MÉTODOS NUMÉRICOS 3006907

NOTAS DE CLASE - SEMANA 10

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE MEDELLÍN

Las ecuaciones diferenciales se usan habitualmente para construir modelos matemáticos de problemas de la ciencia y la ingeniería. A menudo se da el caso de que no hay una solución analítica conocida, por lo que necesitamos aproximaciones numéricas. En particular vamos a estudiar la forma de aproximar la solución de problemas con valores iniciales P.V.I. escalar y vectorial, problemas con valores en la frontera P.V.F. asociados a ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales. Empezaremos estudiando el P.V.I. escalar de la forma

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ a \leq t \leq b, \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

Teoría elemental de P.V.I.

Definición. *Se dice que una función $f(t, y)$ satisface* ***una condición de Lipschitz con respecto a la variable*** y *en una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$, si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para cualquier (t, y_1) y (t, y_2) en D. L es llamada ***constante de Lipschitz*** *para f en D.*

Ejemplo Demostrar que las siguientes funciones satisfacen una condición de Lipschitz en la variable y en las respectivas regiones

$\star \quad f(t, y) = 4t^3 \tan^{-1}(2y), \quad D_1 = [-4, 3] \times \mathbb{R}$ $\qquad \star\star \quad g(t, y) = \tan^{-1}(3t)\,|\operatorname{sen} y|, \quad D_2 = [-2, 2] \times \mathbb{R}$

<u>*Solución:*</u> $\star$ Para verificar si f satisface una condición de Lipschitz en la variable y en la región D_1, sean $(t, y_1),\ (t, y_2) \in D_1$, esto es $t \in [-4, 3]$ y $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |4t^3 \tan^{-1}(2y_1) - 4t^3 \tan^{-1}(2y_2)| = |4t^3|\,|\tan^{-1}(2y_1) - \tan^{-1}(2y_2)|$$

dado que $4t^3$ es una función creciente en todo $\mathbb{R}$, $\max\limits_{-4 \leq t \leq 3} |4t^3| = 4^4$. Ahora, para acotar $|\tan^{-1}(2y_1) - \tan^{-1}(2y_2)|$ empleamos el teorema del valor medio para la función $\tan^{-1}(2z)$ en $[y_1, y_2]$ (suponiendo que $y_1 < y_2$), esto es, como la función tangente inversa pertenece a $\mathcal{C}^1[y_1, y_2]$ existe $\beta \in (y_1, y_2)$ tal que

$$\tan^{-1}(2y_1) - \tan^{-1}(2y_2) = \frac{2}{1 + 4\beta^2}(2y_1 - 2y_2)$$

y dado que el valor máximo de la función $\frac{4}{1+4\beta^2}$ se alcanza cuando $\beta = 0$, concluimos

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq 1024|y_1 - y_2|$$

lo cual implica que f satisface la condición de Lipschitz en la variable y en la región D_1 con constante de Lipschitz $L = 1024$.

$\star\star$ Para verificar si g satisface una condición de Lipschitz en la variable y en la región D_2, sean $(t, y_1),\ (t, y_2) \in D_2$, esto es $t \in [-2, 2]$ y $y_1,\ y_2 \in \mathbb{R}$

$$|g(t, y_1) - g(t, y_2)| = |\tan^{-1}(3t)\,|\operatorname{sen} y_1| - \tan^{-1}(3t)\,|\operatorname{sen} y_2|| = |\tan^{-1}(3t)|\,||\operatorname{sen} y_1| - |\operatorname{sen} y_2||$$

nuevamente la función $\tan^{-1}(3t)$ es creciente en todo $\mathbb{R}$, $\max\limits_{-2\leq t\leq 2}|\tan^{-1}(3t)| = \tan^{-1}(6)$. Ahora, para acotar el término $|\,|\operatorname{sen} y_1| - |\operatorname{sen} y_2|\,|$ no podemos emplear el teorema del valor medio puesto que la función valor absoluto no es diferenciable, así que primero empleamos la propiedad del valor absoluto: desigualdad triangular inversa, esta es, $||z| - |w|| \leq |z - w|$, así

$$|g(t,y_1) - g(t,y_2)| \leq \tan^{-1}(6)|\,|\operatorname{sen} y_1| - |\operatorname{sen} y_2|\,| \leq \tan^{-1}(6)|\operatorname{sen} y_1 - \operatorname{sen} y_2|$$

aplicando el teorema del valor medio a la función $\operatorname{sen} z$ en $[y_1, y_2]$ (suponiendo que $y_1 < y_2$), esto es, como la función seno pertenece a $\mathcal{C}^1[y_1, y_2]$ existe $\beta \in (y_1, y_2)$ tal que $\operatorname{sen} y_1 - \operatorname{sen} y_2 = \cos\beta(y_1 - y_2)$ y dado que $|\cos\beta| \leq 1$, concluimos

