2.15 Аппроксимация функций. Метод наименьших квадратов.

Если какую либо функцию f на промежутке [a, b] приближенно воспроизводят с помощью другой, g(x),то качество этой аппроксимации можно оценивать по-разному.

r(x)=f(x)-g(x)

Если мы одинаково заинтересованы в малом отклонении одной из функции от другой во всех отдельно взятых точках, то за меру приближения принимают их максимальное отклонение в промежутке, т.е. число

$$\delta = \sup_{a \le x \le b} | r(x) |$$

Это называется равномерной аппроксимацией.
Применяют так же аппроксимацию в среднем. Тогда меру приближения определяют как среднее отклонение

$$\delta' = \frac{1}{b-a} \int_a^b | r(x) | dx$$

или как среднеквадратичное отклонение.

$$\delta'' = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b r^2(x) dx}$$

Метод наименьших квадратов
Предположим, что истинная зависимость выражается формулой $y = \varphi(x)$. Проведем измерения в точках x_i. В силу того, что ошибки имеют, как правило, гауссовское распределение, до проведенного наблюдения можно считать, что результаты измерения описываются случайными величинами, плотность вероятности которых имеет вид

$$p_i(y_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(y_i - \varphi(x_i))2}{2\sigma^2})$$

После проведения измерения получим совокупность результатов y_i, i=1...n.
Так как опыты независимы, вероятность того, что совокупность случайных величин примет совокупность значений лежащих в пределах (y_i, y_i + dy_i) определяется

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(y_i - \varphi(x_i))^2}{2\sigma^2}) dy_i = C \exp(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2)$$

Найдем параметры a,b,c,.. функции $\varphi(x; a, b, ...)$, при которых записанная вероятность совокупного получения полученных значений максимальна.
Экспонента в правой части всегда от 0 до 1, так как ее аргумент всегда отрицателен.
Она достигает максимума при минимуме суммы квадратов, стоящих в аргументе.
Рассмотрим производные суммы квадратов отклонений и приравняем их нулю.

2.15

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi(x_i; a, b, c, ...))(\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial a}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi(x_i; a, b, c, ...))(\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial b}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \varphi(x_i; a, b, c, ...))(\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial c}) = 0$$

...

Решая, эту систему, находим, a,b,c,...