UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO – BCC

HELENA VARGAS TANNURI

IMPLEMENTAÇÃO DE UMA BIBLIOTECA DA LÓGICA DE INCONSISTÊNCIA FORMAL LFI1 EM COQ

JOINVILLE
2024

HELENA VARGAS TANNURI

IMPLEMENTAÇÃO DE UMA BIBLIOTECA DA LÓGICA DE INCONSISTÊNCIA FORMAL LFI1 EM COQ

Trabalho de conclusão de curso submetido à Universidade do Estado de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação

Orientadora: Karina Girardi Roggia
Coorientador: Miguel Alfredo Nunes

JOINVILLE
2024

HELENA VARGAS TANNURI

IMPLEMENTAÇÃO DE UMA BIBLIOTECA DA LÓGICA DE INCONSISTÊNCIA FORMAL LFI1 EM COQ

Trabalho de conclusão de curso submetido à Universidade do Estado de Santa Catarina como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Bacharel em Ciência da Computação

Orientadora: Karina Girardi Roggia
Coorientador: Miguel Alfredo Nunes

BANCA EXAMINADORA:

Orientadora:

Dra. Karina Girardi Roggia
UDESC

Coorientador:

Miguel Alfredo Nunes
UNICAMP

Membros:

Dr. Cristiano Damiani Vasconcellos
UDESC

Me. Paulo Henrique Torrens
University of Kent

Joinville, Junho de 2024

AGRADECIMENTOS

"Different conclusions are reached when one fact is viewed from two separate points of view. When that happens, there is no immediate way to judge which point of view is the correct one. There is no way to conclude one's own conclusion is the correct one. But for that exact reason, it is also premature to decide one's own conclusion is wrong."

(Senjougahara Hitagi - Bakemonogatari, [2009])

RESUMO

Palavras-chave: Coq, Lógica paraconsistente, LFI1, Lógica de Inconsistência Formal, Lógica Trivalorada.

ABSTRACT

Keywords: teste.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As lógicas paraconsistentes são uma família de lógicas na qual a presença de contradições não implica trivialidade, ou seja, são sistemas lógicos que possuem uma negação que não respeita o Princípio da Explosão, definido como $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ (CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). Tradicionalmente, em lógicas ortodoxas, qualquer teoria que seja inconsistente - e, portanto, não respeite o Princípio da Não-Contradição, definido como $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ - será uma teoria trivial (uma teoria que contem todas as sentenças). Deste modo, as lógicas paraconsistentes surgem como uma ferramenta que permite tratar contradições sem trivializar o sistema lógico (CARNIELLI; CONIGLIO, 2016).

De acordo com Priest, Tanaka e Weber (2022), as motivações para o estudo de lógicas paraconsistentes podem ser observadas em diversos campos do conhecimento. Nas ciências naturais, por exemplo, teorias inconsistentes e não-triviais são comuns, como é o caso da teoria do átomo de Bohr, que, segundo Brown e Priest (2015), deve possuir um mecanismo de inferência paraconsistente[1]. No campo da linguística, inconsistências não-triviais também são possíveis, como a preservação da noção espacial da palavra "Próximo" mesmo tratando-se de objetos impossíveis[2]. Ademais, no contexto da computação, uma aplicação da paraconsistência é o uso de lógicas de inconsistência formal para a modelagem e o desenvolvimento de bancos de dados evolucionários (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2000).

As lógicas de inconsistência formal (**LFI**s), são lógicas paraconsistentes que introduzem na sua linguagem os conceitos de consistência e inconsistência como formas de representar o excesso de informações (por exemplo, evidência para α e evidência para $\neg\alpha$), para resgatar a capacidade de se obter a trivialidade em alguns casos (CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). Ao explicitamente representar a consistência dentro da sua linguagem, é possível estudar teorias inconsistentes sem necessariamente assumir que elas são triviais, porém possibilitando a trivialidade em situações específicas. A ideia por trás das **LFI**s é que deve-se respeitar as noções da lógica clássica o máximo possível, desviando desta somente na presença de contradições. Isto significa que, na ausência de contradições, o Princípio da Explosão deve ser tomado como válido (PRIEST; TANAKA; WEBER, 2022). Segundo Carnielli e Coniglio; Barrio e Carnielli (2016, 2019), na lógica **LFI1**, uma lógica paraconsistente e trivalorada, os conceitos de inconsistência e consistência são introduzidos à linguagem por meio do operador $\bullet$ para a inconsistência ou $\circ$ para a consistência, sendo que qualquer um destes pode ser usado para definir a linguagem da **LFI1**. Desta forma, como veremos ao longo do presente trabalho, e possível resgatar a trivialidade através do Princípio da Explosão Gentil, definido, no caso da **LFI1**, como $\circ\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$ (CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). Este princípio diz que

[1] De acordo com a teoria, um elétron orbita o núcelo do átomo sem radiar energia. Porém, de acordo com as equações de Maxwell, que compõem parte da teoria de Bohr, um elétron que está acelerando em órbita deve radiar energia. Estes fatos são inconsistentes entre si, entretanto, não é possível inferir *tudo* sobre o comportamento dos elétrons a partir disso. Portanto, o mecanismo de inferência deve se tratar de um mecanismo paraconsistente.

[2] Por exemplo, na sentença "Adam está próximo de um cubo esférico", a noção espacial entre Adam e um objeto impossível é preservada. (MCGINNIS, 2013)

a trivialidade é obtida a partir da contradição de uma informação consistente.

Um sistema lógico capaz de lidar com informações inconsistentes é de grande interesse no campo da computação, sobretudo no gerenciamento de bancos de dados (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2000). Um banco de dados pode ser definido como um conjunto estruturado de relações finitas que armazena informações. Estas informações precisam satisfazer condições conhecidas como restrições de integridade antes de serem inseridas no banco (CODD, 1970). As restrições são definidas pelo projetista do banco de dados no momento da implementação e podem ser formalizadas como sentenças de primeira ordem fixas (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2000). Conforme o banco de dados evolui, é preciso atualizar as informações contidas para refletir a realidade, contudo, como informações contraditórias não são permitidas pelas restrições de integridade, isso torna o processo de atualização difícil e trabalhoso. Ademais, a existência de bancos de dados que possam alterar suas restrições de integridade com o passar do tempo (conhecidos como bancos de dados evolucionários) é outro ponto de interesse que pode ser explorado com o uso das **LFI**s.

Concomitante aos estudos das lógicas paraconsistentes, avanços nas áreas da computação e da matemática - como a definição de teoria de tipos por Russell (1903, 1908), a formulação desta teoria com base na sintaxe do Cálculo-λ por Church (1940) e o descobrimento da Correspondência de Curry-Howard por Curry e Feys; Howard (1958, 1980) - possibilitaram o desenvolvimento de assistentes de provas (HARRISON; URBAN; WIEDIJK, 2014). Assistentes de provas são ferramentas da área de verificação formal, que buscam garantir que um programa está correto de acordo com uma especificação formal. Isto é feito a partir de provas desenvolvidas utilizando métodos matemáticos para a correção de propriedades de um *software* (CHLIPALA, 2019). Tradicionalmente, a verificação da validade de provas é feita manualmente por avaliadores, que seguem o raciocínio do autor e dão um veredito baseado no quão convincente a prova é. Os assistentes de provas surgem como alternativas à verificação manual, possibilitando ao matemático - ou programador - verificar provas na medida em que elas são desenvolvidas, tornando este processo mais fácil e confiável (PAULIN-MOHRING, 2015).

Assistentes de provas como Coq, Lean e Isabelle permitem ao usuário definir e provar propriedades sobre objetos matemáticos com valor computacional (GEUVERS, 2009). No presente trabalho será utilizado o Coq, este que utiliza o Cálculo de Construções Indutivas como formalismo para o desenvolvimento de provas (TEAM, 2024). O Coq ganhou notoriedade como ferramenta de verificação formal após seu uso na prova de correção de diversos teoremas e sistemas computacionais complexos, como a prova do teorema das quatro cores (GEUVERS, 2009), a certificação de um compilador para a linguagem de programação C (LEROY, 2021) e a prova da correção do algoritmo união-busca (CONCHON; FILLIÂTRE, 2007).

A proposta deste trabalho é desenvolver uma biblioteca da lógica de inconsistência formal **LFI1** em Coq, de maneira análoga como foi feito para a lógica modal por Silveira (2020). Após a implementação da biblioteca, propõe-se que sejam provados metateoremas relevantes para a **LFI1** utilizando o Coq.

1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo geral deste trabalho é implementar uma biblioteca da **LFI1** em Coq, assim como desenvolver provas da completude, da correção e do metateorema da dedução dentro da biblioteca.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudar conceitos relevantes sobre lógicas paraconsistentes, em especial a **LFI1**;
- Estudar e revisar as provas manuais para completude, correção e metateorema da dedução da **LFI1**;
- Realizar um levantamento do estado da arte do desenvolvimento de lógicas paraconsistentes em assistentes de provas;
- Desenvolver uma biblioteca da **LFI1** em Coq, baseada na semântica e sintaxe previamente definidas;
- Desenvolver e verificar formalmente as provas para completude, correção e metateorema da dedução em Coq.

1.3 TRABALHOS RELACIONADOS

A partir de um levantamento acerca do estado da arte do desenvolvimento de lógicas paraconsistentes em assistentes de provas na literatura, foram encontrados alguns trabalhos semelhantes ao presente trabalho. Estes são: (VILLADSEN; SCHLICHTKRULL, 2017), no qual os autores implementam uma biblioteca de uma lógica paraconsistente utilizando assistente de provas Isabelle. A lógica em questão possui uma quantidade infinita contável de valores verdades não-clássicos, sendo uma generalização da lógica trivalorada proposta por Łukasiewicz, como definida por Simons (2023). Além de implementar a biblioteca, são provados metateoremas sobre esta lógica, como o número mínimo de valores verdades a serem analisados para determinar o valor verdade de uma fórmula e os metateoremas da redução e da dedução.

1.4 METODOLOGIA

1.5 ESTRUTURA DO TRABALHO

2 LÓGICAS DE INCONSISTÊNCIA FORMAL

No estudo de lógicas clássicas, uma contradição é considerada inseparável da trivialidade, ou seja, se uma teoria possuir um subconjunto $\{\alpha, \neg\alpha\}$ de fórmulas, pode-se derivar qualquer sentença. Esta propriedade é chamada de *explosividade*. Desta forma, as lógicas clássicas (e certas lógicas não-clássicas, como a lógica intuicionista), expressam sua *explosividade* como representada pela seguinte equação: **MIGS:** Esse parágrafo ficou muito bom

$$\text{Contradições} = \text{Trivialidade}$$

As *lógicas de inconsistência formal* são lógicas paraconsistentes que se propõem a questionar a noção apresentada anteriormente sem abrir mão completamente da trivialidade. Isto é feito estabelecendo uma nova propriedade, chamada de *explosividade gentil*, que resgata a trivialidade introduzindo o conceito de consistência na sua linguagem (CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). A consistência é expressa na *explosividade gentil* da seguinte forma:

$$\text{Contradições} + \text{Consistência} = \text{Trivialidade}$$

Definir uma lógica que consiga superar o tabu da *explosividade* e, ao mesmo tempo, representar uma ferramenta legítima capaz de formalizar o raciocínio e separar inferências aceitáveis de inferências equivocadas é um dos objetivos dos lógicos que se descrevem como *paraconsistentistas*. As lógicas de inconsistência formal cumprem este objetivo de maneira elegante, servindo um propósito importante no estudo de lógicas não-clássicas.

