

ROTOGONI, ROTOEDRI, SCHIOGRAMMI nuove esplorazioni tra arte e matematica

A 2500 anni dai primi studi sui poliedri regolari, queste fondamentali strutture geometriche offrono lo spunto per nuove esplorazioni basate sull'uso del computer. Viene mostrato come, operando con rotazioni rigide su classi di elementi lineari dei poliedri regolari (spigoli, raggi, ecc.), si generino inedite affascinanti figure caratterizzate da molteplici simmetrie. Altre configurazioni dotate di simmetrie si presentano nello studio del diagramma polare dell'angolo solido sotto cui i poliedri regolari sono visti da un ipotetico osservatore che si muova su una sfera esterna ad essi concentrica.

La trattazione, estendibile senza modifiche ai poliedri semi-regolari e a varie altre famiglie di poliedri, è di tipo descrittivo e mira a stimolare la curiosità e l'affinamento dell'intuizione spaziale degli studenti. Contestualmente alla pregnanza didattica, si accenna alle potenziali ricadute sul versante delle arti visive.

Non è difficile immaginarsi la figura geometrica che si ottiene facendo ruotare un rettangolo attorno a un suo lato: le porte girevoli delle banche e degli alberghi, o il semplice atto di girare la pagina di un libro, suggeriscono la risposta corretta anche a chi non ha consuetudine con la geometria. Se però ci si chiede quale figura si ottiene facendo ruotare, per esempio, i quattro lati di un quadrato rispetto a tutti gli altri, la cosa appare già più complicata, perché le superfici si intersecano, mentre qui siamo interessati alla sola superficie esterna, cioè alla superficie dell'*unione* (in senso insiemistico) dei cilindri così generati. Se poi vogliamo fare la stessa cosa con poligoni che hanno un numero maggiore di lati, o i lati intrecciati, oppure operare sugli spigoli di un poliedro, ci rendiamo conto di essere decisamente poco adatti a simili operazioni mentali.

Oggi i computer consentono di avventurarsi in esplorazioni di questo tipo: lo sforzo di programmazione non è eccessivo e, specialmente se siamo attratti dalle simmetrie che troviamo in natura e in molti manufatti, qualcosa ci dice che vale la pena provare.

Rotogoni

Iniziamo col più semplice dei poligoni: il triangolo equilatero. La rotazione attorno a un lato genera un doppio cono (Fig. 1) con la base comune perpendicolare all'asse di rotazione. Ripetendo la stessa operazione con gli altri due lati si ottiene la superficie cercata, che chiameremo *rotogono* del triangolo. Nella vista dall'alto (Fig. 2) si nota una configurazione a trifoglio dovuta all'intersezione dei coni. Una vista a elevazione più bassa (Fig. 3) consente una migliore comprensione della forma tridimensionale.

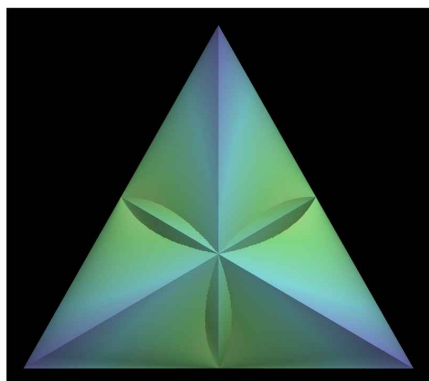


Fig. 2

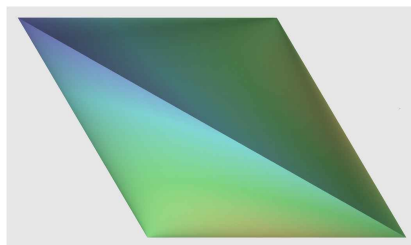


Fig. 1

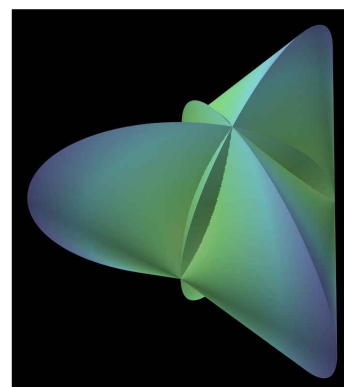


Fig. 3

Procedendo in modo analogo, otteniamo il rotogono del quadrato (Fig.4): si tratta di due coppie ortogonali di cilindri aventi raggio, altezza e distanza tra i centri uguali al lato del quadrato. Ovviamente dobbiamo aspettarci di trovare superfici cilindriche in tutti i rotogoni di poligoni regolari con un numero pari di lati, o, in generale, con almeno una coppia di lati paralleli.

