underGraduate Homework In Mathematics

Probability 1

白永乐

202011150087

202011150087@mail.bnu.edu.cn

2025 年 10 月 11 日

General fire extinguisher

PROBLEM I 证明 σ-代数是集代数。

SOLUTION. 设 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数，则由定义知 $\Omega \in \mathcal{A}$。下面证 $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$。易知 $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$。由 $A \in \mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数知 $A^c \in \mathcal{A}$。又 $A^c, B \in \mathcal{A}$，可取 $A_1 = A^c, A_2 = B, A_n = \emptyset, \forall n \geq 3,$ 可知 $A^c \cup B = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$。最后由 $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ 知 $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$。

综上知 $\mathcal{A}$ 是集代数。 □

PROBLEM II 设 $\mathcal{C}$ 是集类，则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。

SOLUTION. 定义 $\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$。对于 $A \in \mathcal{C}$，易知 $A \in \sigma\{A\}$，故 $A \in \mathcal{D}$。从而 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$。又显然有 $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$，故要证 $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$，只需证 $\mathcal{D}$ 是 σ-代数。

1. 由 $\Omega \in \{\emptyset, \Omega\} = \sigma(\emptyset)$ 知 $\Omega \in \mathcal{D}$。
2. 对 $A \in \mathcal{D}$，取满足条件的 $\mathcal{C}_1$，则由 $A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 知 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$，故 $A^c \in \mathcal{D}$。
3. 对 $A_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \cdots$，分别取满足条件的 $\mathcal{C}_n$。考查 $\mathcal{C}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$。由 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{C}_0)$ 及 $\sigma(\mathcal{C}_0)$ 为 σ-代数可知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C}_0)$。又由 $\mathcal{C}_n$ 是可数的，得 $\mathcal{C}_0$ 是可数的。故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$。

综上知 $\mathcal{D}$ 为 σ-代数，故 $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$，也即 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。 □

PROBLEM III σ-代数 $\mathcal{A}$ 称为可数生成的，如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$。证明 $\mathcal{B}^d$ 是可数生成的。

SOLUTION. 令 $\mathcal{C} := \{B(x, r) : x = (x_1, \cdots, x_d), x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \cdots, d, r \in \mathbb{Q}\}$。易知 $\mathcal{C}$ 可数。令 $\mathcal{O}$ 为全体开集。易知 $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$，故 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}^d$。故要证 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}^d$，只需 $\sigma(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}^k$。又由 $\sigma(\mathcal{C})$ 为 σ-代数，且 $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{O})$，故只需证 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$。对于 $O \in \mathcal{O}$，我们只需证 $O = \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C \in \sigma(\mathcal{C})$（由 $\mathcal{C}$ 可数知其为可数并）。显然有 $O \supset \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$，故只需证 $O \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$。取 $x \in O$，由 O 为开集知 $\exists r > 0, B(x, r) \subset O$。设 $x = (x_1, \cdots, x_d)$，由有理数的稠密性知 $\exists y_i \in \mathbb{Q}, |x_i - y_i| < \frac{r}{100d}$。再取 $s \in \mathbb{Q}$ 使 $\frac{r}{3} < s < \frac{r}{2}$。则易知 $B(y, s) \subset B(x, r) \subset O$，且 $x \in B(y, s) \in \mathcal{C}$。故 $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$。

综上 $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{C})$ 是可数生成的。 □

PROBLEM IV 设 $\mathcal{C}_n$ 是单调上升的集类。

1. 设 $\mathcal{C}_n$ 是集代数，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 是集代数
2. 设 $\mathcal{C}_n$ 是 σ-代数，则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 未必是 σ-代数。

SOLUTION.

1. (a) 显然 $\Omega \in \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$。

   (b) 设 $A, B \in \mathcal{C}$，则 $\exists n, m$ 使 $A \in \mathcal{C}_n, B \in \mathcal{C}_m$。取 $k > n, m$，则 $A, B \in \mathcal{C}_k$。故 $A \setminus B \in \mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}$。

   故 $\mathcal{C}$ 是集代数。
2. 令 $\Omega = \mathbb{N}$，令 $\mathcal{C}_n$ 是由 $\{\{1\}, \{2\}, \cdots, \{n\}\}$ 生成的 σ 代数。考察 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n = \{A : A\text{有限} \vee A^c\text{有限}\}$，易知 $\forall n, \{2n\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$，但 $2\mathbb{N} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$。故其不是 σ-代数。

