1.9

1.9 Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Метод вариации постоянных для решения неоднородных уравнений.

Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения. Фундаментальная система решений.

Опр. Линейное обыкновенное ДУ: $x' = Ax + g$, где $x = \vec{x}(t)$, $g = \vec{g}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица постоянных коэффициентов.

Опр. Матричный степенной ряд: $\sum_{k=0}^{\infty} q_k A^k$, $q_k \in C$, $A = (a_{ij})$ -матрица $n \times n$.

Опр. Частичная сумма степенного ряда $S_n = \sum_{k=0}^{n} q_k A^k$

Опр. Матричный степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q_k A^k$ сходится и его сумма равна матрице S, если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ сходится к S по норме: $\lim_{n\to\infty} \|S_n\| = \|S\|$.

Утв.1 Пусть ρ - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{i=0}^{\infty} q_i t^i$ и $\|A\| < \rho / n$, где A - матрица $n \times n$. Тогда матричный ряд $\sum_{i=0}^{\infty} q_k A^k$ сходится.

▸ *Доказательство:* Т.к. $\|A^k\| < n^{k-1} \|A\|^k$, то ряд $\sum_{i=0}^{\infty} |q_i| \|A^i\| < \sum_{i=0}^{\infty} |q_i| n^{i-1} \|A\|^i \le \sum_{i=0}^{\infty} |q_i| t^i$ сходится. Значит сходится и исходный матричный ряд. ◂

Опр. Экспонента матрицы A: $\exp(A) \equiv e^A \equiv E + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$

Свойства экспоненты:

1. Пусть $A = SBS^{-1}$. Тогда $e^A = Se^B S^{-1}$.
2. Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Тогда $e^A = \begin{pmatrix} e^{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{a_{nn}} \end{pmatrix}$
3. Пусть $AB = BA$. Тогда $e^{A+B} = e^A e^B$.

Теорема 1. e^{At} - фундаментальная матрица (система решений) системы $x' = Ax$.

▸ *Доказательство:*

Докажем, что $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{A(t+\Delta t)} - e^{At}}{\Delta t}$ существует. Для этого рассмотрим разность $e^{A(t+\Delta t)} - e^{At} = (e^{A\Delta t} - E)e^{At}$. Рассмотрим правую часть этого равенства: $\frac{e^{A\Delta t} - E}{\Delta t} = A + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{A^k}{k!} (\Delta t)^{k-1}$. Ряд в правой части сходится равномерно по Δt, поэтому возможен предельный переход и $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{A\Delta t} - E}{\Delta t} = A$. Следовательно $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(e^{A\Delta t} - E)e^{At}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{A\Delta t} - E}{\Delta t} e^{At} = Ae^{At}$. Но при этом $\det(e^{At}\big|_{t=0}) = 1$, что доказывает, что матрица e^{At} как решение матричного уравнения $x' = At$, будет фундаментальной матрицей. ◂

Метод вариации произвольных постоянных для решения неоднородных уравнений.

Выше мы говорили про однородные уравнения. Теперь перейдем к неоднородным, т.е. уравнениям вида:

1.9

$x' = A(t)x + g(t)$,

где $x \in \Re^n$, $A = (a_{i,j})$, $g = (g_1, \dots g_n)^T$, $A, g \in C((\alpha,\beta))$, $\Phi(t) = (\vec{\phi}_1 \dots \vec{\phi}_n)$-фундаментальная матрица $x' = Ax$. При этом, если $x(t) = \varphi(t) + y(t)$, где $\varphi(t)$-решение $x' = A(t)x + \varphi(t)$, а $y(t)$-решение $x' = Ax$, то $x(t)$ так же решение системы $x' = A(t)x + g(t)$ и наоборот, если $x(t)$-решение, то $y(t)$-решение однородной системы. Благодаря этому, множество решений нашей неоднородной системы $S = \{M + \varphi\}$, где M - множество решений однородной системы. Можно так же показать, что M - n-мерное ЛП, а S - n-мерное аффинное пространство. При этом важен следующий факт: если $\varphi_1 ... \varphi_n$ - базис M, а φ-решение неоднородной системы, то $S = \{C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n + \varphi, C_i \in C\}$.

Справедливо следующее утверждение: $\exists a_i(t) \in C((\alpha,\beta)) : \varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i$, где φ-решение неоднородной системы, а $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$-ФСР однородного уравнения. Причем в качестве $a = (a_1 ... a_n)^T$ можно брать любую первообразную $\Phi^{-1}(t)g(t), \Phi(t) = (\vec{\varphi}_1 ... \vec{\varphi}_n)$. Это утверждение называется методом Лагранжа решения неоднородных ОДУ.

Формула вариации произвольных постоянных базируется на этом подходе и выглядит следующим образом:

1. $x(t) = \Phi(t)(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau) g(\tau) d\tau)$ - общий случай.
2. $x(t) = e^{A(t-t_0)}(x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} g(\tau) d\tau)$-случай матрицы A с постоянными коэффициентами.
3. $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} g(\tau) d\tau$ -для постоянной матрицы A, $x(t_0) = x_0$, $t_0 = 0$

При этом матрица $\Phi(t)$ нормированна в точке t_0, а именно $\Phi(t_0) = E$. Нормировка производится путем домножения произвольной фундаментальной матрицы справа на $\Phi^{-1}(t_0)$.

Алгоритм такой (типа того, что нам читали):

1. Находим ФСР для однородной системы.
2. Выбираем функции $a = (a_1 .... a_n)^T$.
3. Подставляем их в наше уравнение.
4. Методом неопределенных коэффициентов находим константы (произвольные постоянные).

   Или, по Чернышеву:

1. Находим ФСР однородной системы.
2. Нормализуем $\Phi(t)$ в точке t_0.
3. Используем предложенную выше формулу.

Дополнительный полезный материал:

- **Про вычисление** e^{At}. Эту процедуру описывает и обосновывает т.н. теорема Жордана: Любая матрица A подобна матрице $J = diag(J_1 ... J_m)$, где $J_m = \lambda_k E_{r_k} + Z_k$. λ_k - собственное число матрицы A, E_{r_k} - единичная матрица размера $r_k \times r_k$, а Z_k - матрица, все диагонали которой кроме одной состоят из 0, а одна диагональ, расположенная выше главной, состоит из единиц. Проще говоря, $A = SJS^{-1}$. Благодаря этой теореме, e^{At} можно представить в виде: $e^{At} = e^{SJS^{-1}} = Sdiag(e^{J_1 t}, \dots e^{J_m t})S^{-1}$, причем $e^{J_k t} = e^{\lambda_k E_{r_k} + Z_k} = e^{\lambda_k t} E_{r_k} e^{Z_k t}$.
- **Матричный метод интегрирования системы** $x' = Ax$ **© Эйлер**. Идея: предположить, что решение этой системы записывается в виде $e^{\lambda_i t} P_i(t)$, где $P_i(t)$-полином с векторными коэффициентами по t. Благодаря этому предположению можно использовать метод неопределенных коэффициентов (векторных), а именно $P_i(t) = \sum_k \vec{c}_{ik} t^k$ и подставить все это хозяйство в наше уравнение $x' = Ax$.

1.9

- **Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка:**
  $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$, где $p_i(x)$ — произвольные функции. Оно эквивалентно записи:
  $$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ \ldots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f - a_n y_n - \ldots - a_1 y_{1n} \end{cases}$$
  то есть системе из *n* линейных дифуров первого порядка.