Neste capítulo são apresentadas algumas definições necessárias para caracterizar as lógicas de inconsistência formal, baseadas em Carnielli e Coniglio (2016) e em Carnielli, Coniglio e Marcos (2007). Antes de definir as **LFI**s é preciso apresentar alguns conceitos básicos acerca de sistemas lógicos paraconsistentes. Nas definições que seguem, utiliza-se a seguinte representação: **MIGS:** Isso deveria ir para a lista de símbolos

- $p, q, r \ldots$ (letras minúsculas do alfabeto latino) – variáveis atômicas.
- $A, B, C, \ldots$ (letras maiúsculas do alfabeto latino) – conjuntos quaisquer.
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ (letra minúsculas do alfabeto grego) – fórmulas quaisquer.
- Γ, Δ – conjuntos de fórmulas.
- Σ, Θ – assinaturas de linguagens.
- $\vdash$ – relação de consequência sintática.
- $\vDash$ – relação de consequência semântica.

Ademais, o presente trabalho segue o mesmo caminho de Carnielli e Coniglio (2016), baseando-se na teoria geral de relações de consequências para definir *lógicas tarskianas*. Neste sentido, como a lógica **LFI1** se trata de uma *lógica tarskiana*, o presente trabalho se restringe a trabalhar somente neste escopo.

Nas Seções 2.1 e 2.2 serão apresentadas definições necessárias para identificar formalmente as lógicas paraconsistentes e lógicas de inconsistência formal. Estas definições se aplicam tanto a relações de consequência semântica quanto a relações de consequência sintática, denotadas genericamente pelo operador $\vdash$. Este trabalho não se aprofunda em detalhes sobre conceitos envolvendo relações e operações de consequência, suas propriedades e as diferenças entre abordagens prova-teóricas modelo-teóricas. O leitor interessado em tais assuntos pode consultar os trabalhos de Wójcicki (1984, 1988a, 1988b) e Carnielli et al. (2008).

2.1 PARACONSISTÊNCIA

Um sistema lógico que se atreve a romper com o Princípio da Explosão - o qual afirma que a partir de uma teoria contraditória, qualquer conclusão segue - é dito paraconsistente. As justificativas para questionar tal princípio existem em diversos campos do conhecimento, como na linguística (MCGINNIS, 2013), na computação (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2000) e até mesmo nas ciências naturais (BROWN; PRIEST, 2015). Outra justificativa para o desenvolvimento de sistemas lógicos paraconsistentes é um descontentamento com o caráter explosivo das lógicas ortodoxas. Por exemplo, uma discordância de que a partir da evidência de que “Choveu na tarde de ontem” e da evidência de que “Não choveu na tarde de ontem” pode-se concluir que “Um triângulo tem quatro lados” [1]. Nesta seção, a paraconsistência será definida formalmente, partindo de definições básicas sobre lógica e classificando diferentes sistemas de acordo com propriedades acerca de sua *relação de consequência*.

Uma lógica $\mathscr{L}$ será representada como uma dupla $\mathscr{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, onde $\mathcal{L}$ é sua linguagem (seu conjunto de fórmulas bem formadas) e $\vdash$ é uma relação de consequência de conclusão única, definida como $\vdash \subseteq \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, sendo $\wp(\mathcal{L})$ o conjunto das partes de $\mathcal{L}$. Em uma consequência do tipo $\Gamma \vdash \alpha$ (lida como “α é uma consequência de Γ”) diz-se que o conjunto Γ é o conjunto de premissas e α é a conclusão. A fim de facilitar a escrita e leitura, a seguinte notação será utilizada ao longo do texto:

Notação 1. Sejam Γ, Δ conjuntos de fórmulas e φ, ψ fórmulas, então $\Gamma, \Delta, \varphi \vdash \psi$ denota $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi\} \vdash \psi$.

Definição 1 (Assinatura proposicional)**.** Uma assinatura proposicional Θ é um conjunto de conectivos lógicos, cada um contendo a informação sobre sua aridade. ■

Por exemplo, a assinatura proposicional para a lógica proposicional clássica pode ser definida como $\Theta_{LPC} = \{\wedge^2, \vee^2, \neg^1, \rightarrow^2\}$, onde o operador $\wedge^2$ representa uma conjunção, $\vee^2$ representa uma disjunção, $\neg^1$ representa uma negação e $\rightarrow^2$ representa uma implicação. No

[1] Esta forma de explosividade é um exemplo de uma contradição estudada pelas lógicas de relevância, que tratam da conexão entre as premissas e a conclusão de uma inferência (MARES, 2024).

restante do texto, as aridades destes conectivos será omitida e a aridade de novos conectivos será apresentada somente na sua definição.

Uma assinatura proposicional juntamente com um conjunto enumerável de átomos são base para a definição de uma linguagem proposicional, que por sua vez é utilizada para definir uma lógica proposicional, como é o caso da **LFI1**.

Definição 2 (Lógica proposicional)**.** Um sistema lógico $\mathscr{L}$, definido sobre uma linguagem $\mathcal{L}_\Theta$ é dito proposicional caso $\mathcal{L}_\Theta$ seja definida a partir de um conjunto enumerável de átomos $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e uma assinatura proposicional Θ. A linguagem $\mathcal{L}_\Theta$ é chamada de linguagem proposicional. Escreveremos $\mathcal{L}$ caso a assinatura da linguagem seja irrelevante ou possa ser inferida sem ambiguidade a partir do contexto. (Já que você já estava fazendo isso, adicionei um comentário na definição.) ■

No desenvolvimento de metateoremas sobre propriedades de uma determinada lógica, a indução na complexidade de uma fórmula é um método comum de prova. Para isso, dada uma lógica $\mathscr{L}$ sobre uma linguagem $\mathcal{L}$, define-se uma função recursiva $C(\varphi) : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que retorna, para uma dada fórmula, um número natural representando sua complexidade, baseada na quantidade de operadores e átomos:

Definição 3 (Complexidade de fórmulas para a lógica proposicional clássica)**.** Dada uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_{LPC}$, a complexidade $C(\varphi)$ é definida recursivamente da seguinte forma:

1. Se $\varphi = p$, onde $p \in \mathcal{P}$, então $C(\varphi) = 1$;
2. Se $\varphi = \neg\psi$, então $C(\varphi) = C(\psi) + 1$;
3. Se $\varphi = \psi \otimes \gamma$, onde $\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, então $C(\varphi) = C(\psi) + C(\gamma) + 1$. ■

Definição 4 (Substituição)**.** Uma substituição σ de todas as ocorrências de uma variável p_i por uma fórmula ψ em uma fórmula φ, é denotada por $\sigma(\varphi) = \varphi\{p_i \mapsto \psi\}$ (SILVA; FINGER; MELO, 2006). A substituição $\varphi\{p_i \mapsto \psi\}$ é definida indutivamente como (considerando $\triangle$, $\otimes$ conectivos quaisquer de aridade 1 e 2 respectivamente):

1. Se $\varphi = p_i$ então, $\varphi\{p_i \mapsto \psi\} = \psi$;
2. Se $\varphi = p_j$ e $j \neq i$ então, $\varphi\{p_i \mapsto \psi\} = \varphi$;
3. Se $\varphi = \triangle\gamma$ então, $\varphi\{p_i \mapsto \psi\} = \triangle(\gamma\{p_i \mapsto \psi\})$;
4. Se $\varphi = \varphi_0 \otimes \varphi_1$ então, $\varphi\{p_i \mapsto \psi\} = \varphi_0\{p_i \mapsto \psi\} \otimes \varphi_1\{p_i \mapsto \psi\}$.

Uma fórmula α é dita *instância de substituição* de uma fórmula β caso exista uma substituição σ tal que $\alpha = \sigma(\beta)$. ■

Notação 2. Dada uma função $f : A \to B$ e um conjunto $A' \subseteq A$, $f[A']$ denota o conjunto $\{f(a) \mid a \in A'\}$.

Definição 5 (Lógica Tarskiana)**.** Uma lógica $\mathscr{L}$, definida sobre uma linguagem $\mathcal{L}$ e munida com uma relação de consequência $\vdash$ é dita *Tarskiana* caso satisfaça as seguintes propriedades para todo $\Gamma \cup \Delta \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}$:

(i) Se $\alpha \in \Gamma$ então $\Gamma \vdash \alpha$; (reflexividade)

(ii) Se $\Delta \vdash \alpha$ e $\Delta \subseteq \Gamma$ então $\Gamma \vdash \alpha$; (monotonicidade)

(iii) Se $\Delta \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \delta$ para todo $\delta \in \Delta$ então $\Gamma \vdash \alpha$. (corte)

■

Com a noção de substituição para lógicas proposicionais apresentada na Definição 4, é possível definir lógica *padrão* como sendo uma lógica tarskiana, *finitária* e *estrutural*:

Definição 6 (Lógica padrão)**.** Uma lógica proposicional $\mathscr{L}$ definida sobre uma linguagem proposicional $\mathcal{L}$ é dita *estrutural* caso respeite a seguinte condição para todo $\Gamma \cup \Delta \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}$:

(i) Se $\Gamma \vdash \alpha$ então $\sigma[\Gamma] \vdash \sigma(\alpha)$, para toda substituição σ de variável por fórmula.

Uma lógica $\mathscr{L}$ é dita *finitária* caso satisfaça o seguinte:

(ii) Se $\Gamma \vdash \alpha$ então existe conjunto finito $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ tal que $\Gamma_0 \vdash \alpha$.

Por fim, uma lógica proposicional $\mathscr{L}$ é dita *padrão* caso ela seja Tarskiana, finitária e estrutural.

■

Com isto, é possível definir formalmente o conceito de *paraconsistência* para lógicas Tarskianas.

Definição 7 (Lógica Tarskiana paraconsistente)**.** Uma lógica Tarskiana $\mathscr{L}$, definida sobre uma linguagem $\mathcal{L}$, é dita *paraconsistente* se ela possuir uma negação[2] $\neg$ e existirem fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$ tal $\alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$. ■

Caso a linguagem de $\mathscr{L}$ possua uma implicação $\to$ que respeite o metateorema da dedução[3], então $\mathscr{L}$ é paraconsistente se e somente se a fórmula $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ não for válida. Ou seja, se o Princípio da Explosão é inválido (em relação a $\neg$), o conectivo $\neg$ é considerado uma negação *não explosiva*.

2.2 INCONSISTÊNCIA

A motivação para o desenvolvimento das **LFI**s é a existência sistemas lógicos paraconsistentes nos quais é possível resgatar, de maneira *controlada*, o Princípio da Explosão. Ao internalizar o conceito de consistência, as **LFI**s propõem a noção de que uma contradição que

[2] Esta negação pode ser primitiva (pertencente à assinatura da linguagem) ou definida a partir de outras fórmulas.
[3] Definido como $\Gamma, \alpha \vdash \beta \iff \Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

é reconhecidamente inconsistente numa dada teoria é inofensiva e é somente fruto do excesso de informação. O resgate *controlado* da explosividade é feito definindo um conjunto $\bigcirc(p)$ de fórmulas dependentes somente em uma variável proposicional p. Caso uma lógica $\mathscr{L}$ seja explosiva ao unir-se um conjunto $\bigcirc(\alpha)$ com uma contradição $\{\alpha, \neg\alpha\}$, ou seja, se o seguinte for válido para todo α e β pertencentes à sua linguagem: $\bigcirc(\alpha), \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ e $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash \beta$ e $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$, então dizemos que $\mathscr{L}$ é *gentilmente explosiva*. Esta é uma das formas de definir as lógicas de inconsistência formal. Como será mostrado nesta seção, existem três jeitos diferentes de definir as **LFI**s e sua *explosividade gentil*.