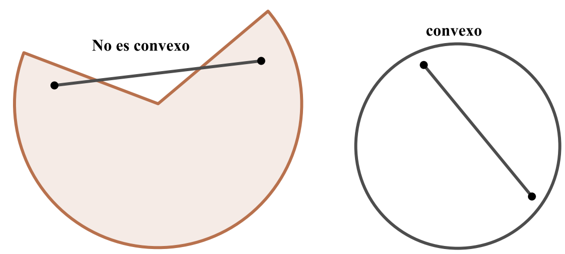
$$|g(t,y_1) - g(t,y_2)| \leq \tan^{-1}(6)\,|y_1 - y_2|$$

lo cual implica que g satisface la condición de Lipschitz en la variable y en la región D_2 con constante de Lipschitz $L = \tan^{-1}(6)$.

Observación Notemos que en los ejemplos, lo que nos permite obtener la constante de Lipschitz en el fondo es el teorema del valor medio que, en términos de f se vera reflejado en el siguiente resultado.

Definición. *Una región $D \subseteq \mathbb{R}^2$ es una **región convexa** si para todo par de puntos (t_1, y_1) y (t_2, y_2) en D la recta que los conecta esta totalmente contenida en D, esto es, para todo par de puntos $(t_1, y_1),\ (t_2, y_2) \in D$ se cumple*

$$((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2, (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \in D,\ \forall\lambda \in [0,1].$$



En particular, si tenemos una región acotada de la forma $D = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ o una región no acotada de la forma $D = [a,b] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, estas son regiones convexas de $\mathbb{R}^2$.

Teorema. *Supongamos que $f(t,y)$ está definida en una región convexa $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Si existe una constante $L > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right| \leq L, \qquad \forall (t,y) \in D$$

entonces f verifica una condición de Lipschitz con respecto a su variable y en D con constante de Lipschitz L.

Recordemos que la notación $f_y(t,y)$ representa la derivada parcial de f con respecto a la variable y, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)$.

Ejemplo Demostrar que $f(t,y) = \sqrt{t^2 + 4y} - t$ satisface una condición de Lipschitz en la variable y en la región $D = [2,3] \times [-\frac{1}{2}, \infty)$.

<u>*Solución:*</u> Notemos que D es una región rectangular no acotada y convexa, f es una función definida en D ya que $t^2 + 4y \geq 0$ en D y f es diferenciable con respecto a la variable y, así que podemos aplicar el teorema

$$|f_y(t,y)| = \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{t^2+4y} - t\right)\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{t^2+4y}}\right| \leq \max_{(t,y)\in D}\left|\frac{2}{\sqrt{t^2+4y}}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

concluimos que f satisface una condición de Lipschitz en la variable y en la región D con constante de Lipschitz $L = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Terminamos con el teorema que me garantiza cuándo un P.V.I. tiene única solución y así posteriormente buscar aproximar la solución del mismo.

> **Teorema.** *Supongamos que $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \le t \le b,\ -\infty < y < \infty\} \subset \mathbb{R}^2$ y que f es continua en D. Si f satisface una condición de Lipschitz con respecto a la variable y en D y $(a, \alpha) \in D$, entonces el P.V.I.*
>
> $$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ a \le t \le b, \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$
>
> *tiene solución única $y(t)$ para $t \in [a, b]$.*

Solución numérica de un P.V.I.

Para aproximar la solución única y del P.V.I.

$$\boxed{\text{A}}\ \begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)),\ a \le t \le b, \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

en el intervalo $[a, b]$ vamos a discretizar el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, así

$$h = \frac{b-a}{n} \quad \Rightarrow \quad t_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, n,$$

acá el valor de h recibe el nombre de ***tamaño de paso*** y buscamos cómo aproximar los valores de $y(t_i),\ i = 1, \dots, n$, teniendo en cuenta el valor inicial $y_0 = \alpha$.

