MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 14

SOLUCIÓN NUMÉRICA E.D.P.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA SEDE MEDELLÍN

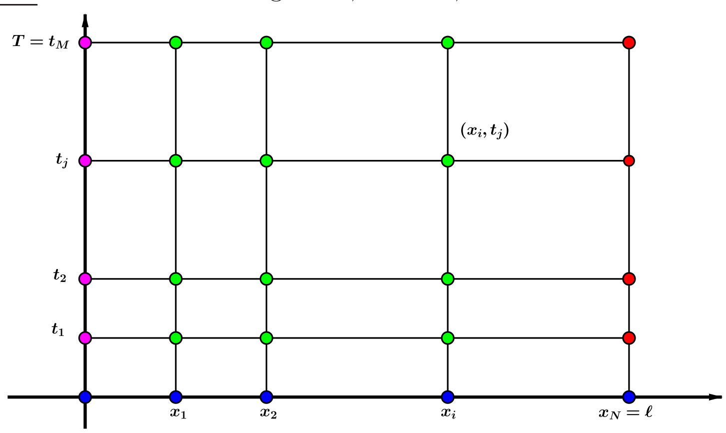
★ Solución numérica de E.D.P. Parabólicas

Queremos aproximar la solución $u(x,t)$ del problema parabólico

$$\boxed{\mathbf{P}}\ \begin{cases} u_t(x,t) = \alpha^2\, u_{xx}(x,t), & 0 < x < \ell, \qquad t > 0\ , \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \ell\,, \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(\ell,t) = g_2(t), & t > 0\,, \end{cases}$$

donde ℓ es la longitud de la barra y α es la constante de difusión, hasta un tiempo final T. Para aproximar u en la región $D := [0,\ell] \times [0,T]$, emplearemos el método de diferencias finitas.

<u>1^{er} paso</u>: discretizamos la región D, es decir, discretizamos los intervalos espacial $[0,\ell]$ y temporal $[0,T]$.



tamaño de paso espacial: h

$$h = \frac{\ell}{N} \quad \to \quad x_i = i\,h, \quad i = 0, \dots, N$$

tamaño de paso temporal: k

$$k = \frac{T}{M} \quad \to \quad t_j = j\,k, \quad j = 0, \dots, M$$

☺ De la condición inicial $u(x,0) = f(x)$ conocemos los valores de u en los puntos azules ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_i, 0),\ i = 0, \dots, N$.

☺ De la condición de frontera $u(0,t) = g_1(t)$ conocemos los valores de u en los puntos magenta ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_0, t_j),\ j = 1, \dots, M$.

☺ De la condición de frontera $u(\ell,t) = g_2(t)$ conocemos los valores de u en los puntos rojos ●, es decir, conocemos los valores de $u(x_N, t_j),\ j = 1, \dots, M$.

☹ El objetivo es aproximar u en los puntos verdes ●, es decir, queremos aproximar los valores de $u(x_i, t_j),\ i = 1, \dots, N-1,\ j = 1, \dots, M$.

2^{do} paso: discretizamos la ecuación diferencial parcial, esto es, evaluamos la ecuación diferencial parcial en un punto (x_i, t_j)

$$u_t(x_i, t_j) = \alpha^2\, u_{xx}(x_i, t_j)\ , \qquad i = 1, \dots, N-1, \qquad j = 1, \dots, M.$$

Para la segunda derivada parcial en la variable x usamos diferencia finita centrada

$$u_{\boldsymbol{xx}}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_{\boldsymbol{i+1}}, t_j) - 2\,u(x_{\boldsymbol{i}}, t_j) + u(x_{\boldsymbol{i-1}}, t_j)}{\boldsymbol{h^2}}$$

con un error $\mathcal{O}(h^2)$. Para la derivada parcial en la variable t podemos usar diferencia finita: progresiva, regresiva y ... ¿será que se puede usar diferencia finita centrada?

