2.4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Обусловленность матриц.

#Definition: Прямые методы – это когда мы находим решение за конечное число шагов и абсолютно точно, при условии того, что точна арифметика.

Гаусс

Метод Гаусса. Матрица сначала сводится к верхнедиагональной, затем обратными шагами – последовательно вычисляется решение.

Первый шаг (полагаем a11<>0): $\mu_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}, \quad a^1_{ij} = a_{ij} - \mu_{i1} \cdot a_{1j}, \quad b^1_i = b_i - \mu_{i1} \cdot b_i$.

Продолжаем далее в том же духе. Проблемы с ведущими коэффициентами a^{k-1}_{kk} (плохо, если они нулевые или маленькие). Решается с помощью выбора ведущего элемента и соответствующей перестановкой матрицы.

Данный метод разрешим при следующих условиях:

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists! \vec{x} : \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$$
$$\det A = 0 \Rightarrow \exists \vec{x}$$

Число операций: $\frac{2}{3} N^3$, что неприемлемо много.

***Метод Гаусса* с выбором ведущего коэффициента.** Идея состоит в приведении матрицы к верхне-диагональной форме и дальнейшем последовательном нахождении корней. Находим самый большой по модулю коэффициент при x_1 (если он равен 0, то уравнения не совместны) и приводим это уравнение к виду $x_1+a_{12}^2x_2+\ldots+a_{1n}^2x_n = b_1^2$. Последовательно отнимаем его от всех остальных уравнений, домножая на соответствующий коэффициент при первом неизвестном. Таки образом мы в оставшихся n-1уранениях избавляемся от первого неизвестного. Вышеописанную операцию повторяем для оставшейся части уравнений до тех пор пока последнее из них не приобретет вид $x_n = b_n^{\xi}$.(прямой ход). Из него берем xn и подставляя его во второе с конца уравнение получаем x_{n-1} и т.д. для x_{n-2} ... x_1.(обратный ход). Трудности возникают в случае когда ведущий коэф. ≈ 0. При делении на него возможно накопление ошибки. Для контроля в подобных ситуациях вводится контрольная величина $s_i = \Sigma a_{ij} + b_i$. И по отношению к ней выполняются все действия как с обычным коэффициентом. По завершении каждого шага сумма всех коэффициентов и свободного члена в текущем уравнении должна равняться текущему s.

Прогонка.

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Действуем методом исключения неизвестных:

2.4

$$x_1 = -\underbrace{\frac{c_1}{b_1}}_{\alpha_1} + \underbrace{\frac{d_1}{b_1}}_{\beta_1} \Rightarrow x_1 = \alpha_1 + \beta_1$$

$$x_2 = x_1 = a_2(\alpha_1 x_2 + \beta_1) + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2 \Leftrightarrow (a_2\alpha_1 + b_2)x_2 + c_2 x_3 = d_2 - a_2\beta_1 \Leftrightarrow$$

$$x_2 = -\underbrace{\frac{c_2}{a_1\alpha_2 + b_1}}_{\alpha_2} x_3 + \underbrace{\frac{\alpha_2 - a_2\beta_1}{a_1\alpha_2 + b_1}}_{\beta_2} = \alpha_2 x_3 + \beta_2$$

$\vdots$

И так далее…

Т.е. сначала мы ищем альфы и беты (прямой ход прогонки) по формулам:

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}$$
$$\beta_i = \frac{\alpha_i - a_i\beta_{i-1}}{a_i\alpha_{i-1} + b_i}$$

, а затем находим иксы: $x_n = \frac{\alpha_n - a_n\beta_{n-1}}{a_n\alpha_{n-1} + b_n}$ (обратный ход прогонки).

Достаточное условие устойчивости: $|b_n| > |a_n| + |c_n|$. Кстати, это условие всегда выполняется для матриц вторых производных.

Обусловленность

Пусть дана система $A\vec{x} = \vec{b}$. $\vec{x}$ - точное решение системы, $\vec{x}^*$ — приближенное.
Подставляя $\vec{x}^*$ в систему, получаем $A\vec{x}^* = \vec{b}^*$.
$\vec{e} = \vec{x}^* - \vec{x}$ — погрешность решения.
$\vec{r} = \vec{b}^* - \vec{b}$ — невязка.
$\Delta(\vec{x}^*) = \|\vec{x}^* - \vec{x}\| = \|A^{-1}\vec{r}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|r\| = \|A^{-1}\|\Delta(\vec{b}^*)$, таким образом оценка абсолютного числа обусловленности $\nu_\Delta = \|A^{-1}\|$.

Для относительного числа обусловленности имеем $\delta(\vec{x}^*) \cdot \|\vec{x}\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \delta(\vec{b}^*)$, откуда с учетом неравенства для нормы матрицы $\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \le \|A\|$ и того, что $A\vec{x} = \vec{b}$, получаем

$$S = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \le 1.$$

$\nu_\delta = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ — стандартное число обусловленности матриц, обозначается cond(A).
Если коэффициенты системы уравнений (т. е. матрица A) также задаются с некоторой погрешностью, то выражение для числа обусловленности матрицы сохраняется. А именно, можно показать, что в этом случае имеет место неравенство
$\delta(\vec{x}^*) \le \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \cdot \left(\delta(\vec{b}^*) + \delta(A^*)\right)$.
Интерпретация числа обусловленности матрицы.
Ассоциированная норма матрицы определяется формулой $\|A\| = \max\limits_{\vec{x}\ne 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$, т. е.

соответствует максимальному коэффициенту растяжения. Для нормы обратной матрицы имеем:

2.4

$\left\| A^{-1} \right\| = \max\limits_{\vec{b} \neq 0} \dfrac{\left\| A^{-1}\vec{b} \right\|}{\left\| \vec{b} \right\|} = \max\limits_{\vec{x} \neq 0} \dfrac{\left\| \vec{x} \right\|}{\left\| A\vec{x} \right\|} = \left(\min\limits_{\vec{x} \neq 0} \dfrac{\left\| A\vec{x} \right\|}{\left\| \vec{x} \right\|} \right)^{-1}$, т. о. она соответствует величине, обратной минимальному коэффициенту растяжения. Таким образом, $cond(A) = \dfrac{K_{\max}}{K_{\min}}$.

Мера обусловленности системы: $\nu(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \dfrac{\max|\lambda_A|}{\min|\lambda_A|}$.Если $\nu(A)$немного больше *1* матрица является хорошо обусловленной.