□

PROBLEM V 证明 σ 代数不能与 $\mathbb{N}$ 等势。

SOLUTION. 设 $\mathcal{F}$ 是一个 σ-代数。考察其原子集族 $\mathcal{A}$。若 $\mathcal{A}$ 是 Ω 的覆盖，则考察 $|\mathcal{A}|$。若 $\mathcal{A}$ 有限，则易知 $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{A}|}$ 也有限。若 $\mathcal{A}$ 无限，则取一个 $\mathcal{A}$ 的可数子集 $\mathcal{A}_1$，加上 $\Omega \setminus \bigcup \mathcal{A}_1$ 构成一个 Ω 的可数分割，记为 $\mathcal{B}$。故 $|\mathcal{F}| \geq |\sigma(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$。

若 $\mathcal{A}$ 不是 Ω 的覆盖，则 $\mathcal{F}$ 中一定有无穷递降列 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$。令 $A_n := F_n \setminus F_{n+1}$，则 $A_n \in \mathcal{F}$ 两两不交。取 $\mathcal{B} := \{A_n : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$，则由前面的讨论知 $\mathcal{F}$ 不可数。 □

PROBLEM VI 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 中任一集代数，则存在 Ω 中的单调类 $\mathcal{M}_0$ 满足：

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$，
2. 对于包含 $\mathcal{C}$ 的单调类 $\mathcal{M}$，有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$。

称这样的单调类为 $\mathcal{C}$ 生成的单调类，记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$。

SOLUTION. 令

$$\mathcal{M}_0 := \bigcap_{\mathcal{M}:\mathcal{C}\subset\mathcal{M},\mathcal{M}\text{为 } \Omega \text{ 上的单调类}} \mathcal{M} \tag{1}$$

。显然 2^{Ω} 是包含 $\mathcal{C}$ 的单调类，故 $\mathcal{M}_0$ 良定义。由 $\mathcal{M}_0$ 的定义易知1,2 是成立的。故只需证 $\mathcal{M}_0$ 是单调类。

对 $A_1, \cdots \in \mathcal{M}_0, A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，我们要证 $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_0$。对于(1)中的 $\mathcal{M}$，由 $\mathcal{M}_0$ 的定义知 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$，故 $A_n \in \mathcal{M}$。又由 $\mathcal{M}$ 为单调类，故 $A \in \mathcal{M}$。由 $\mathcal{M}$ 的任意性可知 $A \in \mathcal{M}_0$。对单调下降集列同理可得。故 $\mathcal{M}_0$ 是单调类，从而 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 是良定义的。 □

PROBLEM VII 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个集合，$\mathcal{A}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数。证明 $\mathcal{C} = \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION. 事实上只需 $\mathcal{A}_i$ 是半集代数就够了。

1. 显然 $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \in \mathcal{C}$，且 $\emptyset = \prod_{i=1}^{n} \emptyset \in \mathcal{C}$。
2. 设 $A = \prod_i A_i, B = \prod_i B_i \in \mathcal{C}$，则 $A \cap B = \prod_i A_i \cap B_i \in \mathcal{C}$。
3. 设 $A = \prod_i A_i, B_0 = \prod_i B_{0i} \in \mathcal{C}$，且 $B \subset A$。则有 $\forall i, B_{0i} \subset A_i$。由 $\mathcal{A}_i$ 为半集代数可知 $\exists B_{1i}, \cdots, B_{n_i i} \in \mathcal{A}_i, A_i = \sum_{j=1}^{n_i} B_{ji}$。于是 $A = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n : 0 \leq i_n \leq n_i} \prod_{j=1}^{n} B_{i_j}$，$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = 0$ 时取到 B。

故 $\mathcal{C}$ 为 $\prod_i \Omega_i$ 上的半集代数。 □

PROBLEM VIII 举例说明可加测度未必有限可加。

SOLUTION. 令 $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$。令 $\mu : \mathcal{C} \to \mathbb{R}, \mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = \mu(\Omega) = 1$。由于 $\mathcal{C}$ 中任两个集都相交，故可加性显然满足。但 $\mu(\Omega) = 1 \neq 3 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\}) + \mu(\{3\})$。 □

PROBLEM IX 设 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n), n \geq 1$ 为一列测度空间，Ω_n 两两不交。令

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \forall n \geq 1, A \cap \Omega_n \in \mathcal{A}_n\}, \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n), A \in \mathcal{A}$$

证明 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间。

SOLUTION. 先证 $\mathcal{A}$ 为 σ-代数。

1. $\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n\in\mathcal{A}$。
2. 设 $A_n\in\mathcal{A}$，则 $(\bigcup_n A_n)\cap\Omega_m=\bigcup_n(A_n\cap\Omega_m)\in\mathcal{A}_m$，故 $\bigcup_n A_n\in\mathcal{A}$。
3. 设 $A\in\mathcal{A}$，则 $A^c\cap\Omega_m=\Omega_m\setminus(A\cap\Omega_m)\in\mathcal{A}_m$，故 $A^c\in\mathcal{A}$。

