2.7 Численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Схемы Эйлера, Рунге-Кутты, многошаговые схемы. Оценка погрешности численного решения.

Задача Коши: $\frac{dy}{dx} = f(x,y); y\Big|_{x=x0} = y0;$

1. Явный метод Эйлера.

$$\frac{dy}{dx}_{x0} \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + o(\Delta x) \;\; => \;\; y_1 \approx y_0 + \frac{dy}{dx}_{x_0} \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

используя разложение вперед, явный метод Эйлера. Аналогично находим y_2 и т.д.

2. Неявный метод Эйлера (разложение назад):

$$y_1 \approx y_0 + \frac{dy}{dx}_{x1} \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + f(x_1, y_1)(x_1 - x_0);$$

$$f(x_i, y_i) \approx f(x_i, y_{i-1}) + \frac{df}{dy}_{x_i, y_{i-1}} \cdot (y_i - y_{i-1})$$

Релаксационные уравнения: уравнения вида $\frac{dy}{dx} = -\frac{y - f(x)}{a}$, где a считаем малым параметром. Пренебрегая слагаемым, мы пренебрегаем переходным процессом (y=f(x)), со временем установления порядка a. В таких задачах метод Эйлера неустойчив.

3. Схемы Рунге-Кутты, многошаговые схемы

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_{ii}}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx$$

Строится подразбиение отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ на кусочки $\{x_i^1 \ldots x_i^m\}$

Общая формула: $y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{m} C_j f(x_i^j, y(x_i^j))$

Отличия разновидностей метода – в выборе коэффициентов С.
Точность методов – порядка $(\Delta x)^m$

4. Методы Адамса (используют предыдущие шаги)

$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{k} C_j f(x_{i+1-j}, y(x_{i+j-1}))$, где k – некоторая постоянная

В зависимости от C_0, различают явную или неявную схему Адамса.

Def: Совокупность узлов дискретизации – шаблон

Оценка погрешности численного решения

Рассмотрим задачу Lu=f; заменяем ее на дискретную задачу $L_n \widetilde{u}_n = f_n$

2.7

Разностная схема устойчива, если существует C_s>0 (независимая от h – шага сетки): $\|\Delta u_h\| \le C_s \cdot \|\Delta f_h\|$; это означает непрерывную зависимость от входных данных.

Аналогично, вводится понятие аппроксимации дифференциальной задачи с порядком a: $\|\Delta f_h\| \le C_a \|h\|^a$

Сходимость решения разностной задачи: $\|\Delta u_h\| \le C_d \|h\|^d$

Th Лакса (бесполезная): Cd=Cs*Ca, т.е. устойчивая схема обеспечивает сходимость решения с порядком аппроксимации.