4. Energy relations in the ray theory (in the more equation perspective). Caustic problems of the ray method

4.1 The propagation of energy along ray tubes

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \nabla^2 W = 0$$

A aproximação de ordem zero da teoria do raio,

$$W = e^{-i\omega(t-\tau)} A_0$$

A densidade de energia do campo de ondas,

$$\rho_E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}|W_t|^2 + |\nabla W|^2\right)$$

considerando o tubo de raios,

$$\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_0 + d\alpha, \quad \beta_0 \leq \beta \leq \beta_0 + d\beta$$

e o elemento de volume formado pelas frentes de ondas $\tau = \tau_0$ e $\tau = \tau_0 + d\tau$ no momento $t = t_0$. Assim,

$$|W_t|^2 = \left|-i\omega e^{-i\omega(t-\tau)} A_0\right|^2 = \omega^2 |A_0|^2$$

Pois,

$$\frac{d}{dt}W = \frac{d}{dt}\left(A_0 e^{-i\omega(t-\tau)}\right) = A_0 \cdot e^{i\omega\tau} \cdot \frac{d}{dt} e^{-i\omega t}$$

$$\frac{dW}{dt} = A_0 e^{i\omega\tau} \cdot -i\omega e^{-i\omega t} = -A_0 i\omega e^{-i\omega(t-\tau)}$$

$$|\nabla W|^2 = \left| i\omega e^{-i\omega(t-\gamma)} A_0 \nabla\gamma + e^{-i\omega(t-\gamma)} \nabla A_0 \right|^2 \approx \omega^2 (\nabla\gamma)^2 |A_0|^2$$

$$|\nabla W|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} |A_0|^2$$

Pois,

$$\nabla A_0 e^{-i\omega(t-\gamma)} = \nabla A_0 e^{-i\omega(t-\gamma)} + A_0 \nabla e^{-i\omega(t-\gamma)}$$

$$\nabla A_0 e^{-i\omega(t-\gamma)} = \nabla A_0 e^{-i\omega(t-\gamma)} + A_0 e^{-i\omega t} \nabla e^{i\omega\gamma}$$

$$\nabla A_0 e^{-i\omega(t-\gamma)} = \nabla A_0 e^{-i\omega(t-\gamma)} + A_0 e^{-i\omega t} \cdot i\omega e^{i\omega\gamma} \nabla\gamma$$

Então,

$$\rho_E \approx \frac{\omega^2}{c^2} |A_0|^2$$

Pois,

$$\rho_E = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2} |W_t|^2 + |\nabla W|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2} \omega^2 |A_0|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} |A_0|^2\right)$$

levando em consideração que $dE = \rho_E \, dV$,

$$dE|_{t_0} \approx \frac{\omega^2}{c^2(M_0)} |A_0(M_0)|^2 dV_{t_0} = \frac{\omega^2}{c^2(M_0)} |A_0(M_0)|^2 C_{M_0} J_{M_0} d\gamma_0 d\alpha \, d\beta$$

Onde as quantidades são calculadas no ponto M_0 no volume dV_{t_0}. Em um tempo t no ponto M em dV_t, 4.1 cont.

$$dE\big|_t = \frac{\omega^2}{C^2(M)} |A_0(M)|^2 C_M J_M \, d\gamma \, d\alpha \, d\beta$$

Substituindo a expressão para a amplitude A_0,

$$A_0 = \frac{\psi_0(\alpha,\beta)}{\sqrt{J/C}}$$

Para $dE|_{t_0}$,

$$dE\big|_{t_0} \cong \frac{\omega^2}{C^2(M_0)} \frac{|\psi_0(\alpha,\beta)|^2}{J(M_0)/C(M_0)} C(M_0) J(M_0) \, d\gamma \, d\alpha \, d\beta$$

E para $dE|_t$,

$$dE_t \simeq \frac{\omega^2}{C^2(M)} \frac{|\psi_0(\alpha,\beta)|^2}{J(M)/C(M)} C(M) J(M) \, d\gamma \, d\alpha \, d\beta$$