Notação 3. Dado um átomo p, define-se $\bigcirc(p)$ como um conjunto não-vazio de fórmulas dependentes somente em p. Com base neste conjunto, define-se a notação $\bigcirc(\varphi)$ para representar o conjunto obtido pela substituição de todas as ocorrências de p por φ em todos os elementos de $\bigcirc(p)$, ou seja, para uma fórmula φ qualquer, $\bigcirc(\varphi) = \{\psi\{p \mapsto \varphi\} \mid \psi \in \bigcirc(p)\}$.

A definição a seguir foi proposta por Carnielli e Coniglio (2016) e se encontra no meio de outras duas definições, uma mais generalista (apresentada na Definição 9) e outra mais restrita (apresentada na Definição 10). Ela é utilizada para definir o que é informalmente descrito como **LFI** no início desta seção.

Definição 8 (Lógica de Inconsistência Formal)**.** Seja $\mathscr{L} = \langle \mathcal{L}_\Theta, \vdash \rangle$ uma lógica padrão, de forma que sua assinatura proposicional Θ possua uma negação $\neg$. Seja $\bigcirc(p)$ um conjunto não-vazio de fórmulas dependentes somente na variável proposicional p. Então $\mathscr{L}$ será uma *Lógica de Inconsistência Formal* (**LFI**) (em relação a $\bigcirc(p)$ e $\neg$) caso respeite as seguintes condições:

(i) Existem $\gamma, \delta \in \mathcal{L}_\Theta$ de modo que $\gamma, \neg\gamma \nvdash \delta$;

(ii) Existem $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_\Theta$ de modo que:

(ii.a) $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash \beta$;

(ii.b) $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$;

(iii) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ tem-se $\bigcirc(\varphi), \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$. ■

A condição (i) diz que toda **LFI** é *não-explosiva* (em relação a $\neg$) e as condições (ii) e (iii) dizem que toda **LFI** é *gentilmente explosiva* (em relação a $\bigcirc(p)$ e $\neg$).

Na literatura existem outras duas definições para as lógicas de inconsistência formal, que relaxam a condição (ii) para obter uma definição mais uniforme. Carnielli e Coniglio (2016), definem **LFI**s *fracas* da seguinte forma:

Definição 9 (**LFI** Fraca)**.** Seja $\mathscr{L} = \langle \mathcal{L}_\Theta, \vdash \rangle$ uma lógica padrão, de forma que sua assinatura proposicional Θ possua uma negação $\neg$. Seja $\bigcirc(p)$ um conjunto não-vazio de fórmulas dependentes somente na variável proposicional p. Então $\mathscr{L}$ será uma **LFI** *fraca* (em relação a $\bigcirc(p)$ e $\neg$) caso ela respeite as seguintes condições:

(i) Existem $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ de modo que $\varphi, \neg\varphi \nvdash \psi$;

(ii) Existem $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ de modo que $\bigcirc(\varphi), \varphi \nvdash \psi$;

(iii) Existem $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ de modo que $\bigcirc(\varphi), \neg\varphi \nvdash \psi$;

(iv) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ tem-se $\bigcirc(\varphi), \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$. ■

Como é possível observar pelas duas definições acima, toda **LFI** é uma **LFI** fraca (já que a condição (ii) da Definição 8 satisfaz as condições (ii) e (iii) da Definição 9), mas o inverso não é necessariamente verdade (observe que as váriaveis φ e ψ das condições (ii) e (iii) não precisam ser iguais). Ademais, é possível estabelecer outra definição (também mais uniforme do que a Definição 8) que introduz o conceito de **LFI**s *fortes* como feito abaixo:

Definição 10 (**LFI** Forte)**.** Seja $\mathscr{L} = \langle \mathcal{L}_\Theta, \vdash \rangle$ uma lógica padrão, de forma que sua assinatura proposicional Θ possua uma negação $\neg$. Seja $\bigcirc(p)$ um conjunto não-vazio de fórmulas dependentes somente na variável proposicional p. Então $\mathscr{L}$ será uma **LFI** *forte* (em relação a $\bigcirc(p)$ e $\neg$) caso ela respeite as seguintes condições:

(i) Existem $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_\Theta$ de modo que:

(i.a) $\alpha, \neg\alpha \nvdash \beta$;

(i.b) $\bigcirc(\alpha), \alpha \nvdash \beta$;

(i.c) $\bigcirc(\alpha), \neg\alpha \nvdash \beta$;

(ii) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ tem-se $\bigcirc(\varphi), \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$. ■

É imediato perceber que toda **LFI** forte é uma **LFI** (já que a condição (i) da Definição 10 satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 8), mas o inverso não é necessariamente verdade. Ademais, no escopo das lógicas proposicionais, é possível estabelecer uma forma mais simples de provar que uma dada lógica proposicional é uma **LFI** forte, tomando α e β como dois átomos p e q quaisquer nas condições (i.a), (i.b) e (i.c) da definição acima.

Para lógicas proposicionais, a Definição 10 pode ser alterada para simplificar algumas de suas condições:

Definição 11 (**LFI** forte para lógicas proposicionais)**.** Seja $\mathscr{L} = \langle \mathcal{L}_\Theta, \vdash \rangle$ uma lógica padrão, de forma que sua assinatura proposicional Θ possua uma negação $\neg$ e sua linguagem $\mathcal{L}_\Theta$ seja definida sobre um conjunto enumerável de átomos $\mathcal{P} = \{p_0, \ldots, p_n\}$. Seja $\bigcirc(p)$ um conjunto não-vazio de fórmulas dependentes somente na variável proposicional p. Então $\mathscr{L}$ será uma **LFI** *forte* (em relação a $\bigcirc(p)$ e $\neg$) caso ela respeite as seguintes condições:

(i) Existem $p, q \in \mathcal{P}$ de modo que:

(i.a) $p, \neg p \nvdash q$;

(i.b) $\bigcirc(p), p \nvdash q$;

(i.c) $\bigcirc(p), \neg p \nvdash q$;

(ii) Para todo $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Theta$ tem-se $\bigcirc(\varphi), \varphi, \neg\varphi \vdash \psi$. ■

Esta definição será utilizada para provar que a lógica proposicional **LFI1** se trata de uma Lógica de Inconsistência Formal forte.

3 A LÓGICA DE INCONSISTÊNCIA FORMAL LFI1

Com os avanços da internet no contexto do gerenciamento de bancos de dados, informações passaram a ser coletadas a partir de diferentes fontes que frequentemente se contradizem. Dada a existência das restrições de integridade – que impedem contradições – a atualização e manutenção de bancos de dados se torna um processo difícil (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2000). Portanto, uma lógica capaz de lidar com informações inconsistentes sem necessariamente sofrer com a trivialidade é de grande interesse. A lógica de inconsistência formal **LFI1** é capaz de lidar com contradições ao introduzir na sua assinatura o operador $\circ$ para representar a consistência, internalizando este conceito em sua linguagem. Uma informação é dita consistente caso ela e sua negação não sejam simultaneamente verdadeiras, ou seja, dada uma informação α, sua consistência $\circ\alpha$ será equivalente a fórmula $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Com a introdução deste novo operador, é possível lidar com a inconsistência de informações sem que trivialidade ocorra, já que - caso uma informação seja conhecidamente *inconsistente*, ou seja, $\neg \circ \alpha$ - então ela se trata de uma contradição inofensiva, fruto do excesso de informações numa dada teoria. Com isso, na **LFI1**, o conjunto $\bigcirc(p)$ de fórmulas dependentes somente na variável p (descrito na Definição 8) assume forma $\{\circ p\}$.

No trabalho de Carnielli, Marcos e Amo (2000) a lógica **LFI1*** é definida como uma extensão de primeira ordem da lógica proposicional **LFI1**. A motivação para definir-se uma *Lógica de Inconsistência Formal* de primeira ordem vem da natureza das informações contidas em bancos de dados, estas que podem ser compreendidas como sentenças de primeira ordem fixas (CODD, 1970), entretanto, o presente trabalho trata somente da lógica proposicional **LFI1**. Ademais, Carnielli, Marcos e Amo (2000) tomam o operador de *inconsistência* (denotado por $\bullet$) como primitivo. Isto foi feito pois o foco era explorar a **LFI1** como uma ferramenta para lidar com inconsistências em bancos de dados, portanto tomar a inconsistência como primitiva era de grande interesse. Entretanto, no presente trabalho, será utilizada a definição apresentada em Carnielli e Coniglio (2016), onde a linguagem é definida utilizando o operador $\circ$ como primitivo. Isto salienta algumas propriedades interessantes da negação $\neg$, como a presença das leis de De Morgan, axiomatizadas na Seção 3.2.

Este capítulo é dividido da seguinte forma: na Seção 3.1 é apresentada a linguagem da lógica proposicional **LFI1** bem como definições necessárias para desenvolver as provas de metateoremas. A Seção 3.2 contém uma breve explicação sobre sistemas de prova sintáticos e uma Axiomatização de Hilbert para a **LFI1** é definida. Na Seção 3.3 a semântica da **LFI1** é definida a partir de matrizes lógicas e de uma semântica de valorações não determinística, assim como é provada a equivalência entre essas duas semânticas.

3.1 LINGUAGEM

A lógica proposicional **LFI1** aqui apresentada é definida com base em Carnielli e Coniglio (2016) sobre a linguagem $\mathcal{L}_\Sigma$, que por sua vez é definida sobre um conjunto enumerável de átomos $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e uma assinatura proposicional $\Sigma = \{\wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2, \neg^1, \circ^1\}$. Como de costume, o conectivo $\wedge^2$ representa uma conjunção, $\vee^2$ representa uma disjunção, $\rightarrow^2$ representa uma implicação, $\neg^1$ representa uma negação e $\circ^1$ é o conectivo de consistência, definido de forma primitiva. No restante do texto a aridade destes conectivos será omitida. A linguagem $\mathcal{L}_\Sigma$ da **LFI1** é definida da seguinte forma:

Definição 12 (Linguagem da **LFI1**). A linguagem $\mathcal{L}_\Sigma$ da **LFI1** é definida indutivamente como o menor conjunto a que respeita as seguintes regras:

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$
2. Se $\varphi \in \mathcal{L}_\Sigma$, então $\triangle\varphi \in \mathcal{L}_\Sigma$, com $\triangle \in \{\neg, \circ\}$
3. Se $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Sigma$, então $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{L}_\Sigma$, com $\otimes \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ ■

A precedência dos conectivos é dada de maneira costumeira, com a adição do operador $\circ$ de consistência, seguindo a ordem (da maior precedência para a menor): $\circ$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Os conectivos binários $\wedge$ e $\vee$ são associativos à esquerda, ou seja, uma expressão do tipo $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ é lida como $((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$, e o conectivo $\rightarrow$ é associativo à direita, ou seja, uma expressão do tipo $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$ é lida como $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$.

A linguagem da **LFI1** pode ser definida de maneira equivalente utilizando-se o operador de inconsistência (representado por $\bullet$), definido como $\bullet\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \neg \circ \alpha$, como feito por Carnielli, Marcos e Amo (2000).

Na Definição 3 a função C da complexidade de uma fórmula na lógica proposicional clássica foi recursivamente definida. É possível estender esta definição para identificar a complexidade de uma fórmula na **LFI1** adicionando-se uma condição para o operador $\circ$:

Definição 13 (Complexidade de uma fórmula na **LFI1**). Dada uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_\Sigma$, a complexidade $C(\varphi)$ é definida adicionando-se a seguinte condição à Definição 3:

Se $\varphi = \circ\psi$, então $C(\varphi) = C(\psi) + 2$. ■

Note que a complexidade de uma fórmula do tipo $\circ\alpha$ é estritamente maior que a complexidade de α e $\neg\alpha$. Isto se dá pois, como evidenciado pela semântica de valorações na Definição 19, exite uma dependência de $\circ\alpha$ em $\{\alpha, \neg\alpha\}$, como apresentada por Carnielli e Coniglio (2016).