Método de diferencia finita progresiva

Emplearemos diferencia finita progresiva para aproximar u_t en (x_i, t_j), esto es

$$u_{\boldsymbol{t}}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{\boldsymbol{j+1}}) - u(x_i, t_{\boldsymbol{j}})}{\boldsymbol{k}}$$

con un error $\mathcal{O}(k)$. Al reemplazar en la E.D.P. parabólica discretizada, si denotamos a $\boxed{\boldsymbol{w_{i,j}}}$ la aproximación de $u(x_i, t_j)$, obtenemos

$$\frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{k} = \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2}\ , \quad i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, M-1.$$

Dado que es un problema dependiente del tiempo, despejamos el tiempo ***'nuevo'*** t_{j+1} en términos del tiempo ***'viejo'*** t_j

$$w_{i,j+1} = \frac{\alpha^2\, k}{h^2}(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) + w_{i,j}$$

si denotamos $\boxed{\lambda := \dfrac{\alpha^2\, k}{h^2}}$, el ***método explícito de diferencias progresiva*** para aproximar la solución de $\boxed{\mathbf{P}}$ es

$$\boxed{\begin{aligned} &w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N, \qquad w_{0,j} = g_1(t_j),\ w_{N,j} = g_2(t_j), \quad j = 1, \ldots, M, \\ &w_{i,j+1} = \lambda w_{i+1,j} + (1 - 2\lambda) w_{i,j} + \lambda w_{i-1,j}\ , \quad i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, M-1, \end{aligned}}$$

el cual tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k)$.

Notemos que en cada paso de tiempo la solución aproximada está dada por $\boldsymbol{w}^{(j+1)} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{w}^{(j)} + \lambda \boldsymbol{g}^{(j)}_{0,N}$

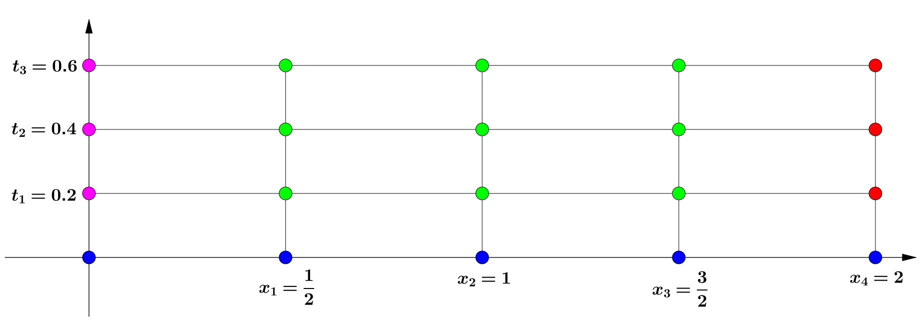
$$\begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{N-2,j+1} \\ w_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{N-2,j} \\ w_{N-1,j} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} w_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N,j} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Aproximar la solución del problema parabólico

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 16\, u_{xx}(x,t), & 0 < x < 2, \qquad t > 0\ , \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right), & 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = e^{-\pi^2 t} & t > 0\,, \end{cases}$$

por el método de diferencias progresiva tomando tamaños de paso $h = \frac{1}{2}$ y $k = 0.2$ hasta $T = 0.6$.

<u>*Solución:*</u> Primero discretizamos la región $D = [0,2] \times [0, 0.6]$



De la condición inicial y las condiciones de frontera conocemos:

- $w_{0,0} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x_0\right) = 0$
- $w_{1,0} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x_1\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 0.3827$
- $w_{2,0} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x_2\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 0.7071$
- $w_{3,0} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x_3\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{8}\right) \approx 0.9239$
- $w_{4,0} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x_3\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

- $w_{0,j} = 0,\ j = 1, 2, 3$
- $w_{4,1} = e^{-\pi^2 t_1} = e^{-0.2\ \pi^2} \approx 0.1389$
- $w_{4,2} = e^{-\pi^2 t_2} = e^{-0.4\ \pi^2} \approx 0.0193$
- $w_{4,3} = e^{-\pi^2 t_3} = e^{-0.6\ \pi^2} \approx 0.0027$

vamos a ir llenando los valores de las aproximaciones $w_{i,j}$ en la siguiente tabla

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	0.3827	0.7071	0.9239	1
$t_1 = 0.2$	0				0.1389
$t_2 = 0.4$	0				0.0193
$t_3 = 0.6$	0				0.0027

En este caso, tenemos que $\lambda = \frac{(16)(0.2)}{0.5^2} = 12.8$ así que el método explícito de diferencias progresiva en este caso esta dado por

$$w_{i,j+1} = 12.8\, w_{i+1,j} + (1 - 2(12.8))\, w_{i,j} + 12.8\, w_{i-1,j}$$
$$w_{i,j+1} = 12.8\, w_{i+1,j} - 24.6\, w_{i,j} + 12.8\, w_{i-1,j}\ , \qquad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2.$$

