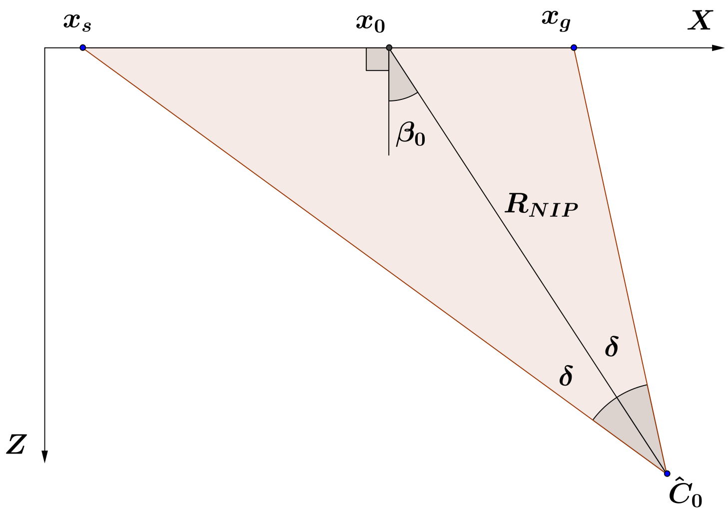
1 A aproximação de tempo de trânsito CRE

Figura 1: Geometria do arranjo CRE.



Fonte: Do Autor.

A expressão genérica do sobretempo normal do CRE:

$$\tau = \tau_0 + \Delta\tau_{CRE} \tag{1}$$

Onde:

$$\Delta\tau_{CRE} = \Delta\tau_s + \Delta\tau_g \tag{2}$$

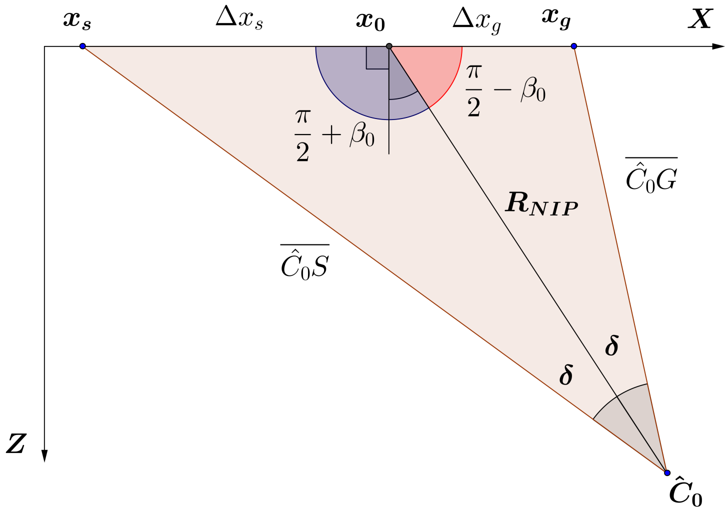
Definindo:

$$\Delta x_s = x_0 - x_s \tag{3}$$

$$\Delta x_g = x_g - x_0 \tag{4}$$

Explicitando os comprimentos dos raios, ângulos e afastamentos da Figura 1:

Figura 2: Os comprimentos dos raios, ângulos e afastamentos na geometria do arranjo CRE.



Fonte: Do Autor.

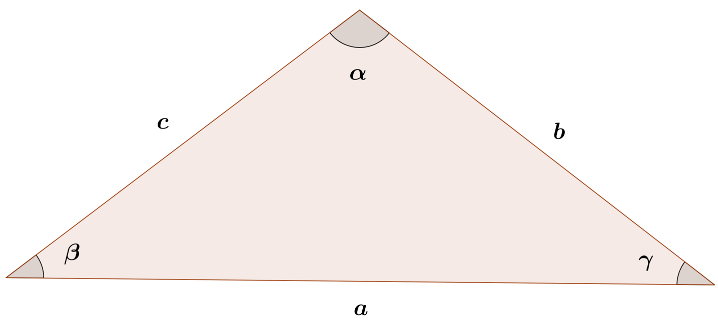
Definindo os tempos $\Delta\tau_s$ e $\Delta\tau_g$ a partir da geometria na Figura 2:

$$\Delta\tau_s = \left(\frac{\overline{\hat{C}_0 S}}{v_0} - \frac{\overline{\hat{C}_0 x_0}}{v_0} \right) \tag{5}$$

$$\Delta\tau_g = \left(\frac{\overline{\hat{C}_0 G}}{v_0} - \frac{\overline{\hat{C}_0 x_0}}{v_0} \right) \tag{6}$$

Os comprimentos serão obtidos utilizando a lei dos cossenos. Definimos abaixo as Equações para a obtenção do comprimento de um lado qualquer de um triângulo genérico através da aplicação da lei dos cossenos:

Figura 3: Triângulo genérico para aplicação da lei dos cossenos.



Fonte: Do Autor.

Relembrando a lei dos cossenos a partir da Figura 3:

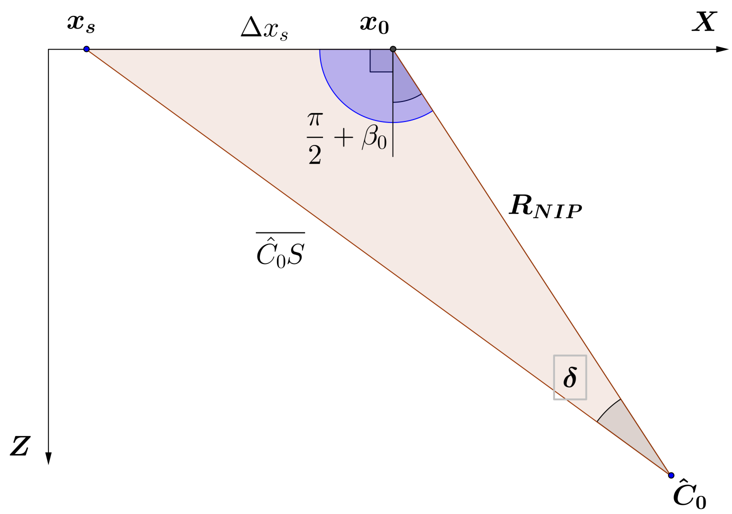
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \tag{7}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \tag{8}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{9}$$

O raio normal divide a Figura 1 em dois triângulos. E com auxílio da lei dos cossenos podemos definir os comprimentos $\overline{\hat{C}_0 S}$ e $\overline{\hat{C}_0 G}$. Destacando o triângulo à esquerda do raio normal:

Figura 4: Geometria do arranjo CRE.



Fonte: Do Autor.

Então:

$$\overline{\hat{C}_0 S}^2 = \Delta x_s^2 + R_{NIP}^2 - 2\Delta x_s R_{NIP}\cos\left(\beta_0 + \frac{\pi}{2}\right) \tag{10}$$

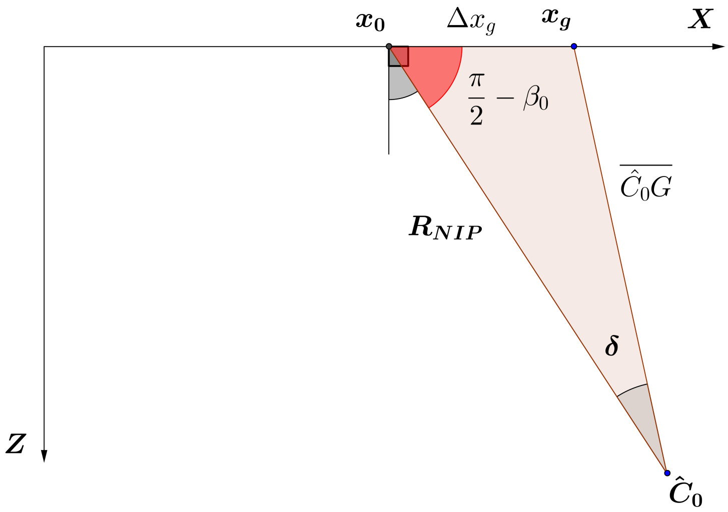
$$\cos\left(\beta_0 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\beta_0\cos\frac{\pi}{2} - \sin\beta_0\sin\frac{\pi}{2} \tag{11}$$

