

Probability 4

白永乐

25110180002

ylbai25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 19 日

PROBLEM I 设 f 的积分存在。证明: $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu(\{\frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n}\})$ 。

SOLUTION. 对一般的测度 μ 不成立, 反例如下:

取 $\Omega = [1, \infty)$, μ 为勒贝格测度, $f(x) := -\frac{1}{x^2}$, 则易知 $f(x)$ 是可积的, 故积分存在。但对任何 n , 有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n} \leq f < \frac{0}{2^n}\}) = \infty$, 于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu(\{\frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n}\}) = -\infty$, 故题设不成立。

对有限测度 μ 是成立的, 下面给出证明:

记 $A_{n,i} := \{x : \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}\}$ 。令 $g_n(x) := \frac{\lfloor f(x)2^n \rfloor}{2^n}$, 则有 $g_n(x) = \frac{i}{2^n} \iff i \leq f(x)2^n < i+1 \iff x \in A_{n,i}$, 故 $g_n(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x) \frac{i}{2^n}$ 。由 $A_{n,i}$ 的定义可知 $g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + \frac{1}{2^n}$, 故 $|g_n| \leq |f| + \frac{1}{2^n}$ 。由 f 可积, μ 有限, 知 $|f| + \frac{1}{2^n}$ 可积, 于是由控制收敛定理知 $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_n \int_{\Omega} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu(\{\frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n}\})$ 。□

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数, 令: $\bar{\int}_{\Omega} f d\mu := \inf \{\int_{\Omega} g d\mu : g \geq f, g \text{ 为简单函数}\}$ 。举例说明 $\bar{\int}$ 与 \int 未必相同, 并解释为何不将积分定义为 $\bar{\int}$ 。

SOLUTION. 令 $\Omega = [1, \infty)$, μ 为勒贝格测度, 令 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 则易知 $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$ 。考查 $g \geq f$ 为简单函数, 令 $\varepsilon = \inf_{x \in \Omega} g(x)$, 由于 $g(x)$ 值域有限, 故 $\exists x \in \Omega, g(x) = \varepsilon \geq f(x) > 0$ 。于是 $\int_{\Omega} g d\mu \geq \int_{\Omega} \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu\{\Omega\} = \infty$ 。故 $\bar{\int}_{\Omega} f d\mu = \infty \neq \int_{\Omega} f d\mu$ 。

使用 \int 而不是 $\bar{\int}$ 的原因应该是为了保证所有广义黎曼可积的非负函数都可积。□

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m \geq 1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$ 。

SOLUTION. 令 $\Omega = \mathbb{N}_+$, μ 为计数测度。记 $g_m(n) := f_{nm}$ 。则 $\int_{\Omega} g_m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{n\} g_m(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}$ 。由 Fatou 定理知 $\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_m d\mu \geq \int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} g_m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$ 。□

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ , 则 $\mathbb{E}|\xi| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\xi_n|$ 。

Lemma 1. 若 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, 则对任何有界连续函数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 有 $\mathbb{E}g(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}g(\xi)$ 。

证明. 不妨设 g 非负, 否则用 $g - \inf g$ 代替 g 。

首先证明 $\forall x \in \mathbb{R}, \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x) \geq \mathbb{P}(\xi < x), \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \leq \mathbb{P}(\xi \leq x)$ 。记 ξ_n, ξ 的分布函数分别为 F_n, F 。由 F 不连续点至多可数, 可取 $\varepsilon_n \searrow 0$, 使 F 在 $x \pm \varepsilon_n$ 处连续。于是 $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x - \varepsilon_n) = \mathbb{P}(\xi < x - \varepsilon_n), \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \leq \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n < x + \varepsilon_n) = \mathbb{P}(\xi \leq x + \varepsilon_n)$ 。令 $m \rightarrow \infty$ 即得。

故有 $\forall x < y$, 有 $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in (x, y)) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < y) - \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \geq \mathbb{P}(\xi < y) - \mathbb{P}(\xi \leq x) = \mathbb{P}(\xi \in (x, y))$ 。对于 \mathbb{R} 中的开集 O , 熟知 A 可表示为可数个不交开区间的并, 于是由 Fatou 引理知 $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in O) \geq \mathbb{P}(\xi \in O)$ 。注意到闭集的补集是开集, 于是对于 \mathbb{R} 中的闭集 C , 有 $\limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \in C) \leq \mathbb{P}(\xi \in C)$ 。