Empezamos llenando los valores correspondientes al tiempo $t_1 = 0.2$, es decir, los valores $w_{i,1}$ (cuando $j = 0$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,1} = 12.8\, w_{2,0} - 24.6\, w_{1,0} + 12.8\, w_{0,0} = 12.8(0.7071) - 24.6(0.3827) + 12.8(0) \approx -0.3635$$
$$w_{2,1} = 12.8\, w_{3,0} - 24.6\, w_{2,0} + 12.8\, w_{1,0} = 12.8(0.9239) - 24.6(0.7071) + 12.8(0.3827) \approx -0.6702$$
$$w_{3,1} = 12.8\, w_{4,0} - 24.6\, w_{3,0} + 12.8\, w_{2,0} = 12.8(1) - 24.6(0.9239) + 12.8(0.7071) \approx -0.8771$$

tenemos así

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_1 = 0.2$	0	-0.3635	-0.6702	-0.8771	0.1389

Proseguimos con los valores correspondientes al tiempo $t_2 = 0.4$, es decir, los valores $w_{i,2}$ (cuando $j = 1$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,2} = 12.8\, w_{2,1} - 24.6\, w_{1,1} + 12.8\, w_{0,1} = 12.8(-0.6702) - 24.6(-0.3635) + 12.8(0) \approx 0.3635$$
$$w_{2,2} = 12.8\, w_{3,1} - 24.6\, w_{2,1} + 12.8\, w_{1,1} = 12.8(-0.8771) - 24.6(-0.6702) + 12.8(-0.3635) \approx 0.6072$$
$$w_{3,2} = 12.8\, w_{4,1} - 24.6\, w_{3,1} + 12.8\, w_{2,1} = 12.8(0.1389) - 24.6(-0.8771) + 12.8(-0.6702) \approx 14.7760$$

tenemos así

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_2 = 0.4$	0	0.3635	0.6072	14.7760	0.0193

Y terminamos con los valores correspondientes al tiempo $t_3 = 0.6$, es decir, los valores $w_{i,3}$ (cuando $j = 2$) para $i = 1, 2, 3$

$$w_{1,3} = 12.8\, w_{2,2} - 24.6\, w_{1,2} + 12.8\, w_{0,2} = 12.8(0.6072) - 24.6(0.3635) + 12.8(0) \approx -1.1699$$
$$w_{2,3} = 12.8\, w_{3,2} - 24.6\, w_{2,2} + 12.8\, w_{1,2} = 12.8(14.7760) - 24.6(0.6072) + 12.8(0.3635) \approx 178.8485$$
$$w_{3,3} = 12.8\, w_{4,2} - 24.6\, w_{3,2} + 12.8\, w_{2,2} = 12.8(0.0193) - 24.6(14.7760) + 12.8(0.6072) \approx -355.4704$$

tenemos así que la aproximación a la solución del problema esta dada por la siguiente nube de puntos

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	0.3827	0.7071	0.9239	1
$t_1 = 0.2$	0	-0.3635	-0.6702	-0.8771	0.1389
$t_2 = 0.4$	0	0.3635	0.6072	14.7760	0.1389
$t_3 = 0.6$	0	-1.1699	178.8485	-355.4704	0.0027

Observaciones

- El método explícito de diferencias progresiva es muy fácil de aplicar ya que solo depende de los valores en el paso de tiempo anterior.
- PERO, notemos que los resultados son '*sospechosos*', en el último paso de tiempo los valores aproximados de u, al variar el valor de x, están pasando de positivo a negativo y con cantidades muy grandes ... ¿qué pasa acá?.

El método explícito tiene una *condición de estabilidad* que permite controlar los pequeños errores de aproximación que se cometen en los cálculos aritméticos y evita el obtener resultados sospechosos. La condición de estabilidad para el método explícito de diferencias progresiva es

$$\boxed{\lambda = \frac{\alpha^2 \, k}{h^2} \leq \frac{1}{2}.}$$

En el ejemplo anterior $\lambda = 12.8$, por eso los resultados que se obtienen no son confiables. En este caso si se quiere aproximar u hasta el tiempo $T = 0.6$ con tamaño de paso espacial $h = \frac{1}{2}$, debemos hallar k de tal forma que se cumpla la condición de estabilidad

$$\lambda = \frac{16\, k}{0.5^2} \leq \frac{1}{2} \qquad \rightarrow \qquad k \leq \frac{0.5^2}{32} \quad \rightarrow \quad k \leq 0.0078125$$

si tomamos $k = 0.0078125$ entonces $M = \frac{0.6}{0.0078125} \approx 76.8$, esto significa que deberíamos tomar, al menos 77 pasos de tiempo para obtener resultados confiables y acá es cuando vemos la necesidad de acompañar la teoría vista con una herramienta computacional.

