemplo Aproxime la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{y\cos t + 2te^y}{\operatorname{sen} t + t^2 e^y + 2}, & 1 \le t \le 2\,, \\ y\,(1) = 0\,. \end{cases}$$

con tamaño de paso $h = \frac{1}{3}$ empleando los métodos de Runge-Kutta de orden 2 vistos.

<u>Solución:</u> Sea $f(t,y) = \dfrac{y\cos t + 2te^y}{\operatorname{sen} t + y^2 e^y + 2}$. Con tamaño de paso $h = \frac{1}{3}$: 

buscamos $\{(t_i, w_i)\}_{i=0}^{3}$ donde $w_i \approx y(t_i)$, $i = 1,2,3$, y de la condición inicial $w_0 = 0$.

- RK2: Método de punto medio

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2} f(t_i, w_i)\right) = w_i + \frac{1}{3} f\left(t_i + \frac{1}{6}, w_i + \frac{1}{6} f(t_i, w_i)\right), \quad i = 0,1,2.$$

Así

$$w_1 = w_0 + \frac{1}{3} f\left(t_0 + \frac{1}{6}, w_0 + \frac{1}{6} f(t_0, w_0)\right) = \frac{1}{3} f\left(1 + \frac{1}{6}, \frac{1}{6} f(1,0)\right) = \frac{1}{3} f\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6} f(1,0)\right) \approx \frac{1}{3} f\left(\frac{7}{6}, \frac{1}{6} 0.5206\right) \approx 0.1952$$

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{3} f\left(t_1 + \frac{1}{6}, w_1 + \frac{1}{6} f(t_1, w_1)\right) \approx 0.1952 + \frac{1}{3} f\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}, 0.1952 + \frac{1}{6} f\left(\frac{4}{3}, 0.1952\right)\right)$$

$$\approx 0.1952 + \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{2}, 0.1952 + \frac{1}{6} 0.6405\right) \approx 0.1952 + \frac{1}{3} f\left(\frac{3}{2}, 0.302\right) \approx 0.4203$$

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{3} f\left(t_2 + \frac{1}{6}, w_2 + \frac{1}{6} f(t_2, w_2)\right) \approx 0.4203 + \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{3} + \frac{1}{6}, 0.4203 + \frac{1}{6} f\left(\frac{5}{3}, 0.4203\right)\right)$$

$$\approx 0.4203 + \frac{1}{3} f\left(\frac{11}{6}, 0.4203 + \frac{1}{6} 0.6969\right) \approx 0.4203 + \frac{1}{3} f\left(\frac{11}{6}, 0.5364\right) \approx 0.6548$$

La aproximación de la solución del P.V.I. obtenida por el método de Punto medio es

t_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$w_i \approx y(t_i)$	0	0.1952	0.4203	0.6548

- RK2: Método de Euler Modificado

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i))\right] = w_i + \frac{1}{6}\left[f(t_i, w_i) + f\left(t_{i+1}, w_i + \frac{1}{3} f(t_i, w_i)\right)\right], \quad i = 0,1,2.$$

Así

$$w_1 = w_0 + \frac{1}{6}\left[f(t_0, w_0) + f\left(t_1, w_0 + \frac{1}{3} f(t_0, w_0)\right)\right] = \frac{1}{6}\left[f(1,0) + f\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3} f(1,0)\right)\right]$$

$$\approx \frac{1}{6}\left[0.5206 + f\left(\frac{4}{3}, \frac{0.5206}{3}\right)\right] \approx \frac{1}{6}\left[0.5206 + 0.6316\right] \approx 0.192$$

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{6}\left[f(t_1, w_1) + f\left(t_2, w_1 + \frac{1}{3} f(t_1, w_1)\right)\right] = 0.192 + \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{4}{3}, 0.192\right) + f\left(\frac{5}{3}, 0.192 + \frac{1}{3} f\left(\frac{4}{3}, 0.192\right)\right)\right]$$

$$\approx 0.192 + \frac{1}{6}\left[0.6391 + f\left(\frac{5}{3}, 0.192 + \frac{0.6391}{3}\right)\right] \approx 0.192 + \frac{1}{6}\left[0.6391 + 0.6926\right] \approx 0.414$$

