1.11

Вопрос 1.11. Случайные величины и их функции распределения. Математическое ожидание и дисперсия. Локальная предельная теорема.

Ответ:

Алгебра событий (в теории вероятностей) — алгебра подмножеств пространства элементарных событий Ω, элементами которого служат элементарные события.
Как и положено алгебре множеств алгебра событий содержит невозможное событие (пустое множество) и замкнута относительно теоретико-множественных операций, производимых в конечном числе. Достаточно потребовать, чтобы алгебра событий была замкнута относительно двух операций, например, пересечения и дополнения, из чего сразу последует её замкнутость относительно любых других теоретико-множественных операций. Алгебра событий, замкнутая относительно счётного числа теоретико-множественных операций, называется сигма-алгеброй событий.

Аксиомы Колмогорова
Пусть Ω — множество элементов ω, которые называются элементарными событиями, а $\mathcal{F}$ — множество подмножеств Ω, называемых случайными событиями (или просто — событиями), а Ω — пространством элементарных событий.

- *Аксиома I* (алгебра событий). $\mathcal{F}$ является алгеброй событий.
- *Аксиома II* (существование вероятности событий). Каждому событию x из $\mathcal{F}$ поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\mathbf{P}(x)$, которое называется вероятностью события x.
- *Аксиома III* (нормировка вероятности). $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
- *Аксиома IV* (аддитивность вероятности). Если события x и y не пересекаются, то $\mathbf{P}(x+y) = \mathbf{P}(x) + \mathbf{P}(y)$.

Совокупность объектов $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, удовлетворяющая аксиомам I—IV, называется вероятностным пространством (у Колмогорова: поле вероятностей).

Случайная величина — это величина, которая принимает в результате опыта одно из множества значений, причём появление того или иного значения этой величины до её измерения нельзя точно предсказать.

Формальное математическое определение следующее: пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, тогда случайной величиной называется функция $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, измеримая относительно $\mathcal{F}$ и борелевской σ-алгебры на $\mathbb{R}$. Вероятностное поведение отдельной (независимо от других) случайной величины полностью описывается её распределением.

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, где

- Ω — это произвольное множество, элементы которого называются элементарными событиями, исходами или точками;
- $\mathfrak{A}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, называемых (случайными) событиями;
- $\mathbb{P}$ — вероятностная мера или вероятность, т.е. сигма-аддитивная конечная мера, такая что $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Замечания

- Элементарные события (элементы Ω), по определению, — это исходы случайного эксперимента, из которых в эксперименте происходит ровно один.
- Каждое случайное событие (элемент $\mathfrak{A}$) — это подмножество Ω. Говорят, что в результате эксперимента произошло случайное событие $A \subseteq \Omega$, если

(элементарный) исход эксперимента является элементом A.
Требование, что $\mathfrak{A}$ является сигма-алгеброй подмножеств Ω, позволяет, в частности, говорить о вероятности случайного события, являющегося объединением счетного числа случайных событий, а также о вероятности дополнения любого события.

Функция распределения

Пусть дано вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, и на нём определена случайная величина X с распределением $\mathbb{P}^X$. Тогда функцией распределения случайной величины X называется функция $F_X \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$, задаваемая формулой:
$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) \equiv \mathbb{P}^X\left((-\infty, x]\right)$.
То есть функцией распределения (вероятностей) случайной величины X называют функцию $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X \leqslant x\}$, то есть события, состоящего только из тех элементарных исходов, для которых $X(\omega) \leqslant x$.

а **функция плотности распределения** – такая большая нуля функция, что 1. ее интеграл по вещественной оси равен единице, 2. интеграл по любому отрезку [a; b] равен вероятности события [a; b].

МатОжидание – $E(X) = \int xp(x)$, где p(x) – фпрв.
Дисперсия – E(X-E(X))2

Локальных предельных теорем много: например, Лапласа

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если в схеме Бернулли n стремится к бесконечности, p (0 < p < 1) постоянно, величина
$x_m = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$ ограничена равномерно по m и n $(-\infty < a \le x_m \le b < +\infty)$, то

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)(1 + \alpha_n(m))$$

где $|\alpha_n(m)| < \dfrac{c}{\sqrt{n}}$, c > 0, c — постоянная.
Приближённую формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left(-\frac{x_m^2}{2}\right)$$

рекомендуется применять при *n > 100* и *npq > 20.*