Assim,

$$dE\big|_{t_0} = dE_t = \omega^2 |\psi_0(\alpha,\beta)|^2 \, d\gamma \, d\alpha \, d\beta$$

Note que a função $\psi_0(\alpha,\beta)$ é constante ao longo do raio ~~(em relação)~~ com a possibilidade de variar de um raio para o outro. O último resultado mostra uma propriedade já sabida da teoria do raio: a energia do campo de ondas na aproximação de ordem zero se propaga ao longo do tubo de raios e não tem difusão transversal entre os tubos de raios.

4.2. Energy relations for the wave equation and the vector of energy flow. Law of energy conservation

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

A densidade de energia ρ_E,

$$\rho_E = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

Diferenciando ρ_E em relação a t

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$$ (Aplicação da regra da cadeia.)

Pois,

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\cdot 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$$

Multiplicando ambos os lados da equação da onda por $\partial w/\partial t$,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \boxed{\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}}$$

somei e subtraí o mesmo termo →

$$- \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial \rho_E}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

→ Regra do produto

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}\cdot\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

(Scratch)

Para 3D,

$$p_E = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\nabla w \cdot \nabla w = \frac{1}{2}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2$$

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{c^2}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\cancel{2}}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\,2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t}$$

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t}$$

Partindo da equação da onda em 3D

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \nabla^2 w = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

multiplicando por $\partial w/\partial t$,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

somando e subtraindo ~~pelo~~ mesmo termo,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$$

4.2. Cont

$$-\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

Se,

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$-\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Substituindo pela definição de dPE/dt e das definições acima,

$$\frac{\partial PE}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

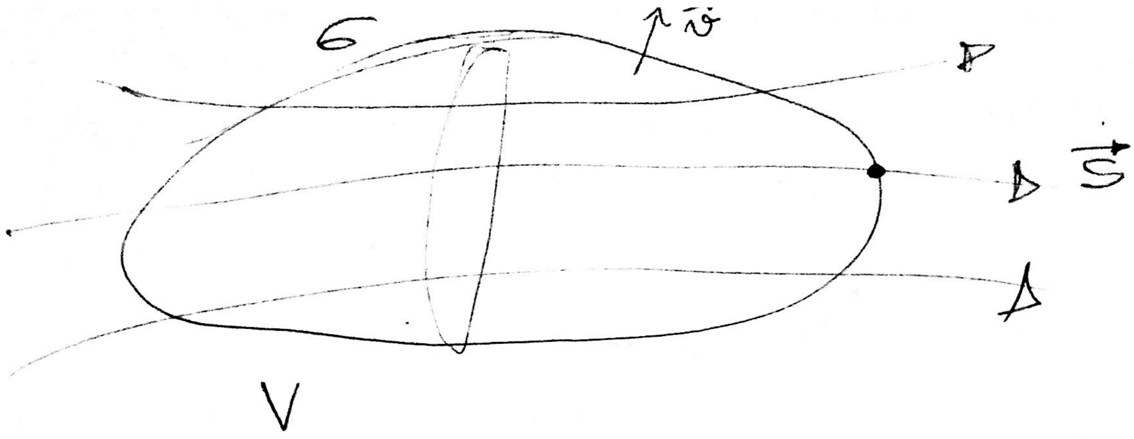
$$\frac{\partial PE}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{S} = 0$$

Onde S é definido por,

$$\vec{S} = -\frac{\partial w}{\partial t}\nabla w$$

$\vec{S}$ é chamado de vetor de fluxo de energia

(scratch)



* Vetor de fluxo de energia $\vec{S}$ em um volume V fechado pela superfície σ.
encerrado

$$\iiint_V \frac{\partial \rho E}{\partial t}\, dV + \iiint_V \nabla \cdot \vec{S}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho E\, dV + \iiint_V \nabla \vec{S}\, dV = 0$$

