Probability 4

白永乐

25110180002

ylbai25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 13 日

PROBLEM I 设 f 的积分存在。证明：$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。

SOLUTION. 对一般的测度 μ 不成立，反例如下：

取 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，$f(x):=-\frac{1}{x^2}$，则易知 $f(x)$ 是可积的，故积分存在。但对任何 n，有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n}\le f<\frac{0}{2^n}\})=\infty$，于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)=-\infty$，故题设不成立。

对有限测度 μ 是成立的，下面给出证明：

记 $A_{n,i}:=\{x:\frac{i}{2^n}\le f(x)<\frac{i+1}{2^n}\}$。令 $g_n(x):=\frac{\lfloor f(x)2^n\rfloor}{2^n}$，则有 $g_n(x)=\frac{i}{2^n}\iff i\le f(x)2^n<i+1\iff x\in A_{n,i}$，故 $g_n(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)\frac{i}{2^n}$。由 $A_{n,i}$ 的定义可知 $g_n(x)\le f(x)<g_n(x)+\frac{1}{2^n}$，故 $|g_n|\le|f|+\frac{1}{2^n}$。由 f 可积，μ 有限，知 $|f|+\frac{1}{2^n}$ 可积，于是由控制收敛定理知 $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\lim_n\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。 □

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数，令：$\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu:=\inf\left\{\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu:g\ge f,g\text{为简单函数}\right\}$。举例说明 $\overline{\int}$ 与 $\int$ 未必相同，并解释为何不将积分定义为 $\overline{\int}$。

SOLUTION. 令 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，令 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，则易知 $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu<\infty$。考查 $g\ge f$ 为简单函数，令 $\varepsilon=\inf_{x\in\Omega}g(x)$，由于 $g(x)$ 值域有限，故 $\exists x\in\Omega,g(x)=\varepsilon\ge f(x)>0$。于是 $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega\varepsilon\,\mathrm{d}\mu=\varepsilon\mu\{\Omega\}=\infty$。故 $\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\infty\ne\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$。

使用 $\int$ 而不是 $\overline{\int}$ 的原因应该是为了保证所有广义黎曼可积的非负函数都可积。 □

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m\ge1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。

SOLUTION. 令 $\Omega=\mathbb{N}_+,\mu$ 为计数测度。记 $g_m(n):=f_{nm}$。则 $\int_\Omega g_m\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{n\}g_m(n)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}$。由 Fatou 定理知 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}=\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega g_m\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega\liminf_{m\to\infty}g_m\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。 □

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ，则 $\mathbb{E}|\xi|\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|\xi_n|$。

SOLUTION. 设 F_n,F 为 ξ_n,ξ 的分布函数。构造一个新测度空间 (Ω,μ)，其中 $\Omega=(0,1),\mu$ 为勒贝格测度。令 $G(x):=\sup\{y\in\mathbb{R}:F(y)<x\},x\in(0,1)$。则 G 是单调的，故为 Ω 上的可测函数。考察 $G(y)<x$，由 G 的定义知 $G(x)<y\iff F(y)\ge x\iff x\in(0,F(y))$。故 $\mu(G<y)=F(y)$，

于是 G 的分布函数也为 F。同理令 $G_n(x) := \sup\{y \in \mathbb{R} : F_n(y) < x\}, x \in (0,1)$，则 G_n 的分布函数为 F_n。由于 G_n 于 ξ_n 同分布，故 $\mathbb{E}|\xi_n| = \int_{(0,1)} |G_n| \, \mathrm{d}\mu$。同理 $\mathbb{E}|\xi| = \int_{(0,1)} |G| \, \mathrm{d}\mu$。由 G_n 的定义知 $F_n(G_n(x)) \le x$，