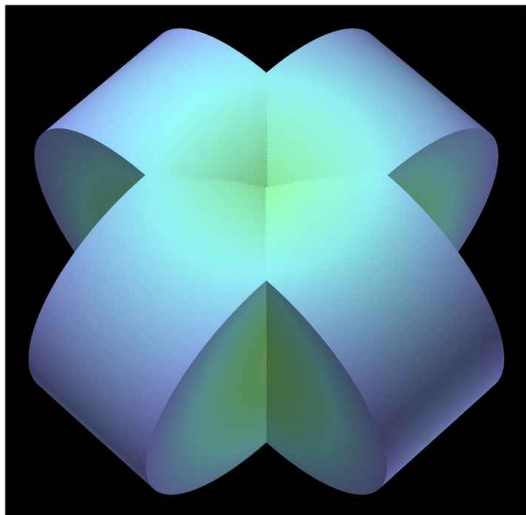


Fig. 4

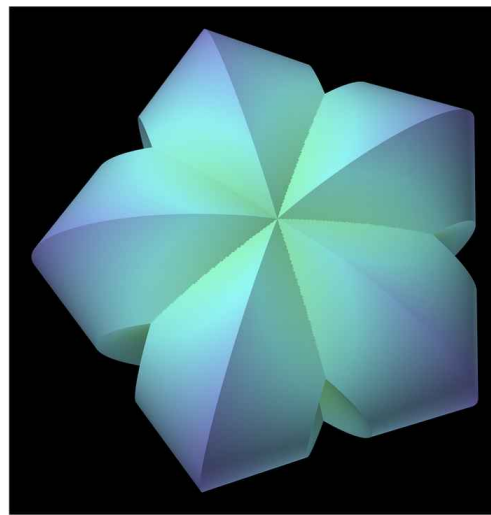


Fig. 5

Il rotogono del pentagono (Fig. 5) consiste di cinque coppie compenetranti di elementi tronco-conici. A questo punto siamo in grado di immaginarci i rotogoni di poligoni con un numero maggiore di lati. Prima però di lasciare l'argomento, è interessante vedere l'aspetto che hanno queste figure se le “scoperchiamo”, cioè arrestiamo il processo di visualizzazione prima che sia completato. Ciò consente di apprezzarne la ricca struttura interna, come mostrato nelle Fig. 6 e 7, relative rispettivamente a un ettagono semplice e a un ettagono intrecciato. La procedura si rivela pertanto idonea a produrre interessanti pattern decorativi.

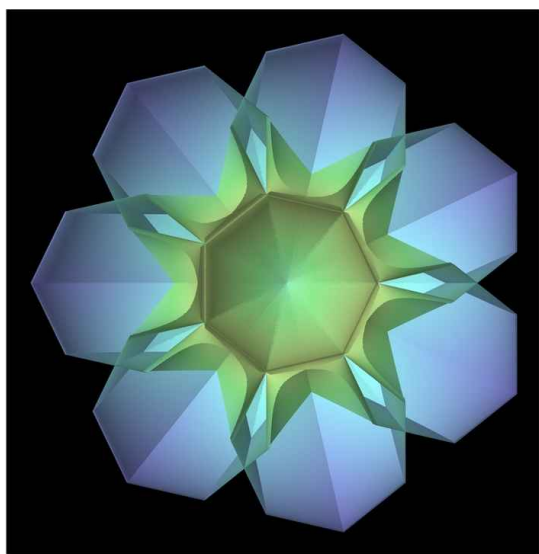


Fig. 6

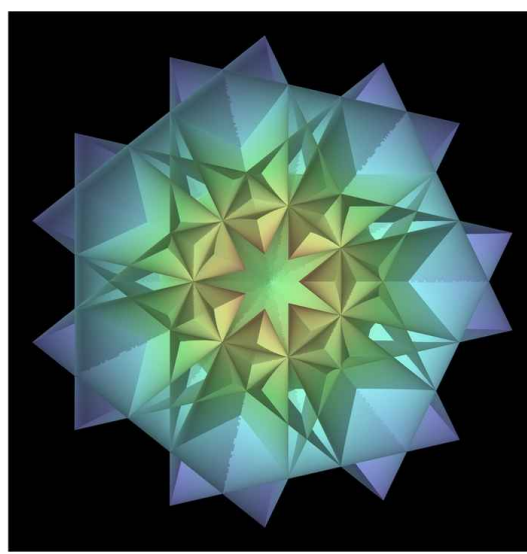


Fig. 7

Naturalmente, si può estendere la nozione di rotogono includendo in essa le rotazioni di altri elementi di un poligono rispetto ad altri elementi. Per esempio, oltre alle rotazioni lato-lato, potremmo considerare quelle raggio-raggio, diagonale-diagonale, ecc., nonché quelle miste (non commutative) lato-raggio, lato-diagonale, diagonale-raggio, e così via, in tutte le combinazioni.

ordinate. Il pieno apprezzamento estetico della caleidoscopica varietà di forme che si ottengono, si ha creando sequenze animate (progetto in corso di realizzazione).

Rotoedri

L'estensione più interessante di questo procedimento di rotazione l'abbiamo con i poliedri. Chiamiamo *rotoedri* le superfici ottenute. In analogia ai casi descritti precedentemente, si tratta di far ruotare di un giro completo ogni spigolo rispetto a tutti gli altri, e di considerare la superficie esterna inviluppata da queste rotazioni. Più precisamente chiamiamo *rotoedri_ss* questa classe di oggetti derivanti da rotazioni spigolo-spigolo.