Utilizando a lei de Gauss,

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{S}\, dV = \iint_\sigma (\vec{S} \cdot \vec{\nu})\big|_\sigma\, d\sigma$$

Assim,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho E\, dv = -\iint_\sigma (\vec{S} \cdot \vec{\nu})\big|_\sigma\, d\sigma$$

Pois,

$$\iiint_V \nabla \vec{S}\, dv = \iint_\sigma (\vec{S} \cdot \vec{\nu})_\sigma\, d\sigma$$

A expressão do lado esquerdo descreve a variação da energia no volume V por unidade de tempo, enquanto na expressão do lado direito temos o fluxo total de energia através da superfície fechada σ que encerra o volume. Daí segue que o crescimento ou decrescimento da energia dentro do volume é causado pelo fluxo total de energia através da superfície do volume. Esta é a lei de conservação da energia.

Em termos da aproximação de ordem zero da teoria do raio nos temos para uma solução real aproximada de W a equação,

$$W \cong A_0 \cos \omega (t - \psi)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} \cong -A_0 \omega \operatorname{sen} \omega (t - \psi)$$

$$\nabla W \simeq \omega A_0 \nabla \psi \operatorname{sen} \omega (t - \psi)$$

Assim,

$$\vec{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} \nabla W \simeq \omega^2 A_0^2 \operatorname{sen}^2(t - \psi) \nabla \psi = \frac{\omega^2 A_0^2}{c} \operatorname{sen}^2 \omega (t - \psi) \vec{t}$$

Pois, $\nabla \psi = \frac{\vec{t}}{c}$

Onde $\vec{I}$ é o vetor unitário tangente ao raio. Assim, a direção do vetor de fluxo de energia coincide com a direção de propagação dos raios. Isto ilustra a importante concepção dos raios da aproximação de alta frequência na teoria da propagação de ondas.

Em meios suaves inomogêneos e isotrópicos, os raios apresentam as seguintes propriedades geométricas e físicas.

1. São ortogonais as frentes de onda
2. São curvas extremais do funcional de Fermat
3. Eles satisfazem a lei de Snell localmente, modificada para meios suaves e inomogêneos.
4. Eles representam trajetórias ao longo a parte de alta frequência da energia ~~flux~~ média no tempo flui

4.3. Caustic problems in the ray theory

O método do raio, a solução de ordem zero no domínio da frequência,

$$U = A_0 e^{i\omega\tau} = e^{i\omega\tau} \frac{\psi_0(\alpha,\beta)}{\sqrt{J/c}}$$

E para o espalhamento geométrico J nós temos as seguintes fórmulas,

$$J = \frac{1}{c}\left|\frac{D(x,y,z)}{D(\gamma,\alpha,\beta)}\right| = \frac{1}{c}\left|\vec{r}_\gamma\cdot(\vec{r}_\alpha\times\vec{r}_\beta)\right|$$

Para uma família de raios,

$$\vec{r} = \vec{r}(\gamma,\alpha,\beta)$$

⇒ Definição de Cáustico: Um objeto geométrico em que a cada ponto o espalhamento geométrico J some.

Assim, a amplitude A_0 se torna singular na cáustica, enquanto o campo de ondas real continua finito. Isto significa que o método do raio não descreve o campo de ondas apropriadamente na vizinhança das cáusticos. Isto é precisamente o que chamamos de problema dos cáusticos na teoria do raio.

