underGraduate Homework In Mathematics

Probability 1

白永乐

202011150087

202011150087@mail.bnu.edu.cn

2025 年 9 月 24 日

General fire extinguisher

PROBLEM I 证明 σ-代数是集代数。

SOLUTION. 设 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数，则由定义知 $\Omega \in \mathcal{A}$。下面证 $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$。易知 $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$。由 $A \in \mathcal{A}$ 及 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数知 $A^c \in \mathcal{A}$。又 $A^c, B \in \mathcal{A}$，可取 $A_1 = A^c, A_2 = B, A_n = \emptyset, \forall n \geq 3$, 可知 $A^c \cup B = \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$。最后由 $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ 知 $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$。

综上知 $\mathcal{A}$ 是集代数。 □

PROBLEM II 设 $\mathcal{C}$ 是集类，则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。

SOLUTION. 定义 $\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$。对于 $A \in \mathcal{C}$，易知 $A \in \sigma\{A\}$，故 $A \in \mathcal{D}$。从而 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$。又显然有 $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$，故要证 $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$，只需证 $\mathcal{D}$ 是 σ-代数。

1. 由 $\Omega \in \{\emptyset, \Omega\} = \sigma(\emptyset)$ 知 $\Omega \in \mathcal{D}$。
2. 对 $A \in \mathcal{D}$，取满足条件的 $\mathcal{C}_1$，则由 $A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 知 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$，故 $A^c \in \mathcal{D}$。
3. 对 $A_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \cdots$, 分别取满足条件的 $\mathcal{C}_n$。考查 $\mathcal{C}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$。由 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{C}_0)$ 及 $\sigma(\mathcal{C}_0)$ 为 σ-代数可知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C}_0)$。又由 $\mathcal{C}_n$ 是可数的，得 $\mathcal{C}_0$ 是可数的。故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$。

综上知 $\mathcal{D}$ 为 σ-代数，故 $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$，也即 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。 □

PROBLEM III σ-代数 $\mathcal{A}$ 称为可数生成的，如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$。证明 $\mathcal{B}^d$ 是可数生成的。

SOLUTION. 令 $\mathcal{C} := \{B(x, r) : x = (x_1, \cdots, x_d), x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \cdots, d, r \in \mathbb{Q}\}$。易知 $\mathcal{C}$ 可数。令 $\mathcal{O}$ 为全体开集。易知 $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$，故 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}^d$。故要证 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}^d$，只需 $\sigma(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}^k$。又由 $\sigma(\mathcal{C})$ 为 σ-代数，且 $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{O})$，故只需证 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$。对于 $O \in \mathcal{O}$，我们只需证 $O = \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C \in \sigma(\mathcal{C})$（由 $\mathcal{C}$ 可数知其为可数并）。显然有 $O \supset \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$，故只需证 $O \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$。取 $x \in O$，由 O 为开集知 $\exists r > 0, B(x, r) \subset O$。设 $x = (x_1, \cdots, x_d)$，由有理数的稠密性知 $\exists y_i \in \mathbb{Q}, |x_i - y_i| < \frac{r}{100d}$。再取 $s \in \mathbb{Q}$ 使 $\frac{r}{3} < s < \frac{r}{2}$。则易知 $B(y, s) \subset B(x, r) \subset O$，且 $x \in B(y, s) \in \mathcal{C}$。故 $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$。

综上 $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{C})$ 是可数生成的。 □

PROBLEM IV 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 中任一集代数，则存在 Ω 中的单调类 $\mathcal{M}_0$ 满足：

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$，
2. 对于包含 $\mathcal{C}$ 的单调类 $\mathcal{M}$，有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$。

称这样的单调类为 $\mathcal{C}$ 生成的单调类，记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$。

SOLUTION. 令

$$\mathcal{M}_0 := \bigcap_{\mathcal{M}: \mathcal{C} \subset \mathcal{M}, \mathcal{M} \text{为 } \Omega \text{ 上的单调类}} \mathcal{M} \tag{1}$$

。显然 2^{Ω} 是包含 $\mathcal{C}$ 的单调类，故 $\mathcal{M}_0$ 良定义。由 $\mathcal{M}_0$ 的定义易知1,2 是成立的。故只需证 $\mathcal{M}_0$ 是单调类。

对 $A_1, \cdots \in \mathcal{M}_0, A_1 \subset A_2 \subset \cdots$，我们要证 $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_0$。对于(1)中的 $\mathcal{M}$，由 $\mathcal{M}_0$ 的定义知 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$，故 $A_n \in \mathcal{M}$。又由 $\mathcal{M}$ 为单调类，故 $A \in \mathcal{M}$。由 $\mathcal{M}$ 的任意性可知 $A \in \mathcal{M}_0$。对单调下降集列同理可得。故 $\mathcal{M}_0$ 是单调类，从而 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 是良定义的。 □