Mentre nei rotogoni l'elemento assiale e quello rotante sono sempre complanari, nei rotoedri si può avere sia complanarità che non-complanarità, pertanto il segmento rotante, oltre ad anelli cilindrici e tronco-conici, può descrivere porzioni di iperboloide a una falda. Comunque, dal punto di vista computazionale non vi è alcuna differenza.

I rotoedri_ss dei cinque poliedri regolari hanno l'aspetto mostrato in Figg. 8- 12. Esaminando le figure e ragionando sulla loro costruzione possiamo fare le osservazioni che seguono:

- 1) Il rotoedro_ss del tetraedro (Fig. 8) assomiglia al rotogono del triangolo, così come quello del cubo (Fig. 9) è in parte sovrapponibile al rotogono del quadrato.
- 2) È notevole che, ad eccezione di quello del tetraedro, che è auto-duale, gli altri rotoedri presentano delle cavità con al fondo un punto singolare e sono esternamente delimitate da un poligono sferico regolare avente lo stesso numero di lati delle facce del poliedro duale.
- 3) Tali cavità derivano dalla rotazione dei lati che incidono nei vertici del poliedro-origine e si conformano alla simmetria delle facce del poliedro duale.
- 4) Il numero delle cavità corrisponde al numero delle facce del duale: 8 nel caso del cubo, 6 in quello dell'ottaedro (Fig. 10), 20 nel caso del dodecaedro (Fig. 11), 12 in quello dell'icosaedro (Fig. 12).
- 5) Intercalate alle cavità si notano strutture dorsali a sezione circolare che, compenetrandosi, determinano una depressione al centro della quale vi è di nuovo un punto di singolarità della superficie. Tali singolarità risultano in corrispondenza radiale con i vertici del poliedro duale.

Un discorso analogo vale per i poliedri uniformi non regolari (tra i quali i semi-regolari, o archimedei), con la differenza che in questo caso le cavità non sono più delimitate esternamente da poligoni sferici regolari, come si può notare in Fig. 13, in cui è mostrato il rotoedro_ss di un cubottaedro. Il rotoedro del rombododecaedro (duale del cubottaedro) mostra (Fig. 14), la presenza di 6 cavità quadrate e di 8 triangolari, a conferma del fatto che in questo tipo di "rotoedrizzazione" le cavità corrispondono in numero e forma alle facce del poliedro duale.

Analogamente a quanto già detto per i rotogoni, c'è un'ampia possibilità di scelta degli elementi geometrici fungenti da asse di rotazione e degli elementi rotanti. Considerando, per esempio, i tre tipi di elementi-segmento: spigolo [s], raggio del poliedro [r] e raggio delle facce [t] possiamo generare i seguenti nove tipi di rotoedro: [ss], [rr], [tt], [sr], [rs], [rt], [tr], [st], [ts].

Le Figg. 15 e 16 si riferiscono al cubo: la prima rappresenta il rotoedro_tr ottenuto facendo ruotare i raggi delle facce attorno ai raggi del poliedro, mentre la seconda rappresenta il rotoedro_ts, ottenuto facendo ruotare i raggi delle facce attorno agli spigoli del poliedro. In Figg. 17 e 18 sono rappresentati i rotoedri_tr del dodecaedro e dell'icosaedro.