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{6}\left[f(t_2, w_2) + f\left(t_3, w_2 + \frac{1}{3} f(t_2, w_2)\right)\right] = 0.414 + \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{5}{3}, 0.414\right) + f\left(2, 0.414 + \frac{1}{3} f\left(\frac{5}{3}, 0.414\right)\right)\right]$$

$$\approx 0.414 + \frac{1}{6}\left[0.6951 + f\left(2, 0.414 + \frac{0.6951}{3}\right)\right] \approx 0.414 + \frac{1}{6}\left[0.6951 + 0.6984\right] \approx 0.6462$$

La aproximación de la solución del P.V.I. obtenida por el método de Euler Modificado es

t_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$w_i \approx y(t_i)$	0	0.192	0.414	0.6462

Ejercicio Programar el método de Runge-Kutta de orden 2

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + \frac{2}{3} h\, f(t_i, w_i) + \frac{1}{3} h\, f\left(t_i + \frac{3}{2} h, w_i + \frac{3}{2} h\, f(t_i, w_i)\right), \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}}$$

Emplearlo para aproximar la solución del P.V.I. del ejemplo anterior con tamaño de paso $h = \frac{1}{10}$.

Sistemas de ecuaciones diferenciales y ecuaciones diferenciales de orden superior

Ahora, queremos aproximar la solución de un sistemas de ecuaciones diferenciales y de ecuaciones diferenciales de orden superior, acompañados de las respectivas condiciones iniciales. Para ello, por medio de una "introducción de nuevas variables y/o funciones" vamos a reescribir ambos problemas como un P.V.I. vectorial de la forma

$$\boxed{\mathrm{V}} \quad \begin{cases} \boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{U}(t)), & a \leq t \leq b, \\ \boldsymbol{U}(a) = \boldsymbol{\alpha}, \end{cases}$$

con $\boldsymbol{\alpha}$ vector que contiene las condiciones iniciales.

★ Consideremos inicialmente el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$(\mathrm{B}_1) \quad \begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)), & a \leq t \leq b, \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)), & a \leq t \leq b, \\ \qquad \vdots & \\ u_m'(t) = f_m(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)), & a \leq t \leq b, \end{cases}$$

con condiciones iniciales

$$(\mathrm{B}_2) \quad \begin{cases} u_1(a) = \alpha_1, \\ u_2(a) = \alpha_2, \\ \quad \vdots \\ u_m(a) = \alpha_m. \end{cases}$$

Queremos aproximar la solución del P.V.I. $(\mathrm{B}_1) - (\mathrm{B}_2)$, $u_1(t),\ u_2(t)\ \ldots,\ u_m(t)$ para todo $t \in [a, b]$. Pero, primero vamos a estudiar bajo que condiciones existe una única solución.

Definición. *Sea $D = \{(t, y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \ : \ a \leq t \leq b, -\infty < y_1, \ldots, y_m < \infty\}$ una región de $\mathbb{R}^{m+1}$. Una función $g(t, y_1, \ldots, y_m)$ definida en la región D satisface una condición de Lipschitz en las variables $y_1, \ldots, y_m$ en la región D, si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|g(t, y_1, \ldots, y_m) - g(t, z_1, \ldots, z_m)| \leq L \sum_{i=1}^{m} |y_i - z_i|, \quad \forall (t, y_1, \ldots, y_m),\ (t, z_1, \ldots, z_m) \in D.$$

Ejemplo Demostrar que la función $g(t, y_1, y_2) = t^3|y_1| + \tan^{-1}(y_2)$ satisface una condición de Lipschitz en las variables y_1, y_2 en la región $D = [-3, 1] \times \mathbb{R}^2$.

