Cálculo Variacional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(y(x), x)\, dx$$

I não depende de x, pois estamos integrando em todo o x e, após a integração o x desaparece. Porém I depende do tipo de função y. I tem um valor para cada função.

$$F(y(x), x) = x\, y(x)$$

Exemplo, considerando $y(x) = x^2$ e $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$.

$$I = \int_1^2 x\, x^2 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

Se, $y(x) = x^3$,

$$I = \int_1^2 x\, x^3 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

I é uma função de outra função. I é chamado de funcional de y.

Éxtremo da função $y(x)$

Para qual x temos $\delta y = 0$?

$$dy = y(x+dx) - y(x)$$

Expandindo em série de Taylor

$$dy = y(x) + \frac{dy}{dx}\,dx + \mathcal{O}(x^2) - y(x)$$

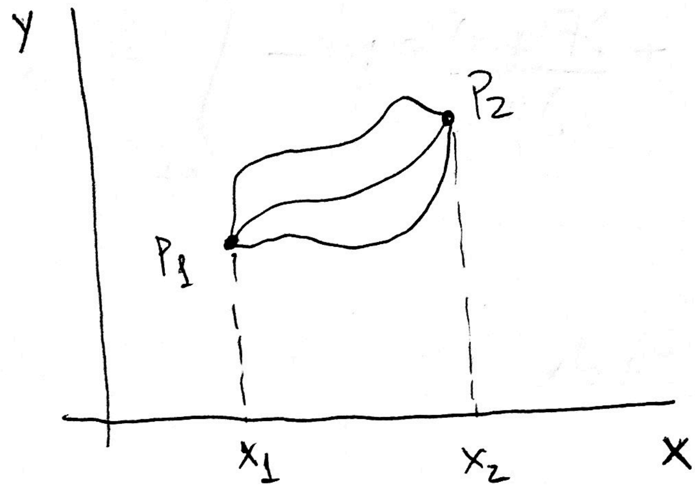
$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx$$

Como $dx \neq 0$, e na condição de extremo $dy = 0$, temos que,

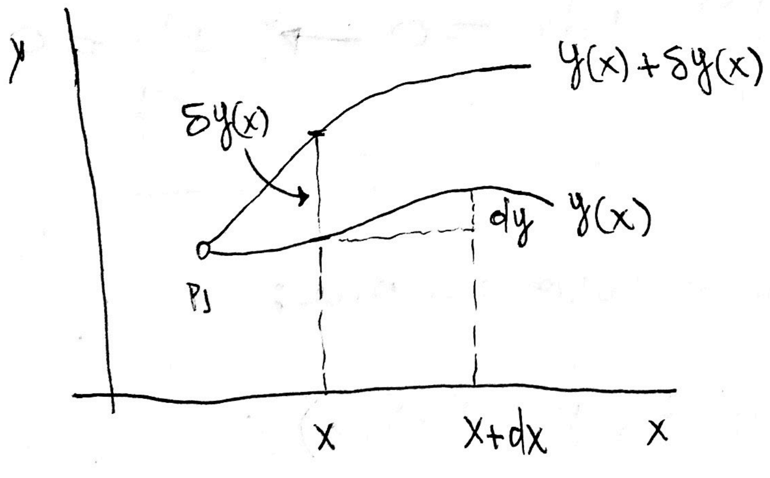
$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

Equação de Euler - Lagrange

Para que função $y(x)$, que passa pelos pontos P_1 e P_2, teremos um I extremo (máximo ou mínimo)?



Considerando $\delta y(x)$,



Assim,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F(y+\delta y, x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y,x)\,dx$$

Expandindo $F(y+\delta y, x)$ em série de Taylor:

$$F(y+\delta y, x) = F(y,x) + \frac{\partial F(y,x)}{\partial y}\delta y$$

Então,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left[F(y+x) + \frac{\partial F(y,x)}{\partial y}\delta y\right]dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y,x)\,dx$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(y,x)}{\partial y}\delta y\,dx$$

A condição de extremo implica que $\delta I = 0$, Portanto

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F(y,x)}{\partial y}\delta y\,dx = 0 \rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Considere agora o caso em que:

$$F = F(y(x), y'(x), x)$$

$$I = I[y, y']$$

Primeiro, temos que,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx$$

Equação de Euler - Lagrange (cont.)

