2.1 Математическое моделирование: этапы моделирования, виды математических моделей. Источники и классификация погрешностей результатов моделирования. Корректность вычислительных задач и алгоритмов. Понятия устойчивости и обусловленности.

Мат. моделирование — исследование реального объекта с помощью замены его математическим объектом, имитирующим его свойства. Применимо к жестким системам, т. е. системам с установленными причинно-следственными связями, в которых при одинаковых начальных условиях достигается одинаковый результат.

Этапы моделирования:

1. Построение модели.
2. Аналитическое исследование.
3. Алгоритмизация (разработка программы).
4. Серия вычислительных экспериментов.
5. Анализ и интерпретация результатов.
6. Корректировка (модели, программы, …)

Состав модели:

x - набор входных данных.
y - набор выходных данных.
a - набор параметров.

Виды задач моделирования:

- Прямая задача моделирования: по x и a найти y. (пример — найти траекторию при известной начальной скорости, массе и т. п.).
- Обратная задача: по a и y найти x. (пример — найти начальную скорость при заданной траектории).
- Задача идентификации: по x и y найти a.

Описание погрешностей:

Пусть y - точное решение, y* - приближенное. Сама погрешность неизвестна, рассматривают ее оценку сверху.

$\Delta(y^*) = |y - y^*|$ — абсолютная погрешность.

$\delta(y^*) = \dfrac{\Delta(y^*)}{|y^*|}$ — относительная погрешность

Причины возникновения погрешностей:

1. Приближенность математической модели $\Delta_M(x^*)$.
2. Погрешность входных данных $\Delta_D(x^*)$.
3. Погрешность метода решения $\Delta_C(x^*)$.
4. Погрешность машинного округления $\Delta_R(x^*)$.

Первые два вида — *устранимые*, последние два — *неустранимые*.

Устойчивость, обусловленность, корректность:

2.1

Вычислительная задача *устойчива*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : \Delta(x^*) \le \delta(\varepsilon) \Rightarrow \Delta(y^*) \le \varepsilon$. Т.е. если малые изменения входных данных приводят к малым изменениям решения.

Вычислительная задача называется *корректной* (по Адамару - Петровскому), если выполнены условия:

1. Существование решения;
2. Единственность решения;
3. Решение устойчиво к малым возмущениям входных данных.

Устойчивость задачи ещё не гарантия получения её точного решения, т.к. это осуществимо только при сколь угодно малой погрешности входных данных.

Под *обусловленностью* вычислительной задачи понимают чувствительность ее решения к малым погрешностям входных данных.

Задачу называют хорошо обусловленной, если малым погрешностям входных данных соответствуют малые погрешности решения и плохо обусловленной, если возможны большие погрешности решения.

Число обусловленности – коэффициент возможного возрастания погрешностей в решении по отношению к вызвавшим их погрешностям входных данных.

$$\upsilon_\Delta = \frac{\Delta(y^*)}{\Delta(x^*)}; \upsilon_\delta = \frac{\delta(y^*)}{\delta(x^*)}$$

Пример плохо обусловленной задачи: $t^4-4t^3+6t^2-4t+1=(t-1)^4=0$; $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Если $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \\ -4 \\ 1-10^{-8} \end{pmatrix}$, то часть решений – комплексные числа.