<u>*Solución:*</u> Para verificar si g satisface una condición de Lipschitz en las variables y_1, y_2 en la región D, tomemos dos puntos (t, y_1, y_2), $(t, z_1, z_2) \in D$, esto es $t \in [-3, 1]$ y $y_1,\ y_2,\ z_1,\ z_2 \in \mathbb{R}$

$$|g(t, y_1, y_2) - g(t, z_1, z_2)| = \left|t^3|y_1| + \tan^{-1}(y_2) - t^3|z_1| - \tan^{-1}(z_2)\right| = \left|t^3(|y_1| - |z_1|) + (\tan^{-1}(y_2) - \tan^{-1}(z_2))\right|$$

usando desigualdad triangular, desigualdad triangular inversa y teorema del valor medio, existe ξ entre y_2 y z_2 tal que

$$|g(t, y_1, y_2) - g(t, z_1, z_2)| \leq \left|t^3\right| \, \big|\,|y_1| - |z_1|\,\big| + |\tan^{-1}(y_2) - \tan^{-1}(z_2)| \leq \left|t^3\right| \, |y_1 - z_1| + \left|\frac{1}{1 + \xi^2}\right| |y_2 - z_2|$$

acotando $\left|t^3\right|$ en $[-3, 1]$ y $\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|$ en $\mathbb{R}$, obtenemos

$$|g(t, y_1, y_2) - g(t, z_1, z_2)| \leq 27\,|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2| \leq 27\,(|y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|) = 27 \sum_{i=1}^{2} |y_i - z_i|,$$

concluimos que g satisface una condición de Lipschitz en las variables y_1, y_2 en la región D con constante de Lipschitz $L = 27$.

> **Teorema.** *Supongamos que $D = [a,b] \times \mathbb{R}^m$, $f_i(t, y_1, \ldots, y_m)$ función continua en D que satisfacen una condición de Lipschitz en las variables $y_1, \ldots, y_m$, en la región D para toda $i = 1, \ldots, m$. Entonces el sistema de ecuaciones diferenciales* (B_1) *con condiciones iniciales* (B_2) *tiene una única solución $u_1,\ u_2 \ldots,\ u_m$, en $[a,b]$.*

Para aproximar la solución del P.V.I. $(\mathrm{B}_1) - (\mathrm{B}_2)$, lo vamos a representar por medio de un P.V.I. vectorial **V** al introducir las funciones vectoriales $\boldsymbol{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dadas por

$$\boldsymbol{U}(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{U}(t)) := \begin{bmatrix} f_1(t, \boldsymbol{U}(t)) \\ f_2(t, \boldsymbol{U}(t)) \\ \vdots \\ f_m(t, \boldsymbol{U}(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \\ f_2(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \\ \vdots \\ f_m(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \end{bmatrix}$$

así, el sistema de ecuaciónes diferenciales (B_1) no es más que $\boldsymbol{U}'(t) = F(t, \boldsymbol{U}(t))$ para $t \in [a,b]$ y las condiciones iniciales (B_1) son simplemente $\boldsymbol{U}(a) = \boldsymbol{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}$, obteniendo así el P.V.I **V** .

Ahora, para aproximar la solución del P.V.I **V** procedemos de manera similar a como se hizo para aproximar la solución del P.V.I **A** . Primero, discretizamos el intervalo $[a,b]$ con tamaño de paso $h = \frac{b-a}{n}$ obteniendo los nodos $\{t_i\}_{i=0}^{n}$ y buscamos aproximar $\boldsymbol{U}(t_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ teniendo en cuenta que $\boldsymbol{U}(t_0) = \boldsymbol{\alpha}$. Si denotamos por $\boldsymbol{W}_i$ la aproximación de $\boldsymbol{U}(t_i)$ para $i = 1, \ldots, n$ podemos emplear todos los métodos vistos, así:

- La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Euler*** esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha}, \\ &\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + h\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

- La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Taylor de orden m*** esta dado por

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha}, \\ &\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + h\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i) + \frac{h^2}{2!}\boldsymbol{F}'(t_i, \boldsymbol{W}_i) + \ldots + \frac{h^m}{m!}\boldsymbol{F}^{(m-1)}(t_i, \boldsymbol{W}_i), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

- La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Punto Medio*** esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha}, \\ &\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + h\boldsymbol{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{2}\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i)\right), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

- La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Euler Modificado*** esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} &\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha}, \\ &\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{2}\left[\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i) + \boldsymbol{F}(t_{i+1}, \boldsymbol{W}_i + hf(t_i, \boldsymbol{W}_i))\right], \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

