思考与挑战 好题共研究

供稿：OM 学社

习题 1 (前置知识：数学分析 1)

设 $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为非负下凸函数,$\phi(0)=0$ 且 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\frac{\phi(t)}{t}=\infty$。$\forall s\in\mathbb{R}$ 定义 $\phi^*(s)=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{st-\phi(t)\}$。证明：

1. $\phi^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为非负函数,$\phi^*(0)=0$

2. ϕ^* 为下凸函数

3. $\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{\phi^*(s)}{s}=+\infty$

4. $(\phi^*)^*=\phi$

(选自 OM 模拟期末考)

证明 凸函数的性质见命题??。

1. 令 $h_s(t):=st-\phi(t)$. 显然,
$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\phi(t)}{|t|}=+\infty$
故 $\forall s\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{st-\phi(t)}{|t|}=-\infty,\exists M>0,\forall|t|>M,h_s(t)<0$。而 h_s 在 $[-M,M]$ 上连续，故 $\exists x_0,h_s(x_0)=\max\limits_{x\in[-M,M]}\{h_s(x)\}\geqslant h_s(0)=0$，从而 $h_s(x_0)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}}\{h_s(x)\}=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\{h_s(x)\}=\phi^*(s)\geqslant 0$ 从而 ϕ^* 是良定义的（这点需要注意，一个数集有无上确界需要验证）非负函数。

2. 设 $x_1<x_3,x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$, 则 $\phi^*(x_2)=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{x_2t-\phi(t)\}$
$=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{\lambda(x_1t-\phi(t))+(1-\lambda)(x_3t-\phi(t))\}\leqslant\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{\lambda(x_1t-\phi(t))+\sup\limits_{u\in\mathbb{R}}\{(1-\lambda)(x_3u-\phi(u))\}\}=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{\lambda(x_1t-\phi(t))\}+\sup\limits_{u\in\mathbb{R}}\{(1-\lambda)(x_3u-\phi(u))\}=\lambda\phi^*(x_1)+(1-\lambda)\phi^*(x_3)$

3. $\forall x\in\mathbb{R}$
$\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{\phi^*(s)}{s}=\lim\limits_{s\to+\infty}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{t-\frac{\phi(t)}{s}\}\geqslant\lim\limits_{s\to+\infty}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{t-\frac{\phi(t)}{s}\}\geqslant\lim\limits_{s\to+\infty}x-\frac{\phi(x)}{s}=x$
故 $\lim\limits_{s\to+\infty}\frac{\phi^*(s)}{s}=+\infty$

4. 一方面，$\phi^{**}(x)$
$=\max\limits_{s\in\mathbb{R}}\{xs-\phi^*(s)\}$
$=\max\limits_{s\in\mathbb{R}}\{xs-\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\{st-\phi(t)\}\}$
$\leqslant\max\limits_{s\in\mathbb{R}}\{xs-\left(sx-\phi(x)\right)\}=\phi(x)$
另一方面，令 $y:=\phi'_-(x)$，则 $\phi^{**}(x)\geqslant xy-\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\{yt-\phi(t)\}$。令 $F(t):=yt-\phi(t)$，则 $F'_-(x)=y-\phi'_-(x)=0\geqslant 0$, $F'_+(x)=y-\phi'_+(x)\leqslant 0$, 从而 $\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\{yt-\phi(t)\}=F(x)$, 故 $\phi^{**}(x)\geqslant xy-\max\limits_{t\in\mathbb{R}}\{yt-\phi(t)\}=xy-(yx-\phi(x))=\phi(x)$
综上 $\phi^{**}=\phi$。

□

命题 1: 凸函数的性质

设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为下凸函数，则：

1. $x_1<x_2<x_3\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$

证明 $\lambda:=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, 则 $x_2=\lambda x_1+(1-\lambda)x_3$, $f(x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_3)$
将 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ 代入整理即证。

2. $\forall x\in\mathbb{R},f'_+(x),f'_-(x)$ 都存在,

从而 f 连续。其中: $f'_+(x) := \lim\limits_{t\to x+}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

$f'_-(x) := \lim\limits_{t\to x-}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$

证明 令 $g_x(t) := \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ 取 $y < x, \forall t_1 > t_2 > x, g_x(t_1) \geqslant g_x(t_2) \geqslant g_x(y)$，故由单调有界知 $f'_+(x)$ 存在，同理 $f'_-(x)$ 存在。

