

1. Кратные интегралы

1.1. двойной интеграл

Def : Интегральной суммой функции $f(x,y)$ в области P называется $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta P_i$, где P_i – площадь фигуры (P_i) ,

(ξ_i, η_i) – произвольная точка данной области.

Пусть λ – наибольший из диаметров областей (P_i) .

Def : Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ называется двойным интегралом функции $f(x,y)$ в области P

и обозначается $I = \iint_P f(x,y) dP$.

Двойной интеграл является прямым обобщением понятия простого интеграла на случай функции двух переменных. Физический смысл – объем цилиндрического бруса.

Условие существования двойного интеграла

1. Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$, где S и s – верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно.
2. Всякая непрерывная в области P функция $f(x,y)$ интегрируема.
3. Если ограниченная функция имеет $f(x,y)$ имеет разрывы лишь на конечном числе кривых с площадью 0, то она интегрируема.

Свойства двойного интеграла

Далее всюду предполагается интегрируемость функций f и g на (P) .

1. Существование и величина двойного интеграла не зависят от значений, принимаемых подынтегральной функцией вдоль конечного числа кривых с площадью 0.
2. Пусть $(P) = (P') + (P'')$, тогда $\iint_P f dP = \iint_{P'} f dP + \iint_{P''} f dP$.
3. $\iint_P f dP = \iint_{P'} f dP + \iint_{P''} f dP$.
4. Если $f(x,y) \leq g(x,y)$ на (P) , то $\iint_P f dP \leq \iint_P g dP$.
5. $\left| \iint_P f dP \right| \leq \iint_P |f| dP$ (если f интегрируема, то $|f|$ также интегрируема).
6. Если $m \leq f(x,y) \leq M$, то $m \iint_P dP \leq \iint_P f dP \leq M \iint_P dP$ или найдется такое число μ , $m \leq \mu \leq M$, что $\iint_P f dP = \mu \iint_P dP$.

Условия существования и свойства легко переносятся на случай многократных интегралов.

1.2. тройной интеграл

Def : Интегральной суммой функции $f(x,y,z)$ в области V называется $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta V_i$, где V_i – объем области

(V_i) , (ξ_i, η_i, ζ_i) – произвольная точка данной области.

Пусть λ – наибольший из диаметров областей (V_i) .

Def : Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ называется тройным интегралом функции $f(x,y,z)$ в области

V и обозначается $I = \iiint_V f(x,y,z) dV$.

Физический смысл – масса тела объема (V) , если $f(x,y,z)$ считать функцией плотности в точке.

1.3. n-кратный интеграл

Def : Для простейшей n -мерной области – n -мерного прямоугольного параллелепипеда $[a_1, b_1; a_2, b_2; \dots; a_n, b_n]$ объемом называется произведение его измерений $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$.

Рассматриваются только те тела, для которых n -мерный объем существует (он заведомо существует для тел, ограниченных гладкими или кусочно-гладкими поверхностями). Простейшие n -мерные области: n -мерный симплекс $(x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; x_1 + \dots + x_n \leq h)$ и n -мерная сфера $(x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2)$.

Def : Аналогично рассмотренным выше случаям строится интегральная сумма функции $f(x_1, \dots, x_n)$ в n -мерной области (V) , предел которой при стремлении к нулю шага разбиения λ будет называться n -кратным интегралом

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

2. Поверхностные интегралы

2.1. первого рода

Def : Пусть в точках некоторой двусторонней гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности (S) , ограниченной кусочно-гладким контуром, определена функция $f(x, y, z)$. Интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ в области S называется

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i, \text{ где } S_i - \text{площадь фигуры } (S_i).$$

Пусть λ – наибольший из диаметров поверхностей (S_i) .

Def : Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ называется поверхностным интегралом первого типа

функции $f(x, y, z)$ в области S и обозначается
$$I = \int_S f(x, y, z) dS.$$

Пусть задана гладкая поверхность $S: r(u, v) = \{x=x(u, v), y=y(u, v), z=z(u, v); (u, v) \in \bar{D}\}$

D – квадратуемая (т.е. поверхность, имеющая площадь) плоская область. E, G и F – коэффициенты первой

квадратичной формы поверхности S . $E = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)^2$, $F = \left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)$, $G = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)^2$. Пусть на множестве точек $r(u, v)$

поверхности S задана функция

$$\Phi(r(u, v)) = \Phi(x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Def 1: Поверхностный интеграл первого рода
$$\int_S \Phi(x, y, z) dS$$
 сводится к обыкновенному двойному следующим

образом: 

2.2. второго рода

Рассмотрим двустороннюю поверхность (S) , гладкую или кусочно-гладкую, и фиксируем какую-либо из двух ее сторон (это равносильно выбору на поверхности определенной ориентации). Предположим, что поверхность задана явным уравнением $z=z(x, y)$ на области (D) . Тогда выбор возможен между верхней и нижней сторонами поверхности. В первом случае замкнутой кривой на поверхности приписывается направление против часовой стрелки, если смотреть сверху, во втором – обратное направление. Направление обхода контура проецируемой фигуры определяет направление обхода контура проекции. Направление это совпадает с вращением против часовой стрелки (т.е. отвечает ориентации самой плоскости xy), если фиксирована была верхняя сторона поверхности (S) – тогда площадь проекции берем со знаком плюс. В случае нижней стороны вращение будет обратным – площадь проекции берется со знаком минус.

