1.8

Вопрос 1.8. Задача Коши для системы ОДУ. Существование и единственность решения. Устойчивость.

Ответ:

Система ОДУ n-го порядка: $\mathbf{F}(x, \mathbf{y}', \mathbf{y}'', \ldots , \mathbf{y}^{(n)})=\mathbf{0}$.

Такая система определяет семейство кривых в пространстве, задача Коши фиксирует конкретную кривую.

Частный случай СОДУ: $d\mathbf{y}/dx = F(x, \mathbf{y})$

Для этой системы выполняются все правила для ОДУ первого порядка:

Если в окрестности точки $(x_o, \mathbf{y}_o)$ все функции Fi непрерывны по совокупности переменных $(x, \mathbf{y})$ и имеют ограниченные производные по переменным $\mathbf{y}$, то задание начальных значений $\mathbf{y}(x)= \mathbf{y}_o$, определяет одно, вполне определенное решение системы.

Обыкновенное дифференциальное уравнение *n*-го порядка ::= $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$ (1).
Порядок ОДУ ::= порядок наивысшей входящей производной.
Решение ОДУ на $<a, b>$ ::= функция $\varphi(x)$, такая, что $\varphi(x)$ *n* раз дифференцируема на $<a, b>$ и $\forall x \in <a, b>\ F(x, \varphi, \varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n)})=0$.
Нормальная форма записи ОДУ — $y^{(n)}=f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ (2).
Задача Коши ::= по точке $(x_0, y_0, \ldots, y_n)$ найти решение уравнения (1), такое что $y(x_0)=y_0, \ldots, y^{(n)}(x_0)=y_n$.
Пусть $f, \partial f/\partial y, \partial f/\partial y', \ldots \partial f/\partial y^{(n-1)}$ непрерывны в некоторой окрестности x_0, то в этой окрестности существует и единственно решение задачи Коши для (2).
Условие Липшица в области G ($f \in Lip_y(G)$)::= $\exists L>0\ \forall (x,y_1), (x,y_2) \in G\ |f(x,y_1)- f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$.
Прямоугольник R ::= $\{(y, x) \mid \|y-y_0\|\le a$ *u* $|x-x_0|\le b,\ a, b>0\}$
(Коши, Пикар) Пусть $F \in Lip_y(R)$ и $\|F(y, x)\|\le M$ тогда при $|x-x_0|<h$ ($h=min\{a, b/M\}$) существует решение задачи Коши.
Общее решение ОДУ — множество функций, содержащее все решения ОДУ.
