미분방정식

미분방정식의 분류

선형 방정식 (Linear Equations)

- $y' + y = 0$
- $x^2 y' + y = 0$

비선형 방정식 (Non-linear Equations)

- $yy' + y = 0$
- $y' = y^2$

정규형 (Normal Form)

- $f(x, y, y') = 0 \Rightarrow y' = f(x, y)$

> 미분방정식의 해를 구할 수 없는 경우에는 Slope Field를 통해 Solution Curve를 추정한다.

1 Separable Equations

Separable Equation의 형태는 다음과 같다

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y) = g(x)h(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \quad \text{or} \quad f(y)\frac{dy}{dx} - g(x) = 0$$

1.1 기본 풀이법

예제. *다음 미분 방정식을 풀어보시오.*

$$\frac{dy}{dx} = -6xy$$

Pf)

1. x, y에 대해 항 분리

$$\frac{1}{y}dy = -6xdx \tag{1}$$

2. 양변을 적분

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -6xdx$$

$$\ln|y| = -3x^2 + C \tag{*}$$

3. y에 대해 정리

$$y = Ae^{-3x^2} \tag{2}$$

(1)번과 (2)번 과정으로 넘어갈 수 있는 이유

how (1)?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)} \rightarrow \frac{1}{f(y)}dy = g(x)dx$$

$$\int \frac{1}{f(y)}dy = \int g(x)dx \tag{**}$$

$$f(y)\frac{dy}{dx} - g(x) = 0$$

Let $F'(y) = f(y)$ and $G'(x) = g(x)$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[F(y(x))] = F'(y) \cdot \frac{dy}{dx} &= f(y)\frac{dy}{dx} \quad \text{(by Chain Rule)} \\
&\to \frac{d}{dx}[F(y(x))] - \frac{d}{dx}[G(x)] = 0 \\
&\to \frac{d}{dx}[F(y(x)) - G(x)] = 0 \\
&\to F(y(x)) - G(x) = C \\
&= \int f(y)dy = \int g(x)dx
\end{aligned}$$

이는 (**)의 결과와 동일하다.

how (2)?

$$\int \frac{1}{y} dy = \begin{cases} \ln(y) + C_1 & \text{if } y > 0 \\ \ln(-y) + C_2 & \text{if } y < 0 \end{cases}$$

(*) → (2)로 넘어갈 수 있는 이유는 실제 미분방정식의 해를 통해 Solution Curve를 구할 때 IC에 의해 $y > 0$인 경우와 $y < 0$인 경우 둘 중 하나로 정해진다.
따라서 하나의 일반해로 표기한다.