思考与挑战 好题共研究

供稿：OM 学社

习题 1 (前置知识：实变函数)

用控制收敛定理求解下面两道题目：

1. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n^2}=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b_n}{n^2}=b$. 证明极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ 存在并求其值.

2. 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=0$, 函数 f 在 $[-1,2]$ 上有界, 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 证明: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\int_0^1 f(x)dx$.

(选自大学生数学竞赛)

证明

1. 构造 $[0,1]$ 上的函数序列 f_n 如下：

$$f_n(x)=\frac{a_{[nx]}b_{n-[nx]}}{n^4}$$

对于 $0<x<1$ 我们有: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{[nx]}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{[nx]}}{[nx]^2}\frac{[nx]^2}{n^2}=ax^2$. 同理 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n-[nx]}}{n^2}=b(1-x)^2$. 故 $f_n(x)\to abx^2(1-x)^2, x\in(0,1)$. 注意到 $|f_n(x)|\leqslant\sup\{\frac{a_m}{m^2}\}\sup\{\frac{b_m}{m^2}\}$ 可积，故满足控制收敛定理的条件。且有 $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx=\frac{1}{(n+1)^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$。故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx=\frac{ab}{30}$.

2. 构造 $[0,1]$ 上的函数序列 f_n 如下：

$$f_n(x)=f\left(\frac{[nx]+1}{n}+\beta_n\right)$$

由 $f(x)$ 黎曼可积知其几乎处处连续，且在 $[0,1]$ 中 f 的连续点处显然有 $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 又 f 有界，且 $\exists N,\forall n<N,\beta_n\in(-1,1)$，故 $|f_n(x)|<\sup_{x\in[-1,2]}|f(x)|$ 从某项开始一致有界，故满足控制收敛定理的条件。从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}+\beta_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$. $\square$

点评 1

这两道题目其实都可以用数学分析的方法来解答（留作习题读者自证），但是过程会非常繁琐。

通过构造函数列的方法将欲求的数列的每一项看成某个函数的积分，从而使用控制收敛定理，是一个非常巧妙的方法。

控制收敛定理仿佛“吸收”了证明的难点，让我们的证明变得非常简洁。这也从侧面说明了勒贝格积分理论的优越性。

读者可以通过控制收敛定理来证明 stolz 定理来练手。

习题 2 (前置知识：伽罗瓦理论)

设 $u \in \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}_+$. 若 $u^n \in \mathbb{Q}$ 且 $(u+1)^n \in \mathbb{Q}$, 证明 $u \in \mathbb{Q}$. (提示：考虑 $\mathbb{Q}(u,\zeta)/\mathbb{Q}$, 其中 ζ 为 n 次本原单位根.)

证明 显然 $\mathbb{Q}(u,\zeta)$ 为 $x^n - u^n$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的分裂域, 故为 *Galois* 扩张. 若 $u \notin \mathbb{Q}$, 则存在 $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(u,\zeta), \sigma(u) \neq u$. 故 $\sigma(u) = \zeta^i u, n \nmid i$. 由于 $u+1$ 是 $x^n - (u+1)^n$ 的根, 故 $1 + \zeta^i u = \sigma(1+u) = \zeta^j(1+u) \neq 1+u, n \nmid j$. 若 $i \not\equiv j \mod n$, 则 $u = \frac{\zeta^j - 1}{\zeta^i - \zeta^j}, u+1 = \frac{\zeta^i - 1}{\zeta^i - \zeta^j}$. 则 $\frac{u}{u+1} = \frac{\zeta^j - 1}{\zeta^i - 1} \in \mathbb{R}$. 从而 $k\pi = \arg(\zeta^j - 1) - \arg(\zeta^i - 1) = \frac{\arg(\zeta^j) - \arg(\zeta^i)}{2} = \frac{j-i}{n}\pi$, 即 $i \equiv j \mod n$, 矛盾! 故 $i \equiv j \mod n$. 从而 $1 + \zeta^i u = \zeta^j(1+u) = \zeta^i(1+u)$, 得 $\zeta^i = 1$, 矛盾! 故 $u \in \mathbb{Q}$. $\square$

点评 2

伽罗瓦理论是代数中很重要的理论，很多人可能只知道伽罗瓦理论可以用来证明代数方程是否有根式解，但其实伽罗瓦理论在其他代数问题中也有广泛的应用。

习题 3 (前置知识：高等代数)

有 13 枚硬币，已知其中有一枚重量不同或全部重量相同。另外有若干标准硬币供使用。现有一个天平，要求称量三次找出重量不同的硬币，并说明它重量比别的硬币大还是小。

证明 事实上我们可以加强命题，即必须先指定三次称量分别放哪些硬币，再开始称量。给 *13* 枚硬币编号 *1-13*，并考虑所谓“称量向量”，$a \in \{-1,0,1\}^{13}$ 为行向量，$a_i = -1, 1, 0$ 分别代表第 i 枚硬币放在左边、右边、不在天平上。由于我们不知道硬币的质量，所以不同硬币的比较是无意义的，因此我们每次称量应当使两边硬币数量相同。当 a 分量和不为 0 时我们在实际称量时用标准硬币补齐差额。假设 b 为表示硬币重量的列向量，$b_i = 1, 0, -1$ 分别表示第 i 枚硬币偏轻，标准，偏重。则称量结果可以用 ab 表示，$ab = -1, 0, 1$ 分别表示天平向左，平衡，向右。这样三次称量就可以用称量矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ 来表示，而称量的结果就是 Ab。我们需要给出满足条件的 A 使得 $b \mapsto Ab$ 是单射。注意到 $b_i = 1$ 时 Ab 为 A 的第 i 列，$b_i = -1$ 时 Ab 为 A 的第 i 列的相反数，而 $b = 0$ 时 $Ab = 0$，因此 A 的每一列以及它们的相反数都不相同，且都不为 0。注意到 $\{-1,0,1\}$ 的组合一共有 27 种，故除了 $(0,0,0)^T$ 外其余组合都恰好出现一次。故可以如下构造 A:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

之后根据称量结果可以立刻看出是哪一枚硬币轻了或者重了。 $\square$

点评 3

在信息传输中经常会遇到偶尔失真的可能，这时候就需要一些校验的方法。类似“称量矩阵”我们可以有校验矩阵，其作用是只要信息失真不超过一定范围 (本题目中只能有一个硬币出错) 就可以恢复原本的信息。代数学在信息学中应用很广泛，感兴趣的同学可以自己了解。