Билет №2.8

Разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод прогонки.

1 Что такое разностные схемы

Для написания разностной схемы, приближающей данное ДУ необходимо:

- Заменить область непрерывного изменения аргумента областью дискретного изменения (см. 1.1).
- Заменить дифференциальный оператор некоторым разностным оператором (см. 1.2).
- Сформулировать разностный аналог для краевых условий и начальных данных.

После осуществления этих трёх пунктов приходим к алгебраической системе уравнений.

1.1 Сетка.

Необходимо выбрать несколько точек в области определения и приближённое решение искать только в этих точках. Такое множество точек называется *сеткой*. Отдельные точки называются *узлами сетки*. Функция, определённая в узлах сетки, называется *сеточной функцией*.

1.2 Замена дифференциального оператора разностным аналогом.

Пусть дан дифференциальный оператор L, действующий на функцию $v = v(x)$. Заменим входящие в L производные разностными отношениями и получим разностное выражение $L_h v_h$, являющееся линейной комбинацией значений сеточной функции v_h на некотором множестве узлов сетки $M(x)$, называемым *разностным шаблоном*:

$$L_h v_h(x) = \sum_{i \in M(x)} A_h(x,i) v_h(i),$$

где $A_h(x,i)$ – коэффициенты. $L_h v_h$ называется *разностной аппроксимацией оператора Lv*.

Например, пусть $Lv = \frac{dv}{dx}$. Для аппроксимации можно воспользоваться одним из выражений:

$$L_h^+ v = \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \tag{1}$$

$$L_h^- v = \frac{v(x) - v(x-h)}{h} \tag{2}$$

$$L_h^o v = \frac{v(x+h) - v(x-h)}{2h} \tag{3}$$

Выражение 1 есть *правая разностная производная*, 2 – *левая разностная производная*, 3 – *центральная разностная производная*.

2 Разностная схема для краевых задач для ОДУ

Решим уравнение:

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + q(x)y = r(x) \tag{4}$$

$$x \in [a,b] \tag{5}$$

$$(\alpha_a \frac{dy}{dx} + \beta_a y)|_{x=a} = \gamma_a \tag{6}$$

$$(\alpha_b \frac{dy}{dx} + \beta_b y)|_{x=b} = \gamma_b \tag{7}$$

Равенства 6 и 7 – краевые условия.

Сетка на отрезке $[a,b]$: $a = x_0, x_1, \dots, x_{n+1} = b$. Первую производную приблизим центральной разностью:

$$p(x)\frac{dy}{dx}|_{x_{i-\frac{1}{2}}} = p(x_{i-\frac{1}{2}})\frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta x} = p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \tag{8}$$

$$p(x)\frac{dy}{dx}|_{x_{i+\frac{1}{2}}} = p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \tag{9}$$

Тогда:

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx})|_{x_i} = \frac{1}{\Delta x}(p_{i+\frac{1}{2}}\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) = \tag{10}$$

$$= \frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}y_{i+1} + \frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}y_{i-1} - \frac{p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}y_i \tag{11}$$

Подставим в исходную формулу 4. Получим:

$$\underbrace{\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}}_{a_i} y_{i-1} + \underbrace{(q_i - \frac{p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2})}_{b_i} y_i + \underbrace{\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}}_{c_i} y_{i+1} = \underbrace{r_i}_{d_i}. \tag{12}$$

Получим систему уравнений вида:

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i. \tag{13}$$

Краевые условия перепишем так:

$$\begin{cases} \underbrace{(\alpha_a - \frac{\beta_a}{\Delta x})}_{b_0} y_0 + \underbrace{\frac{\beta_a}{\Delta x}}_{c_0} y_1 = \underbrace{\gamma_a}_{d_0} \\ \underbrace{-\frac{\beta_b}{\Delta x}}_{a_n} y_{n-1} + \underbrace{(\alpha_b + \frac{\beta_b}{\Delta x})}_{b_n} y_n = \underbrace{\gamma_b}_{d_n} \end{cases}$$

Таким образом, получим систему:

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \tag{14}$$

Эту систему можно решить методом прогонки (разд. 3).

Посмотрим, во что трансформируется условие 19. Подставим туда коэффициенты из 12. Получим:

$$|\frac{p_{i+\frac{1}{2}} + p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} - q_i| \geq |\frac{p_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}| + |\frac{p_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x^2}| \tag{15}$$

Видно, что в общем случае достаточное условие завершения метода прогонки не выполнено. Однако, условие выполнится, если функции p и q будут каждая в отдельности одного и того же знака, при этом вместе они будут разного знака. Ещё одно достаточное условие – $q = 0$.

3 Метод прогонки

Метод прогонки решает системы вида $Ax = b$, где A – трёхдиагональная матрица $n \times n$. Общая идея алгоритма такова: на i-м шаге можно выразить x_i через x_{i+1}; это выражение можно подставить в уравнение с номером $i + 1$; и т.п. На шаге n получается уравнение с единственным неизвестным x_n. Его надо решить (найти x_n), затем, зная x_n, найти x_{n-1} и т.п.

3.1 Алгоритм

Алгоритм состоит из двух стадий:

1. *Прямой ход* прогонки состоит в вычислении *прогоночных коэффициентов* α_i $(1 \le i \le n)$ и β_i $(1 \le i \le n)$. При $i = 1$ они вычисляются по формулам:

$$\alpha_1 = -\tfrac{c_1}{\gamma_1}, \quad \beta_1 = \tfrac{d_1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = b_1, \tag{16}$$

   а при $i = 2, \ldots, n-1$ по реккурентным формулам:

$$\alpha_i = -\tfrac{c_i}{\gamma_i}, \quad \beta_i = \tfrac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{\gamma_i}, \quad \gamma_i = b_i + a_i\alpha_{i-1}. \tag{17}$$

   При $i = n$ прямой ход завершается вычислением:

$$\beta_n = \tfrac{d_n - a_n\beta_{n-1}}{\gamma_n}, \quad \gamma_n = b_n + a_n\alpha_{n-1}. \tag{18}$$

2. *Обратный ход* метода прогонки даёт значения неизвестных. Сначала полагают $x_n = \beta_n$. Значения остальных неизвестных вычисляются по формуле $x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i$.

3.2 Анализ

Для реализации вычислений требуется примерно $8n$ операций. Для того, чтобы метод прогонки завершился, необходимо, чтобы $\forall i, \gamma_i \neq 0$. Достаточным условием для этого является диагональное преобладание матрицы A, а именно

$$|b_i| \ge |a_i| + |c_i|. \tag{19}$$