Dynamic Ray tracing and its Application in Triangulated Media (Andreas Rüger)

1

2.2 Kinematic Ray tracing Equations

O método das características é o método matemático para derivar as soluções da equação iconal.

$$|\nabla \tau| = \frac{1}{v^2}$$

Esta equação é uma equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem do tipo Hamilton-Jacobi. Esta pode ser reescrita como,

$$\frac{1}{n}\left(|\nabla \tau|^{n/2} - \frac{1}{v^n}\right) = 0$$

O vetor p_i (slowness)

$$p_i \equiv \nabla \tau \quad ; \quad |p| = \frac{1}{v}$$

A equação de Hamilton-Jacobi toma a forma,

$$H(p_i, x_i) = \frac{1}{n}\left[(p_i p_i)^{n/2} - \left(\frac{1}{v}\right)^n\right] = 0$$

Utilizando o método das características (Bleistein, 1984), nós obtemos as seguintes equações para o traçamento dos raios:

$$\frac{dx_i}{du} = p_i \frac{1}{v^{n-2}}$$

$$\frac{dp_i}{du} = \frac{1}{v^{n+1}} \frac{\partial v}{\partial x_i}$$

A solução destas equações representam a trajetória x_i e a distribuição de p_i ao longo do raio como uma função de uma variável monotonicamente crescente e independente u. Estas soluções ~~são~~ de $x_i(u)$ são chamadas de raios. Somos livres para escolher n.

Para $n=0$, u é o tempo de trânsito τ ao longo do raio.

$$du = d\tau$$

Para $n=1$, u é o comprimento de ~~raio~~ arco s ao longo do raio.

$$du = v\, d\tau = ds$$

Para $n=2$, u é um parâmetro arbitrário σ

$$du = v^2 d\tau = d\sigma \qquad d\sigma = \frac{d\tau}{u^2}$$

(Andreas Rüger) (cont.)

Assim, para $u = \sigma$,

$$\frac{dx_i}{d\sigma} = P_i$$

$$\frac{dP_i}{d\sigma} = \frac{1}{2}\nabla\left(1/v^2\right)$$

$$\frac{d\gamma}{d\sigma} = \frac{1}{v^2}$$

Deste modo, se

$$\frac{d\sigma}{d\gamma} = v^2$$

Então,

$$\frac{dx_i}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\gamma} = \frac{dx_i}{d\gamma} = P_i v^2$$

$$\frac{dP_i}{d\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{d\gamma} = \frac{dP_i}{d\gamma} = \frac{1}{2}\nabla\left(1/v^2\right) v^2$$

Utilizando $|P| = 1/v$,

$$\frac{dx_i}{d\gamma} = \frac{P_i}{|P|^2} \qquad \frac{dP_i}{d\gamma} = \frac{1}{2}\frac{\nabla|P|^2}{|P|^2}$$