

23. Разностные схемы для многомерных краевых задач параболического типа. Локально-одномерная схема. Схема переменных направлений.

Локально-одномерная схема. Обоснование допустимости ее применения.

Локально-одномерная система применяется для решения многомерных задач и задач расчета, совместно протекающих процессов, описываемых несколькими уравнениями. Отличительной особенностью этих схем является сочетание сильных сторон явных схем (малые затраты машинного времени) и неявных схем (безусловная устойчивость).

Протекание физического многомерного процесса на каждом временном шаге рассматривается как последовательное протекание одномерных процессов, каждый из которых начинается от распределения поля, возникшего после окончания предыдущего одномерного процесса. (При процессах, описываемых несколькими уравнениями, идет последовательный пересчет уравнений.).

Такое представление процесса называется *расщеплением* задачи по пространственным переменным (по физическим процессам).

NB: После расщепления по физическим процессам отдельные многомерные задачи можно расщеплять и по пространственным переменным.

NB: Конкретное воплощение этой схемы (“что можно и как нужно расщеплять”) связано с большими трудностями и требует высокой математической квалификации и понимания физики исследуемого процесса.

Допустимость применения локально-одномерной схемы будет продемонстрирована

на одном из вариантов расщепления по пространственным переменным для

уравнения теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q_v(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{q_v(x, y)}{c\rho} \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\lambda}{c\rho}$$

с граничными условиями третьего рода

$$\left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \alpha_{0x, l_x} T \right]_{x=0, l_x} = 0, \quad \left[\mp \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \alpha_{0y, l_y} T \right]_{y=0, l_y} = 0$$

и начальным распределением

$$T|_{\tau=0} = T_0(x, y).$$

С этой целью сопоставим точное решение $T(x, y, \tau_j)$ в конце малого промежутка времени $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ с его приближенным решением $\omega(x, y, \tau_j)$, получаемым в результате решения следующей системы, возникающей при расщеплении.

$$\begin{cases} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{q_v}{c\rho}, & \tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j \\ \vartheta(x, y, \tau_{j-1}) = T(x, y, \tau_{j-1}) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, & \tau_{j-1} \leq \tau \leq \tau_j \\ \omega(x, y, \tau_{j-1}) = \vartheta(x, y, \tau_j) \end{cases}$$

Здесь мы считаем, что приближенное решение начинается из точного распределения $T(x, y, \tau_{j-1})$. Важно отметить порядок решения. Сначала решается первая система

(т.е. определяется $\vartheta(x, y, \tau)$). А затем это решение используется в качестве начального условия для решения второй.

NB. Граничные условия этих систем определяются из граничных условий исходной задачи по направлениям x и y .

Теперь покажем, что для точного решения $T(x, y, \tau_j)$ и решения $\omega(x, y, \tau_j)$ расщепленной задачи справедливо соотношение:

$$\omega(x, y, \tau_j) = T(x, y, \tau_j) + O(\Delta\tau^2).$$

Для этого распишем уравнение теплопроводности.

$$\frac{T(x, y, \tau_j) - T(x, y, \tau_{j-1})}{\Delta\tau} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]^{j-1} + \frac{q_v(x, y)}{c\rho} + O(\Delta\tau)$$

и, следовательно,

$$T(x, y, \tau_j) = T(x, y, \tau_{j-1}) + \Delta\tau \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right]^{j-1} + \frac{\Delta\tau q_v(x, y)}{c\rho} + O(\Delta\tau^2)$$

Аналогичную операцию проведем с $\theta(x, y, \tau)$.

$$\frac{\vartheta(x, y, \tau_j) - \vartheta(x, y, \tau_{j-1})}{\Delta\tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right)^{j-1} + \frac{q_v(x, y)}{c\rho} + O(\Delta\tau)$$

следовательно,

$$\vartheta(x, y, \tau_j) = \vartheta(x, y, \tau_{j-1}) + \Delta\tau \alpha \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \right)^{j-1} + \frac{\Delta\tau q_v(x, y)}{c\rho} + O(\Delta\tau^2)$$

и учитывая начальное условие, имеем

$$\vartheta(x, y, \tau_j) = T(x, y, \tau_{j-1}) + \Delta\tau \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{j-1} + \frac{\Delta\tau q_v(x, y)}{c\rho} + O(\Delta\tau^2).$$

Проведем теперь аналогичную операцию с $\omega(x, y, \tau)$.

$$\frac{\omega(x, y, \tau_j) - \omega(x, y, \tau_{j-1})}{\Delta\tau} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^{j-1}$$

следовательно,

$$\omega(x, y, \tau_j) = \omega(x, y, \tau_{j-1}) + \Delta\tau \alpha \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right)^{j-1}$$

и учитывая начальное условие, имеем

$$\omega(x, y, \tau_j) = \vartheta(x, y, \tau_{j-1}) + \Delta\tau \alpha \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right)^{j-1}.$$

После подстановки () в () можно убедиться в справедливости требуемого соотношения.

$$\omega(x, y, \tau_j) = T(x, y, \tau_{j-1}) + \Delta\tau \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)^{j-1} + \frac{\Delta\tau q_v(x, y)}{c\rho} + \Delta\tau \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)^{j-1} + (\Delta\tau \alpha)^2 \left(\frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} \right)^{j-1} + O(\Delta\tau^2)$$

Таким образом, при использовании в начале интервала $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ точного распределения температуры в конце интервала появляется погрешность порядка $O(\Delta\tau^2)$. Однако при прохождении всего интервала $[0, \tau_{\max}]$ с шагом $\Delta\tau$ точное начальное распределение мы можем взять только на первом шаге, а на последующих в качестве начального распределения для $\vartheta(x, y, \tau)$ нам придется брать $\omega(x, y, \tau_{j-1})$ в конце предыдущего интервала.

Следовательно, начальное условие преобразуется к виду

$$\begin{cases} \vartheta(x, y, 0) = T_0(x, y) & , j = 1 \\ \vartheta(x, y, \tau_{j-1}) = \omega(x, y, \tau_{j-1}) & , j > 1 \end{cases}$$

Тогда при расчете по приближенной методике будет происходить накопление погрешности. Но накопленная погрешность не может превзойти суммы пошаговых погрешностей. Попытаемся определить ограничение для накопленной погрешности. Так как общее число шагов по времени равно $\tau_{\max} / \Delta\tau$, следовательно, накопленная к моменту времени τ_{\max} погрешность составляет $O(\Delta\tau^2)\tau_{\max} / \Delta\tau = O(\Delta\tau)$. Из этого следует, что расщепление по пространственным координатам приводит к погрешности порядка $O(\Delta\tau)$, и поэтому допустимо при достаточно малых шагах по времени $\Delta\tau$.