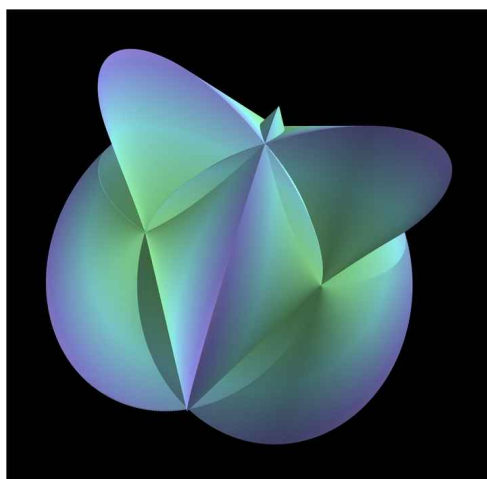


Fig. 8



Fig. 9

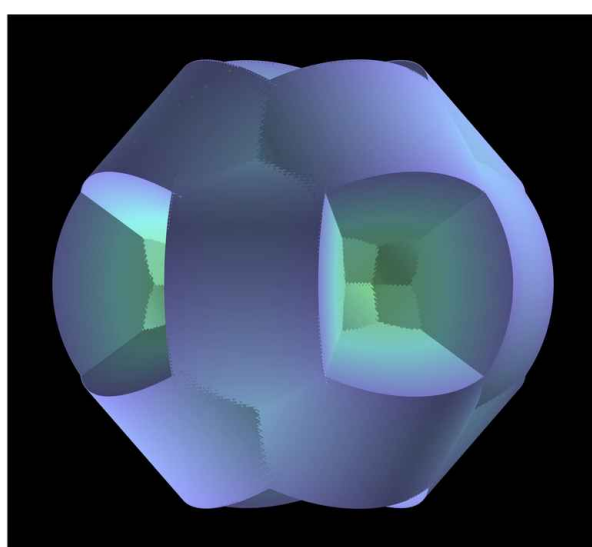


Fig. 10

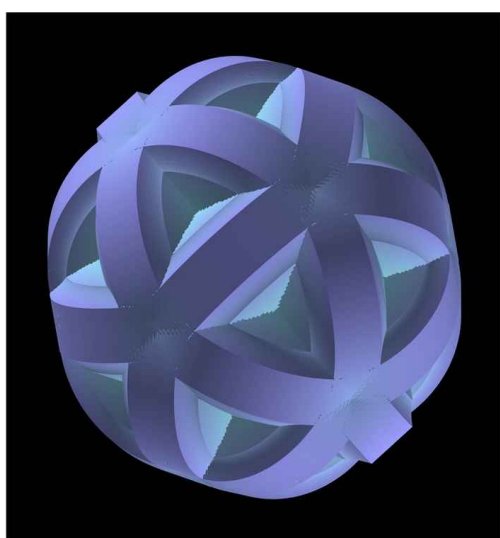


Fig. 11

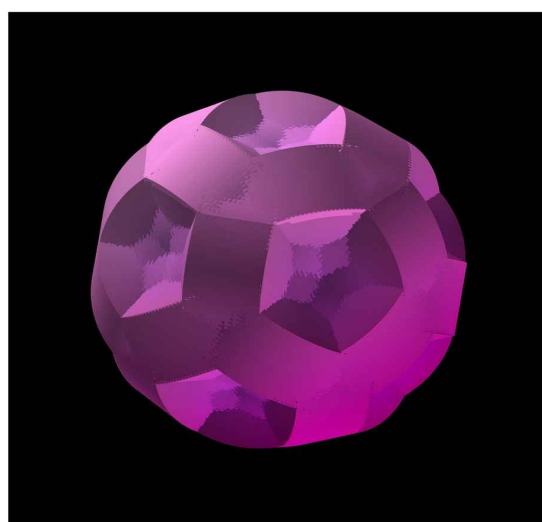


Fig. 12

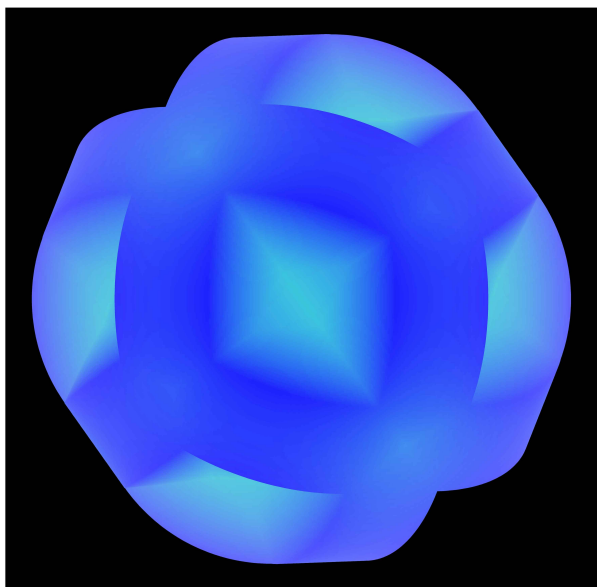


Fig. 13

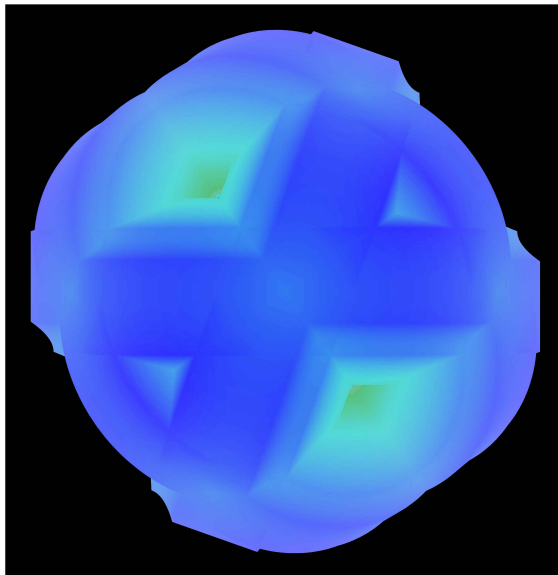


Fig., 14

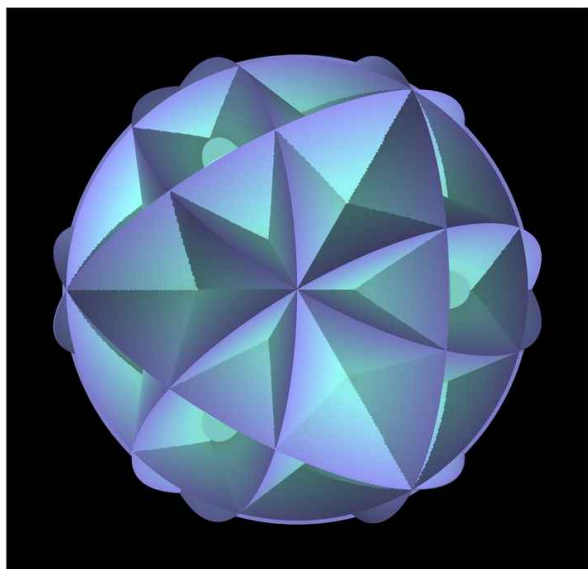


Fig. 15

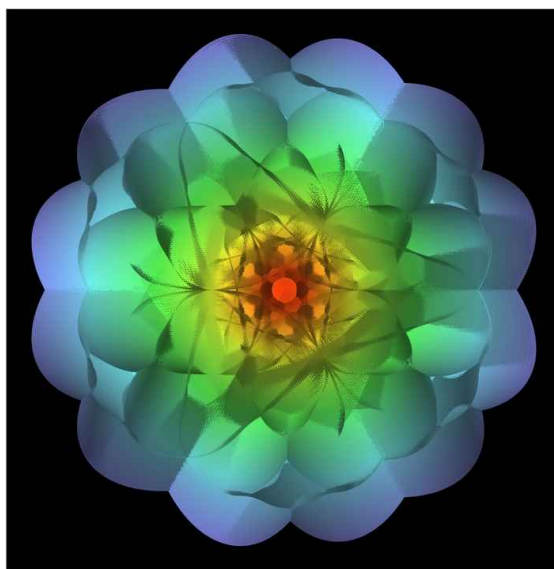


Fig. 16

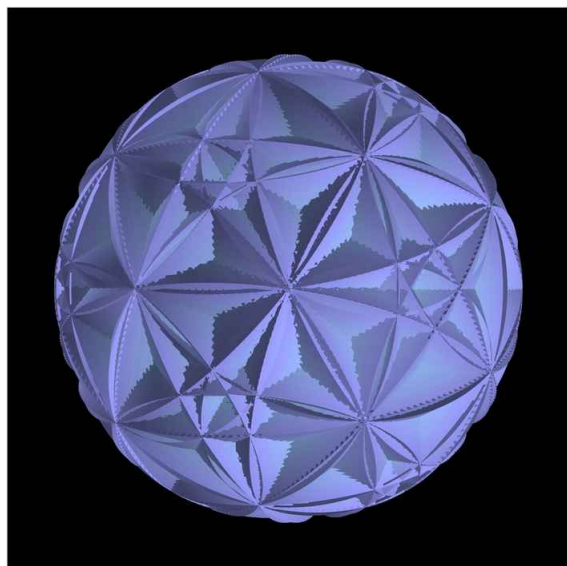


Fig. 17

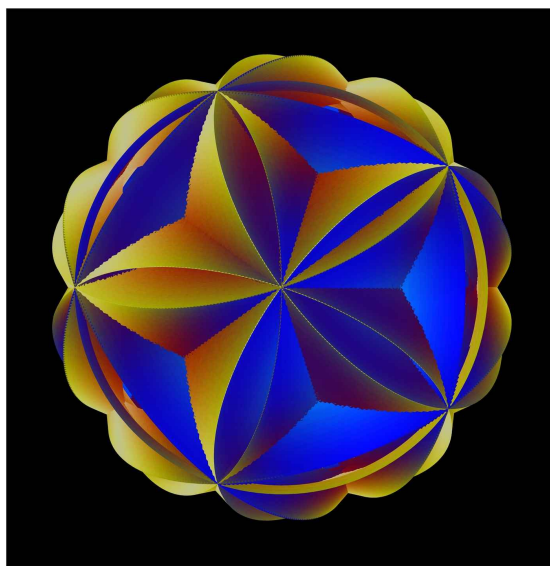


Fig. 18

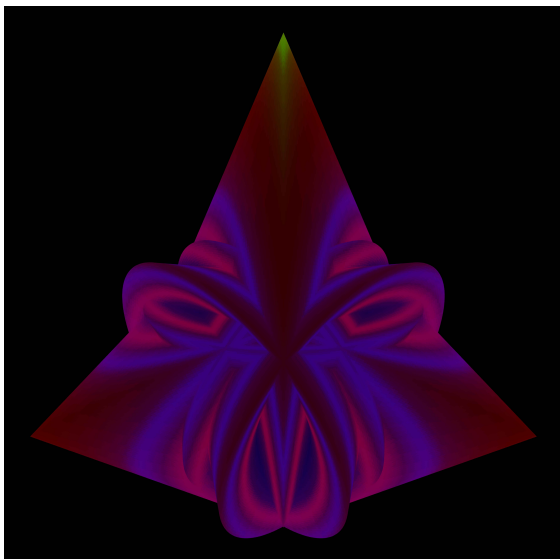


Fig. 19

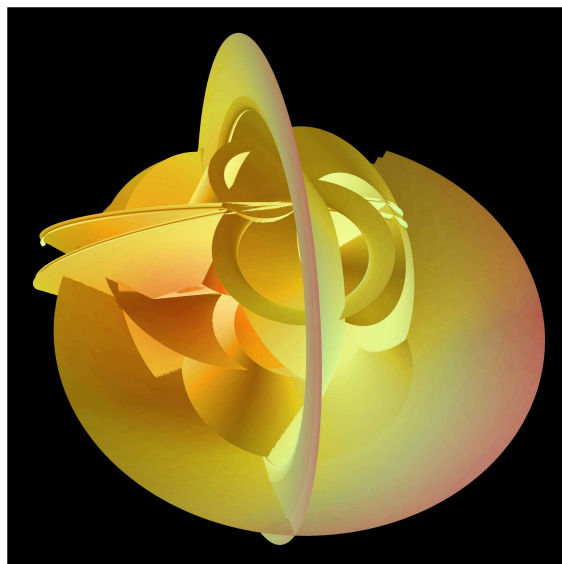


Fig. 20

È importante sottolineare il fatto che le caratteristiche di simmetria delle figure ottenute sono criticamente dipendenti da quelle del poliedro, o altra figura-origine. Se, per esempio, deformiamo un tetraedro applicando un fattore di scala diverso per le tre coordinate spaziali, il corrispondente rotoedro_{ss} conserverà solo alcune delle simmetrie originarie. Il “mascherone” mostrato in Fig. 19 è stato ottenuto in questo modo (si è solo intervenuto sulle curve di colore in fase di *post-processing*). Questa “deliberata, parziale rottura di simmetria”, già ritenuta un valore estetico dalla filosofia zen [3], è assurda quasi a canone fondativo nell'arte moderna. Rilassando gradualmente le condizioni di regolarità, si può quindi passare dalla “rotoedrizzazione” di poliedri a quella di un arbitrario grafo connesso. Per questa via si possono realizzare con facilità sculture virtuali caratterizzate da complessi intrecci di volumi. In Fig. 20 è mostrato un rotoedro originato dall'albero minimo tra sette punti selezionati in modo *random* all'interno di una sfera. Nonostante che i componenti volumici siano dotati di simmetria assiale, l'insieme è asimmetrico, e ciò contribuisce ad accrescere la sua apparente complessità strutturale.

