

1.10. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка. Уравнения переноса, теплопроводности, волновые уравнения, уравнения эллиптического типа. Постановка краевых задач и граничные условия.

Вид рассматриваемых уравнений:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \quad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ - функции только x и y .

С помощью преобразования переменных получим новое эквивалентное уравнение.

$$\xi = \varphi(x, y), \eta = \psi(x, y)$$

Вопрос: как выбрать ξ и η , чтобы получившееся уравнение имело наиболее простую форму?

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

Подставляя значения производных в уравнение, будем иметь:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \text{ где}$$

$$\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_y + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_x$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2$$

а функция \bar{F} не зависит от вторых производных.

Выберем ξ и η так, чтобы \bar{a}_{11} был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка:

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0 \quad (2)$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ - какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент \bar{a}_{11} будет равен нулю. Таким образом, задача о выборе новых переменных связана с решением уравнения (2).

Далее нам понадобится следующая лемма:

Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения (2), то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}dy^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}dx^2 = 0 \quad (3)$$

Обратное также верно.

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = \text{const}$ есть общий интеграл уравнения (3), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Аналогично, если $\psi(x, y) = \text{const}$ - другой интеграл этого уравнения, мы обнулим коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (3) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения (1).

Это уравнение мы будем называть в точке М уравнением

1. *Гиперболического типа*, если в точке М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$

2. *Эллиптического типа*, если в точке М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$

3. *Параболического типа*, если в точке М $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$

Тип уравнения не меняется при преобразовании переменных.

Вид уравнений различных типов

1. Гиперболические

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \text{ (каноническая форма) или}$$

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

2. Параболические

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

3. Эллиптические

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

Более общее определение, годящееся для случая многих переменных, для уравнения без смешанных производных с коэффициентами, посчитанными в некоторой точке М, звучит следующим образом:

Уравнение называется уравнением эллиптического типа, если все коэффициенты перед старшими производными не равны нулю и имеют один знак. Уравнения гиперболического типа (нормального гиперболического типа) имеют лишь один коэффициент с противоположным знаком; в уравнениях ультрагиперболического типа имеются m коэффициентов одного знака и $m-n$ коэффициентов - противоположного ($m, m-n > 1$). Уравнениями параболического типа называются уравнения второго порядка, в которых хотя бы один коэффициент перед старшей производной равен нулю.

В качестве реальных примеров дифференциальных уравнений 2-го порядка могут быть представлены следующие уравнения:

Волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \cdot t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \cdot x^2} + f(x, t)$$

Уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \cdot u}{\partial \cdot t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \cdot x^2} + f(x, t)$$

Уравнения эллиптического типа (уравнения Пуассона)

$$\Delta u = f(X)$$

Условия, согласно которым решение или некоторые производные решения должны принимать заданные значения на заданных поверхностях (линиях в случае двух независимых переменных),

называются *краевыми (граничными)*. Задача интегрирования дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

Три основных типа граничных условий:

1. Условие первого рода $u(0, t) = \mu(t)$ - заданный режим
2. Условие второго рода $u_x(0, t) = \nu(t)$ - заданная сила
3. Условие третьего рода $u_x(t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$ - упругое закрепление

Если функции, задаваемые в правой части ($\mu(t), \nu(t), \theta(t)$), равны нулю, то граничные условия называются однородными.

Комбинируя перечисленные типы граничных условий, можно получить шесть типов простейших краевых задач.