Definition 2.8 (Mehrsortige Σ-Struktur). *Sei $\Sigma = (S, \Omega, \Pi)$ eine mehrsortige Σ-Signatur. Eine mehrsortige Σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist dann ein Tupel*

$$\mathcal{A} = (\{A_s\}_{s\in S}, \{f_{\mathcal{A}}\}_{f\in\Omega}, \{p_{\mathcal{A}}\}_{p\in\Pi}).$$

Dabei gilt:

- *Für alle $s \in S$ ist $A_s \neq \emptyset$ das Universum mit Sorte s von $\mathcal{A}$;*
- *Für alle $f \in \Omega$ mit Stelligkeit $s_1, \ldots, s_n \to s$ ist $f_{\mathcal{A}} : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$;*
- *Für alle $p \in \Pi$ mit Stelligkeit $s_1, \ldots, s_n$ ist $p_{\mathcal{A}} \subseteq A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$.*

Definition 2.9 (Valuation). *Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{U}, (f_{\mathcal{A}} : \mathcal{U}^n \to \mathcal{U})_{f/n\in\Omega}, (p_{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{U}^m)_{p/m\in\Pi})$ eine Σ-Struktur. Eine **Valuation** β ist eine Abbildung*

$$\beta : X \to \mathcal{U}.$$

*Eine **mehrsortige Valuation** zu einer mehrsortigen Struktur mit Universen $(\mathcal{U}_s)_{s\in S}$ ist eine Menge von Valuationen*

$$\beta = \{\beta_s\}_{s\in S}, \beta_s : X_s \to \mathcal{U}_s.$$

Definition 2.10 (Termvaluation). *Induktiv definiert man die **Termvaluation** $\mathcal{A}(\beta) : T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}$ als*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\beta)(x) &= \beta(x), & x \in X \\ \mathcal{A}(\beta)(f(s_1, \ldots, s_n)) &= f_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}(\beta)(s_1), \ldots, \mathcal{A}(\beta)(s_n)), & f/n \in \Omega. \end{aligned}$$

Definition 2.11 (Formelvaluation). *Induktiv definiert man die **Formelvaluation** $\mathcal{A}^* : F_\Sigma(X) \to \{0, 1\}$ als*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*(\bot) &= 0 \\ \mathcal{A}^*(\top) &= 1 \\ \mathcal{A}^*(P) &= \mathcal{A}(P) \\ \mathcal{A}^*(\neg F) &= 1 - \mathcal{A}^*(F) \\ \mathcal{A}^*(F \rho G) &= B_\rho(\mathcal{A}^*(F), \mathcal{A}^*(G)) \end{aligned}$$

Dabei ist B_ρ die boole'sche Funktion, welche mit $\rho \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ assoziiert ist.
Für eine quantifizierte Formel benötigt man zusätzlich eine Termvaluation β.

$$\mathcal{A}(\beta)(\forall x F) = \min_{a\in\mathcal{U}}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für alle } a \in \mathcal{U} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathcal{A}(\beta)(\exists x F) = \max_{a\in\mathcal{U}}\{\mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F)\} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathcal{A}(\beta[x \mapsto a])(F) = 1 \text{ für} \\ & \text{mindestens ein } a \in \mathcal{U} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$