- La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Heun*** esta dada por

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha},\\
&\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{4}\left[\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i) + 3\boldsymbol{F}\left(t_i + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{W}_i + \frac{2h}{3}\boldsymbol{F}\left(t_i + \frac{h}{3}, \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{3}\boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i)\right)\right)\right], \quad i = 0, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

- La ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Runge-Kutta de orden*** 4 esta dada por

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha},\\
&\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{6}\left[\boldsymbol{K}_1 + 2\,\boldsymbol{K}_2 + 2\,\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4\right], \quad i = 0, \ldots, n-1,\\
&\text{donde:}\\
&\quad \boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{F}(t_i, \boldsymbol{W}_i),\\
&\quad \boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{F}\left(t_i + \tfrac{h}{2}, \boldsymbol{W}_i + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{K}_1\right),\\
&\quad \boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{F}\left(t_i + \tfrac{h}{2}, \boldsymbol{W}_i + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{K}_2\right),\\
&\quad \boldsymbol{K}_4 = \boldsymbol{F}(t_{i+1}, \boldsymbol{W}_i + h\,\boldsymbol{K}_3).
\end{aligned}$$

Ejemplo Considere el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales sujeto a sus respectivas condiciones iniciales:

$$\begin{cases}
u_1' = u_2 - u_3 + t, & 0.2 \leq t \leq 1\,,\\
u_2' = 3t^2 + 2|u_1|, & 0.2 \leq t \leq 1\,,\\
u_3' = \cos(2u_2) + e^{-t}, & 0.2 \leq t \leq 1\,,\\
u_1(0.2) = 1.4\,,\\
u_2(0.2) = 1.5\,,\\
u_3(0.2) = -0.6\,.
\end{cases}$$

Demuestre que el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden sujeto a sus respectivas condiciones iniciales tiene una única solución. Aplique el método de Runge-Kutta de orden 4 para aproximar la solución con tamaño de paso $h = 0.4$.

Solución: Sean $f_1(t, u_1, u_2, u_3) = u_2 - u_3 + t$, $f_2(t, u_1, u_2, u_3) = 3t^2 + 2|u_1|$, $f_3(t, u_1, u_2, u_3) = \cos(2u_2) + e^{-t}$ y $D = [0.2, 1] \times \mathbb{R}^3$. Las tres funciones f_1, f_2 y f_3 son funciones continuas en todo $\mathbb{R}^4$, en particular en D. Veamos que cada función satisface una condición de Lipschitz en las variables u_1, u_2 y u_3 en la región D, sean $(t, u_1, u_2, u_3), (t, v_1, v_2, v_3) \in D$

$$|f_1(t, u_1, u_2, u_3) - f_1(t, v_1, v_2, v_3)| = |u_2 - u_3 + \cancel{t} - (v_2 - v_3 + \cancel{t})| \leq |u_2 - v_2| + |u_3 - v_3|$$

acá hemos empleado la desigualdad triangular $|z - w| \leq |z| + |w|$. Notemos que en general $|u_1 - v_1| \geq 0$ así que se cumple que $|u_2 - v_2| + |u_3 - v_3| \leq |u_2 - v_2| + |u_3 - v_3| + |u_1 - v_1|$ por lo tanto

$$|f_1(t, u_1, u_2, u_3) - f_1(t, v_1, v_2, v_3)| \leq \sum_{i=1}^{3} |u_i - v_i|,$$

f_1 satisface una condición de Lipschitz en las variables u_1, u_2 y u_3 en la región D, con constante de Lipschitz $L_1 = 1$ y procediendo de manera similar, teniendo presenta la desigualdad triangular inversa y el teorema del valor medio

$$|f_2(t, u_1, u_2, u_3) - f_2(t, v_1, v_2, v_3)| = |3t^2 + 2|u_1| - (3t^2 + 2|v_1|)| \leq |u_1 - v_1| \leq \sum_{i=1}^{3} |u_i - v_i|,$$

$$|f_3(t, u_1, u_2, u_3) - f_3(t, v_1, v_2, v_3)| = |\cos(2u_2) + e^{-t} - \cos(2v_2) - e^{-t}| = |\cos(2u_2) - \cos(2v_2)| \leq 4|u_2 - v_2| \leq 4\sum_{i=1}^{3} |u_i - v_i|,$$