MATLAB Para obtener la aproximación de la solución de la E.D.P. parabólica **P** , empleando el método de diferencia finita progresiva, empleamos la rutina `forwdif2`, más exactamente, `U = forwdif2 (f, g1, g2, a, b, c, n, m)` donde `f, g1, g2` representan las funciones asociadas a la condición inicial y de frontera como se indica en el problema **P** , `a, b, c` representan los valores de ℓ, T y α, respectivamente y `n, m` representan el número de nodos de las discretizaciones espacial y temporal. Para obtener los resultados del ejemplo anterior debemos definir las funciones y utilizar la rutina con los datos del problema, esto es

```
f=@(x) sin(pi*x/4)
g1=@(t) 0*t
g2=@(t) exp(-pi^2*t)
U = forwdif2 (f, g1, g2, 2, 0.6, 4, 5, 4)
```

acá la matriz `U` contiene los valores de las aproximaciones de u como se muestra en la tabla obtenida (la diferencia de los resultados obtenidos y los valores de `U` se debe a que estamos usando cuatro dígitos con redondeo y MATLAB usa más dígitos).
Ahora, para obtener resultados confiables, si tomamos 77 pasos de tiempo, obtenemos 78 nodos en la variable temporal, así que la instrucción será `U = forwdif2 (f, g1, g2, 2, 0.6, 4, 5, 78)`.
☻ Comparar los resultados obtenidos en $T = 0.6$ si sabemos que la solución exacta del problema es $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Método de diferencia finita regresiva

Emplearemos diferencia finita regresiva para aproximar u_t en (x_i, t_j), esto es

$$u_{\boldsymbol{t}}(x_i, t_j) \approx \frac{u(x_i, t_{\boldsymbol{j}}) - u(x_i, t_{\boldsymbol{j-1}})}{\boldsymbol{k}}$$

con un error $\mathcal{O}(k)$. Al reemplazar en la E.D.P. parabólica discretizada, obtenemos

$$\frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{k} = \alpha^2 \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{h^2} \;, \quad i = 1, \ldots, N-1, \; j = 1, \ldots, M.$$

Dado que es un problema dependiente del tiempo, despejamos el tiempo ***'nuevo'*** t_j en términos del tiempo ***'viejo'*** t_{j-1}

$$w_{i,j} - \frac{\alpha^2 k}{h^2}(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}) = w_{i,j-1}$$

si denotamos $\boxed{\lambda := \frac{\alpha^2 k}{h^2}}$ (de nuevo), el ***método implícito de diferencias regresiva*** para aproximar la solución de **P** es

$$\boxed{\begin{aligned} w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N, \qquad w_{0,j} = g_1(t_j),\; w_{N,j} = g_2(t_j), \quad j = 1, \ldots, M, \\ -\lambda w_{i-1,j} + (1+2\lambda) w_{i,j} - \lambda w_{i+1,j} = w_{i,j-1} \;, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 1, \ldots, M, \end{aligned}}$$

el cual tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k)$.

Notemos que en cada paso de tiempo debemos resolver el sistema tridiagonal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}^{(j)} = \boldsymbol{w}^{(j-1)} + \lambda \boldsymbol{g}_{0,N}^{(j)}$

$$\begin{bmatrix} 1+2\lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1+2\lambda & -\lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\lambda \\ 0 & \cdots & 0 & -\lambda & 1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{N-2,j} \\ w_{N-1,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{1,j-1} \\ w_{2,j-1} \\ \vdots \\ w_{N-2,j-1} \\ w_{N-1,j-1} \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} w_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N,j} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Aproximar la solución del problema parabólico

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 16\, u_{xx}(x,t), & 0 < x < 2, \qquad t > 0\;, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right), & 0 \le x \le 2\,, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = e^{-\pi^2 t}, & t > 0\,, \end{cases}$$

por el método de diferencias regresiva tomando tamaños de paso $h = \frac{1}{2}$ y $k = 0.2$ hasta $T = 0.4$.