于是由 Fatou 引理知 $\mathbb{E}|\xi| = \int_{(0,1)} |G| \, \mathrm{d}\mu =$ 考查事件 $\xi < G(x)$，由 $G(x)$ 的定义知其等价于 $F(\xi) < x$，故 $\mathbb{P}(F(\xi) < x) = \mathbb{P}(\xi \le G(x))$。又由 F 是连续的，得 $\mathbb{P}(\xi \le G(x)) = \mathbb{P}(\xi < G(x)) = F(G(x))$。若 $G(x) = \pm\infty$，易于验证 $F(G(x)) = x$。下设 $G(x) \in \mathbb{R}$。

由 $G(x)$ 的定义知 $\exists y_n \searrow G(x), F(y_n) \ge x$，结合 F 的连续性可知 $F(G(x)) \ge x$。同样由 $G(x)$ 的定义可知 $\forall y < G(x), F(y) < x$，令 $y \nearrow G(x)$，由 F 的连续性可知 $F(G(x)) \le x$。故 $F(G(x)) = x$，从而 $\mathbb{P}(\xi \le G(x)) = x$，即 $F(\xi)$ 是 $(0,1)$ 上的均匀分布。 □

PROBLEM V 设 $\xi \ge 0$ 使 $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$。证明 $\mathbb{P}(\xi > 0) \ge \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$。

SOLUTION. 记 $\eta = \mathbb{1}_{\xi > 0}$，则由 Cauchy 不等式知：$\mathbb{E}\xi^2 \mathbb{P}(\xi > 0) = \mathbb{E}\xi^2 \eta^2 \mathbb{E}(\eta^2) \ge \mathbb{E}(\xi\eta^2)^2 = (\mathbb{E}\xi)^2$。于是 $\mathbb{P}(\xi > 0) \ge \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$。 □

PROBLEM VI 利用 Jensen 不等式证明几何平均值小于代数平均值：$a_1, \cdots, a_n \ge 0$ 及 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \ge 0$ 使 $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$，有 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \le \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$。

SOLUTION. 记 $\ln 0 = -\infty$，则 $\ln x$ 在 $[0, \infty)$ 上上凸。于是 $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln a_k \le \ln \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$，两边取 exp 即得 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \le \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$。 □

PROBLEM VII

1. 如 $\{f_t\}_{t \in T}$ 一致可积，则必积分一致连续；
2. 当 μ 有限时，一致可积当且仅当积分一致有界且积分一致连续。

SOLUTION.

1. 对于任何 $\varepsilon > 0$，由 f_t 一致可积知 $\exists M > 0$ 使 $\sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) < \frac{\varepsilon}{2}$。取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$，对于任何 $A \subset \Omega$ 满足 $\mu(A) < \delta$，有 $\mu(|f_t| \mathbb{1}_A) \le \mu(|f_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f_t| \le M}) + \mu(|f_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \le \mu(M \mathbb{1}_A) + \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \le M \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$。于是 $\{f_t\}$ 积分一致连续。
2. 由1可知一致可积 "$\implies$" 积分一致连续。由一致可积，$\exists M > 0$ 使 $\sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) < 1$。于是 $\sup_{t \in T} \mu(|f_t|) \le \sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| \le M}) + \sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \le M\mu(\Omega) + 1$。于是一致可积 $\implies$ 积分一致有界。

   下面证明积分一致有界且积分一致连续 $\implies$ 一致可积。由积分一致有界，$\sup_{t \in T} \mu(|f_t|) \le N \in \mathbb{R}$。任取 $\varepsilon > 0$，由积分一致连续知 $\exists \delta > 0, \forall A \subset \Omega : \mu(A) \le \delta, \forall t \in T, \mu(|f_t| \mathbb{1}_A) \le \frac{\varepsilon}{3}$。由 $\mu(\{|f_t| \ge \frac{N}{\delta}\}) \le \mu(\frac{|f_t|}{\frac{N}{\delta}}) = \delta$，得 $\mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| \ge \frac{N}{\delta}}) \le \frac{\varepsilon}{3}$ 对任何 $t \in T$ 都成立。故 $\{f_t\}$ 一致可积。

□

PROBLEM VIII 对可测函数 f，定义本征上确界为：$\|f\|_\infty := \inf\{M : \mu(\{\omega : |f(\omega)| > M\}) = 0\}$。