3.2 AXIOMATIZAÇÃO

A teoria das provas é uma das abordagens para o estudo das relações de consequência, onde a validade de uma inferência é atestada caso haja uma *prova* das conclusões a partir das premissas. Uma prova consiste em uma sequência de passos bem definidos aplicados sobre conjuntos (ocasionalmente unitários) de fórmulas, com base nos princípios de um determinado sistema de provas. A teoria das provas é sintática[1] por natureza, ou seja, numa inferência do tipo

[1] Vale notar que a separação *prova – sintaxe – semântica – modelo* não é tão bem definida, algo que é explorado em Prawitz (2005).

$A \vdash B$, é relevante apenas a estrutura das fórmulas presentes em A e B, não sua interpretação ou valor-verdade. Essa estrutura é manipulada a fim de obter-se uma sequência de passos que – além de atestar sua validade – serve como argumento para tal (BEALL; RESTALL; SAGI, 2024). Desta forma, pode-se definir um sistema de provas sintático para servir como relação de consequência para uma determinada lógica.

No contexto da **LFI1**, existem dois sistemas de prova sintáticos estabelecidos até o momento: um cálculo de Hilbert, descrito por Carnielli, Marcos e Amo; Carnielli e Coniglio (2000, 2016) e um sistema de *Tableau*, descrito por Carnielli e Marcos (2001). No presente trabalho, foi escolhido o cálculo de Hilbert para definir a sintaxe da **LFI1**, dada a maior facilidade para desenvolver metateoremas em relação ao sistema de *Tableau*.

O cálculo de Hilbert (também conhecido como sistema de Hilbert ou axiomatização de Hilbert) é um sistema composto por um conjunto de fórmulas, chamadas de *axiomas* e um conjunto de *regras de inferência*. Uma regra de inferência é formada por uma lista de fórmulas chamadas de premissas da regra e uma fórmula chamada de conclusão da regra (RESTALL, 1999). Uma prova (também chamada de derivação ou dedução) do tipo $\Gamma \vdash \varphi$ consiste em uma sequência finita de fórmulas $\psi_0, \ldots, \psi_n$, onde $\psi_n = \varphi$, e cada ψ_i $(0 \leq i \leq n)$ é um axioma, um elemento do conjunto de premissas Γ ou o resultado da aplicação de uma regra de inferência em fórmulas anteriores. Usualmente, o cálculo de Hilbert possui apenas uma regra de inferência, esta sendo o *modus ponens*. Este também é o caso para o cálculo de Hilbert que será utilizado para a **LFI1**.

O cálculo de Hilbert definido a seguir foi apresentado por Carnielli e Coniglio (2016) como alternativa ao que havia sido definido em trabalhos anteriores (CARNIELLI; MARCOS; AMO, 2000; CARNIELLI; CONIGLIO; MARCOS, 2007). Segundo os autores, esta definição evidencia algumas propriedades interessantes da negação $\neg$ como as leis de De Morgan.

Definição 14 (LFI1). A lógica **LFI1** é definida a partir da relação de consequência sintática $\vdash_{\mathbf{LFI1}}$ sobre a linguagem $\mathcal{L}_\Sigma$ através do seguinte cálculo de Hilbert:
Axiomas:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha) \tag{\textbf{Ax1}}$$

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \tag{\textbf{Ax2}}$$

$$\alpha \to (\beta \to (\alpha \land \beta)) \tag{\textbf{Ax3}}$$

$$(\alpha \land \beta) \to \alpha \tag{\textbf{Ax4}}$$

$$(\alpha \land \beta) \to \beta \tag{\textbf{Ax5}}$$

$$\alpha \to (\alpha \lor \beta) \tag{\textbf{Ax6}}$$

$$\beta \to (\alpha \lor \beta) \tag{\textbf{Ax7}}$$

$$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \lor \beta) \to \gamma)) \tag{\textbf{Ax8}}$$

$$(\alpha \to \beta) \lor \alpha \tag{\textbf{Ax9}}$$

$$\alpha \lor \neg \alpha \tag{\textbf{Ax10}}$$

$$\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)) \tag{bc1}$$

$$\neg\neg\alpha \to \alpha \tag{cf}$$

$$\alpha \to \neg\neg\alpha \tag{ce}$$

$$\neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha) \tag{ci}$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \tag{neg$\vee_1$}$$

$$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta) \tag{neg$\vee_2$}$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{neg$\wedge_1$}$$

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta) \tag{neg$\wedge_2$}$$

$$\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta) \tag{neg$\to_1$}$$

$$(\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta) \tag{neg$\to_2$}$$

Regra de inferência:

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}\ \mathrm{MP}$$

■

Os axiomas (**Ax1**) – (**Ax10**) e a regra de inferência **MP** (*modus ponens*) são importados da lógica proposicional clássica. O axioma (**bc1**) é chamado de *princípio da explosão gentil*. Os axiomas (**neg**$\vee_1$) – (**neg**$\to_2$) expressam as leis de De Morgan em relação a negação paraconsistente $\neg$.

Com isso, uma derivação em **LFI1** pode ser definida:

Definição 15 (Derivação em **LFI1**)**.** Seja $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$ um conjunto de fórmulas, uma derivação de φ a partir de Γ em **LFI1**, denotada como $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$, é uma sequência finita de fórmulas $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ onde, para cada $1 \leq i \leq n$, alguma das seguintes condições é satisfeita:

(i) φ_i é um axioma;

(ii) $\varphi_i \in \Gamma$;

(iii) existem $j,k < i$ de modo que φ_i é o resultado da aplicação de MP em φ_j e φ_k. ■

Para ilustrar, provaremos um exemplo de derivação no cálculo de Hilbert apresentado:

Exemplo 1. *A derivação* $\circ\psi, \alpha \to (\psi \wedge \neg\psi), \neg\alpha \to (\psi \wedge \neg\psi) \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ *é válida.*

Prova do Exemplo 1. A seguinte derivação completa a prova

1. $\circ\psi$ (Premissa)
2. $\alpha \to (\psi \wedge \neg\psi)$ (Premissa)
3. $\neg\alpha \to (\psi \wedge \neg\psi)$ (Premissa)

4. $\alpha \vee \neg\alpha$ (Ax10)
5. $(\alpha \to (\psi \wedge \neg\psi)) \to ((\neg\alpha \to (\psi \wedge \neg\psi)) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to (\psi \wedge \neg\psi)))$ (Ax8)
6. $(\neg\alpha \to (\psi \wedge \neg\psi)) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to (\psi \wedge \neg\psi))$ (MP 2, 5)
7. $(\alpha \vee \neg\alpha) \to (\psi \wedge \neg\psi)$ (MP 3, 6)
8. $\psi \wedge \neg\psi$ (MP 4, 7)
9. $(\psi \wedge \neg\psi) \to \psi$ (Ax4)
10. $(\psi \wedge \neg\psi) \to \neg\psi$ (Ax5)
11. ψ (MP 8, 9)
12. $\neg\psi$ (MP 8, 10)
13. $\circ\psi \to (\psi \to (\neg\psi \to \varphi))$ (bc1)
14. $\psi \to (\neg\psi \to \varphi)$ (MP 1, 13)
15. $\neg\psi \to \varphi$ (MP 11, 14)
16. φ (MP, 12, 15)

■

3.3 SEMÂNTICA

De forma geral, a semântica é o estudo de como um sistema de símbolos (uma linguagem) internaliza informações, ou seja, é o estudo de como interpretar os símbolos de uma linguagem (BROWN, 2005). Num sistema lógico, *matrizes lógicas* são comumente usadas para estabelecer o comportamento esperado dos conectivos lógicos de sua assinatura. Outra forma de compreender a semântica de um sistema lógico é definir uma função conhecida como *valoração*, que define uma *semântica de valorações*. Nesta seção, a semântica da **LFI1** será definida de dois jeitos distintos: a partir de uma *matriz lógica* e a partir de uma *valoração*. Ambas serão provadas equivalentes, a fim de facilitar a prova de metateoremas na Seção 3.4. As definições e notações para os conceitos de *álgebra* definidos aqui baseiam-se nos trabalhos de Carnielli e Coniglio (2016) e de Sikorski (1966).

3.3.1 Matriz Lógica e Valoração

Uma das formas de definir a semântica de uma lógica proposicional é definir uma *matriz lógica* (também chamada de tabela-verdade) para os conectivos de sua assinatura proposicional. Para isso, é necessário definir o conceito de *álgebra* para assinaturas proposicionais:

Definição 16 (Álgebra para assinaturas proposicionais)**.** Uma álgebra para uma assinatura proposicional Θ é uma dupla $\mathcal{A} = \langle A, O \rangle$, onde A é um conjunto não vazio (chamado de *domínio* da álgebra) e O é uma função de interpretação que associa cada conectivo n-ário $c \in \Theta$ à uma operação $c^{\mathcal{A}}\colon\ A^n \to A$ em A. ■

Quando não for confuso, o mesmo símbolo será utilizado para representar um conectivo c e sua interpretação $O(c) = c^{\mathcal{A}}$. Além disso o símbolo utilizado para se referir a uma álgebra $\langle A, O\rangle$ será simplesmente o símbolo para seu domínio A. Ademais, caso Θ seja finita, a função O será substituída pela lista de conectivos de Θ. Por exemplo, uma álgebra para a assinatura Σ da **LFI1** é escrita como $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \circ\rangle$.

Observação 1. Uma linguagem definida sobre uma assinatura proposicional $\Theta = \{c_1, \ldots, c_n\}$ e um conjunto enumerável de átomos $\mathcal{P} = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pode ser compreendida como uma álgebra da forma $\langle \mathcal{L}_\Theta, c_1 \ldots, c_n\rangle$, onde $\mathcal{L}_\Theta$ é um conjunto de fórmulas bem formadas a partir dos conectivos em Θ e dos átomos em $\mathcal{P}$. Denotamos esta álgebra simplesmente por $\mathcal{L}_\Theta$ (SIKORSKI, 1966; WÓJCICKI, 1984).

Duas álgebras definidas sobre uma mesma assinatura proposicional são ditas *similares*. Uma função (mapeamento) entre duas estruturas algebraicas similares que preserva sua estrutura é chamada de *homomorfismo*. Ou seja, dadas duas álgebras similares $\langle A, O\rangle$, $\langle B, O'\rangle$ definidas sobre uma assinatura proposicional Θ, um mapeamento $h : A \rightarrow B$ será um *homomorfismo* caso para todo conectivo $c \in \Theta$ de aridade n e para todo $a_0, \ldots, a_n \in A$ tem-se $h(c(a_0, \ldots, a_n)) = c(h(a_0), \ldots, h(a_n))$.