f_2 y f_3 satisfacen una condición de Lipschitz en las variables $u_1,\ u_2$ y u_3 en la región D, con constantes de Lipschitz $L_2 = 1$ y $L_3 = 4$, respectivamente. Podemos concluir entonces que el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden sujeto a sus respectivas condiciones iniciales tiene una única solución. Ahora, para aproximar esta solución, primero definimos las funciones vectoriales

$$\boldsymbol{U}(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}) := \begin{bmatrix} f_1(t,\boldsymbol{U}) \\ f_2(t,\boldsymbol{U}) \\ f_3(t,\boldsymbol{U}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 - u_3 + t \\ 3t^2 + 2|u_1| \\ \cos(2u_2) + e^{-t} \end{bmatrix}$$

así, podemos representar el sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales como un P.V.I. vectorial

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}(t)), & 0.2 \le t \le 1, \\ \boldsymbol{U}(0.2) = \boldsymbol{\alpha}, \end{cases} \qquad \text{donde} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ -0.6 \end{bmatrix}.$$

Al tomar tamaño de paso $h = 0.4$ obtenemos los nodos $t_0 = 0.2,\ t_1 = 0.6,\ t_2 = 1$, así que buscamos hallar la nube de puntos $\{t_i, \boldsymbol{W}_i\}_{i=0}^{2}$ donde $\boldsymbol{W}_i \approx \boldsymbol{U}(t_i)$ para $i = 1,\ 2$, teniendo presente que $\boldsymbol{W}_0 = \boldsymbol{\alpha}$ y la ecuación de avance para el método de Runge-Kutta de orden 4 será

$$\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + \frac{0.4}{6}\left[\boldsymbol{K}_1 + 2\,\boldsymbol{K}_2 + 2\,\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4\right], \quad i = 0, 1.$$

Para $i = 0$, $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}_0 + \dfrac{0.4}{6}\left[\boldsymbol{K}_1 + 2\,\boldsymbol{K}_2 + 2\,\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4\right]$ donde

$$\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{F}(t_0, \boldsymbol{W}_0) = \boldsymbol{F}\left(0.2, \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ -0.6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1.5 - (-0.6) + 0.2 \\ 3(0.2^2) + 2|1.4| \\ \cos(2(1.5)) + e^{-0.2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.3 \\ 2.92 \\ -0.1713 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{F}\left(t_0 + \frac{0.4}{2}, \boldsymbol{W}_0 + \frac{0.4}{2}\boldsymbol{K}_1\right) = \boldsymbol{F}\left(0.4, \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ -0.6 \end{bmatrix} + 0.2\begin{bmatrix} 2.3 \\ 2.92 \\ -0.1713 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{F}\left(0.4, \begin{bmatrix} 1.86 \\ 2.084 \\ -0.6343 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 3.1183 \\ 4.2 \\ 0.1524 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{F}\left(t_0 + \frac{0.4}{2}, \boldsymbol{W}_0 + \frac{0.4}{2}\boldsymbol{K}_2\right) = \boldsymbol{F}\left(0.4, \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ -0.6 \end{bmatrix} + 0.2\begin{bmatrix} 3.1183 \\ 4.2 \\ 0.1524 \end{bmatrix}\right) \approx \boldsymbol{F}\left(0.4, \begin{bmatrix} 2.0237 \\ 2.34 \\ -0.5695 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 3.3095 \\ 4.5274 \\ 0.6379 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_4 = \boldsymbol{F}\left(t_1, \boldsymbol{W}_0 + 0.4\boldsymbol{K}_3\right) = \boldsymbol{F}\left(0.6, \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ -0.6 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 3.3095 \\ 4.5274 \\ 0.6379 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{F}\left(0.6, \begin{bmatrix} 2.7238 \\ 3.311 \\ -0.3448 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 4.2558 \\ 6.5276 \\ 1.492 \end{bmatrix}$$

así

$$\boldsymbol{W}_1 \approx \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.5 \\ -0.6 \end{bmatrix} + \frac{0.2}{3}\left(\begin{bmatrix} 2.3 \\ 2.92 \\ -0.1713 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3.1183 \\ 4.2 \\ 0.1524 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3.3095 \\ 4.5274 \\ 0.6379 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.2558 \\ 6.5276 \\ 1.492 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 2.6941 \\ 3.2935 \\ -0.4066 \end{bmatrix}.$$

