

# Logic 2

白永乐

202011150087

202011150087@mail.bnu.edu.cn

2024 年 4 月 24 日

PROBLEM I 设  $p$  的真值为真,  $q$  的真值为假, 求  $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$  的真值。

SOLUTION. 显然有如下真值表:

$\neg p$	$F$
$p \wedge q$	$F$
$p \vee q$	$T$
$p \rightarrow q$	$F$
$p \leftrightarrow q$	$F$

□

PROBLEM II 设  $p$  为  $T$  (真)  $q$  为  $T, r$  为  $F$  (假), 下列公式中哪些公式取值为  $T$  ?

1.  $q \wedge r$
2.  $\neg p \wedge \neg r$
3.  $p \leftrightarrow \neg q \vee r$
4.  $q \vee \neg r \rightarrow p$
5.  $(q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q))$

SOLUTION. 1. 显然  $q \wedge r$  为假。

2. 显然有  $\neg p$  为假, 故  $\neg p \wedge \neg r$  为假。

3. 由  $\neg q$  和  $r$  均为假可知  $\neg q \vee r$  为假, 但  $p$  为真, 故  $p \leftrightarrow \neg q \vee r$  为假。

4. 由于  $p$  为真, 故  $q \vee \neg r \rightarrow p$  为真。

5. 易于得到以下真值表:

$p$	$q$	$r$	$\neg r$	$p \rightarrow \neg r$	$\neg r \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p) \rightarrow ((p \rightarrow \neg r) \rightarrow (\neg r \rightarrow q))$
$T$	$T$	$F$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$	$T$

故4,5为真。

□

PROBLEM III 用真值表判定下列各组公式哪些表示相同的真值函项 (即哪些是等值的)?

1.  $p \rightarrow q, \neg p \vee q$
2.  $\neg p \vee \neg q, \neg(p \vee q)$

SOLUTION. 1. 显然有如下真值表:

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
$T$	$T$	$F$	$T$	$T$
$T$	$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$T$	$T$	$T$

故逻辑等值。

2. 显然有如下真值表:

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \vee \neg q$
$T$	$T$	$F$	$F$	$T$	$F$	$F$
$T$	$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$F$	$T$
$F$	$F$	$T$	$T$	$F$	$T$	$T$

, 故不逻辑等值。

□

PROBLEM IV 列出下列公式的真值表, 并指出它们分别为重言式、矛盾式或协调式。

1.  $p \leftrightarrow p \vee p$
2.  $p \wedge (q \wedge \neg q)$

SOLUTION. 1. 显然有如下真值表:

$p$	$p \vee p$	$p \leftrightarrow p \vee p$
$T$	$T$	$T$
$F$	$F$	$T$

, 故为重言式。

2. 显然有如下真值表:

$p$	$q$	$\neg q$	$q \wedge \neg q$	$p \wedge q \wedge \neg q$
$T$	$T$	$F$	$F$	$F$
$T$	$F$	$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$	$F$	$F$
$F$	$F$	$T$	$F$	$F$

, 故为矛盾式。

□

PROBLEM V 用命题的自然推理, 证明下列公式是否为有效式 (为系统中之定理)?

1.  $p \wedge p \rightarrow p$
2.  $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \vee r)$

SOLUTION. 1.

[1]	$p \wedge p$	<i>hyp</i>
[2]	$p$	$\wedge E : [1]$
[3]	$p \wedge p \rightarrow p$	$\rightarrow I : [1] - [2]$

2.

[1]	$q \rightarrow r$	<i>hyp</i>
[2]	$p \vee q$	<i>hyp</i>
[3]	$p$	<i>hyp</i>
[4]	$p \vee r$	$\vee I : [3]$
[5]	$q$	<i>hyp</i>
[6]	$r$	$\rightarrow E : [5][1]$
[7]	$p \vee r$	$\vee I : [6]$
[8]	$p \vee r$	$\vee E : [3] - [7]$
[9]	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$\rightarrow I : [2] - [8]$
[10]	$(q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow p \vee r)$	$\rightarrow I : [1] - [9]$

□

PROBLEM VI 请用简化真值表方法判定以下命题是否为重言式。

1.  $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \vee (p \vee r) \rightarrow q \vee s$
2.  $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge (p \wedge r) \rightarrow q \wedge s$
3.  $(p \wedge (q \vee j)) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow k \wedge t)) \wedge (p \wedge j \rightarrow \neg(k \vee t)) \rightarrow (k \wedge t) \vee (\neg k \wedge \neg t)$

SOLUTION. 1. 反设  $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \vee (p \vee r) \rightarrow q \vee s$  不成立, 则得到  $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \vee (p \vee r)$  和  $\neg q$  以及  $\neg s$ 。观察发现当  $p, r$  为真,  $q, s$  为假时上述条件成立, 原表达式为假。故不是重言式。

2. 反设  $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge (p \wedge r) \rightarrow q \wedge s$  不成立, 则得到  $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \wedge (p \wedge r)$  和  $\neg q \vee \neg s$ 。从而有  $p \rightarrow q, r \rightarrow s, p, r, \neg q \vee \neg s$ 。由  $p, p \rightarrow q$  得到  $q$ , 同样由  $r, r \rightarrow s$  得到  $s$ , 从而得到  $q \wedge s$ , 与  $\neg q \vee \neg s$  矛盾! 故原式是重言式。

3. 反设  $(p \wedge (q \vee j)) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow k \wedge t)) \wedge (p \wedge j \rightarrow \neg(k \vee t)) \rightarrow (k \wedge t) \vee (\neg k \wedge \neg t)$  为假, 则有  $p, q \vee j, p \rightarrow (q \rightarrow k \wedge t), p \wedge j \rightarrow \neg(k \vee t), \neg(k \wedge t), \neg(\neg k \wedge \neg t)$ 。由  $p, p \rightarrow (q \rightarrow k \wedge t)$  可得  $q \rightarrow k \wedge t$ , 再由  $\neg(k \wedge t)$  得到  $\neg q$ , 进一步由  $q \vee j$  得到  $j$ , 从而得到  $p \wedge j$ , 再结合  $p \wedge j \rightarrow \neg(k \vee t)$  得到  $\neg(k \vee t)$ , 从而得到  $\neg k \wedge \neg t$ 。但是我们已经由假设得到了  $\neg(\neg k \wedge \neg t)$ , 故产生矛盾。从而原式是重言式。

□