Definição 17 (Matriz Lógica)**.** Seja Θ uma assinatura proposicional. Uma *matriz lógica* $\mathcal{M}$ definida sobre Θ é uma tripla $\mathcal{M} = \langle A, D, O\rangle$, tal que o par $\langle A, O\rangle$ é uma álgebra para Θ e D é um subconjunto de A cujos elementos são ditos *designados* (estes são elementos de A considerados como verdadeiros). ■

Com isso, uma matriz lógica $\mathcal{M} = \langle A, D, O\rangle$ induz uma relação de consequência semântica para uma lógica tarskiana $\mathscr{L}$, definida sobre uma linguagem $\mathcal{L}_\Theta$, da seguinte forma: Sendo $\Gamma \cup \{\alpha\} \in \mathcal{L}_\Theta$, tem-se $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}} \alpha$ sse, para todo homomorfismo $h : \mathcal{L}_\Theta \rightarrow A$, se $h[\Gamma] \subseteq D$ então $h(\alpha) \in D$. Em particular, α é uma tautologia em $\mathscr{L}$ sse $h(\alpha) \in D$ para todo homomorfismo h. Perceba que o homomorfismo h nada mais é do que uma função que associa fórmulas da linguagem $\mathcal{L}_\Theta$ a valores do domínio A da matriz $\mathcal{M}$. Desta forma, h é dito uma *valoração* sobre $\mathcal{M}$.

Uma lógica que apresenta três elementos no domínio de sua matriz lógica é dita *trivalorada*. Algumas lógicas trivaloradas introduzem um terceiro valor além da verdade e falsidade para representar uma informação desconhecida, como é o caso da lógica de Kleene (GOTTWALD, 2022). A **LFI1**, por sua vez, introduz o valor $\frac{1}{2}$ além dos valores clássicos 0 e 1 para representar uma informação inconsistente. Ou seja, caso α tenha o valor $\frac{1}{2}$, então $\neg\alpha$ também terá o valor $\frac{1}{2}$.

Definição 18 (Matriz lógica da **LFI1**)**.** A matriz lógica $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}} = \langle M, D, O\rangle$ com domínio $M = \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ e um conjunto de valores designados $D = \{1, \frac{1}{2}\}$ é definida da seguinte forma:

$\to$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0
0	1	1	1

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	$\frac{1}{2}$	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	0

	$\neg$
1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	1

	$\circ$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

A matriz $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$ define a relação de consequência semântica $\vDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}}$ para a lógica **LFI1** da seguinte forma: para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$, tem-se $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}} \varphi$ sse, para todo valoração $h : \mathcal{L}_\Sigma \to M$ de $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$, se $h[\Gamma] \subseteq \{1, \frac{1}{2}\}$ então $h(\varphi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$. ■

Para ilustrar, provaremos um exemplo de inferência na semântica matricial apresentada:

Exemplo 2. *A inferência* $\vDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}} \circ\circ\alpha$ *é válida.*

Prova do Exemplo 2. Vamos mostrar que, para toda valoração $h : \mathcal{L}_\Sigma \to \{1, \frac{1}{2}, 0\}$ de $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$, $h(\circ\circ\alpha) \in \{1, \frac{1}{2}\}$. Para isso, construiremos uma tabela com todas as valorações possíveis para $\circ\circ\alpha$:

α	$\circ\alpha$	$\circ\circ\alpha$
1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1

Como é possível observar, a coluna da fórmula $\circ\circ\alpha$ é composta somente por elementos pertencentes ao conjunto $\{1, \frac{1}{2}\}$, portanto, para toda valoração h de $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$, $h(\circ\circ\alpha) \in \{1, \frac{1}{2}\}$. Logo $\vDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}} \circ\circ\alpha$.

■

Outra forma de definir a relação de consequência semântica de uma lógica é descrever uma semântica de valorações, esta que define um conjunto de cláusulas condicionais sobre funções. Quando uma função respeita todas as cláusulas, ela é dita valoração da lógica. Costa e Alves (1977) apresentam uma valoração para a lógica paraconsistente $\mathbf{C}_1$. Nesta semântica, a negação $\neg$ tem um comportamento não-determinístico. A semântica de valorações para a **LFI1** definida a seguir evidencia o comportamento não determinístico dos conectivos $\neg$ e $\circ$:

Definição 19 (Semântica de valorações para **LFI1**)**.** A função $v : \mathcal{L}_\Sigma \to \{1, 0\}$ é uma valoração para a lógica **LFI1** caso ela satisfaça as seguintes cláusulas:

$$v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Longleftrightarrow v(\alpha) = 1 \text{ e } v(\beta) = 1 \qquad (vAnd)$$

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 \iff v(\alpha) = 1 \text{ ou } v(\beta) = 1 \tag{vOr}$$
$$v(\alpha \to \beta) = 1 \iff v(\alpha) = 0 \text{ ou } v(\beta) = 1 \tag{$vImp$}$$
$$v(\neg\alpha) = 0 \Longrightarrow v(\alpha) = 1 \tag{$vNeg$}$$
$$v(\circ\alpha) = 1 \Longrightarrow v(\alpha) = 0 \text{ ou } v(\neg\alpha) = 0 \tag{$vCon$}$$
$$v(\neg\circ\alpha) = 1 \Longrightarrow v(\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\alpha) = 1 \tag{vCi}$$
$$v(\neg\neg\alpha) = 1 \Longrightarrow v(\alpha) = 1 \tag{vCf}$$
$$v(\alpha) = 1 \Longrightarrow v(\neg\neg\alpha) = 1 \tag{vCe}$$
$$v(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1 \iff v(\neg\alpha) = 1 \text{ ou } v(\neg\beta) = 1 \tag{$vDM_\wedge$}$$
$$v(\neg(\alpha \vee \beta)) = 1 \iff v(\neg\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\beta) = 1 \tag{$vDM_\vee$}$$
$$v(\neg(\alpha \to \beta)) = 1 \iff v(\alpha) = 1 \text{ e } v(\neg\beta) = 1 \tag{$vCIp_\to$}$$

O conjunto de todas as valorações para a lógica **LFI1** será denotado por $V^{\mathbf{LFI1}}$. Então, a relação de consequência semântica $\vDash_{\mathbf{LFI1}}$ para a **LFI1** é definida da seguinte forma: para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$, tem-se $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ sse, para todo $v \in V^{\mathbf{LFI1}}$, se $v(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$ então $v(\varphi) = 1$. ■

HELENA: Em vez de ficar explicando esses nomes das cláusulas eu poderia só mudar pra coisas mais normais né

Note que, por conta de $(VNeg)$ e $(VCon)$, o valor $v(\triangle\alpha)$ - para $\triangle \in \{\neg, \circ\}$ - não é determinado pelo valor $v(\alpha)$ da subfórmula α. Ou seja, os conectivos $\neg$ e $\circ$ apresentam um comportamento não determinístico em relação a esta semântica de valorações. Por exemplo, caso $v(\alpha)$ seja 1, pode-se ter $v(\neg\alpha)$ tanto 0 como 1 (mas não ambos).

3.4 METATEOREMAS

HELENA: adicionar outros metateoremas do artigo das database?!?@!@?!A metalógica é uma parte da metamatemática que se restringe ao estudo de sistemas lógicos através de métodos matemáticos, desenvolvendo metateoremas (JACQUETTE, 2002). Um metateorema é uma prova sobre propriedades de um sistema formal, sobretudo sobre suas relações de consequência, utilizando uma metalinguagem (TARSKI, 1956; BARILE, 2024). Uma propriedade provada através de um metateorema é chamada de *metapropriedade*. Num sistema lógico munido com uma relação de consequência sintática $\vdash$ e uma relação de consequência semântica $\vDash$ a metapropriedade da correção, que afirma que tudo que é derivável em $\vdash$ é válido em $\vDash$, é uma característica fundamental para que o sistema seja útil em alguma medida. Outra propriedade interessante é a completude, que afirma que tudo que é válido em $\vDash$ pode ser provado em $\vdash$. Antes de desenvolver as provas destes metateoremas, convém apresentar algumas definições pertinentes e provar lemas que facilitarão o desenvolvimento das provas mais extensas.

HELENA: pode ser que isso mude de lugar. depois vejo Na Seção 3.3, foram apresentadas duas formas distintas de definir a semântica da lógica **LFI1**. A semântica matricial é simples e intuitiva, nos permitindo demonstrar a validade de uma inferência com facilidade. Contudo, as provas de correção e completude em relação à matriz lógica são mais extensas quando comparadas com as provas em relação à semântica de valorações. Portanto, ambas serão provadas equivalentes, ou seja, uma inferência é válida na semântica matricial sse é válida na semântica de valorações:

Lema 1 (Equivalência entre a semântica de matrizes e a semântica de valorações)**.** *Seja v uma valoração em $V^{\mathbf{LFI1}}$, então existe uma valoração h sobre $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$ tal que, para todo $\varphi \in \mathcal{L}_\Sigma$, $v(\varphi) = 1$ sse $h(\varphi) \in \{1, \frac{1}{2}\}$.*

Prova do Lema 1. Seja v uma valoração em $V^{\mathbf{LFI1}}$. Então, considere a valoração h sobre $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$ tal que para toda variável proposicional p:

$$h(p) = \begin{cases} 1 \text{ sse } v(p) = 1 \text{ e } v(\neg p) = 0 \\ \frac{1}{2} \text{ sse } v(p) = 1 \text{ e } v(\neg p) = 1 \\ 0 \text{ sse } v(p) = 0 \end{cases}$$

Então, por indução na complexidade de uma fórmula $\varphi \in \mathcal{L}_\Sigma$, será provado o seguinte:

$$h(\varphi) = \begin{cases} 1 \text{ sse } v(\varphi) = 1 \text{ e } v(\neg \varphi) = 0 \\ \frac{1}{2} \text{ sse } v(\varphi) = 1 \text{ e } v(\neg \varphi) = 1 \\ 0 \text{ sse } v(\varphi) = 0 \end{cases}$$

BASE $C(\varphi) = 1$.

Como $C(\varphi) = 1$, temos $\varphi \in \mathcal{P}$ pela Definição 13. Com isso, a própria definição de h prova o caso **BASE**.

PASSO Hipótese de indução (HI): A propriedade vale para toda fórmula φ tal que $C(\varphi) = k$, com $k < n$.

Vamos mostrar que a propriedade vale caso $C(\varphi) = n$.

CASO 1. $\varphi = \neg\alpha$.

(a) ($\Longrightarrow$) Supondo $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = \neg h(\alpha) = 1$, vamos provar $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 0$.

Pela matriz de $\neg$ temos $h(\alpha) = 0$. Então, por (HI), $v(\alpha) = 0$.

Por ($vNeg$) temos $v(\neg\alpha) = v(\varphi) = 1$. Enfim, por ($vCf$), $v(\neg\varphi) = v(\neg\neg\alpha) = v(\alpha) = 0$

(a) ($\Longleftarrow$) Supondo $v(\varphi) = v(\neg\alpha) = 1$ e $v(\neg\varphi) = v(\neg\neg\alpha) = 0$, vamos provar $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = 1$.

Por (vCe) temos $v(\neg\neg\alpha) = v(\alpha) = 0$.

Por (HI) temos $h(\alpha) = 0$. Então, $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = \neg h(\alpha) = 1$, pela matriz de $\neg$.

(b) ($\Longrightarrow$) Supondo $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = \frac{1}{2}$, vamos provar $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 1$.

Pela matriz de $\neg$ temos $h(\alpha) = \frac{1}{2}$. Então, por (HI), $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = v(\varphi) = 1$.

Enfim, por (vCe) temos $v(\neg\varphi) = v(\neg\neg\alpha) = v(\alpha) = 1$.

(b) ($\Longleftarrow$) Supondo $v(\varphi) = v(\neg\alpha) = 1$ e $v(\neg\varphi) = v(\neg\neg\alpha) = 1$, vamos provar $h(\varphi) = \frac{1}{2}$.

Por (vCf) temos $v(\alpha) = v(\neg\neg\alpha) = 1$.

Por (HI), temos $h(\alpha) = \frac{1}{2}$. Então, pela matriz de $\neg$, temos $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = \neg h(\alpha) = \frac{1}{2}$.