Como o $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin\frac{\pi}{2} = 1$:

$$\overline{\hat{C}_0 S}^2 = \Delta x_s^2 + R_{NIP}^2 + 2\Delta x_s R_{NIP}\sin\beta_0 \tag{12}$$

Destacando o triângulo à direita do raio normal:

Figura 5: Geometria do arranjo CRE.



Fonte: Do Autor.

Da mesma forma:

$$\overline{\hat{C}_0 G}^2 = \Delta x_g^2 + R_{NIP}^2 - 2\Delta x_g R_{NIP} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) \tag{13}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta_0 + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta_0 \tag{14}$$

Como o $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ e $\sin\frac{\pi}{2} = 1$:

$$\overline{\hat{C}_0 G}^2 = \Delta x_g^2 + R_{NIP}^2 - 2\Delta x_g R_{NIP} \sin\beta_0 \tag{15}$$

Então:

$$\overline{\hat{C}_0 S} = \sqrt{\Delta x_s^2 + R_{NIP}^2 + 2\Delta x_s R_{NIP} \sin\beta_0} \tag{16}$$

$$\overline{\hat{C}_0 S} = R_{NIP}\sqrt{1 + 2\Delta x_s \frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} + \frac{\Delta x_s^2}{R_{NIP}^2}} \tag{17}$$

Da mesma forma:

$$\overline{\hat{C}_0 G} = \sqrt{\Delta x_g^2 + R_{NIP}^2 - 2\Delta x_g R_{NIP} \sin\beta_0} \tag{18}$$

$$\overline{\hat{C}_0 G} = R_{NIP}\sqrt{1 - 2\Delta x_g \frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} + \frac{\Delta x_g^2}{R_{NIP}^2}} \tag{19}$$

Defindo o comprimento $\overline{\hat{C}_0 x_0}$[1]:

$$\overline{\hat{C}_0 x_0} = R_{NIP} \tag{20}$$

[1] O comprimento $\overline{\hat{C}_0 x_0} = R_{NIP}$ não é de nenhuma forma o comprimento do raio normal. Os métodos baseados no CRS retiram parâmetros geométricos de experimentos hipotéticos (Ondas N e NIP). O ponto de reflexão real está em algum lugar na vizinhança de $\hat{C}_0$. E o raio normal é um caminho qualquer deste ponto até x_0 a depender da distribuição de velocidades do modelo.

$$t_0 = \frac{R_{NIP}}{v_0} \tag{21}$$

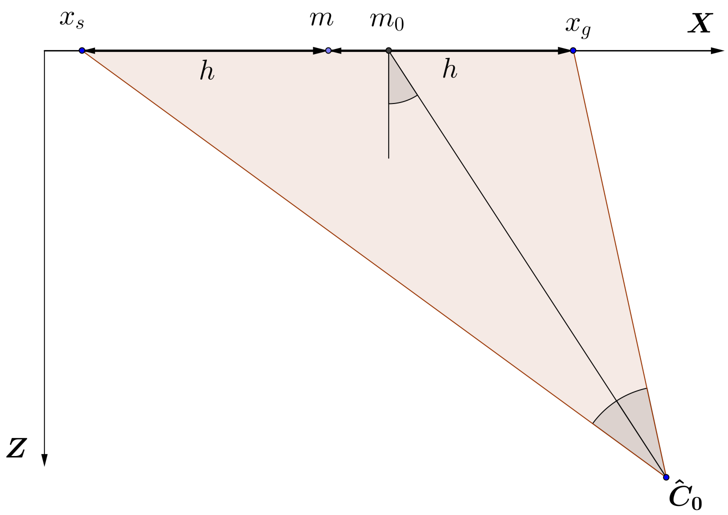
Então, a Equação 1 pode ser reescrita como:

$$\tau = \tau_0 + \left(\frac{\overline{\hat{C}_0 S}}{v_0} - \frac{\overline{\hat{C}_0 x_0}}{v_0} \right) + \left(\frac{\overline{\hat{C}_0 G}}{v_0} - \frac{\overline{\hat{C}_0 x_0}}{v_0} \right) \tag{22}$$

$$\tau = \tau_0 - 2\frac{\overline{\hat{C}_0 x_0}}{v_0} + \frac{\overline{\hat{C}_0 S}}{v_0} + \frac{\overline{\hat{C}_0 G}}{v_0} \tag{23}$$

$$\tau = \left(\tau_0 - \frac{2R_{NIP}}{v_0} \right) + \frac{R_{NIP}}{v_0} \left(\sqrt{1 + 2\Delta x_s \frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} + \frac{\Delta x_s^2}{R_{NIP}^2}} + \sqrt{1 - 2\Delta x_g \frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} + \frac{\Delta x_g^2}{R_{NIP}^2}} \right) \tag{24}$$

Figura 6: Ponto médio comum m e meio afastamento h para a geometria do arranjo CRE.



Fonte: Do Autor.

Utilizando a definição do meio-afastamento h e do PMC m (Ver figura 6:

$$h = (x_g - x_s)/2 \tag{25}$$

$$m = (x_g + x_s)/2 \tag{26}$$

Podemos redefinir x_g e x_s em função de h e m:

$$x_g = 2h + x_s \tag{27}$$

$$x_s = 2m - x_g \tag{28}$$

Substituindo a Equação 28 em 27:

$$x_g = 2h + 2m - x_g = m + h \tag{29}$$

Substituindo a Equação 29 de volta em 28:

$$x_s = 2m - m - h = m - h \tag{30}$$

Retomando as definições de Δx_g e de Δx_s nas Equações 3 e 4 e substituindo os resultados obtidos nas Equações 29 e 30:

$$\Delta x_g = x_g - x_0 = m - x_0 + h \tag{31}$$

$$-\Delta x_s = x_s - x_0 = m - x_0 - h \tag{32}$$

Se definirmos x_0 como um PMC central m_0 onde será realizada a aproximação de tempo de trânsito, m como o ponto médio entre x_s e x_g e h como o meio afastamento entre x_s e x_g (Figura 6):

$$\Delta x_g = m - m_0 - h \tag{33}$$

$$-\Delta x_s = m - m_0 - h \tag{34}$$

Modificando a Equação 24 para incluir $-\Delta x_s$ na primeira raiz:

$$\tau = \left(\tau_0 - \frac{2R_{NIP}}{v_0}\right) + \frac{R_{NIP}}{v_0}\left(\sqrt{1 - 2(-\Delta x_s)\frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} + \frac{\Delta x_s^2}{R_{NIP}^2}} + \sqrt{1 - 2\Delta x_g\frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} + \frac{\Delta x_g^2}{R_{NIP}^2}}\right) \tag{35}$$

Definindo o parâmetro de assimetria α como:

$$\alpha = \frac{\sin\beta_0}{R_{NIP}} \tag{36}$$

Substituindo as definições das Equações 33-35 na Equação 24, teremos a Equação de tempo de trânsito ERC:

$$\begin{aligned}\tau = \left(\tau_0 - \frac{2R_{NIP}}{v_0}\right) + \frac{R_{NIP}}{v_0}\sqrt{1 - 2\alpha(m - m_0 - h) + \frac{(m - m_0 - h)^2}{R_{NIP}^2}} \\ + \frac{R_{NIP}}{v_0}\sqrt{1 - 2\alpha(m - m_0 + h) + \frac{(m - m_0 + h)^2}{R_{NIP}^2}}\end{aligned} \tag{37}$$