PROBLEM V 设 $\Omega_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 n 个集合，$\mathcal{A}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数。证明 $\mathcal{C}=\{A_1\times\cdots\times A_n: A_i\in\mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION. 事实上只需 $\mathcal{A}_i$ 是半集代数就够了。

1. 显然 $\Omega=\prod_{i=1}^n\Omega_i\in\mathcal{C}$，且 $\emptyset=\prod_{i=1}^n\emptyset\in\mathcal{C}$。
2. 设 $A=\prod_i A_i, B=\prod_i B_i\in\mathcal{C}$，则 $A\cap B=\prod_i A_i\cap B_i\in\mathcal{C}$。
3. 设 $A=\prod_i A_i, B_0=\prod_i B_{0i}\in\mathcal{C}$，且 $B\subset A$。则有 $\forall i, B_{0i}\subset A_i$。由 $\mathcal{A}_i$ 为半集代数可知 $\exists B_{1i},\cdots,B_{n_i i}\in\mathcal{A}_i, A_i=\sum_{j=1}^{n_i}B_{ji}$。于是 $A=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n:0\le i_n\le n_i}\prod_{j=1}^n B_{i_j}$，$i_1=i_2=\cdots=i_n=0$ 时取到 B。

故 $\mathcal{C}$ 为 $\prod_i\Omega_i$ 上的半集代数。 □

PROBLEM VI 举例说明可加测度未必有限可加。

SOLUTION. 令 $\Omega=\{1,2,3\},\mathcal{C}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2,3\}\}$。令 $\mu:\mathcal{C}\to\mathbb{R},\mu(\{1\})=\mu(\{2\})=\mu(\{3\})=\mu(\Omega)=1$。由于 $\mathcal{C}$ 中任两个集都相交，故可加性显然满足。但 $\mu(\Omega)=1\neq 3=\mu(\{1\})+\mu(\{2\})+\mu(\{3\})$。 □

PROBLEM VII 举例说明半集代数 $\mathcal{T}$ 生成的 σ-代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T})=\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n:\forall n\ge 1, A_n\in\mathcal{T}\}$$

但如果 Ω 至多可数时，如上表述是正确的。

SOLUTION. 令 $\Omega=\mathbb{N}$，令 $\mathcal{T}:=\{A\subset\mathbb{N}:0\in A$且 A^c 有限或$0\notin A$且 A 有限$\}$。先证 $\mathcal{T}$ 是半集代数。只需证 $\mathcal{T}$ 是集代数。

1. $\Omega=\mathbb{N}$ 满足 $0\in\Omega,\Omega^c=\emptyset$ 有限，故 $\Omega\in\mathcal{T}$。
2. 设 $A,B\in\mathcal{T}$。须证 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。若 A 有限且 $0\notin A$，则有 $A\setminus B$ 也有限且 $0\notin A\setminus B$，故 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。若 A^c 有限且 $0\in A$，B 有限且 $0\notin B$，则 $(A\setminus B)^c=A^c\cup B$ 也有限且 $0\in A\setminus B$，故 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。若 A^c,B^c 有限且 $0\in A,B$，则 $A\setminus B=A\cap B^c$ 有限，且 $0\notin A\setminus B$，故 $A\setminus B\in\mathcal{T}$。综上,$\forall A,B\in\mathcal{T},A\setminus B\in\mathcal{T}$。

令 $\mathcal{S}:=\{\sum_{n=1}^{\infty}A_n:\forall n\ge 1,A_n\in\mathcal{T}\}$，下证 $\mathcal{S}\neq\sigma(\mathcal{T})$。只需证 $\{0\}\in\sigma(\mathcal{T}),\{0\}\notin\mathcal{S}$。由 $\{n\}\in\mathcal{T},\forall n\ge 1$ 可得 $\mathbb{N}_+\in\sigma(\mathcal{T})$，故 $\{0\}=\mathbb{N}_+^c\in\sigma(\mathcal{T})$。反设 $\{0\}\in\mathcal{S}$，则 $\{0\}=\sum_n A_n, A_n\in\mathcal{T}$。由 $\{0\}$ 有限知 A_n 有限，由 $\mathcal{T}$ 的定义知 $0\notin A_n$，故 $0\notin\sum_n A_n=\{0\}$，矛盾！故 $\{0\}\notin\mathcal{S}$。从而 $\mathcal{S}\neq\sigma(\mathcal{T})$。

□