

Graduate Homework In Mathematics

Probability 4

白永乐

25110180002

ylbai25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 7 日



General fire extinguisher

PROBLEM I 设 f 的积分存在。证明: $\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu \left(\left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\} \right)$ 。

SOLUTION. 取 $\Omega = [1, \infty)$, μ 为勒贝格测度, $f(x) := -\frac{1}{x^2}$, 则易知 $f(x)$ 是可积的, 故积分存在。但对任何 n , 有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n} \leq f < \frac{0}{2^n}\}) = \infty$, 于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu \left(\left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\} \right) = -\infty$, 故题设不成立。 \square

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数, 令: $\bar{\int}_{\Omega} f \, d\mu := \inf \left\{ \int_{\Omega} g \, d\mu : g \geq f, g \text{ 为简单函数} \right\}$ 。举例说明 $\bar{\int}$ 与 \int 未必相同, 并解释为何不将积分定义为 $\bar{\int}$ 。

SOLUTION. 令 $\Omega = [1, \infty)$, μ 为勒贝格测度, 令 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 则易知 $\int_{\Omega} f \, d\mu < \infty$ 。考查 $g \geq f$ 为简单函数, 令 $\varepsilon = \inf_{x \in \Omega} g(x)$, 由于 $g(x)$ 值域有限, 故 $\exists x \in \Omega, g(x) = \varepsilon \geq f(x) > 0$ 。于是 $\int_{\Omega} g \, d\mu \geq \int_{\Omega} \varepsilon \, d\mu = \varepsilon \mu(\Omega) = \infty$ 。故 $\bar{\int}_{\Omega} f \, d\mu = \infty \neq \int_{\Omega} f \, d\mu$ 。

使用 \int 而不是 $\bar{\int}$ 的原因应该是为了保证所有黎曼可积的函数都可积。 \square

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m \geq 1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$ 。

SOLUTION. 令 $\Omega = \mathbb{N}_+$, μ 为计数测度。记 $g_m(n) := f_{nm}$ 。则 $\int_{\Omega} g_m \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{n\} g_m(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}$ 。由 Fatou 定理知 $\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_m \, d\mu \geq \int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} g_m \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$ 。 \square

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ , 则 $\mathbb{E}|\xi| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\xi_n|$ 。

Lemma 1. 若 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, 则对任何有界连续函数 $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 有 $\mathbb{E}g(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}g(\xi)$ 。

证明. 不妨设 g 非负, 否则用 $g - \min g$ 代替 g 。

首先证明 $\forall x \in \mathbb{R}, \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x) \geq \mathbb{P}(\xi < x), \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \leq \mathbb{P}(\xi \leq x)$ 。记 ξ_n, ξ 的分布函数分别为 F_n, F 。由 F 不连续点至多可数, 可取 $\varepsilon_n \searrow 0$, 使 F 在 $x \pm \varepsilon_n$ 处连续。于是 $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x - \varepsilon_n) = \mathbb{P}(\xi < x - \varepsilon_n), \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \leq \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n < x + \varepsilon_n) = \mathbb{P}(\xi \leq x + \varepsilon_n)$ 。令 $m \rightarrow \infty$ 即得。

故有 $\forall x < y$, 有 $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in (x, y)) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < y) - \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \geq \mathbb{P}(\xi < y) - \mathbb{P}(\xi \leq x) = \mathbb{P}(\xi \in (x, y))$ 。对于 \mathbb{R} 中的开集 O , 熟知 A 可表示为可数个开区间的并, 于是 $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in O) \geq \mathbb{P}(\xi \in O)$ 。注意到闭集的补集是开集, 于是对于 \mathbb{R} 中的闭集 C , 有 $\limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \in C) \leq \mathbb{P}(\xi \in C)$ 。

接下来证明

$$\mathbb{E}X = \int_{x \geq 0} \mathbb{P}(X > x) \, dx = \int_{x \geq 0} \mathbb{P}(X \geq x) \, dx \quad (1)$$

对任何非负的随机变量 X 成立。由 $\mathbb{1}_{x < X(\omega)} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{\Omega} X(\omega) \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{x < X(\omega)} \, dx \, d\mathbb{P} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{x < X(\omega)} \, d\mathbb{P} \, dx \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) \, dx \end{aligned} \quad (2)$$

。在(2)中将 $x < X$ 换为 $x \leq X$ 也成立。故(1)成立。

于是

$$\begin{aligned}
\liminf_n \mathbb{E}g(\xi_n) &= \liminf_n \int_0^\infty \mathbb{P}(g(\xi_n) > x) dx \\
&= \liminf_n \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi_n \in \{y : g(y) > x\}) dx \\
&\stackrel{Fatou}{=} \int_0^\infty \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in \{y : g(y) > x\}) dx \\
&\stackrel{\{y:g(y)>x\} \text{是开集}}{\geq} \int_0^\infty \mathbb{P}(\xi \in \{y : g(y) > x\}) dx \\
&= \mathbb{E}g(\xi)
\end{aligned} \tag{3}$$

。同理可得 $\limsup_n \mathbb{E}g(\xi_n) \leq \mathbb{E}g(\xi)$, 于是 $\lim_n \mathbb{E}g(\xi_n) = \mathbb{E}g(\xi)$ 。 \square

SUMMARY. 令 $g_m(x) = \min(|x|, m)$ 是有界连续函数, 于是由引理 1 知 $\lim_n \mathbb{E}g_m(\xi_n) = \mathbb{E}g_m(\xi)$ 。对任何的 m, n 有 $g_m(\xi_n) \leq |\xi_n|$, 于是 $\mathbb{E}g_m(\xi) \leq \liminf_n \mathbb{E}|\xi_n|$ 。注意到 $g_m(\xi) \nearrow |\xi|$, 由单调收敛定理知 $\mathbb{E}|\xi| = \lim_m \mathbb{E}g_m(\xi) \leq \liminf_n \mathbb{E}|\xi_n|$ 。 \square