3. $\forall x < y, f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \forall z, f'_-(z) \leqslant f'_+(z)$ 从而：$\forall x < y, f'_-(x) \leqslant f'_+(x) \leqslant f'_-(y) \leqslant f'_+(y)$ 故 f'_-, f'_+ 为单调不减函数。

证明 $\forall x < y, f'_+(x) = \lim\limits_{t\to x+} g_x(t) \leqslant g_x(y) = g_y(x) \leqslant \lim\limits_{t\to y-} g_y(t)$

$\forall x, f'_-(x) = \lim\limits_{t\to 0+} g_x(x-t) \leqslant \lim\limits_{t\to 0+} g_x(x+t) = f'_+(x)$

4. $f(x) = \min\limits_{t\in\mathbb{R}}\{f(t)\} \Leftrightarrow f'_-(x) \leqslant 0 \leqslant f'_+(x)$

证明 $\Rightarrow$: $f'_-(x) = \lim\limits_{t\to x-}\dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} \leqslant \lim\limits_{t\to x-}\dfrac{f(x)-f(x)}{t-x} = 0$

同理 $f'_+(x) \geqslant 0$

$\Leftarrow$:

$\forall y < x, g_x(y) \leqslant \lim\limits_{t\to x-} g_x(t) = f'_-(x) \leqslant 0$

$\Rightarrow f(y) - f(x) \geqslant 0(y-x) = 0$

对 $y > x$ 同理。

上述性质对上凸函数均有对偶的命题成立。

习题 2 (前置知识：拓扑学和纲)

证明或否定，满足 $T2$ 公理的局部紧拓扑空间必然是正规空间。(选自彦文娇老师思考题)

证明 我们来构造一个反例。由于局部紧 *Hausdorff* 空间必然是 $T3$ 的，而 $T3+C2$ 可以推出 $T4$，故我们必须构造非 $C2$ 的拓扑空间。考虑拓扑空间 $(\mathbb{R},\tau)$，τ 为拓扑基 $\mathscr{B} := \{\{r\} : r\in\mathbb{Q}\}\cup\{\{s\}\cup\{\frac{[ns]}{n} : n > k, n\in\mathbb{N}\} : s\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, k\in\mathbb{N}\}$ 生成的拓扑（请读者验证这是个拓扑基）。首先我们证明这个拓扑是满足 $T2$ 公理的，只需证这个拓扑比欧氏拓扑更大。

$\forall a < b, \forall x \in (a,b)$，若 $x\in\mathbb{Q}$，则 $x\in\{x\}\subset(a,b)$。否则 $x\notin\mathbb{Q}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nx]}{n} = x, \exists k\in\mathbb{N}, \forall n > k, \dfrac{[nx]}{n}\in(a,b)$，从而 $x\in\{x\}\cup\{\frac{[nx]}{n} : n > k, n\in\mathbb{N}\}\in\tau$。故 $(a,b)\in\tau$，从而 τ 是 $T2$ 的。

接下来验证 τ 是局部紧的：

$\forall x\in\mathbb{R}$，若 $x\in\mathbb{Q}$，则 $\{x\}$ 为 x 的紧邻域。否则 $x\notin\mathbb{Q}$，下面验证 $u := \{x\}\cup\{\frac{[nx]}{n} : n > 0, n\in\mathbb{N}\}$ 为 x 的紧邻域。只需证该邻域的任何基覆盖（拓扑基中元素组成的覆盖）都有有限子覆盖即可。设 $u = \bigcup\limits_{\alpha\in I} u_\alpha, u_\alpha\in\mathscr{B}$，则 $\exists\alpha_0\in I, x\in u_{\alpha_0}, \exists k\in\mathbb{N}, \{x\}\cup\{\frac{[nx]}{n} : n > k, n\in\mathbb{N}\}\subset u_{\alpha_0}, \forall n : 0 < n \leqslant k, \exists\alpha_n, \frac{[nx]}{n}\in u_{\alpha_n}$，故 $\{u_{\alpha_n} : n = 0,1,\cdots k\}$ 为一族有限子覆盖。综上 τ 是局部紧的。

