2.10

2.10. Методы построения разностных схем для задач математической физики. Интегро-интерполяционный метод.

Аппроксимация дифференциальных задач может проводиться несколькими способами. Например, аппроксимация с помощью рядов Тейлора или аппроксимация по методу конечных объемов (интегро-интерполяционный метод).
Окружим узел под номером i на оси x прямоугольным параллелепипедом, так что границы его проходят между узлами i и i+1 - обозначим i+0.5 и между узлами i-1 и i - обозначим i-0.5
Запишем закон сохранения в интегральной форме.

$$\left(\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \rho C_p T \Delta s dx\right)^{n+1} - \left(\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \rho C_p T \Delta s dx\right)^{n} =$$

$$\left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \rho C_p T u \Delta s dt\right)_{i-0.5} - \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \rho C_p T u \Delta s dt\right)_{i+0.5} + \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} q \Delta s dt\right)_{i-0.5} - \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} q \Delta s dt\right)_{i+0.5} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \rho Q \Delta s dx dt$$

Приближенно записывая каждый интеграл, получим

$$\left(\rho C_p T\right)_i^{n+1} \Delta s \Delta x - \left(\rho C_p T\right)_i^{n} \Delta s \Delta x =$$

$$\left(\rho C_p T u\right)^n{}_{i-0.5} \Delta s \Delta x - \left(\rho C_p T u\right)^n{}_{i+0.5} \Delta s \Delta x + q^n{}_{i-0.5} \Delta s \Delta x - q^n{}_{i+0.5} \Delta s \Delta x + \left(\rho Q\right)_i^n \Delta s \Delta x \Delta t$$

Получим,

$$\frac{\left(\rho C_p T\right)_i^{n+1} - \left(\rho C_p T\right)_i^{n}}{\Delta t} = \frac{\left(\rho C_p T u\right)^n{}_{i-0.5} - \left(\rho C_p T u\right)^n{}_{i+0.5}}{\Delta x} + \frac{q^n{}_{i-0.5} - q^n{}_{i+0.5}}{\Delta x} + \left(\rho Q\right)_i^n$$

$$\rho, C_p, u = const(x,t)$$

$$\rho C_p \frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta t} = \rho C_p u \frac{T_{i+0.5}{}^{n+1} - T_{i-0.5}{}^{n}}{\Delta x} - \frac{q_{i+0.5}{}^{n} - q_{i-0.5}{}^{n}}{\Delta x} + \rho Q_i{}^n$$

$$T_{i-0.5} \approx \frac{T_{i-1} + T_i}{2}$$

$$T_{i+0.5} \approx \frac{T_i + T_{i+1}}{2}$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$q_{i-0.5} \approx -\lambda_{i-0.5} \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x} = -\lambda \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta x}, \lambda = const(x,t)$$

$$q_{i+0.5} \approx -\lambda \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x}$$

Получим

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^{n}}{\Delta x} = -u \frac{T^n{}_{i+1} - T_{i-1}{}^n}{2\Delta x} + \left(\frac{\lambda}{\rho C_p}\right) \frac{T^n{}_{i+1} - 2T_i^n + T_{i-1}{}^n}{\Delta x^2} + \frac{Q_i{}^n}{C_p}$$