2.6. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Понятия сходимости, аппроксимации и устойчивости разностных схем.

Задача Коши: $\frac{dy}{dx} = f(x,y); y\Big|_{x=x0} = y0;$

Дискретизация задачи Коши:
Поводи вычисление на отрезке $[t_0, T]$. Введем сетку $t_0 < t_1 < ... < t_n = T$, назовем узлами сетки $h_i = t_i - t_{i-1}$, назовем шагом сетки.
Задача в нахождении решения задачи Коши в узлах сетки. Заменим уравнение на дискретный аналог: $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+1-j} = \Phi(t_n, y_{n+1-k}, ..., y_{n+1}, h)$ – k-шаговый метод.

Явный метод Эйлера
$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_n, y_n) \rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n)$
Неявный метод Эйлера
$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} = f(t_{n+1}, y_{n+1}) \rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_{n+1}, y_{n+1})$

Устойчивость
Разностная схема *устойчива*, если существует $C_s > 0$ (независимая от h – шага сетки):

$$\|\Delta y_h\| \le C_s \cdot \|\Delta f_h\|;$$

это означает непрерывную зависимость погрешности решения от погрешности входных данных.

Аппроксимация
Аналогично, вводится понятие аппроксимации дифференциальной задачи с порядком a:

$$\|\Delta f_h\| \le C_a \|h\|^a$$

Сходимость
Сходимость решения разностной задачи: $\|\Delta y_h\| \le C_d \|h\|^d$, d – порядок сходимости.

Th Лакса:
Т.е. устойчивая схема обеспечивает сходимость решения с порядком аппроксимации.
Доказательство: $\|\Delta y_h\| \le C_s \|\Delta f_h\| \le C_s \cdot C_a \|h\|^a$, $C_d = C_s \cdot C_a$

Определение. Решение задачи (8.3) u^τ сходится при $\tau \rightarrow 0$ к решению исходной задачи (8.2), если

$$\|u^\tau - U^\tau\| \rightarrow 0$$

2.6

при $\tau \to 0$.

При этом, если имеет место оценка

$$\|u^\tau - U^\tau\| \le C\tau^p (C \ne C(\tau)),$$

то имеет место сходимость порядка p.

Определение. Говорят, что задача (8.3) аппроксимирует задачу (8.2) на ее решении, если невязка

$$\|r_\tau\| \to 0$$

при $\tau \to 0$, где $r_\tau \equiv L_\tau(U^\tau) - F_\tau$; при этом, если имеет место оценка

$$\|r_\tau\| \le C_1\tau^p (C_1 \ne C_1(\tau)),$$

то говорят, что имеет место аппроксимация порядка p.

Определение. Задача (8.3) устойчива, если из соотношений

$$L_\tau(u^\tau) - F_\tau = \xi_\tau ,$$
$$L_\tau(v^\tau) - F_\tau = \eta_\tau$$

следует

$$\|u^\tau - v^\tau\| \le C_2 \left(\|\xi_\tau\| + \|\eta_\tau\|\right), C_2 \ne C_2(\tau).$$

Теорема 1 (В.С.Рябенького - П. Лакса) . Решение задачи (8.3) сходится к решению исходной задачи (8.2), если задача (8.3) устойчива и аппроксимирует задачу (8.2); если аппроксимация имеет порядок p, то сходимость также имеет порядок p.

Доказательство.

В силу аппроксимации имеем оценку: $\|r_\tau\| \le C_1\tau^p$. Тогда из определения устойчивости, положив $v^\tau = U^\tau$, получим

$$\|u_\tau - U_\tau\| \le C_2 \|r_\tau\| \le C_2 C_1 \tau^p = C\tau^p,$$

поскольку в данном случае

$$\| \eta^\tau \| = 0$$

и, кроме того,

$$\| r_\tau \| = \| \xi_\tau \|.$$