* Na óptica geométrica, a aproximação paraxial é uma aproximação de pequenos ângulos, usada na óptica gaussiana e no traçamento de raio quando o raio passa por um sistema óptico.

* Sistema óptico é qualquer superfície (ou conjunto delas) que interage diretamente com a luz.

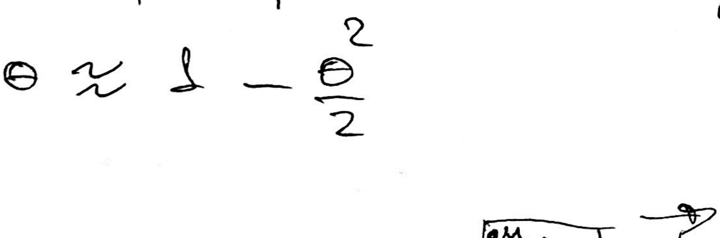
* Um raio ou feixe paraxial é um raio que faz um pequeno ângulo com o eixo óptico do sistema durante todo o trajeto deste. Isto significa que, em qualquer ponto do sistema óptico, teremos um pequeno ângulo do raio em relação ao eixo óptico.

* Neste limite são válidas as seguintes aproximações:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta \qquad \operatorname{tg}\theta \approx \theta \qquad \cos\theta \approx 1$$

* Aproximação paraxial de segunda ordem:

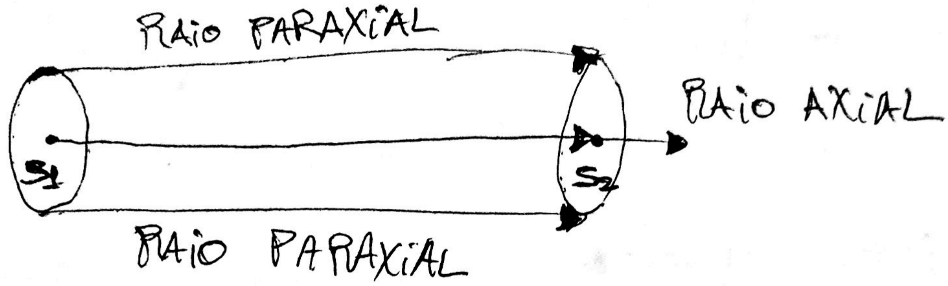
$$\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$$



$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}_0}{ds}$$

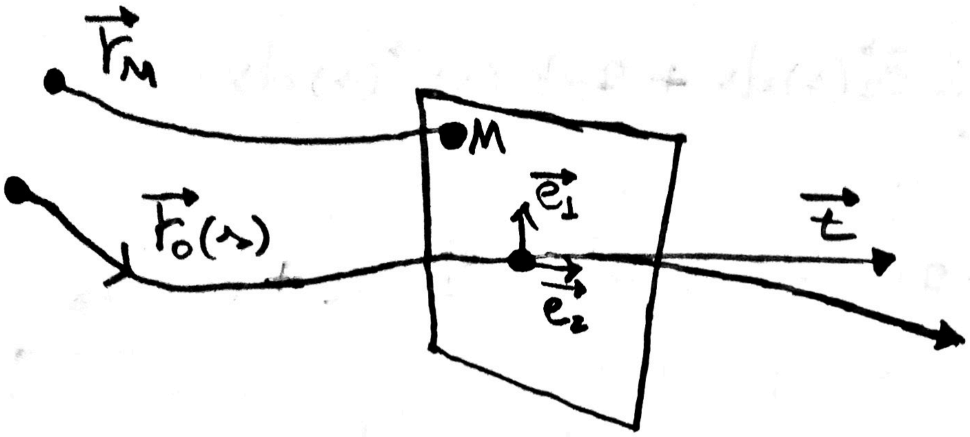
* Coordenadas centradas no raio na vizinhança de um raio $\vec{r}_0(s)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j} + z(s)\hat{k}$$



TUBO DE RAIOS PARA (cerca de)