(c) ($\Longrightarrow$) Supondo $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = \neg h(\alpha) = 0$, vamos provar $v(\varphi) = v(\neg\alpha) = 0$.

Pela matriz de $\neg$ temos $h(\alpha) = 1$. Então, por (HI), $v(\alpha) = 1$ e $v(\varphi) = v(\neg\alpha) = 0$.

(c) ($\Longleftarrow$) Supondo $v(\varphi) = v(\neg\alpha) = 0$, vamos provar $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = 0$.

Por $(vNeg)$ temos $v(\alpha) = 1$. Logo, por (HI), temos $h(\alpha) = 1$.

Pela matriz de $\neg$ temos $h(\varphi) = h(\neg\alpha) = \neg h(\alpha) = 0$.

CASO 2. $\varphi = \circ\alpha$.

(a) ($\Longrightarrow$) Supondo $h(\varphi) = h(\circ\alpha) = \circ h(\alpha) = 1$, vamos provar $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 0$.

Pela matriz de $\circ$, temos $h(\alpha) = 1$ ou $h(\alpha) = 0$.

(a.1) Se $h(\alpha) = 1$, então, por (HI), temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 0$.

Por (vCi) temos $v(\neg\varphi) = v(\neg\circ\alpha) = 0$. Então, por $(vNeg)$, temos $v(\varphi) = v(\circ\alpha) = 1$.

(a.2) Se $h(\alpha) = 0$, então, por (HI), temos $v(\alpha) = 0$.

Por (vCi), temos $v(\neg\varphi) = v(\neg\circ\alpha) = 0$. Então, por $(vNeg)$ temos $v(\varphi) = 1$.

(a) ($\Longleftarrow$) Supondo $v(\varphi) = v(\circ\alpha) = 1$ e $v(\neg\varphi) = v(\neg\circ\alpha) = 0$, vamos provar $h(\varphi) = h(\circ\alpha) = 1$.

(b) ($\Longrightarrow$) Supondo $h(\varphi) = h(\circ\alpha) = \frac{1}{2}$, vamos provar $v(\varphi) = 1$ e $v(\neg\varphi) = 1$.**HELENA:** TO BE ACABADO.

(b) ($\Longleftarrow$) Supondo $v(\varphi) = v(\circ\alpha) = 1$ e $v(\neg\varphi) = v(\neg\circ\alpha) = 1$, vamos provar $h(\varphi) = \frac{1}{2}$.

(c) ($\Longrightarrow$) Supondo $h(\varphi) = h(\circ\alpha) = \circ h(\alpha) = 0$, vamos provar $v(\varphi) = v(\circ\alpha) = 0$.

(c) ($\Longleftarrow$) Supondo $v(\varphi) = v(\circ\alpha) = 0$, vamos provar $h(\varphi) = h(\circ\alpha) = 0$.

■

Teorema 1 (Metateorema da dedução para $\vdash_{\mathbf{LFI1}}$). *Para todo conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$*:*

$$\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta \Longleftrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \beta.$$

O seguinte lema torna a prova do teorema mais imediata:

Lema 2. *A derivação* $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \alpha$ *é válida para todo* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$.

Prova do Lema 2. A seguinte sequência de derivação demonstra o lema:

1. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ (Ax2)
2. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ (Ax1)
3. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ (Ax1)
4. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ (MP 1,2)
5. $\alpha \to \alpha$ (MP 3,4)

■

Prova do Teorema 1. A prova será dividida em duas partes:
($\Longleftarrow$) Supondo $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \beta$, então existe uma sequência de derivação $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ onde $\varphi_n = \alpha \to \beta$.

A seguinte sequência de derivação completa a prova de $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta$:

1. $\ldots$

$\vdots \; \ddots$

n. $\alpha \to \beta$ (Suposição)

$n+1$. α (Premissa)

$n+2$. β (MP $n, n+1$)

($\Longrightarrow$) Supondo $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta$, então existe uma sequência de derivação $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ onde $\varphi_n = \beta$ a partir do conjunto de premissas $\Gamma \cup \{\alpha\}$. A prova de $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \beta$ é feita pela indução no tamanho n da sequência de derivação: ($\Longrightarrow$) Supondo $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta$, então existe uma sequência de derivação $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ onde $\varphi_n = \beta$ a partir do conjunto de premissas $\Gamma \cup \{\alpha\}$. A prova de $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \beta$ é feita pela indução no tamanho n da sequência de derivação:

BASE $n = 1$. A sequência contem somente uma fórmula $\varphi_1 = \beta$. Portanto, existem duas possibilidades:

1. φ_1 é um axioma.
2. $\varphi_1 \in \Gamma \cup \{\alpha\}$.

CASO 1. φ_1 é um axioma.

A seguinte derivação mostra $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi_1$:

1. φ_1 (Axioma)
2. $\varphi_1 \to (\alpha \to \varphi_1)$ (Ax1)
3. $\alpha \to \varphi_1$ (MP 1,2)

CASO 2. $\varphi_1 \in \Gamma \cup \{\alpha\}$.

Existem dois casos a serem considerados:

2.1 $\varphi_1 = \alpha$

2.2 $\varphi_1 \in \Gamma$

SUBCASO 2.1. $\varphi_1 = \alpha$.

É necessário mostrar $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \alpha$, o que foi provado pelo Lema 2.

SUBCASO 2.2. $\varphi_1 \in \Gamma$.

Então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi_1$ é provado pela seguinte sequência de derivações:

1. φ_1 (Premissa)
2. $\varphi_1 \to (\alpha \to \varphi_1)$ (Ax1)
3. $\alpha \to \varphi_1$ (MP 1, 2)

Portanto, $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi_1$ segue para o caso da **BASE**.

PASSO Hipótese de indução (HI): Para qualquer sequência de derivação $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta$ de tamanho i, com $i < n$, tem-se $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \beta$.

É preciso mostrar que $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta$ segue caso a dedução $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta$ seja de tamanho n. Então, vamos supor $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$ e mostrar $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi_n$.

Ao analisar a obtenção de φ_n na sequência de derivação de $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$, existem três casos a se considerar:

1. φ_n é um axioma.

2. $\varphi_n \in \Gamma \cup \{\alpha\}$.

3. φ_n é obtido por *modus ponens* em duas fórmulas φ_j e φ_k com $j, k < n$.

Os casos 1 e 2 são análogos aos casos provados na base.

CASO 3. φ_n é obtido por *modus ponens* em duas fórmulas φ_j e φ_k com $j, k < n$.

Então, $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_n$ (ou $\varphi_j = \varphi_k \to \varphi_n$, a prova para este caso é análoga).

Dada a nossa suposição de $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$, temos $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_j$ e $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_j \to \varphi_n$ sequências de dedução anteriores à aplicação da regra do *modus ponens* na linha n.

Então, pela (HI), temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi_j$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to (\varphi_j \to \varphi_n)$.

A seguinte sequência de derivação mostra $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi_n$:

1. $\ldots$

$\vdots \ \ddots$

j. $\alpha \to \varphi_j$ (HI sobre φ_j)

$\vdots \ \ddots$

$j+k$. $\alpha \to (\varphi_j \to \varphi_n)$ (HI sobre φ_k)

$j+k+1$. $(\alpha \to (\varphi_j \to \varphi_n)) \to ((\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \varphi_n))$ (Ax2)

$j+k+2$. $(\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \varphi_n)$ (MP $j+k, j+k+1$)

$j+k+3$. $\alpha \to \varphi_n$ (MP $j, j+k+2$)

Portanto, temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \beta$ e a prova está finalizada.

■

Com a prova do metateorema da dedução para o cálculo de Hilbert da **LFI1**, os seguintes corolários são imediatos:

Corolário 1. *Para todo conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$*:*

Se $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ e $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ então $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$.

Prova do Corolário 1. Seja $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$ um conjunto de fórmulas qualquer.

Suponha $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ e $\Gamma, \beta \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$. Então, pelo metateorema da dedução (MTD) (Teorema 1), temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \to \varphi$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \beta \to \varphi$.

A seguinte sequência de derivação mostra $\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$:

1. $\alpha \to \varphi$ (MTD aplicado à suposição)
2. $\beta \to \varphi$ (MTD aplicado à suposição)
3. $\alpha \vee \beta$ (Premissa)
4. $(\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \varphi) \to ((\alpha \vee \beta) \to \varphi))$ (Ax8)
5. $(\beta \to \varphi) \to ((\alpha \vee \beta) \to \varphi)$ (MP 1, 4)
6. $(\alpha \vee \beta) \to \varphi$ (MP 2, 5)
7. φ (MP 3, 6)

■

Corolário 2. *Para todo conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$*:*

Se $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ e $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$.

Prova do Corolário 2. Seja $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \varphi\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$ um conjunto de fórmulas qualquer.

Suponha $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$ e $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$. Pelo Corolário 1, temos $\Gamma, \alpha \vee \neg\alpha \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$. Pelo metateorema da dedução (MTD) (Teorema 1), temos $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} (\alpha \vee \neg\alpha) \to \varphi$.

A seguinte sequência de derivação mostra $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi$:

1. $(\alpha \vee \neg\alpha) \to \varphi$ (MTD aplicado à suposição)
2. $\alpha \vee \neg\alpha$ (Ax10)
3. φ (MP 1,2)

■

A ideia da prova da correção para a **LFI1** é, como de costume, provar que todo axioma do cálculo de Hilbert $\vdash_{\mathbf{LFI1}}$ é válido na semântica de valorações $\vDash_{\mathbf{LFI1}}$ e mostrar que a regra de inferência *modus ponens* preserva sua validade.

Teorema 2 (Correção)**.** *A lógica* **LFI1** *é correta em relação a sua semântica de valorações, ou seja, para todo conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$*:*

$$\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \Longrightarrow \Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \alpha.$$

Prova do Teorema 2. Supondo $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$, existe uma sequência de derivação $\varphi_1 \dots \varphi_n$ onde $\varphi_n = \alpha$. A prova de $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$ é obtida por indução no tamanho n da sequência de derivação:

BASE $n = 1$. A sequência contém somente uma fórmula $\varphi_1 = \alpha$. Portanto, existem duas possibilidades:

1. φ_1 é um axioma.
2. $\varphi_1 \in \Gamma$.

CASO 1. φ_1 é um axioma. Então basta mostrar que para todo $v \in V^{\mathbf{LFI1}}$, se $v(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, então $v(\varphi_1) = 1$. Como φ_1 é um axioma, basta analisar todos os casos possíveis:

SUBCASO 1.1. $\varphi_1 = \alpha \to (\beta \to \alpha)$.

Supondo $v(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = 0$, temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta \to \alpha) = 0$ por $(vImp)$.

Logo, $v(\beta) = 1$ e $v(\alpha) = 0$ novamente por $(vImp)$. Isto resulta numa contradição.

Portanto $v(\alpha \to (\beta \to \alpha)) = 1$.

SUBCASO 1.2. $\varphi_1 = (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.

Supondo $v((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))) = 0$, temos, por $(vImp)$, $v(\alpha \to (\beta \to \gamma)) = 1$ e $v((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) = 0$.

Portanto, por $(vImp)$, temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta \to \gamma) = 1$, e $v(\alpha \to \beta) = 1$ e $v(\alpha \to \gamma) = 0$.

Por $(vImp)$ segue $v(\alpha) = 1$ e $v(\gamma) = 0$, logo, $v(\beta \to \gamma) = 1$ e, portanto, $v(\beta) = 0$ ou $v(\gamma) = 1$.