Aproximar la solución de un P.V.I. $\boxed{\text{A}}$ consiste en hallar la nube de puntos $\{(t_i, w_i)\}_{i=0}^{n}$ que aproximan los valores $\{(t_i, y(t_i))\}_{i=0}^{n}$ donde y es la solución del P.V.I. $\boxed{\text{A}}$ y los t_i obtenidos al discretizar el intervalo $[a, b]$.

★ Método de Euler

El primer método que estudiaremos para obtener las aproximaciones de los valores $y(t_i),\ i = 1, \dots,\ n$, se basa en el teorema de Taylor. Supongamos que la solución y del P.V.I. $\boxed{\text{A}}$ es tal que $y \in \mathcal{C}^2[a, b]$, por el Teorema de Taylor en torno a t_i existe $\beta \in (t_i, t)$ tal que

$$y(t) = y(t_i) + y'(t_i)(t - t_i) + \frac{1}{2!} y''(\beta)(t - t_i)^2$$

evaluando en t_{i+1} y dado que $t_{i+1} - t_i = h$, entonces

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)h + \frac{h^2}{2!} y''(\beta)$$

así, si h es pequeño, h^2 es casi despreciable y por ende

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + y'(t_i)h \qquad \text{con un error } \mathcal{O}(h^2)$$

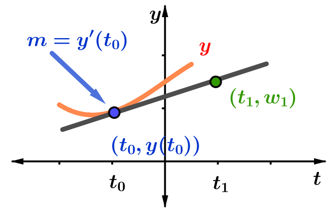
y de la ecuación diferencial del P.V.I. $\boxed{\text{A}}$ se obtiene

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h\,,$$

si denotamos por w_i el valor aproximado de y en t_i, tenemos que la ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Euler*** esta dada por

$$\boxed{\begin{aligned} & w_0 = \alpha, \\ & w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, \dots, n-1. \end{aligned}}$$

El método de Euler también es conocido como el método de la tangente, por su interpretación geométrica: conocemos el punto inicial $(t_0, y(t_0))$ y la pendiente de la recta tangente a la curva solución y en cualquier punto (t, y), así que trazamos la recta con pendiente $m = y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$ que pasa por el punto $(t_0, y(t_0))$ y así podemos hallar el valor aproximado de y en t_1, w_1, igualando pendientes



$$\frac{w_1 - y(t_0)}{t_1 - t_0} = m = y'(t_0) = f(t_0, y(t_0)) \qquad \Rightarrow \qquad w_1 = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) \qquad \Leftrightarrow \qquad w_1 = w_0 + hf(t_0, w_0)$$

donde $w_0 = y(t_0) = \alpha$ y procediendo de manera similar en un punto (t_i, w_i) para obtener (t_{i+1}, w_{i+1}) obtenemos

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Ejemplo Aproxime la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} y'(t) = te^{3t} - 2\tan^{-1}(y(t)), & 0 \leq t \leq 1\,, \\ y\,(0) = 0\,. \end{cases}$$

con tamaño de paso $h = 0.25$.

Solución: Sea $f(t, y) = te^{3t} - 2\tan^{-1}(y)$ y consideremos la región $D = [0, 1] \times \mathbb{R}$. Es claro que f es continua en D, f satisface la condición de Lipschitz en la variable y en la región D, con constante de Lipschitz $L = 2$ y $(0, 0) \in D$, por lo tanto este P.V.I. tiene una única solución y en $[0, 1]$. Ahora, para aproximar la solución con tamaño de paso $h = 0.25$ en los nodos $t_0 = 0,\ t_1 = 0.25,\ t_2 = 0.5,\ t_3 = 0.75$ y $t_4 = 1$, empleamos la ecuación de avance del método de Euler