5.1. Ray centered coordinates



$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}_0}{ds}$$

$$\vec{r}_M = \vec{r}_0(s) + q_1 \vec{e}_1(s) + q_2 \vec{e}_2(s)$$

$$dS^2 = d\vec{r}_M \cdot d\vec{r}_M = |d\vec{r}_M|^2$$

$$d\vec{r}_M = \frac{d\vec{r}_0}{ds} ds + \frac{d\, q_1 \vec{e}_1(s)}{ds} ds + \frac{d\, q_2 \vec{e}_2(s)}{ds} ds$$

$$= \frac{d\vec{r}_0}{ds} ds + \frac{dq_1}{ds} \vec{e}_1(s)\, ds + q_1 \frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} ds$$

$$+ \frac{dq_2}{ds} \vec{e}_2(s)\, ds + q_2 \frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} ds$$

Definições: $\vec{t} = \frac{d\vec{r}_0}{ds}$, $\frac{d\vec{e}_1(s)}{ds} = k_1(s)\vec{t}(s)$,

$$\frac{d\vec{e}_2(s)}{ds} = k_2(s)\vec{t}(s)$$

$$d\vec{r}_M = \vec{t}(s)\,ds + \frac{dq_1}{ds}\vec{e}_1(s)\,ds + q_1 k_1(s)\vec{t}(s)\,ds$$

$$+ \frac{dq_2}{ds}\vec{e}_2(s)\,ds + q_2 k_2(s)\vec{t}(s)\,ds$$

$$d\vec{r}_M = \vec{t}\,(1 + q_1 k_1 + q_2 k_2)\,ds + \vec{e}_1\,dq_1 + \vec{e}_2\,dq_2$$

$$dq_2 = \frac{dq_2}{ds}\,ds \qquad dq_1 = \frac{dq_1}{ds}\,ds$$

$$q_i(s) \implies \Delta q_i = \frac{dq_i}{ds}\,\Delta s$$

$$ds^2 \doteq d\vec{r}_M \cdot d\vec{r}_M = |d\vec{r}_M|^2 = (1 + q_1 k_1 + q_2 k_2)^2\,ds^2$$
$$+ dq_1^2 + dq_2^2$$

Definindo: $h = (1 + q_1 k_1 + q_2 k_2)$

Assim: $\boxed{ds^2 = h^2 + dq_1^2 + dq_2^2}$

5.2. Euler's equations in Hamiltonian form

"Funcional de Fermat"

$$T = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{c} = \int_{(A)}^{(B)} \frac{\sqrt{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}\; ds}{c}$$

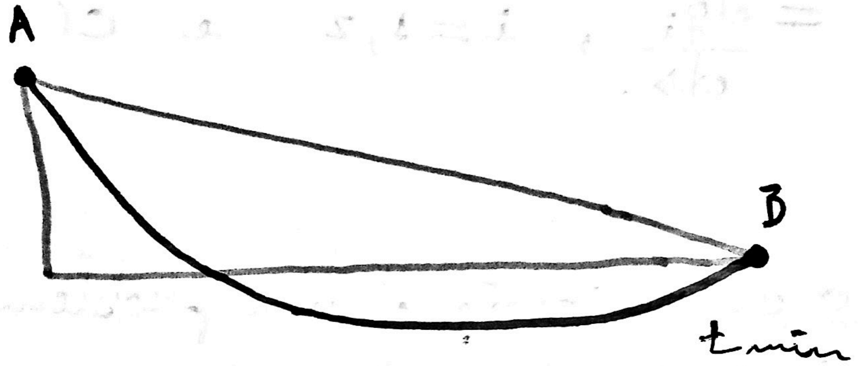
Onde: $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{ds}$, $i = 1, 2$ e $c(s, q_1, q_2)$

O cálculo de variações é um problema matemático que consiste em buscar máximos e mínimos (ou, mais geralmente, extremos relativos) de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional.