<u>*Solución:*</u> Del ejemplo anterior, la discretización de la región $D = [0,2] \times [0,0.4]$, los valores asociados a la condición inicial y a las fronteras, son

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	0.3827	0.7071	0.9239	1
$t_1 = 0.2$	0				0.1389
$t_2 = 0.4$	0				0.0193

Tenemos que $\lambda = \frac{(16)(0.2)}{0.5^2} = 12.8$, así que el método implícito de diferencias regresiva en este caso esta dado por

$$\begin{aligned} -12.8\, w_{i-1,j} + (1 + 2(12.8))\, w_{i,j} - 12.8\, w_{i+1,j} &= w_{i,j-1} \\ -12.8\, w_{i-1,j} + 26.6\, w_{i,j} - 12.8\, w_{i+1,j} &= w_{i,j-1} \;, \qquad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3. \end{aligned}$$

Empezamos llenando los valores correspondientes al tiempo $t_1 = 0.2$, es decir, los valores $w_{i,1}$ (cuando $j = 1$) para $i = 1,2,3$

$$\begin{aligned} -12.8\, w_{0,1} + 26.6\, w_{1,1} - 12.8\, w_{2,1} &= w_{1,0} \approx 0.3827 \\ -12.8\, w_{1,1} + 26.6\, w_{2,1} - 12.8\, w_{3,1} &= w_{2,0} \approx 0.7071 \\ -12.8\, w_{2,1} + 26.6\, w_{3,1} - 12.8\, w_{4,1} &= w_{3,0} \approx 0.9239 \end{aligned}$$

al reemplazar los valores de frontera $w_{0,1} = 0$ y $w_{4,1} \approx 0.1389$ obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 26.6\, w_{1,1} - 12.8\, w_{2,1} \qquad\qquad & \approx 0.3827 \\ -12.8\, w_{1,1} + 26.6\, w_{2,1} - 12.8\, w_{3,1} & \approx 0.7071 \\ - 12.8\, w_{2,1} + 26.6\, w_{3,1} & \approx 2.7018 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 26.6 & -12.8 & 0 \\ -12.8 & 26.6 & -12.8 \\ 0 & -12.8 & 26.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.3827 \\ 0.7071 \\ 2.7018 \end{bmatrix}$$

donde $2.7018 \approx 0.9239 + 12.8(0.1389)$ y al resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0882 \\ 0.1534 \\ 0.1754 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_1 = 0.2$	0	0.0882	0.1534	0.1754	0.1389

Proseguimos con los valores correspondientes al tiempo $t_2 = 0.4$, es decir, los valores $w_{i,2}$ (cuando $j = 2$) para $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} 26.6\, w_{1,2} - 12.8\, w_{2,2} \qquad\qquad & \approx 0.0882 \\ -12.8\, w_{1,2} + 26.6\, w_{2,2} - 12.8\, w_{3,2} & \approx 0.1534 \\ - 12.8\, w_{2,2} + 26.6\, w_{3,2} & \approx 0.4224 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \\ w_{3,2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0168 \\ 0.0279 \\ 0.0293 \end{bmatrix}$$

acá hemos empleamos los valores conocidos $w_{0,2} = 0$ y $w_{4,2} \approx 0.0193$ en la primera y tercera ecuación. Tenemos así que la aproximación a la solución del problema esta dada por la siguiente nube de puntos

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	0.3827	0.7071	0.9239	1
$t_1 = 0.2$	0	0.0882	0.1534	0.1754	0.1389
$t_2 = 0.4$	0	0.0168	0.0279	0.0293	0.0193

Dado que conocemos la solución exacta $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, notamos que los resultados obtenidos son más confiables que en el método explícito.

Observaciones

- El método implícito de diferencias regresivas requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales en cada paso de tiempo.
- SIN EMBARGO, los valores que se obtienen son confiables, no hay ninguna condición de estabilidad, se dice que el método es *incondicionalmente estable*.
- Los métodos implícito y explícito tienen error $\mathcal{O}(h^2 + k)$, ¿ Existirá un método con error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$?

Método de Crank-Nicolson

Este método tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$ y se obtiene de '*promediar*' adecuadamente los métodos implícito y explícito. Recuerden que no podemos emplear directamente diferencia finita centrada para aproximar $u_t(x_i, t_j)$ ya que este requiere conocer los valores en los tiempos t_{j-1} y t_{j+1} por eso es necesario promediar los métodos implícito y explícito.