再证 μ 为测度。显然 $\mu(A)\geq 0$。设 $A_n\in\mathcal{A}$ 两两不交，则 $\mu(\bigcup_n A_n)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k(\bigcup_n A_n\cap\Omega_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\mu_k(A_m\cap\Omega_k)=\sum_{m=1}^{\infty}\mu(A_m)$。故 μ 是测度。 □

PROBLEM X 设 Ω 为一无穷集，令 $\mathcal{F}$ 为 Ω 中的有限集或者余有限集构成的集合，$\mathbb{P}$ 在次两类集合上取值分别为 0 或 1。

- 证明 $\mathcal{F}$ 为集代数，$\mathbb{P}$ 为有限可加。
- 若 Ω 为可数集，则 $\mathbb{P}$ 不可能为 σ 可加。
- 若 Ω 为不可数集，则 $\mathbb{P}$ 为可数可加。

SOLUTION.

1. 先证 $\mathcal{F}$ 为集代数。
   (a) Ω 为余有限集，$\Omega\in\mathcal{F}$。
   (b) 设 $A,B\in\mathcal{F}$，要证 $A\setminus B\in\mathcal{F}$。若 A 有限或 B 余有限，则 $A\setminus B=A\cap B^c$ 有限。否则 A 余有限，B 有限，$A\setminus B$ 余有限。故 $A\setminus B\in\mathcal{F}$。

   再证 $\mathbb{P}$ 有限可加。只需证 $\mathbb{P}$ 可加。对于 $A,B\in\mathcal{F},A\cap B=\emptyset$，由 Ω 无限知 A,B 中有一个有限，不妨 A 有限，则 B 的有限性与 $A\cup B$ 相同。故 $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$。
2. $\mathbb{P}(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\})=1\neq 0=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\})$。
3. 取 $A_n\in\mathcal{F}$ 两两不交，则由 Ω 无限知其中至多有一个余有限集。若存在余有限集，不妨设为 A_1，则 $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n)=1=\mathbb{P}(A_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)$。否则 A_n 均为有限集。故 $\bigcup_n A_n$ 至多可数。又 Ω 不可数，故其不是余有限集。故 $\mathbb{P}(\bigcup_n A_n)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_n)$。

□

PROBLEM XI 举例说明半集代数 $\mathcal{T}$ 生成的 σ-代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T})=\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n:\forall n\geq 1,A_n\in\mathcal{T}\}$$

但如果 Ω 至多可数时，如上表述是正确的。

SOLUTION. 令 $\Omega=\mathbb{N}$，令 $\mathcal{T}:=\{A\subset\mathbb{N}:0\in A$且 A^c 有限或$0\notin A$且 A 有限$\}$。先证 $\mathcal{T}$ 是半集代数。只需证 $\mathcal{T}$ 是集代数。

1. $\Omega=\mathbb{N}$ 满足 $0\in\Omega,\Omega^c=\emptyset$ 有限，故 $\Omega\in\mathcal{T}$。
2. 设 $A,B\in\mathcal{T}$。须证 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。若 A 有限且 $0\notin A$，则有 $A\setminus B$ 也有限且 $0\notin A\setminus B$，故 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。若 A^c 有限且 $0\in A$，B 有限且 $0\notin B$，则 $(A\setminus B)^c=A^c\cup B$ 也有限且 $0\in A\setminus B$，故 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。若 A^c,B^c 有限且 $0\in A,B$，则 $A\setminus B=A\cap B^c$ 有限，且 $0\notin A\setminus B$，故 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。综上,$\forall A,B\in\mathcal{T},A\setminus B\in\mathcal{T}$。

令 $\mathcal{S} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$，下证 $\mathcal{S} \neq \sigma(\mathcal{T})$。只需证 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}), \{0\} \notin \mathcal{S}$。由 $\{n\} \in \mathcal{T}, \forall n \geq 1$ 可得 $\mathbb{N}_+ \in \sigma(\mathcal{T})$，故 $\{0\} = \mathbb{N}_+^c \in \sigma(\mathcal{T})$。反设 $\{0\} \in \mathcal{S}$，则 $\{0\} = \sum_n A_n, A_n \in \mathcal{T}$。由 $\{0\}$ 有限知 A_n 有限，由 $\mathcal{T}$ 的定义知 $0 \notin A_n$，故 $0 \notin \sum_n A_n = \{0\}$，矛盾！故 $\{0\} \notin \mathcal{S}$。从而 $\mathcal{S} \neq \sigma(\mathcal{T})$。

$\square$