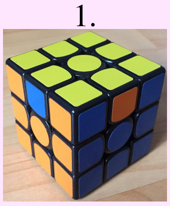
最后我们来验证 τ 是不满足 $T4$ 公理的：将无理数集划分为一个第二纲集和一个稠集 A, B（论证过程中提到的纲和稠的概念全部都是欧氏拓扑下的），显然有无理数集的子集都是 $(\mathbb{R},\tau)$ 中的闭集，下证 A, B 无法被分离。设 $A\subset U\in\tau, B\subset V\in\tau$，令 $A_k = \{x\in A : \forall n > k, \frac{[nx]}{n}\in U\}$。由 U 为包含 A 的开集知 $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$。由 A 为第二纲集，故 $\exists t\in\mathbb{N}, (a,b)\in\mathbb{R}, A_t$ 在 (a,b) 中稠密。由 B 在 $\mathbb{R}$ 中稠，知 $\exists s\in B\cap(a,b), \exists r\in\mathbb{N}, \{s\}\cup\{\frac{[ns]}{n} : n > r, n\in\mathbb{N}\}\subset V$，令 $m = \max\{r,t\}+520, c = \frac{[ms]}{m}, d = \frac{[ms]+1}{m}$，则 $s\in(c,d), (a,b)\cap(c,d)\neq\emptyset$。由 A_t 在

(a,b) 中稠知 $\exists y \in A_t \cap (a,b) \cap (c,d), U \ni \frac{[my]}{m} = \frac{[ms]}{m} \in V, U \cap V \neq \emptyset$。从而 τ 是非 $T4$ 的。 $\square$

习题 3 (前置知识：群的简单性质)

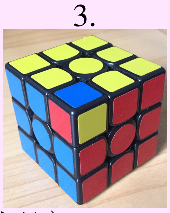
证明下列魔方不可还原：

1.



2.

3.



（图中看不到的色块都是正确的）

证明（建议配合一个魔方食用）

首先我们固定魔方的六个中心（即忽略魔方整体的转动），则魔方的每个操作都由某个面顺时针旋转 *90* 度复合构成，我们将对魔方的所有操作组成的集合记作 G，则 G 关于操作的复合构成一个群。记将黄、白、红、橙、蓝、绿色中心块顺时针转 *90* 度为 y,w,r,o,b,g，称它们为基本操作。则 $G = \langle y,w,r,o,b,g \rangle$。记 G 的单位元为 e，则一个状态 a 可复原当且仅当能通过 G 中的某个元素 a' 对复原状态进行操作能得到状态 a，易知 a 与 a' 是一一对应的，故以下我们不再区分状态和操作，认为 a 和 a' 是同一对象。

1. 将魔方的 *8* 个角和 *12* 个棱编号 $1 \sim 20$，作一个群同态 $f: G \to S_{20}, f(x)$ 为 x 对应的状态棱块和角块的置换，易知 f 为一个群同态。且对于每个基本操作 x，都有 $f(x)$ 为偶置换（因为对应面的棱和角分别构成一个 *4*-循环，故为偶置换），从而 $\forall x \in G, f(x)$ 为偶置换。但图片中的魔方只交换了两个棱块，对应的置换为奇置换，故无法还原。

2. 将魔方的 *12* 个棱块的 *24* 个色块编号 $1 \sim 24$，作一个群同态 $g: G \to S_{24}, g(x)$ 为 x 对应的状态这些色块的置换（注意即使色块颜色相同也被赋予了不同的编号因此要看成不同的）。注意到对于每个基本操作 x，都有 $g(x)$ 为偶置换（因为对应面的棱的色块分别构成两个 *4*-循环，故为偶置换），从而 $\forall x \in G, g(x)$ 为偶置换。但图片中的魔方只交换了两个色块，对应的置换为奇置换，故无法还原。

3. 将魔方的 *8* 个角编号 $1 \sim 8$，作一个群同态 $\phi: G \to S_8, \phi(x)$ 为 x 对应的状态角块的置换。将魔方的白色和黄色中心对应的面称为好面，白色和黄色称为好色。作映射 $h_i: G \to \mathbb{Z}_3, h_i(x)$ 为 x 对应的状态编号为 i 的角块顺时针扭转到好色在好面上需要的次数。由于角块扭转 *3* 次和不扭转等价，故映射良定义。且有 $h_i(ab) = h_i(b) + h_{\phi(b)(i)}(a)$。作映射 $h: G \to \mathbb{Z}_3, h(x) = \sum_{i=1}^{8} h_i(x), h(ab) = \sum_{i=1}^{8} h_i(ab) = \sum_{i=1}^{8} h_i(b) + h_{\phi(b)(i)}(a) = h(a) + h(b)$，故 h 为群同态。对于基本操作 s，若 $s = y,w$，$h_i(s) = 0$，故 $h(s) = 0$。若 $s = r,o,b,g$，则有四个 i 使得 $h_i(s) = 0$, 有两个 i 使 $h_i(s) = 1$, 有两个 i 使 $h_i(s) = -1$ 故 $h(s) = 0$。从而 $\forall x \in G, h(x) = 0$。但显然题目所给状态对应的 h 为 2，故无法还原。