Para $i = 1$, $\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{W}_1 + \dfrac{0.2}{3}\left[\boldsymbol{K}_1 + 2\,\boldsymbol{K}_2 + 2\,\boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4\right]$ donde

$$\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1) \approx \boldsymbol{F}\left(0.6, \begin{bmatrix} 2.6941 \\ 3.2935 \\ -0.4066 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3.2935 - (-0.4066) + 0.2 \\ 3(0.6^2) + 2|2.6941| \\ \cos(2(3.2935)) + e^{-0.6} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 4.3001 \\ 6.4682 \\ 1.503 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \boldsymbol{F}\left(t_1 + \frac{0.4}{2}, \boldsymbol{W}_1 + \frac{0.4}{2}\boldsymbol{K}_1\right) = \boldsymbol{F}\left(0.8, \begin{bmatrix} 2.6941 \\ 3.2935 \\ -0.4066 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 4.3001 \\ 6.4682 \\ 1.503 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 5.4931 \\ 9.0282 \\ -0.5195 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_3 = \boldsymbol{F}\left(t_1 + \frac{0.4}{2}, \boldsymbol{W}_1 + \frac{0.4}{2}\boldsymbol{K}_2\right) = \boldsymbol{F}\left(0.8, \begin{bmatrix} 2.6941 \\ 3.2935 \\ -0.4066 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 5.4931 \\ 9.0282 \\ -0.5195 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 6.4096 \\ 9.5054 \\ -0.2661 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_4 = \boldsymbol{F}\left(t_2, \boldsymbol{W}_1 + 0.4\boldsymbol{K}_3\right) = \boldsymbol{F}\left(1, \begin{bmatrix} 2.6941 \\ 3.2935 \\ -0.4066 \end{bmatrix} + 0.4 \begin{bmatrix} 6.4096 \\ 9.5054 \\ -0.2661 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 8.6087 \\ 13.5159 \\ 0.3138 \end{bmatrix}$$

así

$$\boldsymbol{W}_2 \approx \begin{bmatrix} 2.6941 \\ 3.2935 \\ -0.4066 \end{bmatrix} + \frac{0.2}{3}\left(\begin{bmatrix} 4.3001 \\ 6.4682 \\ 1.503 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5.4931 \\ 9.0282 \\ -0.5195 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 6.4096 \\ 9.5054 \\ -0.2661 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.6087 \\ 13.5159 \\ 0.3138 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 5.1417 \\ 7.0969 \\ -0.3902 \end{bmatrix}.$$

Concluimos así que la aproximación de la solución del sistema de ecuaciones de primer orden es

i	t_i	$w_{1,i} \approx u_1(t_i)$	$w_{2,i} \approx u_2(t_i)$	$w_{3,i} \approx u_3(t_i)$
0	0.2	1.4	1.5	-0.6
1	0.6	2.6941	3.2935	-0.4066
2	1	5.1417	7.0969	-0.3902

★ Consideremos el P.V.I. de orden superior

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(m-1)}(t)), & a \leq t \leq b, \\ y(a) = \alpha_1, \\ y'(a) = \alpha_2, \\ \quad \vdots \\ y^{(m-1)}(a) = \alpha_m. \end{cases}$$

Introducimos para $t \in [a, b]$ las variables

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) := y(t) \\ u_2(t) := y'(t) \\ u_3(t) := y''(t) \\ \quad \vdots \\ u_m(t) := y^{(m-1)}(t) \end{array}\right\} \quad \underset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \quad \left.\begin{array}{l} u_1'(t) = y'(t) \\ u_2'(t) = y''(t) \\ \quad \vdots \\ u_m'(t) = y^{(m)}(t) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = u_3(t) \\ \quad \vdots \\ u_m'(t) = f(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \end{array}\right.$$

y definiendo el vector $\boldsymbol{\alpha}$ y las funciones vectoriales $\boldsymbol{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ y $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ por

$$\boldsymbol{\alpha} := \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{U}(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{U}(t)) := \begin{bmatrix} u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ f(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)) \end{bmatrix},$$

el P.V.I. de orden superior (S) se puede escribir como un P.V.I V y ya vimos como aproximar la solución de éste.