Schiogrammi

Un altro esempio di come, partendo dai poliedri, si possono ottenere nuove interessanti figure è mostrato dal procedimento seguente. Supponiamo di muovere una sorgente di luce puntiforme sulla superficie di una grande sfera semitrasparente al centro della quale è collocato un poliedro. Ad ogni posizione della sorgente corrisponderà una particolare ombra sulla sfera, con una periodicità spaziale che riflette le simmetrie del poliedro. L'area dell'ombra rapportata all'area della sfera non è altro che la misura dell'angolo solido sotto cui il poliedro è visto dalla sorgente. Possiamo quindi costruire una superficie che rappresenti il diagramma polare dell'angolo solido, ovvero dell'estensione dell'ombra. Alle superfici così generate daremo il nome di *schiogrammi*, dal greco *skia*, che significa ombra.

Come si vede nelle Figg. 21-25, relative ai poliedri regolari nella stessa sequenza usata per i rotoedri, l'aspetto complessivo è quello di configurazioni ordinate di poligoni sferoidali raccordati lungo linee piane intersecanti, luogo di singolarità della superficie. Le linee di singolarità corrispondono alle direzioni per le quali il contributo all'ombra di una o più facce compare o scompare.

Anche qui, come nei rotoedri, si riscontra il fenomeno della dualità tra il poliedro-origine e alcune caratteristiche di struttura della superficie ottenuta.

Nei casi considerati, trattandosi di poliedri convessi con le facce tutte uguali, non è necessario calcolare l'area delle facce: per ogni direzione il modulo del raggio polare è dato dalla somma dei

contributi delle singole facce, ognuno dei quali è rappresentabile come modulo della proiezione del versore normale alla faccia nella direzione considerata. Nel caso delle figure mostrate sono state considerate tutte le facce del poliedro, ma, se ci si limita a quelle visibili dal punto-sorgente, il risultato non cambia.

