2.14 Статистическое оценивание параметров. Точечные и интервальные оценки. Проверка статистических гипотез.

Производится прямое измерение случайной величины, истинное значение которой равно a. Проводим наблюдения и получаем результаты $y_1, ..., y_n$.

Замечание: измерение – несколько наблюдений
наблюдение – единичный измерительный акт.
Бывают измерения с однократным наблюдением.

Будем считать, что результаты измерения до их проведения описываются совокупностью одинаково распределенных статистически независимых случайных величин $Y_1,...,Y_n$. Плотность распределения каждой из случайных величин будем считать известной – f(a,b,...,y). Тогда совокупность результатов называется группой (независимой выборкой) объема n из распределения f(a,b,...,y).
Оценки могут быть двух видов – точечные(когда дается одно число) и интервальные(когда дается интервал). Нам нужны интервальные оценки но они строятся на основе точечных.

Точечные оценки.

Далее сузим задачу до нормального распределения. $y_1, ..., y_n$ - независимая выборка объема n из $N(a,\sigma^2)$. Наиболее распространенный метод получения точечных оценок – метод максимального правдоподобия.
Идея его в том, чтобы построить ФПРВ(функцию плотности распределения вероятности) n-мерного вектора, называемую функцией правдоподобия. При помощи построенной ФПРВ можно предсказать вероятность наблюдения различных комбинаций значений.
В эту ФПРВ будут входить a и σ^2. В качестве точечных оценок найдем те, при которых вероятность появления полученных значений $y_1, ..., y_n$ была бы максимальной.

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}} \exp(-\frac{(y_i - \tilde{a})^2}{2\tilde{\sigma}^2})$$

$$\ln L = C - \frac{n}{2}\ln\tilde{\sigma}^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \tilde{a})^2}{2\tilde{\sigma}^2}$$

Записывая $\frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{a}} = 0$ и $\frac{\partial \ln L}{\partial \tilde{\sigma}^2} = 0$, находим

$$\tilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$$

2.14

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{a})^2$$

Введем случайную величину

$$\tilde{A} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_n$$

$\tilde{A}$ имеет распределение $N(a, \frac{\sigma^2}{n})$

$\sigma_{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ или другое обозначение $\sigma_{\bar{y}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

У нас до сих пор четко различались экспериментальные данные и соответствующие им случайные величины. Но в большинстве книг по физике и инженерному делу

$E(\tilde{A}) = a$ свойство несмещенности оценки

$E(\bar{y}) = a$

$E(\tilde{\sigma}^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$ ассимптотически несмещенная оценка

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{a})^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{\sigma}^2$ - вводится такая оценка

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ - выборочное среднее

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$ выборочная дисперсия

Интервальные оценки

Рассмотрим доверительный интервал для среднего.

$| \bar{y} - a | \le \Delta_r(\alpha)$

$-\Delta_r(\alpha) \le a - \bar{y} \le \Delta_r(\alpha)$

Построенный интервал накрывает а с вероятностью α , которая называется доверительной вероятностью. Интервал называется доверительным.

Принято брать $\alpha = 0.95$ или $\alpha = 0.99$.

Методика построение доверительного интервала.

Общий прием такой. Из оценок и неизвестных параметров сооружают функцию, такую, что распределения описывающей ее случайной величины не зависит от неизвестных параметров.

Пример.

2.14

$$T = \frac{\ddot{y} - a}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}}$$

Это имеет распределение Стьюдента с n-1 степенью свободы
Тогда

$$\left| \frac{\ddot{y} - a}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} \right| \le t_{n-1, \frac{1+\alpha}{2}}$$

Доверительный интервал для а с вероятностью α . Обозначим $\varepsilon = 1 - \alpha$

$$\ddot{y} \pm t_{n-1, \frac{1+\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Для дисперсии

$$\chi^2_{n-1, \frac{\varepsilon}{2}} \le \frac{s^2}{\sigma^2}(n-1) \le \chi^2_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\varepsilon}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{s^2(n-1)}{\chi^2_{n-1, \frac{\varepsilon}{2}}}$$

Проверка статистических гипотез

Контроль технологического процесса. Есть производство втулок для «Жигулей». Считается, что диаметр втулки должен быть a_0.
y_1, ..., y_n. – диаметры n втулок.
Будем считать, что до изготовления диаметры втулок описываются совокупностью одинаково распределенных статистически независимых случайных величин $Y_1,...,Y_n$.
Предположим, что величина Y_i распределена $N(a_i, \sigma^2{}_i)$
Будем считать a_i и σ_i одинаковыми. Тогда Y_i распределены как $N(a, \sigma^2)$.
Нам нужно чтобы а было как можно ближе к a_0. Еще нужно $\sigma^2 \le \sigma_0{}^2$.

{a=a_0 или а не равно a_0}
{$\sigma^2 \le \sigma_0{}^2$ или $\sigma^2 > \sigma_0{}^2$}

Гипотеза - предположение, например, a=a_0 или $\sigma^2 > \sigma_0{}^2$. Альтернатива – предположение, альтернативное гипотезе.
Решающее правило – математический алгоритм, который позволяет делать вывод о том, что справедливо – гипотеза или альтернатива. В силу случайного характера данных, невозможно построить решающее правило, которое гарантирует полностью отсутствие принятие ошибочных решений.

Ошибка 1 рода – гипотеза верна, но отвергнута

2.14

Ошибка 2 рода – альтернатива верна, но отвергнута

y_1, ..., y_n из $N(a,\sigma^2)$. σ^2 известно абсолютно точно.

{a=a_0 или a не равно a_0}
$|\ddot{y}-a_0|<P$ или $|\ddot{y}-a_0|>P$, где P – порог.
Ясно, что величина порога влияет на вероятности ошибок первого и второго рода.

1. Гипотеза верна a=a_0 . При увеличении порога вероятность ошибки 1 рода падает.
2. Верна альтернатива. При увеличении порога вероятность ошибки второго рода растет.