2.12. Разностные схемы для краевых задач эллиптического типа. Итерационные методы решения систем разностных уравнений.

Пусть G- ограниченная область в пространстве Rn. Эллиптические дифференциальные уравнения описывают статические состояния. Поэтому ищутся решения дифференциальных уравнений, которые на границе ∂G области G удовлетворяют краевым условиям. Такая задача называется краевой задачей.

Различают:

1. Задача Дирихле:
   a) *внутренняя задача:* $\nabla^2 V = 0$, V непрерывна на всей области $G+\partial G$ и задана на границе $V(p)\big|_{\partial G} = f(p)$ (граничные условия 1-го рода).
   b) *внешняя задача:* V непрерывна на всей области $\overline{G} + \partial G$
2. Задача Неймана:
   a) *внутренняя задача:* V непрерывна на всей области $G+\partial G$
   $\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial G} = f(p)$ (граничные условия 2-го рода).
   b) *внешняя задача :* $\nabla^2 V = 0$, V непрерывна на всей области $\overline{G} + \partial G$
   $\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial G} = f(p)$ (граничные условия 2-го рода).

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле. Решение ищется в виде потенциала двойного слоя.

$$V(p) = -\int_{\partial G} \sigma(p) \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{n}_Q)}{r_{QP}^2} dS_Q ; \qquad -\int_{\partial G} \sigma(p) \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{n}_Q)}{r_{QP}^2} dS_Q - 2\pi\sigma(p) = f(p)$$

$$\sigma(p) + \tfrac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \sigma(p) \frac{\cos(\vec{r}_{QP}, \vec{n}_Q)}{r_{QP}^2} dS_Q = -\tfrac{1}{2\pi} f(p). \qquad (*)$$

Это интегральное Фредгольма 2-го рода. Искомая функция - $\sigma(p)$. Его решать численно значительно легче. Понизилась размерность задачи.

Дискретизируем границу области ∂G : $i, j = 1 \ldots n$, ΔS_j -площадь j-й грани. Получаем n уравнений:

$$\sigma_i + \tfrac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \sigma_j \frac{\cos(r_{ji}, n_j)}{r_{ji}^2} \Delta S_j = -\tfrac{1}{2\pi} f_i , \qquad (**)$$

$i = 1 \ldots n$. Т.о. интегральное уравнение сводится к системе алгебраических уравнений.

Неприятность возникает при $j = i$. Существует процедура регуляризации, основанная на т.Гаусса.

1-собственная функция *(*)*, численный аналог этого утверждения

$1 - \tfrac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} k_{ij} \Delta S_j = 0$, т.о. $k_{ii} = \dfrac{2\pi - \sum_{j=1 \neq i}^{N} k_{ij} \Delta S_j}{\Delta S_i}$. Подставляя в *(**)*, получаем «хорошую систему» систему, у нее будет диагональное преобладание, т.е. она будет хорошо решаться.

NB. В случаях 1b) b 2a) получаем системы с нулевыми определителями.

Итерационные методы решения систем разностных уравнений.

Итерационные методы применяются главным образом для решения задач большой размерности.

1. <u>Метод простой итерации.</u>

2.12

Для применения метода простой итерации к системе линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b$$

с квадратной невырожденной матрицей *A*, необходимо предварительно преобразовать эту систему к виду

$$x = Bx + c. \qquad (*)$$

Вообще говоря, операция приведения системы к виду, удобному для итераций, не является простой и зависит от специфики системы. Самый простой способ приведения системы к удобному виду -

$x_i = a_{ii}^{-1}\left(b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \ldots - a_{ii-1}x_{i-1} - a_{ii+1}x_{i+1} - \ldots - a_{in}x_n\right)$. Получаемая в результате матрица *B* имеет нулевую диагональ, $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$, $c_i = b_i/a_{ii}$ $\quad i, j = 1\ldots n,\ j \ne i$.

В таком виде метод простой итерации называют методом Якоби.

Описание метода.

Выберем начальное приближение $x^{(0)}$. Подставляя его в правую часть системы вычисляем первое приближение $x^{(1)}$. Т.о. получаем последовательность приближений, вычисляемых по формуле $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$.

Теорема. Пусть выполнено условие $\|B\| < 1$. Тогда решение $\bar{x}$ *(*)* существует и единственно и при любом произвольном начальном приближении $x^{(0)}$ метод простой итерации сходится и справедлива оценка погрешности $\|x^{(n)} - \bar{x}\| \le \|B\|^n \|x^{(0)} - \bar{x}\|$.

Из оценки следует, что привыполнении этого условия метод сходится со скоростью геометрической прогрессии. Скорость сходимости тем выше, чем чем меньше $\|B\|$.

Для выхода из цикла лучше использовать апостериорную оценку погрешности (это неравенство верно при выполнении условия теоремы)

$$\|x^{(n)} - \bar{x}\| \le \frac{\|B\|}{1 - \|B\|}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|.$$

2. <u>Метод Зейделя.</u>

Этот метод можно рассматривать как модификацию метода Якоби. Идея заключается в том, что при нахождении очередного *(k+1)* приближения неизвестного x_i используют уже известные приближения $x_1, x_2, \ldots x_{i-1}$, а не k-е приближения.

Матрица $B=B_1+B_2$, где B_1-нижняя треугольная матрица, B_2-верхняя треугольная матрица:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 0 & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда расчетные формулы примут вид

$$x^{(k+1)} = B_1x^{(k+1)} + B_2x^{(k)} + c.$$

Теорема. Пусть выполняется условие $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$. Тогда при любом выборе начального приближения метод Зейделя сходится и верна оценка погрешности

$\|x^{(n)} - \bar{x}\| \le q^n \|x^{(0)} - \bar{x}\|$, где $q = \dfrac{\|B_2\|}{1 - \|B_1\|} < 1$.

Теорема. Если матрица ***A***- симметричная и положительно определенная, то при любом выборе начального приближения метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии.

2.12

Для выхода из цикла лучше использовать апостериорную оценку погрешности (это неравенство верно при $\|B\| < 1$)

$$\left\|x^{(n)} - \overline{x}\right\| \le \frac{\|B_2\|}{1-\|B\|}\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|.$$

3. <u>Метод релаксации.</u>

Суть метода релаксации состоит в следующем. После вычислении очередной *i*-й компоненты *(k+1)*-го приближения методом Зейделя производят дополнительно смещение этой компоненты на некоторую величину. Т.о. *i*-я компонента *(k+1)*-го приближения вычисляется по формуле

$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega B_1 x^{(k+1)} + \omega B_2 x^{(k)} + \omega c$, где ω - параметр релаксации.

При ω =1 метод совпадает с методом Зейделя, при ω >1 - метод последовательной верхней релаксации, при ω <1 - метод последовательной нижней релаксации. Для симметричной положительно определенной матрицы *A* метод сходится при любом ω $(0 < \omega < 2)$.

Общие замечания.

Различные методы ориентированы на решение разных классов систем:
метод Якоби - на системы с матрицами, близкими к диагональным;
метод Зейделя - на системы с матрицами, близкими к нижним треугольным;
метод релаксации - на системы с симметричными положительно определенными матрицами *A*;