1.07

Ответы на вопросы по междисциплинарному экзамену.

Раздел №1. Математика

Вопрос 1.7. Линейные операторы (ЛО) в конечномерном пространстве и их матричное представление. Характеристический многочлен, собственные числа и собственные вектора ЛО. Сопряженные и самосопряженные линейные операторы.

Ответ:

Df. Вектор – это элемент векторного пространства (пространство с аксиомами для векторов).

Df. Оператор – отображение из произвольного топологического пространства A в произвольное топологическое пространство B.

Df. Линейным называется оператор A: A[ka + lb] == k*A[a] + l*A[b]

Df. Из векторного пространства можно выделить ЛНЗ набор векторов (по определению линейная комбинация ЛНЗ набора не дает ноль).

Df. Полный ЛНЗ набор – базис.

Df. Мощность базиса – размерность.

Df. Размерность – натуральное число => пространство – конечномерное.

Th. Линейный оператор из конечномерного пространства (dim N) в конечномерное пространство (dim M) представим в виде матрицы M x N.
Доказательство. Тривиально

Df. Собственным вектором оператора A называется вектор b: A[b] == lb. При этом l – собственное число оператора A.

Замечание. Собственные числа оператора A – инвариант.

Df. Характеристический многочлен ЛО A в к/м пр-ве – это p(l) = det(A - lE).

Замечание. Корни хар.многочлена – это собственные числа ЛО A.

Df. Сопряженным пространством векторного пространства A называется пространство B всех линейных непрерывных функционалов над векторами A.

Df. Сопряженным оператором A* оператору A:X->Y (X* сопряжено с X, а Y* -- с Y) называется опреатор: 1. A*: Y*->X*, 2. для любого функционала g из Y* A*[g] == g[A]

Замечание. Для Г-пространств X==Y==H, очевидно, это можно переписать как (Ax; y) == (x; A*y).

Df. Самосопряженный оператор – оператор, определенный на линейном, всюду плотном множестве Г-пространства: 1. D(A) == D(A*) 2. A == A*, те (Ax, y) == (x,Ay).

1.07

Замечание. Для ограниченного самосопряженного оператора верно то, что его собственные числа вещественны и спектр непуст.