Osserviamo inoltre che lo schiogramma di una sfera è ovviamente una sfera. Pertanto, come si nota dalle figure, con l'aumentare del numero delle facce del poliedro, la forma del relativo schiogramma approssima sempre più una sfera. Se, invece di considerare tutto il poliedro, selezionassimo una sola faccia, lo schiogramma ottenuto sarebbe una coppia di sfere uguali a contatto, dato che contenebbe solo il coseno dell'elevazione dell'osservatore rispetto alla faccia, mentre l'angolo azimutale risulterebbe ininfluenza.

Infine, se vogliamo costruire lo schiogramma di un poliedro semi-regolare, dobbiamo moltiplicare il contributo di ogni singola faccia per una quantità proporzionale all'area della faccia (o, più esattamente, all'area della faccia proiettata sulla sfera circoscritta al poliedro). Un esempio, relativo al dodecaedro simo, è riportato in Fig. 26. Essendo molto piccola l'entità dei rigonfiamenti, si è scelto un codice di colore per evidenziare i livelli di uguale distanza dall'origine.

Cenni sull'aspetto computazionale

Per i rotogoni e i rotoedri il procedimento usato si riassume come segue. Si suddivide lo spigolo rotante in un opportuno numero N_q di sub-segmenti (a seconda della risoluzione spaziale desiderata, o consentita dalle risorse hardware). Gli estremi di questi segmentini, ruotando, descrivono un sottile anello che, a sua volta, viene suddiviso trasversalmente in piccoli quadrilateri (*mesh*), che, nel caso dei rotoedri_ss, sono in numero $N=N_s(N_s-1)N_q$. Le coordinate dei vertici delle mesh vengono messe in memoria, unitamente alla loro distanza dal punto di osservazione. In fase di visualizzazione tale distanza viene usata come parametro di *sorting* delle mesh, che verranno plottate in ordine di distanza decrescente (algoritmo del pittore).

