2.3. Численное решение нелинейных уравнений и систем уравнений. Методы простой итерации и Ньютона.

Численное решение нелинейных уравнений и систем уравнений
Этапы изучения:

- Исследование корней (количество)
- Выделение корней (выделение областей, в которых находится 1 корень)
- Итерационное уточнение корней

Итерационные методы решения нелинейных уравнений
Пусть задана функция $f(x)$ действительного переменного. Требуется найти корни уравнения

$$f(x)=0 \qquad (1)$$

1. Метод простой итерации. Он состоит в том, что уравнение (1) заменяется эквивалентным уравнением

$$x=s(x) \qquad (2\text{-a})$$

И итерации образуются по правилу

$$x_{n+1}=s(x_n),\ n=0,\ 1,\ \ldots, \qquad (2\text{-b})$$

причем задается начальное приближение x_0. Для сходимости большое значение имеет выбор функции s(x). Эту функцию можно задавать различными способами, однако обычно она берется в виде

$$s(x)=x+\tau(x)\cdot f(x), \qquad (2\text{-c})$$

причем функция $\tau(x)$ не меняет знака на том отрезке, где отыскивается корень. Метод простой итерации сходится при надлежащем выборе начального приближения x_0, если $|s'(x^*)|<1$, где x^* - корень уравнения (1).
Метод релаксации - частный случай метода простой итерации, он получается при $\tau(x)=\tau = const$.

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{\tau}=f(x_n),\ n=0,1,\ldots \qquad (3)$$

Метод релаксации сходится при условии

$$-2<\tau f'(x^*)<0. \qquad (4)$$

Если в некоторой окрестности корня выполняются условия

$$f'(x)<0,\ 0<m<|f'(x)|<M, \qquad (5)$$

то метод релаксации сходится при $\tau\in(0,\ 2/M)$.
Чтобы выбрать оптимальный параметр τ в методе релаксации, рассмотрим уравнение для погрешности $z_n= x_n - x^*$. Подставляя $z_n= z_n - x^*$ в (3) получим уравнение

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}=f(x^*+z_n)$$

По теореме о среднем имеем

2.3

$$f(x^*+z_n)=f(x^*)+z_n f'(x^*+\Theta z_n)=z_n f'(x^*+\Theta z_n)$$

где $\theta\in(0,1)$. Т.о., для погрешности метода релаксации выполняется уравнение

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{\tau}=f'(x^*+\Theta z_n)z_n$$

Отсюда приходим к оценке

$$|z_{n+1}|\le \max\{|1-\tau M|,|1-\tau m|\}\cdot|z_n|.$$

Наилучшая оценка достигается при $|1-\tau M|=|1-\tau m|$, т.о. оптимальным значением параметра является $\tau_0=2/(M+m)$. При этом значении τ имеем $\rho_0=\frac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi=\frac{m}{M}$, так что для погрешности справедлива оценка $|z_n|\le\rho_0^n|z_0|$, n= 0, 1, …

2. Метод Ньютона. Пусть начальное приближение x_0 известно. Заменим f(x) отрезком ряда Тейлора $f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ и за следующее приближение возьмем $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Вообще, если итерация x_k известна, то следующее приближение x_{k+1} в методе Ньютона определяется по формуле $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, k=0, 1, …

Метод Ньютона имеет квадратичную сходимость, т.е. погрешность на следующей итерации пропорциональна квадрату погрешности на предыдущей итерации: $x_{k+1}-x_*=O((x_k-x_*)^2)$.

Итерационные методы для систем нелинейных уравнений

$\vec f(\vec x)=0$, $\left|\frac{\partial\vec f}{\partial\vec x}(\vec x^*)\right|\ne 0$ (иначе кратный корень, трудно решать)

1. Метод простой итерации.

$\vec x=\vec\varphi(\vec x)$

$\vec x_0$ - начальное приближение, $\vec x^{k+1}=\vec\varphi(\vec x^k)$

2. Модификации метода простой итерации.

По Зейделю:

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=\varphi_1(x_1^k,\dots x_n^k)\\ x_2^{k+1}=\varphi_1(x_1^{k+1},x_2^k,\dots x_n^k)\\ \vdots\\ x_n^{k+1}=\varphi_1(x_1^{k+1},\dots x_{n-1}^{k+1},x_n^k)\end{cases}$$

Метод релаксации:

$\tilde x_i^{k+1}=\varphi_i(x_1^{k+1},\dots x_{i-1}^{k+1},x_i^k,\dots x_n^k)$ (по Зейделю)

$x_i^{k+1}=\tilde x_i^{k+1}+(\varpi-1)(\tilde x_i^{k+1}-x_i^k)$, ϖ - параметр релаксации.

3. Метод Ньютона.

$\vec f(\vec x)=0$

$\vec f(\vec x^k+(\vec x-\vec x^k))=0$

2.3

$$\vec{f}(\vec{x}^{k}) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^{k})(\vec{x} - \vec{x}^{k}) + \ldots = 0$$

$$\vec{x}^{k+1} = \vec{x}^{k} - \left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}^{k}) \right]^{-1} \vec{f}(\vec{x}^{k})$$