1.2

1.2. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости числовых рядов.

] { Uk } — числовая пос-ть

$\sum_{k=1}^{\infty} U_k$ — наз. *числовым рядом* (1)

$\sum_{k=1}^{n} U_k = S_n$ — наз. *частичной суммой*

$\{S_n\}$ — наз. *пос-тью частичных сумм*

Ряд (1) наз. *сходящимся,* если сходится пос-ть его частичных сумм; предел S последовательности частичных сумм {Sn} наз. *суммой ряда* (1)

Критерии сходимости:

1. Признак Коши: Для того, чтобы ряд (1) сходился Н и Д, чтобы для любого E>0 существовал номер N(E) ,что при любом N > N(E) и любом целом P>=0 выполнялось неравенство $| U_n + U_{n+1} + ... + U_{n+p} | < E$
2. Если ряд сходится, то любой его остаток сходится. Если какой-либо его остаток сходится, то ряд тоже сходится.
3. Для того чтобы ряд (1) с неотрицательными членами сходился необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху, при этом S=sup{Sn}. (Это критерий сходимости положительных рядов)

Ряд (1) наз. *абсолютно сходящимся,* если сходится ряд $\sum^{\infty} |U_k|$

Если ряд сходится абсолютно, то он и просто сходится.

Критерий сходимости положительных рядов (для доказательства абсолютной сходимости):

Ряд $\sum U_k$ (U_k >0) сходится, если существует номер N ,что при любом n > N выполняется хотя бы одно из следующих условий :

1. Признак сравнения. $U_n \le M_n$ и\или $U_{n+1}/ U_n \le M_{n+1}/ M_n$, где $M_0+M_1+...$— сходящийся ряд с положительными членами.
2. Признак Даламбера. $U_{n+1}/$ имеет точную верхнюю границу A<1.
3. «Радикальный» Корень n-ной степени из Un имеет точную верхнюю границу A<1.
4. Интегральный признак Коши. $|U_n| \le F(n)$, где F(x) — положительная невозрастающая функция, для которой сходится (несобственный) интеграл от этой функции в пределах от N+1 до $+\infty$.

Ряд (1) наз. *условно сходящимся,* если он сам сходится, а ряд $\sum |U_k|$ расходится.

1.2

Теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов

Теорема формулируется следующим образом. Знакочередующийся ряд

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} b_i$$

сходится, если выполняются оба условия:

1. $|b_{i+1}| < |b_i|$;
2. $\lim\limits_{i \to \infty} b_i = 0.$

Из теоремы Лейбница вытекает **следствие**, позволяющее оценить погрешность вычисления неполной суммы ряда:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Остаток сходящегося знакочередующегося ряда $R_n = S - S_n$ будет по модулю меньше первого отброшенного слагаемого:

$$|R_n| < |b_{n+1}| \, .$$