接下来证明

$$\mathbb{E}X = \int_{x \geq 0} \mathbb{P}(X > x) dx = \int_{x \geq 0} \mathbb{P}(X \geq x) dx \quad (1)$$

对任何非负的随机变量 X 成立。由 $\mathbb{1}_{x < X(\omega)} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{x < X(\omega)} dx d\mathbb{P} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{x < X(\omega)} d\mathbb{P} dx \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx \end{aligned} \quad (2)$$

。在(2)中将 $x < X$ 换为 $x \leq X$ 也成立。故(1)成立。

于是

$$\begin{aligned} \liminf_n \mathbb{E}g(\xi_n) &= \liminf_n \int_0^{\infty} \mathbb{P}(g(\xi_n) > x) dx \\ &= \liminf_n \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n \in \{y : g(y) > x\}) dx \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\geq} \int_0^{\infty} \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in \{y : g(y) > x\}) dx \\ &\stackrel{\{y: g(y) > x\} \text{ 是开集}}{\geq} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi \in \{y : g(y) > x\}) dx \\ &= \mathbb{E}g(\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

。同理可得 $\limsup_n \mathbb{E}g(\xi_n) \leq \mathbb{E}g(\xi)$, 于是 $\lim_n \mathbb{E}g(\xi_n) = \mathbb{E}g(\xi)$ 。□

SOLUTION. 令 $g_m(x) = \min(|x|, m)$ 是有界连续函数, 于是由引理 1 知 $\lim_n \mathbb{E}g_m(\xi_n) = \mathbb{E}g_m(\xi)$ 。对任何的 m, n 有 $g_m(\xi_n) \leq |\xi_n|$, 于是 $\mathbb{E}g_m(\xi) \leq \liminf_n \mathbb{E}|\xi_n|$ 。注意到 $g_m(\xi) \nearrow |\xi|$, 由单调收敛定理知 $\mathbb{E}|\xi| = \lim_m \mathbb{E}g_m(\xi) \leq \liminf_n \mathbb{E}|\xi_n|$ 。□

PROBLEM V 设 $\xi \geq 0$ 使 $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ 。证明 $\mathbb{P}(\xi > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$ 。

SOLUTION. 记 $\eta = \mathbb{1}_{\xi > 0}$, 则由 Cauchy 不等式知: $\mathbb{E}\xi^2 \mathbb{P}(\xi > 0) = \mathbb{E}\xi^2 \eta^2 \mathbb{E}(\eta^2) \geq \mathbb{E}(\xi\eta^2)^2 = (\mathbb{E}\xi)^2$ 。于是 $\mathbb{P}(\xi > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$ 。□

REMARK VI 利用 Jensen 不等式证明几何平均值小于代数平均值: $a_1, \dots, a_n \geq 0$ 及 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$ 使 $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$, 有 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ 。

PROOF. 记 $\ln 0 = -\infty$, 则 $\ln x$ 在 $[0, \infty)$ 上上凸。于是 $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln a_k \leq \ln \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$, 两边取 exp 即得 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ 。□

REMARK VII

1. 如 $\{f_t\}_{t \in T}$ 一致可积, 则必积分一致连续;
2. 当 μ 有限时, 一致可积当且仅当积分一致有界且积分一致连续。

PROOF. 1. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 由 f_t 一致可积知 $\exists M > 0$ 使 $\sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) < \frac{\varepsilon}{2}$ 。取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, 对于任何 $A \subset \Omega$ 满足 $\mu(A) < \delta$, 有 $\mu(|f_t| \mathbb{1}_A) \leq \mu(|f_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f_t| \leq M}) + \mu(|f_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \leq \mu(M \mathbb{1}_A) + \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \leq M \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。于是 $\{f_t\}$ 积分一致连续。

2. 由1可知一致可积 “ \implies ” 积分一致连续。由一致可积, $\exists M > 0$ 使 $\sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) < 1$ 。于是 $\sup_{t \in T} \mu(|f_t|) \leq \sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| \leq M}) + \sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \leq M \mu(\Omega) + 1$ 。于是一致可积 \implies 积分一致有界。