1. 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 满足三角不等式。
2. 若 $\mu(\Omega) < \infty$，则 $\|f\|_\infty = \lim_{r \to \infty} \|f\|_r$。

SOLUTION. 1. 须证对任何 f, g 有 $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f+g\|_\infty$。由定义，对任何 $\varepsilon > 0$，$\mu(\{\omega : |f(\omega)| > \|f\|_\infty + \varepsilon\}) = 0$，取 $\varepsilon = \frac{1}{n}$，由测度的下连续性知 $\mu\{\omega : |f(\omega)| > \|f\|_\infty\} = 0$。同理 $\mu\{\omega : |g(\omega)| > \|g\|_\infty\} = 0$。又 $|f+g| \leq |f|+|g|$，故 $\mu(\{\omega : |f(\omega)+g(\omega)| > \|f\|_\infty+\|g\|_\infty\}) = 0$，由定义知 $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$。

2. 对于 $M > \|f\|_\infty$，有：

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to\infty} \frac{\|f\|_r}{M} &= \limsup_{r\to\infty} \left(\int_\Omega \frac{|f|^r}{M^r}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \limsup_{r\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\frac{\|f\|_\infty}{M}\right)^r \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \limsup_{r\to\infty} \frac{\|f\|_\infty}{M}(\mu(\Omega))^{\frac{1}{r}} = \frac{\|f\|_\infty}{M} < 1\end{aligned} \tag{1}$$

。于是 $\limsup_{r\to\infty}\|f\|_r < M$。故 $\limsup_{r\to\infty}\|f\|_r \leq \|f\|_\infty$。

对于 $0 < M < \|f\|_\infty$，取 $M < N < \|f\|_\infty$，有：

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to\infty} \frac{\|f\|_r}{M} &= \liminf_{r\to\infty} \left(\int_\Omega \frac{|f|^r}{M^r}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \liminf_{r\to\infty} \left(\int_{|f|\geq N} \left(\frac{N}{M}\right)^r \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \liminf_{r\to\infty} \frac{N}{M}(\mu(\{|f| \geq N\}))^{\frac{1}{r}} = \frac{N}{M} > 1\end{aligned} \tag{2}$$

。于是 $\liminf_{r\to\infty}\|f\|_r > M$。故 $\liminf_{r\to\infty}\|f\|_r \geq \|f\|_\infty$。

综上所述，$\|f\|_\infty = \lim_{r\to\infty}\|f\|_r$。

□

PROBLEM IX 设随机变量 ξ 具有数学期望 m 与方差 σ^2。

1. 证明 $\mathbb{P}(\xi - m \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}, \forall t \geq 0$。
2. 证明 $\mathbb{P}(|\xi - m| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$。

SOLUTION. 不妨设 $m = 0$，否则用 $\xi - m$ 代替 ξ。方便起记 $p = \mathbb{P}(\xi \geq t)$。

1. 注意到 $0 = \mathbb{E}(\xi) \geq t\mathbb{P}(\xi \geq t) - \mathbb{E}(\xi^-)$，故 $\mathbb{E}\xi^- \geq tp$。于是由 Cauchy 不等式知 $\mathbb{E}(\xi^-)^2\mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi<0} \geq (\mathbb{E}\xi^-)^2 \geq t^2p^2$。结合 $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi<0} \leq 1 - \mathbb{P}(\xi \geq t)$ 知 $\mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2\frac{p^2}{1-p}$。又 $\mathbb{E}(\xi^+)^2 \geq \mathbb{E}\xi^2\mathbb{1}_{\xi\geq t} \geq t^2p$，于是 $\sigma^2 = \mathbb{E}(\xi^+)^2 + \mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2\frac{p}{1-p}$。于是 $\frac{\sigma^2}{t^2}(1-p) \geq p$，整理得 $p \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$。
2. 对 $-\xi$ 有 $\mathbb{P}(-\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$，与 $\mathbb{P}(\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$ 相加可得 $\mathbb{P}(|\xi| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 t^2}$。

□