Porém, como $v(\alpha \to \beta) = 1$ e $v(\alpha) = 1$, então $v(\beta) = 1$, o que resulta numa contradição. Logo $v((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))) = 1$.

SUBCASO 1.3. $\varphi_1 = \alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$.

Supondo $v(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) = 0$, temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) = 0$, por $(vImp)$, então $v(\beta) = 1$ e $v(\alpha \wedge \beta) = 0$ novamente por $(vImp)$.

Com isso, temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\beta) = 0$ por $(vAnd)$, mas isso resulta numa contradição, já que $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$.

Portanto $v(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))) = 1$.

SUBCASO 1.4. $\varphi_1 = (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$.

Supondo $v((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) = 0$.

Logo $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ e $v(\alpha) = 0$ por $(vImp)$.

Então, $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 1$ por $(vAnd)$, o que resulta numa contradição.

Portanto $v((\alpha \wedge \beta) \to \alpha) = 1$.

SUBCASO 1.5. $\varphi_1 = (\alpha \wedge \beta) \to \beta$. Como no caso anterior, *mutatis mutandis*.

SUBCASO 1.6. $\varphi_1 = \alpha \to (\alpha \vee \beta)$.

Supondo $v(\alpha \to (\alpha \vee \beta)) = 0$, temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\alpha \vee \beta) = 0$, por $(vImp)$.

Então temos $v(\alpha) = 0$ e $v(\beta) = 0$ por (vOr), o que resulta numa contradição.

Portanto $v(\alpha \to (\alpha \vee \beta)) = 1$.

SUBCASO 1.7. $\varphi_1 = \beta \to (\alpha \vee \beta)$. Como no caso anterior, *mutatis mutandis*.

SUBCASO 1.8. $\varphi_1 = (\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$.

Supondo $v((\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))) = 0$, temos, por $(vImp)$, $v((\alpha \to \gamma)) = 1$ e $v(((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))) = 0$.

Portanto, novamente por $(vImp)$, temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\gamma) = 1$. Além disso, temos $v(\beta \to \gamma) = 1$ e $v((\alpha \vee \beta) \to \gamma) = 0$.

Então, temos $v(\beta) = 0$ ou $v(\gamma) = 1$. Ademais, $v(\alpha \vee \beta) = 1$ e $v(\gamma) = 0$.

Finalmente, por (vOr), temos $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$. O fato de termos $v(\gamma) = 0$ nos permite concluir $v(\alpha) = 0$ e $v(\beta) = 0$, porém isto nos dá $v(\alpha) = 1$ (já que temos $v(\alpha) = 1$ ou $v(\beta) = 1$ e também $v(\beta) = 0$), o que resulta numa contradição, pois já temos $v(\alpha) = 0$.

Portanto, $v((\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))) = 1$.

SUBCASO 1.9. $\varphi_1 = (\alpha \to \beta) \vee \alpha$.

Supondo $v((\alpha \to \beta) \vee \alpha) = 0$, então, por (vOr), temos $v(\alpha \to \beta) = 0$ e $v(\alpha) = 0$.

Logo, por $(vImp)$, $v(\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 0$, o que resulta numa contradição.

Portanto, $v((\alpha \to \beta) \vee \alpha) = 1$.

SUBCASO 1.10. $\varphi_1 = \alpha \vee \neg\alpha$.

Supondo $v(\alpha \vee \neg\alpha) = 0$, temos por (vOr), $v(\alpha) = 0$ e $v(\neg\alpha) = 0$.

Então, por $(vNeg)$, $v(\alpha) = 1$, o que resulta numa contradição.

Portanto, $v(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$.

SUBCASO 1.11. $\varphi_1 = \circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))$.

Supondo $v(\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))) = 0$, então, por $(vImp)$, $v(\circ\alpha) = 1$ e $v(\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)) = 0$.

Logo, por $(vCon)$, $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$. Ademais, por $(vImp)$, $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha \to \beta) = 0$.

Novamente por $(vImp)$, $v(\neg\alpha) = 1$ e $v(\beta) = 0$. Podemos concluir $v(\alpha) = 0$, já que temos $v(\neg\alpha) = 1$ e também temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$.

Isto resulta numa contradição, pois temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\alpha) = 0$.

Portanto, $v(\circ\alpha \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \beta))) = 1$.

SUBCASO 1.12. $\varphi_1 = \neg\neg\alpha \to \alpha$.

Supondo $v(\neg\neg\alpha \to \alpha) = 0$, então, por $(vImp)$, $v(\neg\neg\alpha) = 1$ e $v(\alpha) = 0$.

Por (vCf) temos $v(\alpha) = 1$, o que resulta numa contradição.

Portanto, $v(\neg\neg\alpha \to \alpha) = 1$.

SUBCASO 1.13. $\varphi_1 = \alpha \to \neg\neg\alpha$.

Supondo $v(\alpha \to \neg\neg\alpha) = 0$, então, por $(vImp)$, $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\neg\alpha) = 0$.

Por (vCe) temos $v(\neg\neg\alpha) = 1$, o que resulta numa contradição.

Portanto, $v(\alpha \to \neg\neg\alpha) = 1$.

SUBCASO 1.14. $\varphi_1 = \neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$.

Supondo $v(\neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) = 0$, temos, por $(vImp)$, $v(\neg\circ\alpha) = 1$ e $v(\alpha \wedge \neg\alpha) = 0$.

Por (vCi) temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 1$. Ademais, por $(vAnd)$, temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$.

Podemos concluir $v(\alpha) = 0$, já que temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\alpha) = 0$ e também temos $v(\neg\alpha) = 1$.

Isto resulta numa contradição, pois temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\alpha) = 0$.

Portanto, $v(\neg\circ\alpha \to (\alpha \wedge \neg\alpha)) = 1$.

SUBCASO 1.15. $\varphi_1 = \neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$.

Supondo $v(\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 0$, temos, por $(vImp)$, $v(\neg(\alpha \vee \beta)) = 1$ e $v(\neg\alpha \wedge \neg\beta) = 0$.

Por $(vDM_\vee)$ temos $v(\neg\alpha) = 1$ e $v(\neg\beta) = 1$. Ademais, por $(vAnd)$, temos $v(\neg\alpha) = 0$ ou $v(\neg\beta) = 0$.

Isto, unido ao fato de termos $v(\neg\beta) = 1$, nos permite concluir $v(\neg\alpha) = 0$, o que resulta numa contradição.

Portanto, $v(\neg(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \wedge \neg\beta)) = 1$.

SUBCASO 1.16. $\varphi_1 = (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \vee \beta)$. Como no caso anterior, *mutatis mutandis*.

SUBCASO 1.17. $\varphi_1 = \neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Supondo $v(\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)) = 0$, temos, por $(vImp)$, $v(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1$ e $v(\neg\alpha \vee \neg\beta) = 0$.

Então, por $(vDM_\wedge)$, temos $v(\neg\alpha) = 1$ ou $v(\neg\beta) = 1$. Além disso, por (vOr), temos $v(\neg\alpha) = 0$ e $v(\neg\beta) = 0$.

Isto nos permite concluir $v(\neg\alpha) = 1$, pois temos $v(\neg\alpha) = 1$ ou $v(\neg\beta) = 1$ e também temos $v(\neg\beta) = 0$.

Isto resulta numa contradição, pois temos $v(\neg\alpha) = 1$ e $v(\neg\alpha) = 0$.

Portanto, $v(\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)) = 1$.

SUBCASO 1.18. $\varphi_1 = (\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$. Como no caso anterior, *mutatis mutandis*.

SUBCASO 1.19. $\varphi_1 = \neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)$.

Supondo $v(\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)) = 0$. Por $(vImp)$ temos $v(\neg(\alpha \to \beta)) = 1$ e $v(\alpha \wedge \neg\beta) = 0$.

Então, por $(vCIp_{\to})$, temos $v(\alpha) = 1$ e $v(\neg\beta) = 1$. Ademais, por $(vAnd)$, temos $v(\alpha) = 0$ ou $v(\neg\beta) = 0$, o que unido ao fato de termos $v(\neg\beta) = 1$, nos permite concluir $v(\alpha) = 0$.

Isto resulta numa contradição, portanto $v(\neg(\alpha \to \beta) \to (\alpha \wedge \neg\beta)) = 1$.

SUBCASO 1.20. $\varphi_1 = (\alpha \wedge \neg\beta) \to \neg(\alpha \to \beta)$. Como no caso anterior, *mutatis mutandis*.

Com isso, o CASO 1 está provado e $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_1$ segue caso φ_1 seja um axioma.

CASO 2. $\varphi_1 \in \Gamma$. Logo, se $v(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, temos $v(\varphi_1) = 1$. Portanto, $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_1$.

PASSO Hipótese de indução (HI): Para qualquer sequência da derivação de $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$ de tamanho $k < n$, tem-se $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$.

Portanto, é preciso mostrar que $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$ segue caso a sequência de derivação de $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$ tenha tamanho n. Então, vamos supor $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$.

Ao analisar a obtenção de φ_n em $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$, existem três casos a se considerar:

1. φ_n é um axioma.

2. $\varphi_n \in \Gamma$.

3. φ_n é obtido por *modus ponens* em duas fórmulas φ_j e φ_k com $j, k < n$.

Os casos 1 e 2 são análogos aos casos provados na base.

CASO 3. φ_n é obtido por *modus ponens* em duas fórmulas φ_j e φ_k com $j, k < n$.

Logo, $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_n$ (ou $\varphi j = \varphi_k \to \varphi_n$, a prova para este caso é análoga).

Dada nossa suposição de $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$, então $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_j$ e $\Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_j \to \varphi_n$.

Pela (HI), temos $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_j$ e $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_j \to \varphi_n$.

Então, supondo $v(\gamma) = 1$ para todo $v(\gamma) \in \Gamma$, temos $v(\varphi_j) = 1$ e $v(\varphi_j \to \varphi_n) = 1$.

Por $(vImp)$ temos $v(\varphi_j) = 0$ ou $v(\varphi_n) = 1$.

Isto, unido ao fato de termos $v(\varphi_j) = 1$, nos permite concluir $v(\varphi_n) = 1$.

Portanto $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \varphi_n$.

Com isso, provamos $\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \alpha$ e a prova está finalizada.

$\blacksquare$

Com o resultado anterior, a prova de que a lógica **LFI1** se trata de uma **LFI** forte (ver Definição 11) é imediata.

Corolário 3. *Seja p uma variável proposicional qualquer e $\bigcirc(p) = \{\circ p\}$ um conjunto de fórmulas dependente somente de p. A lógica* **LFI1** *é uma* **LFI** *forte em relação a $\neg$ e $\bigcirc(p)$.*

Prova do Corolário 3. Sejam $a, b \in \mathcal{P}$ variáveis proposicionais distintas e sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\Sigma$ fórmulas quaisquer.
Prova da condição (i): A tabela abaixo contem todas as valorações possíveis em relação a a e b sobre a matriz lógica $\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}$:

a	$\neg a$	$\circ a$	b
1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
0	1	1	1
1	0	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	1	$\frac{1}{2}$
1	0	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	1	1	0

Temos, então, os seguintes resultados:

- A penúltima linha da tabela mostra $a, \neg a \nvDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}} b$;
- A terceira linha mostra $\circ a, a \nvDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}} b$;
- A primeira linha mostra $\circ a, \neg a \nvDash_{\mathcal{M}_{\mathbf{LFI1}}} b$.