$\square$

习题 4 (前置知识：概率论)

$N: \Omega \to \mathbb{N}, \mathbb{P}(N = 0) < 1$ 为随机变量，独立地投掷一枚未必均匀的硬币 N 次，每次出现正面的概率为 p，X, Y 分别表示 N 次中出现正面和反面的次数。求证：

$X \perp Y \iff \exists \lambda > 0, N \sim \mathcal{P}(\lambda)$

（选自何辉老师作业）

证明 令 $q := 1-p$

"$\Leftarrow$"：$\forall i,j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=i,Y=j)\\=&\mathbb{P}(X=i,N=i+j)\\=&\binom{i+j}{i}p^iq^j\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\=&\frac{p^i}{i!}\frac{q^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda}\\=&\frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{q^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda q}\end{aligned}$$

故 $X\sim\mathcal{P}(\lambda p),Y\sim\mathcal{P}(\lambda q),X\perp Y$

"$\Rightarrow$"：$\forall i,j\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X=i,Y=j)\\=&\mathbb{P}(X=i,N=i+j)\\=&\mathbb{P}\left(X=i|N=i+j\right)\mathbb{P}(N=i+j)\\=&\binom{i+j}{i}p^iq^j\mathbb{P}(N=i+j)\end{aligned}$$

定义 $\begin{cases}f(i):=p^{-i}i!\mathbb{P}(X=i)\\g(j):=q^{-j}j!\mathbb{P}(Y=j)\end{cases}$ 则由 $X\perp Y$，有 $(i+j)!\mathbb{P}(N=i+j)=p^{-i}i!\mathbb{P}(X=i)\,q^{-j}j!\mathbb{P}(Y=j)=f(i)g(j)$ 从而

$$\begin{aligned}&f(i+1)g(j)\\=&(i+j+1)!\mathbb{P}(N=i+j+1)\\=&f(i)g(j+1)\end{aligned}$$

(1) 若 $\exists i,f(i)g(i)=0$，

令 $m:=\min\{i: f(i)g(i)=0\}$，

则 $f(m)g(m)=0,f(m-1)g(m-1)>0$。

不妨设 $f(m)=0$，则 $\mathbb{P}(X=m)=0$，则 $\sum_{k=m}^{+\infty}\mathbb{P}\left(X=m|N=k\right)\mathbb{P}(N=k)=0$

则 $\forall k\geqslant m,\mathbb{P}(N=k)=0$，但

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(N=2m-2)\\\geqslant&\mathbb{P}(X=m-1,Y=m-1)\\=&\mathbb{P}(X=m-1)\mathbb{P}(Y=m-1)>0\end{aligned}$$

故 $2m-2<m,m=1$，从而 $N=0$ a.s. 矛盾！故 $\forall i,f(i)g(i)\neq0$

(2)$\forall i,j\in\mathbb{N},f(i)\neq0,g(j)\neq0$，则 $\exists\lambda>0,\frac{f(i+1)}{f(i)}=\frac{g(j+1)}{g(j)}=\lambda$，则 $f(i)=f(0)\lambda^i,g(j)=j(0)\lambda^j$，则 $(i+j)!\mathbb{P}(N=i+j)=f(0)g(0)\lambda^{(i+j)}$，则 $\mathbb{P}(N=i+j)=\frac{\lambda^{(i+j)}}{(i+j)!}f(0)g(0)$，又有 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{n!}f(0)g(0)=1$，则 $f(0)g(0)=\mathrm{e}^{-\lambda}$，故 $\mathbb{P}(N=n)=\frac{\lambda^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，故 $N\sim\mathcal{P}(\lambda)$ □

习题 5 前置知识：数学分析 3

请找出满足下列条件的函数和区间。

1. 两个累次积分存在而不相等的函数.

2. 二重积分存在而两个累次积分都不存在的函数.

