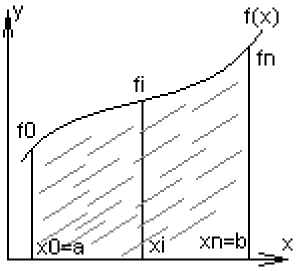
2.2. Приближенное вычисление интегралов. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Оценка погрешности. Способы вычисления кратных интегралов.

Приближенное вычисление интегралов вида $I=\int_a^b f(x)dx$**.**



Большая часть методов приближенного вычисления интегралов основана на дроблении отрезка [a,b] точками $a=x0<x1<\ldots<x_N=b$.

В этом случае полагаем $I=\sum_{i=0}^{N} A_i f_i$, где $f_i=f(x_i)$ Последняя формула называется *квадратурной*, x_i называются узлами квадратурной формулы, а A_i – ее весами.

Вообще говоря, функцию $f(x)$ мы можем интерполировать на отрезке $\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$, тогда формулы для вычисления приближенного значения интеграла будут называться *интерполяционно-квадратурными*.

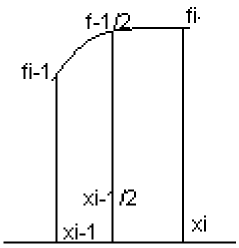
Формула прямоугольников.

Будем интерполировать функцию $f(x)$ на отрезке Δx_i, полиномами нулевой степени, т.е. константами.

$$f(x)\approx f(x_{i-1/2})=f_{i-1/2}$$

$$I_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=f_{i-1/2}\Delta x_i$$

$$I=\sum_{i=1}^{N} f_{i-1/2}\Delta x_i \underset{\substack{\text{если все}\\ \text{отрезки}\\ \text{равны}}}{=} \Delta x\sum_{i=1}^{N} f_{i-1/2}$$



Последняя формула называется *формулой прямоугольника* (*центральной,* так как берем $f_{i-1/2}$). Если будем брать значение функции не в центре Δx_i, а в x_i, то формула будет *правосторонней*, а если x_{i-1} – *левосторонней*.

Формула трапеций.

Теперь $f(x)$ на Δx_i будем интерполировать полиномом первой степени.

$$f(x)=\frac{f_i-f_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}(x-x_{i-1})+f_{i-1}$$

$$I_i=\frac{1}{2}(f_{i-1}+f_i)\Delta x_i$$

тогда

$$I=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}(f_{i-1}+f_i)\Delta x_i \underset{\Delta x_i=const}{\overset{\text{если}}{=}} \frac{\Delta x}{2}\left(f_0+2\sum_{i=1}^{N} f_i+f_N\right)$$ - *формула трапеций.*

Формула Симпсона.

В этом случае интерполировать $f(x)$ будем уже не по 2-м а по 3-м точкам, т.е. полиномами второй степени.

$$f(x)=f_{i-1/2}+\frac{f_i-f_{i-1}}{\Delta x}(x-x_{i-1/2})+\frac{f_{i-1}-2f_{i-1/2}+f_i}{\Delta x^2/2}(x-x_{i-1/2})^2$$

Найдем I_i.

2.2

$$I_i = \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f_{i-1/2}dx + \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1/2})dx + \frac{f_{i-1} - 2f_{i-1/2} + f_i}{\Delta x^2/2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1/2})^2dx =$$

$$= f_{i-1/2}\Delta x + \frac{f_{i-1} - 2f_{i-1/2} + f_i}{\Delta x^2/2}\, 2\int\limits_0^{\Delta x/2} y^2dy = \frac{f_{i-1/2}\Delta x + f_{i-1} - 2f_{i-1/2} + f_i}{6}\Delta x = \frac{1}{6}(f_{i-1} - 4f_{i-1/2} + f_i)\Delta x$$

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \frac{\Delta x}{6}\left(f_0 + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_i + 4\sum_{i=1}^{N} f_{i-1/2} + f_N\right)$$ - *формула Симпсона*.

Оценки априорных погрешностей:

1) Центральный прямоугольник: $|I - I_1| \le \frac{M_2(b-a)}{24}\Delta x^2 \quad M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$
2) Трапеция $|I - I_2| \le \frac{M_2(b-a)}{12}\Delta x^2 \quad M_2 = \max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$
3) Симпсон $|I - I_3| \le \frac{M_4(b-a)}{2880}\Delta x^4 \quad M_4 = \max\limits_{[a,b]}|f''''(x)|$

1,2 и 3 хорошо обусловлены в смысле абсолютной погрешности.

Найдем апостериорную оценку
$|I - I_{\Delta x_1}| \le c\Delta x_1^k$, где Δx_1^k – шаг разбиения.

$I - I_{\Delta x_1} \approx c\Delta x_1^k \qquad (1)$

$I - I_{\Delta x_2} \approx c\Delta x_2^k \qquad (2)$

вычтем (1) из (2)

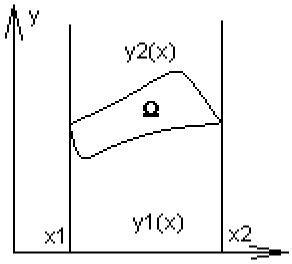
$$I_{\Delta x_1} - I_{\Delta x_2} = c(\Delta x_2^k - \Delta x_1^k) \Rightarrow c = \frac{I_{\Delta x_1} - I_{\Delta x_2}}{\Delta x_2^k - \Delta x_1^k}$$

подставив выражение для c в (1) получим

$I - I_{\Delta x_1} = \frac{I_{\Delta x_1} - I_{\Delta x_2}}{\Delta x_2^k - \Delta x_1^k}\Delta x_1^k = \frac{I_{\Delta x_1} - I_{\Delta x_2}}{\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}\right)^k - 1}$, мы получили *оценку Ричардсона*.

Способы вычисления кратных интегралов.
Допустим, хотим вычислить интеграл по площадке на рисунке.

$$I = \int\limits_{\Omega} f(x,y)d\Omega = \int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$



для вычисления подобного интеграла будем иметь аналог формулы прямоугольников.

$$I = \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)\Delta\Omega_i\ .$$

Для приближенного вычисления определенных интегралов применяется метод Монте-Карло.

$I = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \frac{f(x)}{p(x)}p(x)dx = \int\limits_a^b \psi(x)p(x)dx$, где $\int\limits_a^b p(x)dx = 1$.

I – мат. ожидание случайной величины x с плотностью вероятности $p(x)$.

2.2

Генерируем случайные величины с плотностью вероятности $p(x)$.

$$\tilde{I} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \psi(x_i)$$

Оценка метода

$$\Delta_N = \left| I - \tilde{I} \right| \sim \Delta_1 \frac{1}{\sqrt{N}} \quad \Delta_1 = \left\{ \int_a^b [\varphi(x) - I]^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$