1.01

**Кратные, поверхностные и криволинейные интегралы. Формулы Грина, Стокса и Остроградского**

## 1. Кратные интегралы

### *1.1. двойной интеграл*

Def : Интегральной суммой функции f(x,y) в области P называется $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) P_i$ , где $P_i$ – площадь фигуры ($P_i$), ($\xi_i$, $\eta_i$) – произвольная точка данной области.
Пусть $\lambda$ – наибольший из диаметров областей ($P_i$).
Def : Конечный предел I интегральной суммы $\sigma$ при $\lambda \to 0$ называется двойным интегралом функции f(x,y) в области P и обозначается $I = \iint_{(p)} f(x,y) dP$ .

Двойной интеграл является прямым обобщением понятия простого интеграла на случай функции двух переменных. Физический смысл – объем цилиндрического бруса.

Условие существования двойного интеграла

1. Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda \to 0}(S - s) = 0$, где S и s – верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно.
2. Всякая непрерывная в области P функция f(x,y) интегрируема.
3. Если ограниченная функция имеет f(x,y) имеет разрывы лишь на конечном числе кривых с площадью 0, то она интегрируема.

Свойства двойного интеграла
Далее всюду предполагается интегрируемость функций f и g на (P).

1. Существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа кривых с площадью 0.
2. Пусть (P) = (P’) + (P’’), тогда $\iint_P fdP = \iint_{P'} fdP' + \iint_{P''} fdP''$ .
3. $\iint (\lambda f + \mu g) dP = \lambda \iint fdP + \mu \iint gdP$ .
4. Если f(x,y)≤g(x,y) на (P), то $\iint fdP \le \iint gdP$ .
5. $\left| \iint fdP \right| \le \iint |f| dP$ (если f интегрируема, то |f| также интегрируема).
6. Если m ≤ f(x,y) ≤ M, то $mP \le \iint fdP \le MP$ или найдется такое число $\mu$, m ≤ $\mu$ ≤ M, что $\iint fdP = \mu P$ .

Условия существования и свойства легко переносятся на случай многократных интегралов.

### *1.2. тройной интеграл*

Def : Интегральной суммой функции f(x,y,z) в области V называется $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$ , где $V_i$ –объем области ($V_i$), ($\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$) – произвольная точка данной области.
Пусть $\lambda$ – наибольший из диаметров областей ($V_i$).
Def : Конечный предел I интегральной суммы $\sigma$ при $\lambda \to 0$ называется тройным интегралом функции f(x,y,z) в области V и обозначается $I = \iiint_{(V)} f(x,y,z) dV$ .

Физический смысл – масса тела объема (V), если f(x,y,z) считать функцией плотности в точке.

### *1.3. n-кратный интеграл*

Def : Для простейшей n-мерной области – n-мерного прямоугольного параллелепипеда $[a_1,b_1;a_2,b_2;...;a_n,b_n]$ объемом называется произведение его измерений $(a_1- b_1)(a_2- b_2)\ldots(a_n - b_n)$.

1.01

Рассматриваются только те тела, для которых n-мерный объем существует (он заведомо существует для тел, ограниченных гладкими или кусочно-гладкими поверхностями). Простейшие n-мерные области: n-мерный симплекс ($x_1 \geq 0,...,x_n \geq 0$; $x_1+...+x_n \leq h$) и n-мерная сфера ($x_1^2+...+x_n^2 \leq r^2$).
Def : Аналогично рассмотренным выше случаям строится интегральная сумма функции $f(x_1,...,x_n)$ в n-мерной области (V), предел которой при стремлении к нулю шага разбиения $\lambda$ будет называться n-кратным интегралом $I = \overbrace{\int ... \int}^{n}_{(V)} f(x_1,...,x_n) dx_1 ... dx_n$ .

## 2. Поверхностные интегралы

### *2.1. первого рода*

Def : Пусть в точках некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности (S), ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция f(x,y,z). Интегральной суммой функции f(x,y,z) в области S называется $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) S_i$ , где $S_i$ – площадь фигуры ($S_i$).
Пусть $\lambda$ – наибольший из диаметров поверхностей ($S_i$).
Def : Конечный предел I интегральной суммы $\sigma$ при $\lambda \to 0$ называется поверхностным интегралом первого типа функции f(x,y,z) в области S и обозначается $I = \iint_{(S)} f(x,y,z) dS$ .

Пусть задана гладкая поверхность S: r=r(u,v)={x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v); (u,v)∈ $\overline{D}$ }

D – квадрируемая (т.е. поверхность, имеющая площадь) плоская область. E,G и F - коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S. $E = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2$ , $F = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)$ , $E = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$ . Пусть на множестве точек r(u,v) поверхности S задана функция

$$\Phi( r(u,v))= \Phi( x(u,v), y(u,v), z(u,v)).$$

Def 1: Поверхностный интеграл первого рода $\iint_S \Phi(x,y,z) dS$ сводится к обыкновенному двойному следующим образом: $\iint_S \Phi(x,y,z) dS = \iint_D \Phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{EG - F^2} dudv$ .

### *2.2. второго рода*

Рассмотрим двустороннюю поверхность (S), гладкую или кусочно-гладкую, и фиксируем какую-либо из двух ее сторон (это равносильно выбору на поверхности определенной ориентации). Предположим, что поверхность задана явным уравнением z=z(x,y) на области (D). Тогда выбор возможен между верхней и нижней сторонами поверхности. В первом случае замкнутой кривой на поверхности приписывается направление против часовой стрелки, если смотреть сверху, в втором – обратное направление. Направление обхода контура проецируемой фигуры определяет направление обхода контура проекции. Направление это совпадает с вращением против часовой стрелки (т.е. отвечает ориентации самой плоскости xy), если фиксирована была верхняя сторона поверхности (S) – тогда площадь проекции берем со знаком плюс. В случае нижней стороны вращение будет обратным – площадь проекции берется со знаком минус.