Pela equivalência entre a semântica matricial e a semântica de valorações (Lema 1), temos:

- $a, \neg a \nvDash_{\mathbf{LFI1}} b$;
- $\circ a, a \nvDash_{\mathbf{LFI1}} b$;
- $\circ a, \neg a \nvDash_{\mathbf{LFI1}} b$.

Finalmente, pela contraposta da correção (Teorema 2), as condições (i.a), (i.b) e (i.c) são satisfeitas da seguinte forma:

- $a, \neg a \nvdash_{\mathbf{LFI1}} b$;

- $\circ a, a \nvdash_{\mathbf{LFI1}} b$;
- $\circ a, \neg a \nvdash_{\mathbf{LFI1}} b$.

Prova da condição (ii): A sequência de derivação abaixo mostra $\varphi, \neg\varphi, \circ\varphi \vdash_{\mathbf{LFI1}} \psi$:

1. φ (Premissa)
2. $\neg\varphi$ (Premissa)
3. $\circ\varphi$ (Premissa)
4. $\circ\varphi \to (\varphi \to (\neg\varphi \to \psi))$ (bc1)
5. $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ (MP 3, 4)
6. $\neg\varphi \to \psi$ (MP 1, 5)
7. ψ (MP 2, 6)

Portanto, a **LFI1** se trata de uma **LFI** forte. ■

A prova da completude para a lógica **LFI1** depende das seguintes definições e lemas auxiliares para ser desenvolvida:

Definição 20 (Conjunto de fórmulas não-trivial maximal)**.** Seja $\mathscr{L}$ uma lógica tarskiana definida sobre uma linguagem $\mathcal{L}$ e sejam $\Gamma, \{\varphi\}$ conjuntos de fórmulas de modo que $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{L}$. O conjunto Γ é dito não-trivial maximal em relação a φ em $\mathscr{L}$ se $\Gamma \nvdash_{\mathscr{L}} \varphi$ mas $\Gamma, \psi \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ para qualquer $\psi \notin \Gamma$. ■

Definição 21 (Teoria fechada)**.** Seja $\mathscr{L}$ uma lógica tarskiana. Um conjunto de fórmulas Γ é dito fechado em $\mathscr{L}$ (ou dito uma *teoria fechada* em $\mathscr{L}$) se, para toda fórmula φ, tem-se $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$ sse $\varphi \in \Gamma$. ■

Lema 3. *Todo conjunto de fórmulas não-trivial maximal em relação a φ em $\mathscr{L}$ é fechado em $\mathscr{L}$.*

Prova do Lema 3. Seja Γ uma conjunto de fórmulas não-trivial maximal em relação a φ em $\mathscr{L}$. Se $\psi \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \psi$, já que $\mathscr{L}$ é tarskiana. Se $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \psi$, então supondo que $\psi \notin \Gamma$, temos que $\Gamma, \psi \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$, pela Definição 20. Como $\mathscr{L}$ é tarskiana, segue que $\Gamma \vdash_{\mathscr{L}} \varphi$, o que contradiz o fato de Γ ser não-trivial maximal em relação a φ em $\mathscr{L}$. Portanto, $\psi \in \Gamma$ e então Γ é fechado em $\mathscr{L}$. ■

Teorema 3 (Completude)**.** *A lógica* **LFI1** *é completa em relação a sua semântica de valorações, ou seja, para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}_\Sigma$:*

$$\Gamma \vDash_{\mathbf{LFI1}} \alpha \Longrightarrow \Gamma \vdash_{\mathbf{LFI1}} \alpha.$$

Prova do Teorema 3. **HELENA:** Será adicionado.

■

REFERÊNCIAS

BARILE, Margherita. **Metatheorem**. 2024. Disponível em: <https://mathworld.wolfram.com/Metatheorem.html>. Citado na página 27.

BARRIO, Eduardo Alejandro; CARNIELLI, Walter. Volume II: New advances in Logics of Formal Inconsistency. **Logic Journal of the IGPL**, v. 28, n. 5, p. 845–850, 01 2019. ISSN 1367-0751. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/jigpal/jzy063>. Citado na página 10.

BEALL, Jc; RESTALL, Greg; SAGI, Gil. Logical Consequence. In: ZALTA, Edward N.; NODELMAN, Uri (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2024. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024. Citado na página 22.

BROWN, K. **Encyclopedia of Language and Linguistics**. Elsevier Science, 2005. ISBN 9780080547848. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=cxYGQfiD_1oC>. Citado na página 24.

BROWN, M. Bryson; PRIEST, Graham. Chunk and permeate ii: Bohr's hydrogen atom. **European Journal for Philosophy of Science**, Springer Verlag, v. 5, n. 3, p. 297–314, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

CARNIELLI, Walter et al. **Analysis and Synthesis of Logics**: How to cut and paste reasoning systems. [S.l.]: Springer, 2008. v. 35. (Applied Logics Series, v. 35). Citado na página 14.

CARNIELLI, Walter; CONIGLIO, Marcelo; MARCOS, João. Logics of formal inconsistency. In: ____. **Handbook of Philosophical Logic**. [S.l.]: Springer, 2007. p. 1–93. ISBN 978-1-4020-6323-7. Citado 3 vezes nas páginas 10, 13 e 22.

CARNIELLI, Walter; CONIGLIO, Marcelo Esteban. **Paraconsistent logic: Consistency, contradiction and negation**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2016. Citado 7 vezes nas páginas 10, 13, 17, 20, 21, 22 e 24.

CARNIELLI, Walter; MARCOS, Joao. Tableau systems for logics of formal inconsistency. In: . [S.l.: s.n.], 2001. v. 2, p. 848–852. Citado na página 22.

CARNIELLI, Walter; MARCOS, João; AMO, Sandra De. Formal inconsistency and evolutionary databases. **Logic and logical philosophy**, p. 115–152, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 14, 20, 21 e 22.

CHLIPALA, Adam. **Certified programming with dependent types: A pragmatic introduction to the coq proof assistant**. [S.l.]: The MIT Press, 2019. Citado na página 11.

CHURCH, Alonzo. A formulation of the simple theory of types. **The journal of symbolic logic**, Cambridge University Press, v. 5, n. 2, p. 56–68, 1940. Citado na página 11.

CODD, E. F. A relational model of data for large shared data banks. **Commun. ACM**, Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, v. 13, n. 6, p. 377–387, jun 1970. ISSN 0001-0782. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/362384.362685>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.

CONCHON, Sylvain; FILLIÂTRE, Jean-Christophe. A persistent union-find data structure. In: **Proceedings of the 2007 Workshop on Workshop on ML**. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2007. (ML '07), p. 37–46. ISBN 9781595936769. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1292535.1292541>. Citado na página 11.

COSTA, Newton C. A. Da; ALVES, E. H. A semantical analysis of the calculi c n. **Notre Dame Journal Fo Formal Logic**, Duke University Press, v. 18, n. 4, p. 621–630, 1977. Citado na página 26.

CURRY, Haskell Brooks; FEYS, Robert. **Combinatory logic**. Amsterdam: North-Holland Amsterdam, 1958. v. 1. Citado na página 11.

GEUVERS, Herman. Proof assistants: History, ideas and future. **Sadhana**, Springer, v. 34, p. 3–25, 2009. Citado na página 11.

GOTTWALD, Siegfried. Many-Valued Logic. In: ZALTA, Edward N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2022. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022. Citado na página 25.

HARRISON, John; URBAN, Josef; WIEDIJK, Freek. History of interactive theorem proving. In: **Computational Logic**. Amsterdam: [s.n.], 2014. v. 9, p. 135–214. Citado na página 11.

HOWARD, William Alvin. The formulae-as-types notion of construction. In: CURRY, Haskell et al. (Ed.). **To H. B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus, and Formalism**. Chicago: Academic Press, 1980. Citado na página 11.

JACQUETTE, Dale (Ed.). **A Companion to Philosophical Logic**. Malden, MA, USA: Wiley-Blackwell, 2002. Citado na página 27.

LEROY, Xavier. **The CompCert C verified compiler: Documentation and user's manual**. Tese (Doutorado) — Inria, 2021. Citado na página 11.

MARES, Edwin. Relevance Logic. In: ZALTA, Edward N.; NODELMAN, Uri (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Summer 2024. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024. Citado na página 14.

MCGINNIS, Nicholas D. The unexpected applicability of paraconsistent logic: A Chomskyan route to dialetheism. **Foundations of Science**, Springer Verlag, v. 18, n. 4, p. 625–640, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 14.

PAULIN-MOHRING, Christine. Introduction to the calculus of inductive constructions. In: PALEO, Bruno Woltzenlogel; DELAHAYE, David (Ed.). **All about Proofs, Proofs for All**. College Publications, 2015, (Studies in Logic (Mathematical logic and foundations), v. 55). Disponível em: <https://inria.hal.science/hal-01094195>. Citado na página 11.

PRAWITZ, Dag. Logical consequence: A constructivist view. In: SHAPIRO, Stewart (Ed.). **Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic**. [S.l.]: Oxford University Press, 2005. Citado na página 21.

PRIEST, Graham; TANAKA, Koji; WEBER, Zach. Paraconsistent Logic. In: ZALTA, Edward N. (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Spring 2022. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022. Citado na página 10.

RESTALL, Greg. **An Introduction to Substructural Logics**. New York: Routledge, 1999. Citado na página 22.

RUSSELL, Bertrand. **Principles of Mathematics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1903. Citado na página 11.

RUSSELL, Bertrand. Mathematical logic as based on the theory of types. **American Journal of Mathematics**, Association for Symbolic Logic, v. 30, n. 3, p. 222–262, 1908. Citado na página 11.

SIKORSKI, Roman. Algebra of formalized languages. **Journal of Symbolic Logic**, Association for Symbolic Logic, v. 31, n. 3, p. 508–509, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.

SILVA, Flávio Soares Corrêa da; FINGER, Marcelo; MELO, Ana Cristina Vieira de. **Lógica para Computação**. [S.l.]: Cengage Learning, 2006. v. 1. Citado na página 15.

SILVEIRA, Ariel Agne da. **Implementação de uma biblioteca de lógica modal em Coq**. Dissertação (Projeto de Diplomação) — Bacharelado em Ciência da Computação–Centro de Ciências Tecnológicas, UDESC, Joinville, 2020. Citado na página 11.

SIMONS, Peter. Jan Łukasiewicz. In: ZALTA, Edward N.; NODELMAN, Uri (Ed.). **The Stanford Encyclopedia of Philosophy**. Spring 2023. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2023. Citado na página 12.

TARSKI, Alfred. **Logic, Semantics, Metamathematics**. Oxford,: Clarendon Press, 1956. Citado na página 27.

TEAM, The Coq Development. **The Coq Reference Manual**. France, 2024. Citado na página 11.

VILLADSEN, Jørgen; SCHLICHTKRULL, Anders. Formalizing a paraconsistent logic in the isabelle proof assistant. In: ____. **Transactions on Large-Scale Data- and Knowledge-Centered Systems XXXIV: Special Issue on Consistency and Inconsistency in Data-Centric Applications**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. p. 92–122. ISBN 978-3-662-55947-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-55947-5_5>. Citado na página 12.

WÓJCICKI, Ryszard. **Lectures on Propositional Calculi**. Ossolineum [Poland]: Pub. House of the Polish Academy of Sciences, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 25.

WÓJCICKI, Ryszard. An axiomatic treatment of non-monotonic arguments. **Bulletin of the Section of Logic**, Department of Logic, University of Lodz, v. 17, n. 2, p. 56–61, 1988. Citado na página 14.

WÓJCICKI, Ryszard. **Theory of Logical Calculi: Basic Theory of Consequence Operations**. Dordrecht, Boston and London: Kluwer Academic Publishers, 1988. Citado na página 14.