Fonte pontual

Suponhamos que haja uma família de raios na forma,

$$\vec{r} = \vec{r}(\gamma,\alpha,\beta)$$

Para cada raio da família temos,

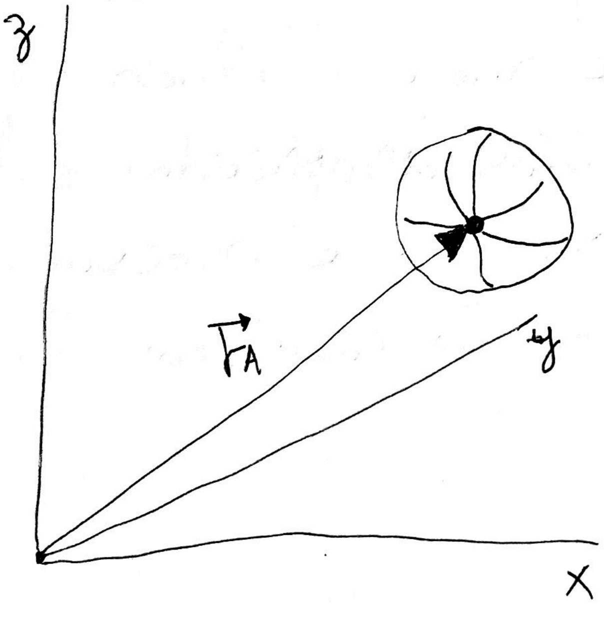
$$\vec{r}\big|_{\gamma=0} = \vec{r}_A$$

Onde $\vec{r}_A$ denota a posição da fonte. Diferenciando esta fórmula em relação a α e β,

$$\vec{r}_\alpha\Big|_{\tau=0} = \vec{r}_\beta\Big|_{\tau=0} = 0$$

e o $J=0$ na fonte pontual. Então, no geral, o método do raio não é válido na vizinhança da fonte pontual! Observe:

$$\vec{r}\Big|_{\tau=0} = \vec{r}_A = \vec{r}(0,\alpha,\beta)$$



$$\frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \alpha} = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{r(0,\alpha+\delta\alpha,\beta)-r(0,\alpha,\beta)}{\Delta\alpha}$$

$$\frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \beta} = \lim_{\Delta\beta\to 0} \frac{r(0,\alpha,\beta+\delta\beta)-r(0,\alpha,\beta)}{\Delta\beta}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} r(0,\alpha+\delta\alpha,\beta) = r(0,\alpha,\beta) \\ r(0,\alpha,\beta+\delta\beta) = r(0,\alpha,\beta) \\ \text{Raios no mesmo ponto!} \end{array}}$$

$$\vec{r}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = \frac{\partial \vec{r}(\tau,\alpha,\beta)}{\partial \alpha} \implies \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \alpha} = 0$$

$$\vec{r}_\beta = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = \frac{\partial \vec{r}(\tau,\alpha,\beta)}{\partial \beta} \implies \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \vec{r}_A}{\partial \beta} = 0$$

Pois (~~$\delta\alpha\alpha\alpha\ \delta\beta = 0$~~ r) no limite em que $\tau=0$ (todos os raios estão no mesmo ponto!)

4.3. (Cont.)

<u>Superfície de cáustico</u>: Assumindo agora que a família de raios $\vec{r} = \vec{r}(\tau, \alpha, \beta)$ em 3D tem uma superfície envelope. Isto implica que cada raio da família, especificado pelos parâmetros α e β, toca a superfície envelope em um ponto que corresponde a um certo valor do iconal τ. Obviamente, o valor de τ varia de raio para raio e na superfície o iconal τ é uma função dos parâmetros do raio, exemplo $\tau = \tau(\alpha, \beta)$. Inserindo a função dentro da equação do raio nós obtemos a equação vetorial da superfície envelope na seguinte forma:

$$\vec{r} = \vec{r}(\tau(\alpha,\beta), \alpha, \beta)$$

Assim,

$$\frac{\partial r}{\partial \tau}\ ;\ \frac{\partial r}{\partial \alpha} = \frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\partial r}{\partial \alpha}\ ;\ \frac{\partial r}{\partial \beta} = \frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial \beta} + \frac{\partial r}{\partial \beta}$$

são localizados no plano tangente a superfície envelope e assim o produto misto some,

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} \cdot \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right]\right) = 0$$

Observe que o vetor $\partial \vec{r}/\partial \tau$ é tangente ao raio e assim é tangente ao envelope, enquanto os outros dois vetores pertencem ao plano tangente ao envelope por definição.