Составим интегральную сумму так: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) D_i$ , где Di – площадь проекции на плоскость xy элемента (Si), снабженная знаком по указанному выше правилу. Пусть $\lambda$ – наибольший из диаметров поверхностей ($S_i$).
Def : Конечный предел I интегральной суммы $\sigma$ при $\lambda \to 0$ называется поверхностным интегралом второго типа от f(x,y,z)dxdy, распространенным на выбранную сторонцу поверхности S, и обозначается $I = \iint_{(S)} f(x,y,z) dxdy$ (dxdy

говорит о площади проекции элемента поверхности на плоскость xy). Если вместо плоскости xy проецировать элементы поверхности на плоскость yz или zx, то получим два других поверхностных интеграла второго типа: $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dydz$ или $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)dzdx$. Часто использую соединение интегралов всех этих видов: $\iint\limits_{(S)} Pdydx + Qdzdx + Rdxdy$, где P,Q,R – функции от (x,y,z), определенные в точках поверхности (S).

NB!!! Во всех случаях поверхность (S) предполагается <u>двусторонней</u> и интеграл распростроняется на определенную ее сторону.

## 3. Криволинейные интегралы

Аналогичны поверхностным интегралам, только рассматривается не поверхность, а кривая.

### *3.1. первого рода*

<u>Def :</u> Интегральной суммой функции f(x,y) в области P называется $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i$ , где $\sigma_i$ – длина дуги кривой (K).

$\lambda=\max(\sigma_i)$.

<u>Def :</u> Конечный предел I интегральной суммы $\sigma$ при $\lambda\to 0$ называется криволинейным интегралом первого типа функции f(x,y) на кривой (K) и обозначается $I = \int\limits_{(K)} f(x,y)ds$ , где s говорит о длине дуги ds кривой (K). Аналогично можно распростронить это понятие на пространственную кривую: $I = \int\limits_{(K)} f(x,y,z)ds$.

Пусть в трехмерном пространстве задана спрямляемая ориентированная кривая $\gamma$, r(s)={x(s), y(s), z(s); $0\le s\le S$} - ее представление, где за параметр взята переменная длина дуги s, A = r(0) и B = r(S) - начальная и конечная точки этой кривой.

Криволинейный интеграл первого рода от функции F по кривой AB можно свести к обыкновенному:

$$\int\limits_{AB} F(x,y,z)ds = \int\limits_{0}^{S} F(x(s), y(s), z(s))ds .$$

### *3.2. второго рода*

Сумма строится так же, только значение в точке умножается не на длину дуги, а на длину ее проекции. Как и в случае с поверхностным интегралом, определяем направление кривой.

<u>Def :</u> Конечный предел I интегральной суммы $\sigma$ при $\lambda\to 0$ называется криволинейным интегралом второго типа функции f(x,y)dx, взятым по кривой или пути (AB), и обозначается $I = \int\limits_{(AB)} f(x,y)dy$.

Важно направление кривой: $\int\limits_{(AB)} f(x,y)dy = -\int\limits_{(BA)} f(x,y)dy$.

Интеграл для пространственной кривой: $\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dy$.

Интеграл общего вида: $\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz$

## 4. Формула Грина

Связывает двойной и криволинейный интегралы.

Пусть G - плоская область и ее граница L является кусочно-гладким контуром. Пусть в замкнутой области $\overline{G}$ заданы функции P(x,y), Q(x,y), непрерывные на $\overline{G}$ вместе со своими частными производными. Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{G} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{L} Pdx + Qdy .$$

1.01

**5. Формула Стокса**

Пусть S простая гладкая двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L. Формула Стокса: $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy + (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dzdx$. Или если заменить поверхностный интеграл второго рода на поверхностный интеграл первого рода, то получим $\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$, где cosα, cosβ, cosγ означают направляющие косинусы нормали, отвечающей выбранной стороне поверхности.

Полагая $\vec{a} = (P, Q, R)$, эту формулу можно переписать так: $\int_L \vec{a}d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{a}d\vec{S}$, т.е. циркуляция векторного поля по контуру L равна потоку вихря этого поля через поверхность S, ограниченную контуром L.

**6. Формула Остроградского**

Аналог формулы Грина для тройных интегралов.

Пусть тело V ограничено кусочно-гладкой поверхностью S, тогда $\iiint_V (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \iint_S Pdxdy + Qdzdx + Rdxdy$, или, если заменить поверхностный интеграл второго рода на поверхностный интеграл первого рода, $\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$

.

Полагая $\vec{a} = (P, Q, R)$, эту формулу можно переписать в виде

$$\iiint_G div\vec{a}dxdydz = \iint_{S+} \vec{a}d\vec{S}^+$$

т.е. интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.

NB! Формулы Грина, Стокса и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. При этом формула Грина относится к случаю двумерного пространства, формула Стокса – к случаю двумерного «кривого» пространства, а формула Остроградского – к случаю трехмерного пространства.

На основную формулу интегрального исчисления $\int_a^b f'(x) = f(b) - f(a)$ можно смотреть как на некоторый аналог этих формул для одномерного пространства.