2.13

2.13 Вариационная формулировка краевых задач. Метод конечных элементов: основные концепции, этапы реализации.

Внимание: все производные в тексте следует считать ЧАСТНЫМИ.

В методе конечных разностей отправной точкой для получения приближенного решения является дифференциальная краевая задача. Однако искомое поле можно получить и из решения соответствующей вариационной задачи. На ее численном решении основан метод конечных элементов (МКЭ).

Рассмотрим двумерную стационарную задачу теплопроводности в области *D* произвольной формы. Границу области обозначим *L*.

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\lambda\frac{dT}{dy}\right)+q_v=0 \quad (1)$$

при граничных условиях третьего рода

$$\left[\lambda\frac{dT}{dn}+\alpha T\right]_L=q_s \qquad (2)$$

где λ – теплопроводность, α – коэффициент теплоотдачи на границе, q_v и q_s – объемная и поверхностная плотности мощности источников теплоты.

Многие краевые дифференциальные задачи эквивалентны задачам отыскания функций, минимизирующих специально сконструированный функционал. Для рассматриваемого случая задача решения уравнения (1) с граничным условием (2) эквивалентна задаче определения функции *T(x,y)*, минимизирующей следующий функционал:

$$I\big(T(x,y)\big)=\int\limits_D\left[\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right)^2+\lambda\left(\frac{dT}{dy}\right)^2-2q_vT\right]dxdy+\int\limits_L\left(\alpha T^2-2q_sT\right)dl \qquad (3)$$

1. Метод нахождения решения.

Приближение функции разыскивается в виде:

$$T(x,y)\approx\sum_{m=1}^{M}a_mf_m(x,y) \qquad (4)$$

где a_m – неизвестные постоянные коэффициенты, а $f_m(x,y)$ – известные функции. Подставляя в функционал и интегрируя получаем $I = I(a_1, ..., a_M)$, и задача сводится к отысканию минимума обычной функции нескольких переменных. Из системы уравнений:

$$\frac{dI}{da_m}=0,\quad m = 1 .. M$$

находят коэффициенты a_m, и подставляя их в (4) находят приближенное значение *T(x,y)*.

2. Выбор координатных функций.

Область *D* разбивается на *N* подобластей, называемых *элементами*. На границах элементов фиксируют *M* узловых точек. Число членов в разложении (4) равно числу узловых точек. Свойства f_m

- $f_m(x,y)=\begin{cases}1, i=m\\0, i\neq m\end{cases}$
- f_m может быть отлична от нуля только в элементах, содержащих m-ый узел.

При таком выборе *fm* любой неизвестный коэффициент a_m равен приближенному значению температуры u_m в *m*-ой узловой точке. Действительно:

$$T(x_m,y_m)\approx u_m=\sum_{\nu=1}^{M}a_\upsilon f_\nu(x_m,y_m)=a_mf_m(x_m,y_m)=a_m$$

3. Функции формы элемента.

Координатные функции $f_m(x,y)$ строятся на основе так называемых функций формы элемента. Каждая функция формы элемента равна 1 в одной узловой точке и 0 во всех остальных узловых точках. Вне элемента все его функции формы считаются равными нулю. Координатная функция $f_m(x,y)$ принимается равной функции формы того элемента, для в котором лежит точка *(x,y)*.

4. Индексная матрица.

2.13
Соответствие номеров узлов элементам принято описывать при помощи следующей матрицы.

Номер элемента	Номера узлов	Признак принадлежности сторон границе.
1	i, j, k	0, 1 или 2
..		
n		

Признак принадлежности сторон границе принимает значение 0, если стороны элемента не прилегают к внешней границе; 1, если граничной является сторона между узлами *i* и *j*; значение 2, если граничными являются две стороны – между узлами *i* и *j* и между узлами *j* и *k*.

5.Система уравнений МКЭ.
Представим функционал (3) в виде суммы интегралов по всем элементам на которые разбита область *D*:

$$I = \sum_{n=1}^{N} I^{(n)}$$

Условия минимума функционала:

$$\frac{d}{du_m}\left(\sum_{n=1}^{N} I^{(n)}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{dI^{(n)}}{du_m} = 0, \quad m = 1\ldots M$$

Распределение температуры $u^{(n)}(x,y)$ в любом элементе зависит только от температур ui, u_j и u_k в узлах этого элемента. Соответственно и значение функционала $I^{(n)}$ зависит только от этих температур.

Система формируется следующим образом. Перебираются все элементы. Для *n*-ого элемента три производных от функционала этого элемента по его узлам заносятся в левые части соответствующих трех уравнений системы.

7. Локальная и глобальная матрицы.
Составление матрицы системы происходит в 2 этапа. Происходит формирование локальной матрицы и вектор-столбца для каждого элемента, а на их основе формируется глобальная матрица. В каждом элементе вводится локальная нумерация узлов.

$$u_i = u_1^{(n)}, \quad u_j = u_2^{(n)}, \quad u_k = u_3^{(n)}$$

Соответствие между локальными и глобальными номерами элемента задается с помощью индексной таблицы. Выражения для частных производных функционала $I^{(n)}$ в *n*-ом элементе можно записать следующим образом:

$$\frac{dI^{(n)}}{d\vec{u}} = \mathbf{g}^{(n)} \cdot \mathbf{U}^{(n)} - \varphi^{(n)} \qquad \frac{dI^{(n)}}{d\vec{u}} = \begin{bmatrix} \frac{dI^{(n)}}{du_i} \\ \frac{dI^{(n)}}{du_j} \\ \frac{dI^{(n)}}{du_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dI^{(n)}}{du_1^{(n)}} \\ \frac{dI^{(n)}}{du_2^{(n)}} \\ \frac{dI^{(n)}}{du_3^{(n)}} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U}^{(n)} = \begin{bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{bmatrix}$$

Формирование глобальной матрицы и глобального индекс столбца происходит на основе соответствия, задаваемого индексной таблицей. Работа алгоритма происходит следующим образом. Изначально все элементы глобальной матрицы и столбца обнуляются. Затем, после определения локальной матрицы и вектор-столбца их элементы складываются с элементами глобальной матрицы и глобального столбца. Пример: имеется локальная матрица для элемента *n*

	1	2	3
1	g_{11}	g_{12}	g_{13}
2	g_{21}	g_{22}	g_{23}
3	g_{31}	g_{32}	g_{33}

И пусть для данного элемента задано соответствие локальных и глобальных номеров: 1 – *i*, 2 – *j*, 3 – *k*. Тогда, например, элемент g_{31} необходимо прибавлять к элементу G_{ki} глобальной матрицы.