El método de Crank-Nicolson consiste en promediar el método progresivo en el paso de tiempo t_j con el método implícito en el paso de tiempo t_{j+1} y así obtener $\mathcal{O}(k^2)$ en la aproximación temporal.

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} = \lambda(w_{i+1,j} - 2\, w_{i,j} + w_{i-1,j}) \qquad \text{método progresivo}$$

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} = \lambda(w_{i+1,j+1} - 2\, w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}) \qquad \text{método regresivo 'evaluado' en } j+1\text{, es decir, reemplazamos } j \text{ por } j+1$$

así el promedio será

$$w_{i,j+1} - w_{i,j} = \frac{\lambda}{2}\left(w_{i+1,j} - 2\, w_{i,j} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j+1} - 2\, w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}\right)$$

despejamos el tiempo ***'nuevo'*** t_{j+1} en términos del tiempo ***'viejo'*** t_j, así el ***método de Crank-Nicolson*** para aproximar la solución de $\boxed{\mathbf{P}}$ es

$$\boxed{\begin{array}{l} w_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N, \qquad w_{0,j} = g_1(t_j),\ w_{N,j} = g_2(t_j), \quad j = 1, \ldots, M, \\ -\dfrac{\lambda}{2} w_{i-1,j+1} + (1+\lambda) w_{i,j+1} - \dfrac{\lambda}{2} w_{i+1,j+1} = \dfrac{\lambda}{2} w_{i-1,j} + (1-\lambda) w_{i,j} + \dfrac{\lambda}{2} w_{i+1,j}\ ,\ i = 1, \ldots, N-1,\ j = 0, \ldots, M-1, \end{array}}$$

el cual tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

Notemos que en cada paso de tiempo debemos resolver el sistema tridiagonal $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}^{(j+1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{w}^{(j)} + \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{g}_{0,N}^{\{j,j-1\}}$

$$\begin{bmatrix} 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda & -\frac{\lambda}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{\lambda}{2} & 1+\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j+1} \\ w_{2,j+1} \\ \vdots \\ w_{N-2,j+1} \\ w_{N-1,j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda & \frac{\lambda}{2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{\lambda}{2} \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{\lambda}{2} & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{1,j} \\ w_{2,j} \\ \vdots \\ w_{N-2,} \\ w_{N-1,} \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} w_{0,j+1} + w_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{N,j+1} + w_{N,j} \end{bmatrix}$$

Ejemplo Aproximar la solución del problema parabólico

$$\begin{cases} u_t(x,t) = 16\, u_{xx}(x,t), & 0 < x < 2, \qquad t > 0\ , \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right), & 0 \leq x \leq 2\,, \\ u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = e^{-\pi^2 t}, & t > 0\,, \end{cases}$$

por el método de Crank-Nicolson tomando tamaños de paso $h = \frac{1}{2}$ y $k = 0.2$ hasta $T = 0.4$.

<u>*Solución:*</u> Ya conocemos la discretización de la región $D = [0,2] \times [0,0.4]$ y los valores asociados a la condición inicial y de frontera

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	0.3827	0.7071	0.9239	1
$t_1 = 0.2$	0				0.1389
$t_2 = 0.4$	0				0.0193

Tenemos que $\lambda = \frac{(16)(0.2)}{0.5^2} = 12.8$, $\frac{\lambda}{2} = 6.4$, $1 + \lambda = 13.8$ y $1 - \lambda = -11.8$, así que el método de Crank-Nicolson en este caso esta dado por

$$-6.4\, w_{i-1,j+1} + 13.8\, w_{i,j+1} - 6.4\, w_{i+1,j+1} = 6.4\, w_{i-1,j} - 11.8\, w_{i,j} + 6.4\, w_{i+1,j}\ , \qquad i = 1,2,3, \quad j = 0,1,2.$$