Notemos que, según el teorema de existencia y unicidad, el P.V.I. de orden superior (S) tiene una única solución $y(t)$ para $t \in [a, b]$ siempre que $f(t, u_1, \ldots, u_m)$ sea una función continua y satisfaga una condición de Lipschitz en las variables $u_1, \ldots, u_m$, en la región $D = [a, b] \times \mathbb{R}^m$.

Ejemplo Consideremos el P.V.I. de orden superior

$$\begin{cases} y'' + \operatorname{sen}(y') + e^t y = \ln(t^2+4), \quad 3 \le t \le 4\,, \\ y(3) = 1\,, \\ y'(3) = 0\,, \end{cases}$$

Demuestre que P.V.I. tiene una única solución. Aplique el método de Heun para aproximar la solución con tamaño de paso $h = 0.5$.

<u>*Solución:*</u> Despejamos y'' de la ecuación diferencial, $y'' = \ln(t^2+4) - \operatorname{sen}(y') - e^t y$. Para demostrar que el P.V.I. tiene una única solución basta demostrar que la función $f(t,y,z) = \ln(t^2+4) - \operatorname{sen}(z) - e^t y$ satisface una condición de Lipschitz en las variables y, z, en la región $D = [3,4] \times \mathbb{R}^2$: sean (t,y,z), $(t,v,w) \in D$

$$|f(t,y,z) - f(t,v,w)| = |\ln(t^2+4) - \operatorname{sen}(z) - e^t y - (\ln(t^2+4) - \operatorname{sen}(w) - e^t v)| \le |\operatorname{sen}(z) - \operatorname{sen}(w)| + e^t|y-v| \le |z-w| + e^4|y-v|$$

f satisface una condición de Lipschitz en las variables y, z, en la región $D = [3,4] \times \mathbb{R}^2$ con constante de Lipschitz $L = e^4$ y por lo tanto, el P.V.I. tiene una única solución y en $[3,4]$. Ahora, para aproximar la solución, primero introducimos las siguientes variables

$$\left.\begin{array}{l} u_1(t) = y(t) \\ u_2(t) = y'(t) \end{array}\right\} \quad \underset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \quad \left.\begin{array}{l} u_1'(t) = y'(t) \\ u_2'(t) = y''(t) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} u_1'(t) = u_2(t) \\ u_2'(t) = f(t,u_1,u_2) \end{array}\right.$$

y definiendo las funciones vectoriales $\boldsymbol{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por

$$\boldsymbol{U}(t) := \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}) := \begin{bmatrix} u_2 \\ \ln(t^2+4) - \operatorname{sen}(u_2) - e^t u_1 \end{bmatrix},$$

el P.V.I. de orden superior se puede escribir como un P.V.I. vectorial

$$\begin{cases} \boldsymbol{U}'(t) = \boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{U}(t)), \qquad 3 \le t \le 4, \\ \boldsymbol{U}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Al tomar tamaño de paso $h = 0.5$ obtenemos los nodos $t_0 = 3,\ t_1 = 3.5,\ t_2 = 4$, así que buscamos hallar la nube de puntos $\{t_i, \boldsymbol{W}_i\}_{i=0}^2$ donde $\boldsymbol{W}_i \approx \boldsymbol{U}(t_i)$ para $i = 1,\, 2$, teniendo presente que $\boldsymbol{W}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y la ecuación de avance para el método de Heun será

$$\boldsymbol{W}_{i+1} = \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{4}\left[\boldsymbol{F}(t_i,\boldsymbol{W}_i) + 3\boldsymbol{F}\left(t_i + \frac{2h}{3}, \boldsymbol{W}_i + \frac{2h}{3}\boldsymbol{F}\left(t_i + \frac{h}{3}, \boldsymbol{W}_i + \frac{h}{3}\boldsymbol{F}(t_i,\boldsymbol{W}_i)\right)\right)\right], \quad i = 0, 1.$$