Pois,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} F(y+\delta y, y'+\delta y', x)\, dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx$$

Expandindo em série de Taylor 2D:

$$F(y+\delta y, y'+\delta y', x) \simeq F(y, y', x) + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots$$

Assim,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left[F(y,y',x) + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx - \int_{x_1}^{x_2} F(y, y', x)\, dx$$

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right] dx$$

Desenvolvendo o segundo termo da integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta \frac{dy}{dx}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d}{dx}\delta y\, dx$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\, dx$$

Pois, Pela regra da integração por partes:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = \frac{\partial F}{\partial y'} \qquad dv = \frac{d}{dx}\delta y\,dx \qquad du = \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}dx \qquad v = \delta y$$

Então,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\,dx$$

$$= \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \delta y \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}dx$$

Como os pontos P1 e P2 são fixos, $\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} = 0$.

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\,dx$$

Considerando a condição de Extremo $\delta I = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Esta equação foi obtida por Euler em 1744. Ela é conhecida como <u>Equação de Euler-Lagrange</u> devido ser ela a base da formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica. Esta representa a condição de Extremo para o funcional I, onde $F = F(y, y')$.

A formulação lagrangiana

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t)$$

tempo

N coordenadas generalizadas; N velocidades generalizadas

Compactamente,

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

Representa a lagrangiana do sistema e a quantidade S a seguir é chamada de ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt$$

O princípio de Hamilton, também denominado de mínima ação, estabelece o seguinte: A evolução do sistema da configuração 1 para a configuração 2 é tal que a ação é um mínimo.

Pelos nossos estudos de cálculo variacional, temos que para uma partícula i

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

Para N partículas,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t)\, dt$$

A condição de mínimo $\delta S = 0$,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i(t) = 0$$

Assim, se não houver relação de vínculo entre os q_i's, temos,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

Esta é a Equação de Euler-Lagrange. Para usar esta expressão, precisamos conhecer a lagrangiana L do sistema uma função escalar que caracteriza o sistema estudado.

A formulação Hamiltoniana

A função Hamiltoniana,

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Na formulação Lagrangiana, as variáveis independentes são $(q, \dot{q}, t)$. No caso da formulação Hamiltoniana o conjunto de variáveis independentes é dado por (q, p, t).

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} dt \,.$$

Lembrando: $p_i d\dot{q}_i = d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i$

Assim,

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Então,

$$dH = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Pois,

$$d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i - L\right) = d\left(\sum_i p_i \dot{q}_i\right) - dL$$

$$d(p_i\dot{q}_i) = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i$$

Logo,

$$d\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - L\right) = d\left(\sum_i p_i\dot{q}_i\right) - dL$$

$$= \sum_i \dot{q}_i\, dp_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i$$

$$- \sum_i p_i\, d\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Por fim,

$$d\left(\sum_i p_i\dot{q}_i - L\right) = dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

O que mostra nitidamente que $H = H(q, p, t)$. Observe que para se chegar a essa conclusão, não foi necessário usar a equação de Euler-Lagrange, apenas usamos a definição de momento canônico. Isto significa que $H = H(q, p,$ independentemente do princípio de Hamilton, ou seja, mesmo fora da trajetória clássica.

Substituindo $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ por $\dot{p}_i$, temos

$$dH = \sum_i \dot{q}_i\, dp_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

A formulação Hamiltoniana (cont.)

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

Assim,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Estas são as chamadas equações de Hamilton.

Ambos os formalismos, Lagrangiano e Hamiltoniano se baseiam no ~~equações~~ princípio de Hamilton: No formalismo Lagrangiano temos N equações diferenciais de segunda ordem, desenvolvidas no espaço de N coordenadas generalizadas, chamado de espaço das configurações. No Hamiltoniano, são 2N equações de primeira ordem e o espaço possui 2N coordenadas (N coordenadas generalizadas e N momentos) chamado de espaço das fases.

Partindo do ~~equação de Euler-Lagrange~~, princípio de Hamilton,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0$$

Isto é,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q, p, t) \right] dt = 0$$

Desenvolvendo a relação acima,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0$$

Como nos extremos, t_1 e t_2, $\delta q_i = 0$, temos

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i \, dt$$

Pois, pela integração por partes, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i \, dt = \cancelto{0}{\delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \cdot p_i} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q_i \, dt$$

Onde: $u = p_i$, $dv = \delta \dot{q}_i \, dt$, $du = \dot{p}_i \, dt$, $v = \delta q_i$

Substituindo na integral anterior:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[p_i \delta \dot{q}_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[- \dot{p}_i \delta q_i + \dot{q}_i \delta p_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0$$

Arrumando e isolando δp_i e δq_i em evidência,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0$$

A formulação Hamiltoniana

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

Fazendo a derivada em relação à p_k

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}_k + \sum_i p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial p_k} = \dot{q}_k$$

Esta é a primeira equação de Hamilton. Retomando o resultado anterior,

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\cancelto{0}{\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)} \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] dt = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i \, dt = 0$$

Daí surge que,

$$p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

Que é a segunda equação de Hamilton