1.6 Определители и их свойства. Системы линейных алгебраических уравнений и их исследование. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

1. Определители и их свойства

Определение. Определителем $\{x_1,\ldots, x_n\}$ (x_i \in X, dim X=n) в базисе $\{e_i\}_{i=1..n}$, называется число, определяемое равенством
$det\{x_1 \ldots x_n\} = F^{12..n}(x_1,..,x_n)=f^1 \wedge \ldots \wedge f^n(x_1,..,x_n) =$
[сумма по всем перестановкам $j_1..j_n$] $(-1)^{[j1..jn]}$ ъ$^1{}_{j1}$… ъ$^n{}_{jn}$. (ъ – это кси :-)
Определение транспонированной матрицы. (ъ$^{Ti}{}_k$ =ъ$^k{}_i$)
Св-ва:

1. det C^T=detC (док-во – расписывается det через сумму по перестановкам, и говорится, что четность перестановок одинаковая), поэтому все дальше – только для строк.
2. если поменять 2 строки – меняется знак.
3. если есть 2 одинаковые строки – det=0
4. если вся строка состоит из 0 – det = 0
5. det ЛЗ набора векторов = 0
6. линейность det (следствие линейности $F^{1..n}$)
7. Если к строке/столбцу прибавить лин. комб. других – det не меняется (расписываем по линейности, а оставшиеся куски – содержат одинаков. столбцы.)
8. Разложение по элементам строки/столбца. (там док-во) + определения минора и алг. Дополнения (второе = первое помноженное на $(-1)^{i+k}$)

2. Системы линейных алгебраических уравнений и их исследование

СЛАУ: = система вида
$a^1{}_1$ъ^1+…+$a^1{}_n$ъ^n=b^1
…
$a^m{}_1$ъ^1+…+$a^m{}_n$ъ^n=b^m
ъ – неизвестные, a – коэффициенты, b – свободные члены.
n – кол-во неизвестных, m - кол-во ур-й, r – кол-во лнз ур-й.
Решение – такой набор чисел ъ, который обращает ур-я в равенства.
Определенная система – единственное решение, >1 – неопред.
Наличие решений – совместность. Однородность – b = 0;
Система крамера, если m=n и столбцы a – лнз. (Th крамера – система Крамера имеет ! реш.)
если m!=n, то можно взять r столбцов $a_{ik\ (k=1..r)}$—базис для всех столбцов тогда ъ$_{ik}$, отвечающие этим a – главные неизвестные, остальные свободные=пареметрические.

Th Кронекера-Капелли: система совместна <=>(b \in лин.об. $\{a_1..a_n\}$), при этом если r=n – решение ед., иначе (r<n) – решение беск. много.
Однор. система всегда имеет решение (трив.). Если число ур-й меньше числа неизв – всегда есть нетрив реш.
Альтернатива фредгольма: m=n, тогда: или [однор. имеет только трив решение, а неоднор. Имеет решение при любом b] или [неоднор. имеет нетрив решения, но существует b, при котором нет решений.] (из единственности разложения в базис)
Фундамент. система решений (однор. системы)= система из (n-r) лнз. решений. Любое решение представляется как лин. комбинация фундамент. системы решений. (общее решение)
Общее решение неоднородной = общее решение однородной + частное решение неоднородной.

3. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

1) Метод Крамера:
x_i = - det (C*) / det (C), где C – матрица коэфф-в, а C* -- матрица, в которой i-й столбец заменен на столбец своб. членов.

1.6

2) Метод Гаусса: пишем (C | b) , где b-столбец своб. членов, потом приводим матрицу C к верхнедиагональному виду методом последовательного вычитания одной строки (домноженной на число) из оставшихся, причем число для каждой уменьшаемой строки выбирается так, чтобы в очередном столбце оказывался 0, потом просто к диагональному, а потом к единичному. Получаем уравнения вида $1 * x_i = b_i$, если в процессе получилось $0 * x_1 + 0*x_2 +..+0*x_n = c$ ($c != 0$) – несовместная.

hint1: Для Гаусса не требуется m=n и лнз.
hint2: Гауссом еще можно определители считать и матрицы обращать!