Para $i = 0$, $\boldsymbol{W}_1 = \boldsymbol{W}_0 + \dfrac{0.5}{4}\left[\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{W}_0) + 3\boldsymbol{F}\left(t_0 + \dfrac{1}{3}, \boldsymbol{W}_0 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{F}\left(t_0 + \dfrac{0.5}{3}, \boldsymbol{W}_0 + \dfrac{0.5}{3}\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{W}_0)\right)\right)\right]$, por partes

$$\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{W}_0) = \boldsymbol{F}\left(3, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \ln(3^2+4) - \operatorname{sen}(0) - e^3 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ -17.5206 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\left(t_0 + \frac{0.5}{3}, \boldsymbol{W}_0 + \frac{0.5}{3}\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{W}_0)\right) = \boldsymbol{F}\left(3 + \frac{0.5}{3}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ -17.5206 \end{bmatrix}\right) \approx \boldsymbol{F}\left(3.1667, \begin{bmatrix} 1 \\ -2.9201 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} -2.9201 \\ -20.8683 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\left(t_0 + \frac{1}{3}, \boldsymbol{W}_0 + \frac{1}{3}\boldsymbol{F}\left(t_0 + \frac{0.5}{3}, \boldsymbol{W}_0 + \frac{0.5}{3}\boldsymbol{F}(t_0,\boldsymbol{W}_0)\right)\right) \approx \boldsymbol{F}\left(3.3333, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2.9201 \\ -20.8683 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} -6.9561 \\ 2.5921 \end{bmatrix}$$

así

$$\boldsymbol{W}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{4}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -17.5206 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -6.9561 \\ 2.5921 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} -1.6085 \\ -1.218 \end{bmatrix}.$$

Para $i = 1$, $\boldsymbol{W}_2 = \boldsymbol{W}_1 + \dfrac{0.5}{4}\left[\boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1) + 3\boldsymbol{F}\left(t_1 + \dfrac{1}{3}, \boldsymbol{W}_1 + \dfrac{1}{3}\boldsymbol{F}\left(t_1 + \dfrac{0.5}{3}, \boldsymbol{W}_1 + \dfrac{0.5}{3}\boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1)\right)\right)\right]$, por partes

$$\boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1) = \boldsymbol{F}\left(3.5, \begin{bmatrix} -1.6085 \\ -1.218 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1.218 \\ \ln(3.5^2 + 4) - \operatorname{sen}(-1.218) - (-1.6085)e^{3.5} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1.218 \\ 56.9927 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\left(t_1 + \frac{0.5}{3}, \boldsymbol{W}_1 + \frac{0.5}{3}\boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1)\right) = \boldsymbol{F}\left(3.5 + \frac{0.5}{3}, \begin{bmatrix} -1.6085 \\ -1.218 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{3}\begin{bmatrix} -1.218 \\ 56.9927 \end{bmatrix}\right) \approx \boldsymbol{F}\left(3.6667, \begin{bmatrix} -1.8115 \\ 8.2808 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 8.2808 \\ 72.8193 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\left(t_1 + \frac{1}{3}, \boldsymbol{W}_1 + \frac{1}{3}\boldsymbol{F}\left(t_1 + \frac{0.5}{3}, \boldsymbol{W}_1 + \frac{0.5}{3}\boldsymbol{F}(t_1, \boldsymbol{W}_1)\right)\right) \approx \boldsymbol{F}\left(3.8333, \begin{bmatrix} -1.6085 \\ -1.218 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 8.2808 \\ 72.8193 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 23.0551 \\ -49.4277 \end{bmatrix}$$

así

$$\boldsymbol{W}_2 \approx \begin{bmatrix} -1.6085 \\ -1.218 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{4}\left(\begin{bmatrix} -1.218 \\ 56.9927 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 23.0551 \\ -49.4277 \end{bmatrix}\right) \approx \begin{bmatrix} 6.8849 \\ -12.6293 \end{bmatrix}.$$

Concluimos así que la aproximación de la solución del P.V.I. de orden superior es:

t_i	3	3.5	4
$w_i \approx y(t_i)$	1	-1.6085	6.8849

las segundas componentes de $\boldsymbol{W}_1$ y $\boldsymbol{W}_2$ representan aproximaciones de y' en t_1 y t_2, respectivamente.