Empezamos llenando los valores correspondientes al tiempo $t_1 = 0.2$, es decir, los valores $w_{i,1}$ (cuando $j = 0$) para $i = 1,2,3$

$$\begin{aligned} -6.4\, w_{0,1} + 13.8\, w_{1,1} - 6.4\, w_{2,1} &= 6.4\, w_{0,0} - 11.8\, w_{1,0} + 6.4\, w_{2,0} \\ -6.4\, w_{1,1} + 13.8\, w_{2,1} - 6.4\, w_{3,1} &= 6.4\, w_{1,0} - 11.8\, w_{2,0} + 6.4\, w_{3,0} \\ -6.4\, w_{2,1} + 13.8\, w_{3,1} - 6.4\, w_{4,1} &= 6.4\, w_{2,0} - 11.8\, w_{3,0} + 6.4\, w_{4,0} \end{aligned}$$

al reemplazar los valores conocidos obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} 13.8\, w_{1,1} - 6.4\, w_{2,1} \qquad\qquad &= 6.4(0) - 11.8(0.3827) + 6.4(0.7071) + 6.4(0) \approx 0.0096 \\ -6.4\, w_{1,1} + 13.8\, w_{2,1} - 6.4\, w_{3,1} &= 6.4(0.3827) - 11.8(0.7071) + 6.4(0.9239) \approx 0.0185 \\ -\,6.4\, w_{2,1} + 13.8\, w_{3,1} &= 6.4(0.7071) - 11.8(0.9239) + 6.4(1) + 6.4(0.1389) \approx 0.9124 \end{aligned}$$

así

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0270 \\ 0.0567 \\ 0.0924 \end{bmatrix} \quad ➠$$

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_1 = 0.2$	0	0.0270	0.0567	0.0924	0.1389

Proseguimos con los valores correspondientes al tiempo $t_2 = 0.4$, es decir, los valores $w_{i,2}$ (cuando $j = 1$) para $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned}
-6.4\, w_{0,2} + 13.8\, w_{1,2} - 6.4\, w_{2,2} &= 6.4\, w_{0,1} - 11.8\, w_{1,1} + 6.4\, w_{2,1} \\
-6.4\, w_{1,2} + 13.8\, w_{2,2} - 6.4\, w_{3,2} &= 6.4\, w_{1,1} - 11.8\, w_{2,1} + 6.4\, w_{3,1} \\
-6.4\, w_{2,2} + 13.8\, w_{3,2} - 6.4\, w_{4,2} &= 6.4\, w_{2,1} - 11.8\, w_{3,1} + 6.4\, w_{4,1}
\end{aligned}$$

al reemplazar los valores conocidos obtenemos el sistema

$$\begin{aligned}
13.8\, w_{1,2} - 6.4\, w_{2,2} \qquad\qquad &= 6.4(0) - 11.8(0.0270) + 6.4(0.0567) + 6.4(0) \approx 0.0443 \\
-6.4\, w_{1,2} + 13.8\, w_{2,2} - 6.4\, w_{3,1} &= 6.4(0.0270) - 11.8(0.0567) + 6.4(0.0924) \approx 0.0951 \\
- 6.4\, w_{2,2} + 13.8\, w_{3,2} &= 6.4(0.0567) - 11.8(0.0924) + 6.4(0.1389) + 6.4(0.0193) \approx 0.2850
\end{aligned}$$

así

$$\begin{bmatrix} w_{1,1} \\ w_{2,1} \\ w_{3,1} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.0178 \\ 0.0315 \\ 0.0353 \end{bmatrix} \quad ➠$$

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_2 = 0.4$	0	0.0178	0.0315	0.0353	0.0193

Así tenemos que la aproximación a la solución del problema esta dada por la siguiente nube de puntos

$w_{i,j}$	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$t_0 = 0$	0	0.3827	0.7071	0.9239	1
$t_1 = 0.2$	0	0.0270	0.0567	0.0924	0.1389
$t_2 = 0.4$	0	0.0178	0.0315	0.0353	0.0193

Observaciones

- El método de Crank-Nicolson requiere resolver un sistema de ecuaciones lineales en cada paso de tiempo.
- El método de Crank-Nicolson es *incondicionalmente estable*.
- El método de Crank-Nicolson es tiene un error $\mathcal{O}(h^2 + k^2)$.

MATLAB Para obtener la aproximación de la solución de la E.D.P. parabólica **P** , empleando el método de Crank-Nicolson empleamos la rutina `crnich2` cuyos parámetros son los mismos empleados para el método explícito, más exactamente, `U = crnich2 (f, g1, g2, a`
Para obtener los resultados del ejemplo anterior debemos definir las funciones y utilizar la rutina con los datos del problema, esto es

```
f=@(x) sin(pi*x/4)
g1=@(t) 0*t
g2=@(t) exp(-pi^2*t)
U = crnich2 (f, g1, g2, 2, 0.4, 4, 5, 3)
```

donde la matriz `U` contiene los valores de la aproximaciones de u como se muestra en la tabla obtenida.