Il nucleo centrale del programma è la routine che ruota un punto attorno a un asse arbitrario. Il metodo usato è stato quello classico [1] ma, volendo, si può cogliere l'occasione per usare il più moderno ed efficiente metodo dei quaternioni [2]. Tuttavia, come già accennato, su un normale computer l'elemento limitante non è il tempo di esecuzione, ma lo spazio di memoria. A questo problema si può in parte ovviare, almeno in certi casi, evitando di memorizzare gli elementi di superficie all'interno di una sfera di raggio opportuno. Una strategia alternativa consiste nel ragionare in coordinate polari e associare in memoria ogni nuovo elemento di superficie alla cella del reticolo che contiene le coordinate angolari del suo centro. In tale locazione di memoria ogni nuovo elemento con raggio polare maggiore va a sostituire quello ivi residente. Alla fine ci si aspetta di ottenere la superficie esterna cercata, ma i risultati ottenuti per questa via non sono stati del tutto soddisfacenti.

Per gli schiogrammi il procedimento è del tutto analogo, ma più semplice perché viene direttamente generata la superficie che interessa.

La programmazione delle figure di questo articolo è stata fatta in Fortran77, su piattaforma Linux, con l'impiego di PGPLOT come interfaccia grafica.

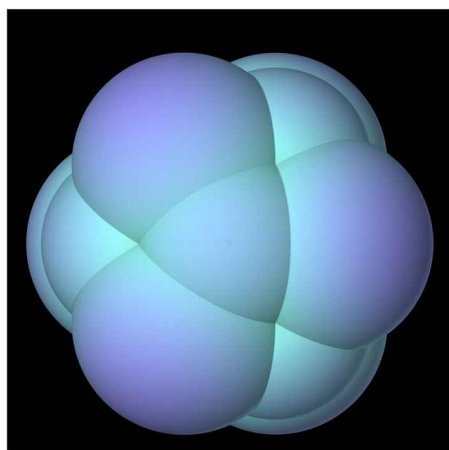


Fig. 21

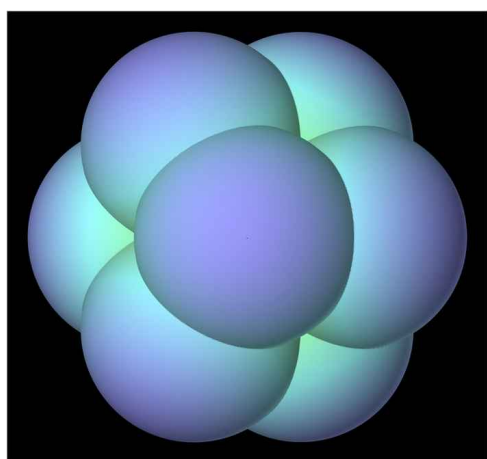


Fig. 22

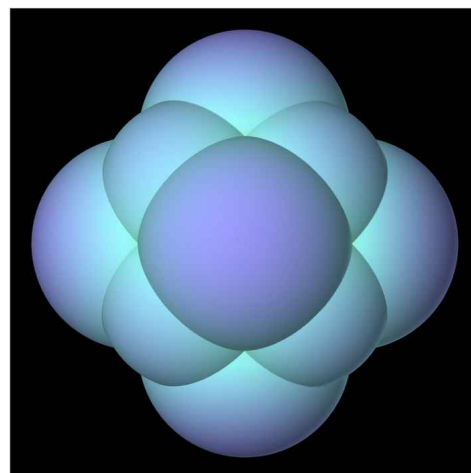


Fig. 23

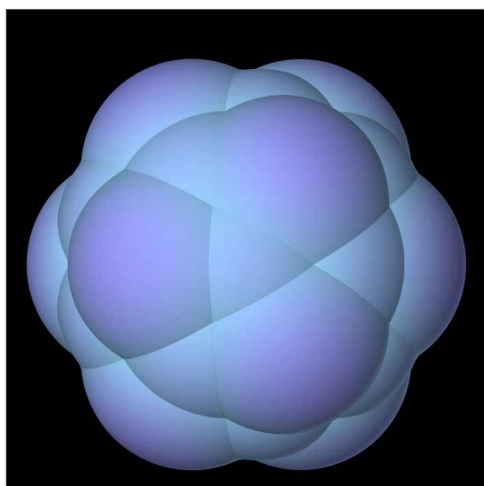


Fig. 24

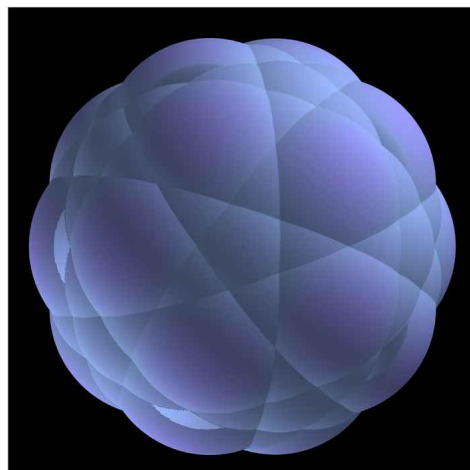


Fig. 25

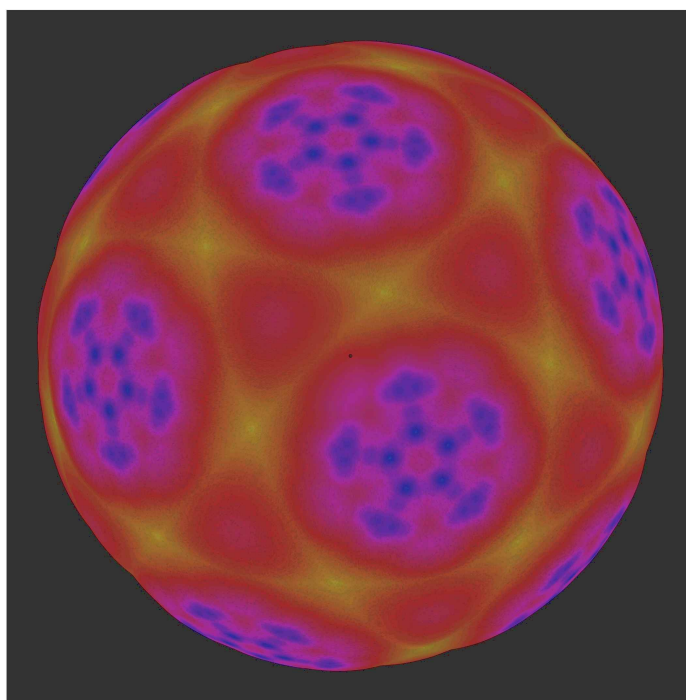


Fig. 26

Suggerimenti bibliografici

Per maggiori dettagli sulle implicazioni di metodo e le ricadute didattiche dell'approccio alla geometria della natura attraverso la via del software auto-costruito, si rimanda a [4]. Sui poliedri esiste in Internet un vastissimo repertorio di testi e immagini a vari livelli di approfondimento. Come testo introduttivo, è sempre consigliabile il classico libro di H.M.Cundy e A.P. Rollett [5] (in cui, tra l'altro, è spiegato esattamente cosa si intende per *poliedro duale*), mentre si suggerisce [6] per chi cerca una trattazione più estesa e rigorosa. Un' ampia panoramica sulle relazioni tra arte matematica, con particolare riferimento ai poliedri, è reperibile in [7].

Conclusioni