（选自汪林的《数学分析中的问题和反例》）

证明 *1.* 设

$$f(x,y)=\begin{cases}y^{-2}, & 0<x<y<1,\\-x^{-2}, & 0<y<x<1,\\0, & otherwise\end{cases}$$

对于 $0<y<1$，有

$$\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^y\frac{dx}{y^2}-\int_y^1\frac{dx}{x^2}=1$$

因而 $\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=1$

同样地，对于 $0<x<1$，有

$$\int_0^1 f(x,y)dy=-\int_0^x\frac{dy}{x^2}+\int_x^1\frac{dy}{y^2}=-1$$

因而

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = -1$$

可见

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy \neq \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$$

2. 设 x 为一有理数, 则将它表作正分母的既约分数后, 分母表示为 q_x. 今在正方形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}, & x,y\in\mathbb{Q} \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

兹证 f 在 D 上是可积的. 为此, 我们先来证明 f 在 D 中任一无理点处连续, 而在其余点处间断. 事实上, 设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一无理点, 对于任给的 $\varepsilon>0$, 只有有限个小于或等于 $\frac{2}{\varepsilon}$ 的正整数. 因此, 使得 $\frac{1}{q_x}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{q_y}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 $x=\frac{p_x}{q_x}, y=\frac{p_y}{q_y}$ 只有有限个. 于是, 存在 x_0 (注意, x_0 是无理数!) 的 δ-邻域, 使得适合不等式 $\frac{1}{q_x}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 x 全在 δ-邻域之外. 同样, 由于 y_0 也是无理数, 故存在 y_0 的 ξ-邻域, 使得适合不等式 $\frac{1}{q_y}\geqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 的有理数 y 全在 ξ-邻域之外. 因此, 存在 (x_0,y_0) 的一个 η-邻域, 在这个邻域中, 若 (x,y) 为有理点, 则 $\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}<\varepsilon$; 若 (x,y) 不是有理点, 则 $f(x,y)=0$; 而在 (x_0,y_0) 处, $f(x_0,y_0)=0$. 由此可知, 当点 (x,y) 落在 (x_0,y_0) 的 η-邻域时, 就有 $\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$.

于是, f 在 D 中无理点上的连续性得以证明. 设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一有理点, 则 $f(x_0,y_0)=\frac{1}{q_{x_0}}+\frac{1}{q_{y_0}}=: r>0$

因为 (x_0,y_0) 的任一邻域中都含有无理点 (x,y), 在这种点上 $f(x,y)=0$, 所以当取 $\varepsilon(0<\varepsilon<r)$ 时, 就无法使

$\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)\right|<\varepsilon$

成立. 因此, f 在 D 中的有理点上不连续. 设 (x_0,y_0) 为 D 中任一其余的点, 即 x_0,y_0 不全为有理数, 也不全为无理数. 不妨设 x_0 为有理数而 y_0 为无理数, 此时 $f(x_0,y_0)=0$. 在 (x_0,y_0) 的任一 δ-邻域中都有有理点 (x_0,y), 在这种点上, 有 $f(x_0,y)=\frac{1}{q_{x_0}}+\frac{1}{q_y}>\frac{1}{q_{x_0}}>0$. 于是, 当取 $0<\varepsilon<\frac{1}{q_{x_0}}$ 时, 就无法使

$\left|f(x_0,y_0)-f(x_0,y)\right|<\varepsilon$ 成立. 因此, f 在 (x_0,y_0) 处不连续. 现设 I 为 $D=[0,1]\times[0,1]$ 中的全体无理点所成之集, 而 I_1 与 I_2 分别为 x 轴上的区间 $[0,1]$ 与 y 轴上的区间 $[0,1]$ 中的全体无理点, 则有 $I=I_1\times I_2$. 因 $m(I)=m(I_1)m(I_2)=1$, 故 $m(D\backslash I)=0$, 可见 f 在 D 上的不连续点所成之集其测度为零. 又, f 在 D 上有界. 因此, f 在 D 上是可积的. 最后, 我们证明 f 在 D 上的两个累次积分都不存在, 从而不能把 f 在 D 上的二重积分化为累次积分来计算. 我们任意固定 $y\in[0,1]$, 当 y 为有理数时, q_y 为一确定的正整数, 且有

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y}, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

易见, $\varphi(x)=f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上无处连续, 从而不可积, 也就根本谈不上 f 在 D 上的累次积分. 另一方向同理。

$\square$