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) = w_i + 0.25(t_i e^{3t_i} - 2\tan^{-1}(w_i)), \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

teniendo en cuenta la condición inicial $w_0 = y(t_0) = y(0) = 0$, obtenemos

$$y(t_1) = y(0.25) \approx w_1 = w_0 + 0.25(t_0 e^{3t_0} - 2\tan^{-1}(w_0)) = 0.25(-2\tan^{-1}(0)) = 0,$$

$$y(t_2) = y(0.5) \approx w_2 = w_1 + 0.25(t_1 e^{3t_1} - 2\tan^{-1}(w_1)) = 0.25(0.25e^{3(0.25)} - 2\tan^{-1}(0)) \approx 0.1323,$$

$$y(t_3) = y(0.75) \approx w_3 = w_2 + 0.25(t_2 e^{3t_2} - 2\tan^{-1}(w_2)) = 0.1323 + 0.25(0.5e^{3(0.5)} - 2\tan^{-1}(0.1323)) \approx 0.6267,$$

$$y(t_4) = y(1) \approx w_4 = w_3 + 0.25(t_3 e^{3t_3} - 2\tan^{-1}(w_3)) = 0.6267 + 0.25(0.75e^{3(0.75)} - 2\tan^{-1}(0.6267)) \approx 2.1258.$$

La aproximación de la solución del P.V.I. es

t_i	0	0.25	0.5	0.75	1
$w_i \approx y(t_i)$	0	0	0.1323	0.6267	2.1258

De la deducción del método de Euler se tiene que existen dos fuentes de error: la discretización y el error de redondeo.

Definición. *Consideremos el método de diferencias de la forma*

$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + h\Phi(t_i, w_i), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}$$

para aproximar la única solución $y = y(t)$ del P.V.I. A *. El **error de truncamiento local** o **error de discretización local** $\tau_{i+1}(h)$ se define como*

$$\tau_{i+1}(h) = \frac{y(t_{i+1}) - [y(t_i) + h\Phi(t_i, y(t_i))]}{h}, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Observaciones

- Sea y la solución del P.V.I. $\boxed{\mathbf{A}}$. Si $y \in \mathcal{C}^2[a,b]$ y $\{(t_i, w_i)\}_{i=0}^{n}$ es la sucesión de aproximaciones generada por el método de Euler, entonces
$$|\tau_{i+1}(h)| = \left|\frac{y(t_{i+1}) - [y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))]}{h}\right| = \left|\frac{h^2}{2h} y''(\beta)\right| = \mathcal{O}(h).$$
- Este teorema nos dice, que el error en el método de Euler se va hacia cero tan rápido como h lo haga. Esto realmente no es un buen estimativo, ya que esto nos dice que el método de Euler necesita tener un tamaño de paso h muy pequeño para obtener aproximaciones aceptables.

★ Métodos de Taylor

Buscamos métodos con error de truncamiento local $\mathcal{O}(h^p)$ para $p > 1$ para valores $0 < h < 1$. Para ello, procedemos de manera similar a Euler, empleando Taylor. Supongamos que $y \in \mathcal{C}^{m+1}[a,b]$: consideremos la expansión de Taylor en torno a t_i y evaluando en t_{i+1} existe $\beta \in (t_i, t_{i+1})$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!} y''(t_i) + \ldots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(t_i) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} y^{(m+1)}(\beta)$$

así si h es suficientemente pequeño h^{m+1} es despreciable y por lo tanto

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2!} y''(t_i) + \ldots + \frac{h^m}{m!} y^{(m)}(t_i) \qquad \text{con un error } \mathcal{O}(h^{m+1})$$

y de la ecuación diferencial del P.V.I. $\boxed{\mathbf{A}}$, se tiene

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y(t_i)) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(t_i, y(t_i))$$

si denotamos por w_i el valor aproximado de y en t_i, tenemos que la ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Taylor de orden m*** esta dado por

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, w_i) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(t_i, w_i), \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

Recibe el nombre de método de Taylor de orden m puesto que el error de truncamiento local es $\mathcal{O}(h^m)$, en efecto

$$|\tau_{i+1}(h)| = \left|\frac{y(t_{i+1}) - \left[y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2!} f'(t_i, y(t_i)) + \ldots + \frac{h^m}{m!} f^{(m-1)}(t_i, y(t_i))\right]}{h}\right| = \left|\frac{h^{m+1}}{(m+1)!h} y^{(m+1)}(\beta)\right|.$$