In passato sono state proposte varie estensioni del concetto di poliedro basate essenzialmente su repliche ruotate di un prototipo [8] in eventuale combinazione col duale, classificabili quindi come trasformazioni discrete. Le operazioni descritte in questo articolo sono invece, almeno in linea di principio, di tipo continuo e indicano modi differenti con i quali è possibile portare alla luce nuove configurazioni spaziali derivate da questi “bellissimi corpi”.

Possiamo chiederci: è necessaria, o utile, l'introduzione di questi nuovi enti nell'affollata famiglia della geometria dei poliedri? Probabilmente no, ma non è questo il punto. Convinti del valore educativo ed estetico del “gioco della figurazione” come principio generativo del pensiero astratto, vediamo in queste costruzioni un valido elemento di stimolo per riflettere sulla simmetria e sui tanti concetti ad essa collegati, attraverso la via maestra della scoperta e dell'apprendimento attivo.

Nell'era del computer, i poliedri regolari e semi-regolari, vere “gemme” dello spazio tridimensionale, dopo una storia millenaria sono tornati ad essere una preziosa palestra per nuove sperimentazioni geometriche. In apparente contraddizione col famoso principio di Occam, viene allora la tentazione di affermare: “*entia sunt multiplicanda!*”

Ringraziamenti

L'autore è grato a Lucio Loreto per le osservazioni critiche e i preziosi suggerimenti.

Sito-Bibliografia

- [1] <http://inside.mines.edu/~gmurray/ArbitraryAxisRotation/ArbitraryAxisRotation.html>.
 - [2] http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation .
 - [3] Caglioti, G. *Simmetrie infrante, nella scienza e nell'arte*, Clup (1983)
 - [4] Spizzichino, A. *My Way of Playing with the Computer: Suggestions for a Personal Experience in Vector Graphics* in V. Capecchi et al. (Eds.) *Applications of Mathematics in Models, Artificial Neural Networks and Arts*, Springer (2010).
 - [5] Cundy, H.M. e Rollett, A.P. *I modelli matematici*, Feltrinelli (1974).
 - [6] Dedò M. *Forme simmetria e topologia*, Decibel-Zanichelli (1999)
 - [7] Emmer, M. *Visibili Armonie: arte cinema teatro matematica* , Bollati Boringhieri (2006).
 - [8] Spizzichino, A. and Cavazzini, E. *The geometric world of Lucio Saffaro*. In M. Emmer and M. Manaresi (Eds.), *Mathematics, art, technology and cinema*,. Springer Verlag (2003).
-

aldo@computedart.org