Funcionais podem, por exemplo, ser formados por integrais envolvendo uma função incógnita e suas derivadas. O interesse está em funções extremas – aquelas que fazem o funcional atingir um valor máximo ou mínimo – ou de funções fixas – aquelas onde a taxa de variação do funcional é precisamente zero.

Braquistócrona

Trajetória de uma partícula que, sujeita a um campo gravitacional constante, sem atrito e com velocidade inicial nula, se desloca entre dois pontos no menor intervalo de tempo.



O vetor vagarosidade P_i, P_1, P_2

$$P_i = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\sqrt{h^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2} = \frac{1}{c}\frac{\dot{q}_i}{\sqrt{h^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}}$$

Regra da Cadeia

Derivada de função composta

$$\frac{\partial y(u(x))}{\partial \cancel{x}} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$u(\dot{q}_1) = h^2+\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2$$

$$y(u) = u^{-1/2}$$

$$\frac{\partial y(u(\dot{q}_i))}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial \dot{q}_i}$$

(5.2.) (cont.)

$$u(\dot{q}_1) = h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2$$

$$y(u) = u^{1/2}$$

$$P_1 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sqrt{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2}$$

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} y(u(\dot{q}_1)) = \frac{1}{c} \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \dot{q}_1}$$

$$= \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot 2 \dot{q}_1 \right) = \frac{1}{c} \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}}$$

$$P_2 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2} \sqrt{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2} = \frac{1}{c} \frac{\dot{q}_2}{\sqrt{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}}$$

$$P_1^2 C^2 = \frac{\dot{q}_1^2}{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}$$

$$c^2 h^2 P_1^2 + c^2 P_1^2 \dot{q}_1^2 + c^2 P_1^2 \dot{q}_2^2 = \dot{q}_1^2$$

$$\dot{q}_1^2 (1 - c^2 P_1^2) - c^2 P_1^2 \dot{q}_2^2 = c^2 h^2 P_1^2$$

$$P_2^2 C^2 = \frac{\dot{q}_2^2}{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}$$

$$C^2 P_2^2 h^2 + \dot{q}_1^2 P_2^2 C^2 + \dot{q}_2^2 P_2^2 C^2 = \dot{q}_2^2$$

$$\dot{q}_2^2 (1 - P_2^2 C^2) - \dot{q}_1^2 C^2 P_2^2 = C^2 P_2^2 h^2$$

O sistema de equações para P_1 e P_2:

$$\dot{q}_1^2(1-c^2P_1^2) - \dot{q}_2^2\, c^2P_1^2 = c^2P_1^2h^2$$

$$-\dot{q}_1^2\, c^2P_2^2 + \dot{q}_2^2(1-c^2P_2^2) = c^2P_2^2h^2$$

$$\begin{pmatrix} 1-c^2P_1^2 & -c^2P_1^2 \\ -c^2P_2^2 & 1-c^2P_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2P_1^2h^2 \\ c^2P_2^2h^2 \end{pmatrix}$$

O Determinante deste sistema:

$$\Delta = (1-c^2P_1^2)(1-c^2P_2^2) - c^4P_1^2P_2^2$$

$$\Delta = 1 - c^2P_2^2 - c^2P_1^2 + c^4P_1^2P_2^2 - c^4P_1^2P_2^2$$

$$\boxed{\Delta = 1 - c^2(P_1^2+P_2^2) \neq 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{q}_1^2 &= \frac{c^2P_1^2h^2}{\Delta} \longrightarrow \dot{q}_1 = \frac{cP_1h}{\sqrt{\Delta}} \\ \dot{q}_2^2 &= \frac{c^2P_2^2h^2}{\Delta} \longrightarrow \dot{q}_2 = \frac{cP_2h}{\sqrt{\Delta}} \end{aligned}}$$

(5.2) (cont.)