Составим интегральную сумму так:
$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta D_i$$
 где D_i – площадь проекции на плоскость xy элемента

(S_i) , снабженная знаком по указанному выше правилу. Пусть λ – наибольший из диаметров поверхностей (S_i) .

Def : Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ называется поверхностным интегралом второго типа от

$f(x, y, z) dx dy$, распространенным на выбранную сторону поверхности S , и обозначается
$$I = \int_S f(x, y, z) dx dy$$
 (где $dx dy$

говорит о площади проекции элемента поверхности на плоскость xy). Если вместо плоскости xy проецировать элементы поверхности на плоскость yz или zx , то получим два других поверхностных интеграла второго типа:

$$\int_S f(x, y, z) dy dz \text{ или } \int_S f(x, y, z) dz dx.$$
 Часто используют соединение интегралов всех этих видов:

$$\iint_S P dx + Q dy + R dz, \text{ где } P, Q, R - \text{функции от } (x, y, z), \text{ определенные в точках поверхности } (S).$$

NB!!! Во всех случаях поверхность (S) предполагается двусторонней и интеграл распространяется на определенную ее сторону.

3. Криволинейные интегралы

Аналогичны поверхностным интегралам, только рассматривается не поверхность, а кривая.

3.1. первого рода

Def : Интегральной суммой функции $f(x, y)$ в области P называется $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \sigma_i$, где σ_i – длина дуги кривой (K).

$$\lambda = \max(\sigma_i).$$

Def : Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ называется криволинейным интегралом первого типа

функции $f(x, y)$ на кривой (K) и обозначается $I = \int_K f(x, y) ds$, где s говорит о длине дуги ds кривой (K). Аналогично

можно распространить это понятие на пространственную кривую: $I = \int_K f(x, y, z) ds$.

Пусть в трехмерном пространстве задана спрямляемая ориентированная кривая γ , $r(s) = \{x(s), y(s), z(s); 0 \leq s \leq S\}$ – ее представление, где за параметр взята переменная длина дуги s , $A = r(0)$ и $B = r(S)$ – начальная и конечная точки этой кривой.

Криволинейный интеграл первого рода от функции F по кривой AB можно свести к обыкновенному:

$$\int_{AB} f(x, y, z) ds = \int_0^S f(x(s), y(s), z(s)) ds.$$

3.2. второго рода

Сумма строится так же, только значение в точке умножается не на длину дуги, а на длину ее проекции. Как и в случае с поверхностным интегралом, определяем направление кривой.

Def : Конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$ называется криволинейным интегралом второго типа

функции $f(x, y)dx$, взятым по кривой или пути (AB), и обозначается $I = \int_{(AB)} f(x, y) dx$.

Важно направление кривой: $\int_{(AB)} f(x, y) dx = - \int_{(BA)} f(x, y) dx$.

Интеграл для пространственной кривой: $\int_{(AB)} f(x, y, z) dx$.

Интеграл общего вида: $\int_{(AB)} P dx + Q dy + R dz$.

4. Формула Грина

Связывает двойной и криволинейный интегралы.

Пусть G – плоская область и ее граница L является кусочно-гладким контуром. Пусть в замкнутой области \bar{G} заданы функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$, непрерывные на \bar{G} вместе со своими частными производными. Тогда справедлива формула

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

5. Формула Стокса

Пусть S простая гладкая двусторонняя поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L . Формула Стокса:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Или если заменить

поверхностный интеграл второго рода на поверхность первого рода, то получим

$$\oint_L (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma, \text{ где } \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \text{ означают направляющие косинусы}$$

нормали, отвечающей выбранной стороне поверхности.

Полагая $\vec{a} = (P, Q, R)$, эту формулу можно переписать так: $\oint_L \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{a} d\vec{\sigma}$, т.е. циркуляция векторного поля по контуру L равна потоку вихря этого поля через поверхность S , ограниченную контуром L .

6. Формула Остроградского

Аналог формулы Грина для тройных интегралов.

Пусть тело V ограничено кусочно-гладкой поверхностью S , тогда

$$\oint_S (P dx + Q dy + R dz) = \iiint_V \text{div } \vec{a} dV, \text{ или, если заменить поверхностный интеграл второго}$$

рода на поверхностный интеграл первого рода,

$$\oint_S (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma.$$

Полагая $\vec{a} = (P, Q, R)$, эту формулу можно переписать в виде

$$\int_V \text{div } \vec{a} dV = \int_{S^+} \vec{a} d\vec{\sigma} - \int_{S^-} \vec{a} d\vec{\sigma}$$

т.е. интеграл по области от дивергенции векторного поля равен потоку этого поля через поверхность, ограничивающую данную область.

NB! Формулы Грина, Стокса и Остроградского объединены одной идеей: они выражают интеграл, распространенный на некоторый геометрический образ, через интеграл, взятый по границе этого образа. При этом формула Грина относится к случаю двумерного пространства, формула Стокса – к случаю двумерного «кривого» пространства, а формула Остроградского – к случаю трехмерного пространства.

На основную формулу интегрального исчисления $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$ можно смотреть как на некоторый аналог этих формул для одномерного пространства.