下面证明积分一致有界且积分一致连续 \implies 一致可积。由积分一致有界, $\sup_{t \in T} \mu(|f_t|) \leq N \in \mathbb{R}$ 。任取 $\varepsilon > 0$, 由积分一致连续知 $\exists \delta > 0, \forall A \subset \Omega : \mu(A) \leq \delta, \forall t \in T, \mu(|f_t| \mathbb{1}_A) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ 。由 $\mu(\{|f_t| \geq \frac{N}{\delta}\}) \leq \mu(\frac{|f_t|}{\delta}) = \delta$, 得 $\mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| \geq \frac{N}{\delta}}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ 对任何 $t \in T$ 都成立。故 $\{f_t\}$ 一致可积。

□

REMARK VIII 对可测函数 f , 定义本征上确界为: $\|f\|_\infty := \inf\{M : \mu(\{\omega : |f(\omega)| > M\}) = 0\}$ 。

1. 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 满足三角不等式。
2. 若 $\mu(\Omega) < \infty$, 则 $\|f\|_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r$ 。

PROOF. 1. 须证对任何 f, g 有 $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f + g\|_\infty$ 。由定义, 对任何 $\varepsilon > 0$, $\mu(\{\omega : |f(\omega)| > \|f\|_\infty + \varepsilon\}) = 0$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$, 由测度的下连续性知 $\mu\{\omega : |f(\omega)| > \|f\|_\infty\} = 0$ 。同理 $\mu\{\omega : |g(\omega)| > \|g\|_\infty\} = 0$ 。又 $|f+g| \leq |f|+|g|$, 故 $\mu(\{\omega : |f(\omega)+g(\omega)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$, 由定义知 $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ 。

2. 对于 $M > \|f\|_\infty$, 有:

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_r}{M} &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \frac{|f|^r}{M^r} d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \left(\frac{\|f\|_\infty}{M} \right)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_\infty}{M} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{r}} = \frac{\|f\|_\infty}{M} < 1 \end{aligned} \quad (4)$$

。于是 $\limsup_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r < M$ 。若 $\|f\|_\infty < \infty$, 则令 $M \rightarrow \|f\|_\infty +$ 得 $\limsup_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$; 否则 $\|f\|_\infty = \infty$, 显然成立同样的不等式。

对于 $0 < M < \|f\|_\infty$, 取 $M < N < \|f\|_\infty$, 有:

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_r}{M} &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \frac{|f|^r}{M^r} d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{|f| \geq N} \left(\frac{N}{M} \right)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N}{M} (\mu(\{|f| \geq N\}))^{\frac{1}{r}} = \frac{N}{M} > 1 \end{aligned} \quad (5)$$

。于是 $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r > M$ 。若 $\|f\|_\infty > 0$, 则令 $M \rightarrow \|f\|_\infty -$ 得 $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$; 否则 $\|f\|_\infty = 0$, 显然成立同样的不等式。

综上所述, $\|f\|_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r$ 。

□

PROBLEM IX 设随机变量 ξ 具有数学期望 m 与方差 σ^2 。

1. 证明 $\mathbb{P}(\xi - m \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}, \forall t \geq 0$ 。
2. 证明 $\mathbb{P}(|\xi - m| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 。

SOLUTION. 不妨设 $m = 0$, 否则用 $\xi - m$ 代替 ξ 。方便起见记 $p = \mathbb{P}(\xi \geq t)$ 。

1. 注意到 $0 = \mathbb{E}(\xi) \geq t\mathbb{P}(\xi \geq t) - \mathbb{E}(\xi^-)$, 故 $\mathbb{E}\xi^- \geq tp$ 。于是由 Cauchy 不等式知 $\mathbb{E}(\xi^-)^2 \mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi < 0} \geq (\mathbb{E}\xi^-)^2 \geq t^2 p^2$ 。结合 $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi < 0} \leq 1 - \mathbb{P}(\xi \geq t)$ 知 $\mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2 \frac{p^2}{1-p}$ 。又 $\mathbb{E}(\xi^+)^2 \geq \mathbb{E}\xi^2 \mathbb{1}_{\xi \geq t} \geq t^2 p$, 于是 $\sigma^2 = \mathbb{E}(\xi^+)^2 + \mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2 \frac{p}{1-p}$ 。于是 $\frac{\sigma^2}{t^2}(1-p) \geq p$, 整理得 $p \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 。
2. 对 $-\xi$ 有 $\mathbb{P}(-\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$, 与 $\mathbb{P}(\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 相加可得 $\mathbb{P}(|\xi| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 。

□