Para a função Hamiltoniana H temos,

$$H = \left(\sum_{i=1}^{2} p_i \dot{q}_i - L\right)\Bigg|_{\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_1, p_2)}$$

$$= \left(p_1 \dot{q}_1 + p_2 \dot{q}_2 - L\right)$$

$$= p_1 \frac{c p_1 h}{\sqrt{\Delta}} + p_2 \frac{c p_2 h}{\sqrt{\Delta}} - L$$

Onde: $L = \frac{\sqrt{h^2 + \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + \frac{c^2 h^2}{\Delta}(p_1^2 + p_2^2)}$

Deste modo:

$$H = p_1^2 \frac{ch}{\sqrt{\Delta}} + p_2^2 \frac{ch}{\sqrt{\Delta}} - L = \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2 + p_2^2) - L$$

$$= \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{c}\sqrt{h^2 + \frac{c^2 h^2}{\Delta}(p_1^2 + p_2^2)}$$

$$= \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{h}{c}\sqrt{1 + \frac{c^2}{\Delta}(p_1^2 + p_2^2)}$$

$\boxed{\text{Tira } h \text{ da raíz}}$

$$= \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2+p_2^2) - \frac{h}{c}\sqrt{\frac{\Delta + c^2(p_1^2+p_2^2)}{\Delta}}$$

$$= \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2+p_2^2) - \frac{h}{c\sqrt{\Delta}}\sqrt{\Delta + c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

lembrando que: $\Delta = 1 - c^2(p_1^2+p_2^2)$

então:

$$H = \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2+p_2^2) - \frac{h}{c\sqrt{\Delta}}\sqrt{1 - c^2(p_1^2+p_2^2) + c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

$$= \frac{ch}{\sqrt{\Delta}}(p_1^2+p_2^2) - \frac{h}{c\sqrt{\Delta}}\sqrt{1}$$

$$= \frac{c^2h^2}{c\sqrt{\Delta}}(p_1^2+p_2^2) - \frac{h}{c\sqrt{\Delta}}$$

Multiplica por c a primeira parcela

$$= \frac{h}{c\sqrt{\Delta}}\left(c^2(p_1^2+p_2^2) - 1\right)$$

Multiplica ambos os fatores do produto por -1

$$= \frac{-h}{c\sqrt{\Delta}}\left(1 - c^2(p_1^2+p_2^2)\right) = -\frac{h}{c}\frac{\left(1 - c^2(p_1^2+p_2^2)\right)}{\sqrt{1 - c^2(p_1^2+p_2^2)}}$$

(5.2.) (cont.)

$$H = -\frac{h}{c}\cdot\left(1-c^2(p_1^2+p_2^2)\right)^{1}\cdot\left(1-c^2(p_1^2+p_2^2)\right)^{-1/2}$$

$$= -\frac{h}{c}\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

A integral de Fermat na forma Hamiltoniana,

$$T = \int_{(A)}^{(B)} \frac{ds}{c} = \int_{(A)}^{(B)} p_1 dq_1 + p_2 dq_2 - H(s, q_1, q_2, p_1, p_2)\, ds$$

e as equações Hamiltonianas tem a forma,

$$\frac{d}{ds} q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d}{ds} p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2$$

* As funções $k_i(s)$, $i = 1, 2$, envolvida no sistema de coordenadas s, q_1, q_2 ainda não são fiscos. Com o objetivo de fixá-los nós temos que levar em conta que $\vec{r}_0(s)$ é um raio. Isto significa que as equações nas coordenadas centradas no raio são as seguintes,

$$q_1(s) = 0, \quad q_2(s) = 0$$

Para um s qualquer. Diferenciando em s, temos $\dot{q}_1(s) = 0$, $\dot{q}_2(s) = 0$ e $p_1(s) = 0$, $p_2(s) = 0$. Por outro lado, $\vec{r}_0(s)$ tem que satisfazer as equações de Euler, assim as funções,

$$\dot{q}_1(s) = \dot{q}_2(s) = 0 \text{ e } \dot{p}_1(s) = \dot{p}_2(s) = 0$$

São soluções das equações Hamiltonianas. Assim, ao longo do raio central,

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_j}\right|_{q_i=0, p_i=0} = 0 \;, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial p_j}\right|_{q_i=0, p_i=0} = 0 \;, \quad j = 1, 2$$