Así, comparado con Euler, no es necesario tomar h muy pequeño, basta tomar $h < 1$ y emplear un método de Taylor de orden superior. Pero, notemos que las derivadas de f deben realizarse por regla de la cadena puesto que sus argumentos son t y $y(t)$, ambas dependen de t, por lo tanto

$$f'(t, y(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)) \frac{\partial y}{\partial t}(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\, y'(t) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t))\, f(t, y(t))$$

obteniendo la ***ecuación en diferencias*** o ***ecuación de avance del método de Taylor de orden 2*** esta dado por

$$\boxed{\begin{aligned} &w_0 = \alpha, \\ &w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) + \frac{h^2}{2} \left[f_t(t_i, w_i) + f_y(t_i, w_i)\, f(t_i, w_i)\right], \quad i = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}}$$

Ejemplo Aproximar la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} y'(t) = \cos(t^2 y(t)) + \dfrac{e^t}{t+4}, & 1 \le t \le 2\,, \\ y\,(1) = 0\,. \end{cases}$$

empleando el método de Taylor de orden 2 con tamaño de paso $h = \frac{1}{3}$.

<u>*Solución:*</u> Sea $f(t,y) = \cos(t^2 y) + \frac{e^t}{t+4}$. Queremos aproximar los valores de $y(t_i),\ i = 1,\ 2,\ 3$, donde $t_1 = \frac{4}{3},\ t_2 = \frac{5}{3}$ y $t_3 = 2$, teniendo en cuenta que

$$f_t(t,y) = -2ty\,\mathrm{sen}(t^2 y) + \frac{(t+4)e^t - e^t}{(t+4)^2} = -2ty\,\mathrm{sen}(t^2 y) + \frac{(t+3)e^t}{(t+4)^2}, \qquad f_y(t,y) = -t^2\,\mathrm{sen}(t^2 y)$$

la ecuación de avance para el método de Taylor de orden 2 para este P.V.I. es

$$w_0 = 0,$$
$$w_{i+1} = w_i + \tfrac{1}{3}\left(\cos(t_i^2 w_i) + \tfrac{e^{t_i}}{t_i+4}\right) + \tfrac{1}{18}\left[-2t_i w_i\,\mathrm{sen}(t_i^2 w_i) + \frac{(t_i+3)e^{t_i}}{(t_i+4)^2} - t_i^2\,\mathrm{sen}(t_i^2 w_i)\left(\cos(t_i^2 w_i) + \frac{e^{t_i}}{t_i+4}\right)\right], \quad \text{i=0, 1, 2.}$$

Así

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + \frac{1}{3}\left(\cos(t_0^2 w_0) + \frac{e^{t_0}}{t_0+4}\right) + \frac{1}{18}\left[-2t_0 w_0\,\mathrm{sen}(t_0^2 w_0) + \frac{(t_0+3)e^{t_0}}{(t_0+4)^2} - t_0^2\,\mathrm{sen}(t_0^2 w_0)\left(\cos(t_0^2 w_0) + \frac{e^{t_0}}{t_0+4}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{3}\left(\cos(0) + \frac{e^1}{1+4}\right) + \frac{1}{18}\left[\frac{(1+3)e^1}{(1+4)^2}\right] \approx 0.5387,$$

$$y(t_2) \approx w_2 = w_1 + \frac{1}{3}\left(\cos(t_1^2 w_1) + \frac{e^{t_1}}{t_1+4}\right) + \frac{1}{18}\left[-2t_1 w_1\,\mathrm{sen}(t_1^2 w_1) + \frac{(t_1+3)e^{t_1}}{(t_1+4)^2} - t_1^2\,\mathrm{sen}(t_1^2 w_1)\left(\cos(t_1^2 w_1) + \frac{e^{t_1}}{t_1+4}\right)\right]$$
$$\approx 0.5387 + \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{16(0.5387)}{9}\right) + \frac{e^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}+4}\right)$$
$$+ \frac{1}{18}\left[-\frac{8(0.5387)}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{16(0.5387)}{9}\right) + \frac{(\frac{4}{3}+3)e^{\frac{4}{3}}}{(\frac{4}{3}+4)^2} - \frac{16}{9}\,\mathrm{sen}\left(\frac{16(0.5387)}{9}\right)\left(\cos\left(\frac{16(0.5387)}{9}\right) + \frac{e^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}+4}\right)\right] \approx 0.8305,$$