Então,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{-h}{c}\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{-h}{c}\right)\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)} - \frac{h}{c}\frac{\partial}{\partial q_j}\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} - h\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{h}{c}\frac{\partial}{\partial q_j}\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

$$= -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial h}{\partial q_j} - h\cdot -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial c}{\partial q_j} - \frac{h}{c}\frac{\partial}{\partial q_j}\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{h}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} - \frac{h}{c}\frac{\partial}{\partial q_j}\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{h}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} - \frac{h}{c}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}}\cdot -\frac{\partial}{\partial q_j}\left[c^2(p_1^2+p_2^2)\right]$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{h}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} - \frac{h}{c}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}}\cdot -2(p_1^2+p_2^2)\,c\,\frac{\partial c}{\partial q_j}$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_j}\right|_{q_i=0,\,p_i=0} = \left[-\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{h}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} + \frac{h}{c}\frac{(p_1^2+p_2^2)\,c\,\frac{\partial c}{\partial q_j}}{\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}} \right]\Bigg|_{q_i=0,\,p_i=0}$$

No limite: $q_1(s) = q_2(s) = p_1(s) = p_2(s) = 0$

Assim,

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_j}\right|_{q_i=0,\,p_i=0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{h}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} + \cancelto{0}{\frac{h}{c}\frac{(p_1^2+p_2^2)\,c\,\frac{\partial c}{\partial q_j}}{\sqrt{1-c^2(p_1^2+p_2^2)}}}$$

$$= -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{h}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j}$$

Lembrando que: $h = 1 + q_1 k_1 + q_2 k_2$

$$\left. h \right|_{q_i=0} = 1$$

Então:

$$\left.\frac{\partial h}{\partial q_j}\right|_{q_i=0,\,p_i=0} = -\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial q_j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} = 0$$

$$= -\frac{1}{c}\left[\frac{\partial h}{\partial q_1} + \frac{\partial h}{\partial q_2}\right] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j} = 0$$

$$\left.\frac{\partial h}{\partial q_j}\right|_{q_i=0,\,p_i=0} = -\frac{1}{c}\left[k_1+k_2\right]+\frac{1}{c^2}\frac{\partial c}{\partial q_j}=0$$

multiplicando ambos os lados da equação por c

$$=-\left[k_1+k_2\right]+\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial q_j}=0$$

logo,

$$-\left[k_1+k_2\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial q_j}$$

$$K_j(s)=\left.\frac{1}{c(s,0,0)}\frac{\partial c}{\partial q_j}\right|_{q_1=q_2=0}, \quad j=1,2$$

9.9. Solution of the eikonal equation in a vicinity of the central ray

Procurando uma solução da equação iconal em série de potências

$$\tau(s, q_1, q_2) = \tau_0(s) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}(s) \cdot q_i q_j + \cdots$$

$$\frac{1}{2}\sum \Gamma_{ij}(s)\, q_i q_j = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{11} q_1^2 + \Gamma_{21} q_2 q_1 + \Gamma_{12} q_1 q_2 + \Gamma_{22} q_2^2\right)$$

$$\frac{1}{2}\sum \Gamma_{ij}\, q_i q_j = \frac{1}{2}\Gamma \vec{q} \cdot \vec{q}$$

$$\boxed{\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} q_1 + \Gamma_{12} q_2 \\ \Gamma_{21} q_1 + \Gamma_{22} q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} q_1 + \Gamma_{12} q_2 \\ \Gamma_{21} q_1 + \Gamma_{22} q_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \Gamma_{11} q_1^2 + \Gamma_{12} q_1 q_2 + \Gamma_{21} q_1 q_2 + \Gamma_{22} q_2^2$$

Assim:

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}\, q_i q_j = \frac{1}{2}\Gamma \vec{q} \cdot \vec{q}}$$