$$y(t_3) \approx w_3 = w_2 + \frac{1}{3}\left(\cos(t_2^2 w_2) + \frac{e^{t_2}}{t_2+4}\right) + \frac{1}{18}\left[-2t_2 w_2\,\mathrm{sen}(t_2^2 w_2) + \frac{(t_2+3)e^{t_2}}{(t_2+4)^2} - t_2^2\,\mathrm{sen}(t_2^2 w_2)\left(\cos(t_2^2 w_2) + \frac{e^{t_2}}{t_2+4}\right)\right]$$
$$\approx 0.8305 + \frac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{25(0.8305)}{9}\right) + \frac{e^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}+4}\right)$$
$$+ \frac{1}{18}\left[-\frac{10(0.8305)}{3}\,\mathrm{sen}\left(\frac{25(0.8305)}{9}\right) + \frac{(\frac{5}{3}+3)e^{\frac{5}{3}}}{(\frac{5}{3}+4)^2} - \frac{25}{9}\,\mathrm{sen}\left(\frac{25(0.8305)}{9}\right)\left(\cos\left(\frac{25(0.8305)}{9}\right) + \frac{e^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}+4}\right)\right] \approx 0.8168.$$

La aproximación de la solución del P.V.I. es

t_i	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2
$w_i \approx y(t_i)$	0	0.5387	0.8305	0.8168

Ejemplo Aproximar la solución del P.V.I.

$$\begin{cases} y' = 1 + \dfrac{y}{t}, & 1 \le t \le 2\,, \\ y(1) = 2, \end{cases}$$

empleando los métodos de Taylor de orden 1, 2 y 3 con tamaño de paso $h = 0.25$. Si la solución exacta del P.V.I. es $y(t) = t\ln t + 2t$, para cada método empleado calcule el error en cada uno de los nodos.

<u>*Solución:*</u> Sea $f(t,y) = 1 + \frac{y}{t}$. Queremos aproximar los valores de $y(t_i)$ donde $t_i = 1 + 0.25i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, empleando la regla de la cadena

$$f'(t,y) = \frac{ty' - y}{t^2} = \frac{t(1+\frac{y}{t}) - y}{t^2} = \frac{1}{t}, \qquad f''(t,y) = -\frac{1}{t^2},$$

así, la ecuación de avance del método de Euler (Taylor de orden 1) es

$$w_0 = 2, \qquad w_{i+1} = w_i + 0.25\left(1 + \frac{w_i}{t_i}\right), \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

la ecuación de avance del método de Taylor 2 es

$$w_{i+1} = w_i + 0.25\left(1 + \frac{w_i}{t_i}\right) + \frac{0.25^2}{2!}\frac{1}{t_i}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$$

y la ecuación de avance del método de Taylor 3 es

$$w_{i+1} = w_i + 0.25\left(1 + \frac{w_i}{t_i}\right) + \frac{0.25^2}{2!}\frac{1}{t_i} - \frac{0.25^3}{3!}\frac{1}{t_i^2}, \qquad i = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Si denotamos w_i^E, w_i^{T2} y w_i^{T3} las aproximaciones obtenidas por los métodos de Euler, Taylor 2 y Taylor 3, respectivamente

i	t_i	$y(t_i)$	w_i^E	$\lvert y(t_i) - w_i\rvert$	w_i^{T2}	$\lvert y(t_i) - w_i^{T2}\rvert$	w_i^{T3}	$\lvert y(t_i) - w_i^{T3}\rvert$
0	1	2	2	0	2	0	2	0
1	1.25	2.7789	2.75	0.0289	2.7813	0.0024	2.7786	0.0003
2	1.5	3.6082	3.55	0.0582	3.6125	0.0043	3.6077	0.0005
3	1.75	4.4793	4.3917	0.0876	4.4854	0.0061	4.4787	0.0006
4	2	5.3863	5.269	0.1173	5.3940	0.0077	5.3855	0.0008

Observación Los métodos de Taylor pueden tener orden de precisión tan alto como lo deseemos. Sin embargo entre más alto es el orden de los métodos, serán necesarias derivadas de orden superior de la función f y las expresiones para los métodos serán más extensos. Dos formas de evitar esta complicación es emplear cálculo simbólico o buscar métodos que tengan orden de precisión tan alto como queramos y no sea necesario hallar las derivadas de f.