Graduate Homework In Mathematics

Probability 2

白永乐

王胤雅是傻逼

25110180002

ylbai@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 16 日

General fire extinguisher

PROBLEM I 设 μ^* 是 μ 生成的外测度，证明测度空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是完全的当且仅当 $\mathcal{A} \supset \{A \in \Omega : \mu^*(A) = 0\}$。

SOLUTION. 先证充分性。设 $\mathcal{A} \supset \{A \in \Omega : \mu^*(A) = 0\}$。考察 μ-零测集 A，由定义知 $\exists B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(B) = 0$。故 $\{B\}$ 是 A 的一个覆盖，从而 $\mu^*(A) \leq \mu(B) = 0$，故 $\mu^*(A) = 0$，从而 $A \in \mathcal{A}$。

再证必要性。设 A 满足 $\mu^*(A) = 0$。则由定义知 $\exists A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}, B \subset \bigcup_n A_n, \mu(A_n) = 0$。由 $\mathcal{A}$ 为 σ-代数知 $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$，故 A 也是 μ-零测集。由完全性的定义知 $A \in \mathcal{A}$。 □

PROBLEM II $\mathscr{S}$ 是半集代数，μ 是 $\mathscr{S}$ 上有限测度。记 $(\Omega, \mathscr{A}^*, \mu^*)$ 是 μ 扩张至 $\sigma(\mathscr{S})$ 的完全化，令

$$\mu_*(A) = \sup\left\{\sum_n \mu(A_n) : A_n \in \mathscr{S} \text{ 两两不交}, \sum_n A_n \subset A\right\},$$
$$\mathscr{A}_* = \{A \subset \Omega : \mu^*(A) = \mu_*(A)\}.$$

试证：$\mathscr{A}^* \supset \mathscr{A}_*$

SOLUTION. 设 $A \in \mathcal{A}_*$，即 $\mu^*(A) = \mu_*(A)$，下证 $A \in \mathcal{A}^*$。由外测度的定义，结合 μ 有限，可得 $\forall \varepsilon = \frac{1}{n} > 0, \exists \mathcal{R} \subset \mathscr{S}$ 为 A 的可数覆盖，且 $\sum_{X \in \mathcal{R}} \mu(X) < \mu^*(A) + \varepsilon$。令 $A_n := \bigcup \mathcal{R}$，则 $A_n \supset A$ 且 $\mu(A_n) \searrow \mu^*(A)$。同样地，可以找到 $B_n \in \sigma(\mathscr{S})$，满足 $B_n \subset A$ 且 $\mu(B_n) \nearrow \mu_*(A)$。令 $O = \bigcap_n A_n \setminus \bigcup_n B_n$，则 $\forall n, \mu(O) \leq \mu(A_n \setminus B_n) = \mu(A_n) - \mu(B_n) \to 0$，故 $\mu(O) = 0$。又 $A \setminus \bigcup_n B_n \subset O$，从而 $A = \bigcup_n B_n \cup (A \setminus \bigcup_n B_n) \in \mathcal{A}^*$。 □

remark. 反向的包含一般不成立。令 $\Omega = \mathbb{N}, \mathscr{S} := \{\{n\} : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\{0\} \cup \{n, n+1, \cdots\} : n \in \mathbb{N}_+\}$，则易于验证 $\mathscr{S}$ 是半集代数。令 $\mu : \mathscr{S} \to \mathbb{R}, \mu(\{n\}) = 0, \mu(\{0\} \cup \{n, n+1, \cdots\}) = 1, \forall n \in \mathbb{N}_+$，则易于验证 μ 是测度。考查 $\{0\}$，由 $\{0\} \in \sigma(\mathscr{S})$ 可知 $\{0\} \in \mathcal{A}^*$，但易知 $\mu^*(\{0\}) = 1, \mu_*(\{0\}) = 0$。

PROBLEM III 设 $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ 为测度空间，μ^* 为由 μ 生成的外测度。证明 $N \subset \Omega$ 为 μ 零测集当且仅当 $\mu^*(N) = 0$.

SOLUTION. 一方面，设 $\mu^*(N) = 0$，则由II中证明可知 $\exists A_n \in \mathcal{A}, N \subset A_n$ 使 $\mu(A_n) \to 0$。故 $\mu(\bigcap_n A_n) \leq \mu(A_n) \to 0$，从而 $N \subset \bigcap_n A_n, \mu(\bigcap_n A_n) = 0$。故 N 是 μ 零测集。

另一方面，设 N 是 μ 零测集，则 $\exists M \in \mathcal{A}, N \subset M, \mu(M) = 0$。从而 $\{M\}$ 为 N 的可数覆盖，$\mu^*(N) \leq \mu(M) = 0$。 □

PROBLEM IV 举例说明即使 Ω 可数，半集代数 $\mathcal{T}$ 生成的 σ-代数不能表示为：

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$$

SOLUTION. 令 $\Omega = \mathbb{N}$，令 $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N} : 0 \in A \text{且 } A^c \text{ 有限或} 0 \notin A \text{且 } A \text{ 有限}\}$。先证 $\mathcal{T}$ 是半集代数。只需证 $\mathcal{T}$ 是集代数。

1. $\Omega = \mathbb{N}$ 满足 $0 \in \Omega, \Omega^c = \emptyset$ 有限，故 $\Omega \in \mathcal{T}$。

2. 设 $A, B \in \mathcal{T}$。须证 $A \setminus B \in \mathcal{T}$。若 A 有限且 $0 \notin A$，则有 $A \setminus B$ 也有限且 $0 \notin A \setminus B$，故 $A \setminus B \in \mathcal{T}$。若 A^c 有限且 $0 \in A$，B 有限且 $0 \notin B$，则 $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$ 也有限且 $0 \in A \setminus B$，故 $A \setminus B \in \mathcal{T}$。若 A^c, B^c 有限且 $0 \in A, B$，则 $A \setminus B = A \cap B^c$ 有限，且 $0 \notin A \setminus B$，故 $A \setminus B \in \mathcal{T}$。综上,$\forall A, B \in \mathcal{T}, A \setminus B \in \mathcal{T}$。

令 $\mathcal{S} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$，下证 $\mathcal{S} \neq \sigma(\mathcal{T})$。只需证 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}), \{0\} \notin \mathcal{S}$。由 $\{n\} \in \mathcal{T}, \forall n \geq 1$ 可得 $\mathbb{N}_+ \in \sigma(\mathcal{T})$，故 $\{0\} = \mathbb{N}_+^c \in \sigma(\mathcal{T})$。反设 $\{0\} \in \mathcal{S}$，则 $\{0\} = \sum_n A_n, A_n \in \mathcal{T}$。由 $\{0\}$ 有限知 A_n 有限，由 $\mathcal{T}$ 的定义知 $0 \notin A_n$，故 $0 \notin \sum_n A_n = \{0\}$，矛盾！故 $\{0\} \notin \mathcal{S}$。从而 $\mathcal{S} \neq \sigma(\mathcal{T})$。 $\square$

PROBLEM V

1. 设 g 是 $(\overline{\mathbb{R}}^n, \overline{\mathcal{B}}^n)$ 上的实(复)可测函数,$f_1, \cdots, f_n$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的实可测函数。则 $g(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的实（复）可测函数。

2. 设 g 是 $(\overline{\mathbb{C}}^n, \overline{\mathcal{B}}_c^n)$ 上的实(复)可测函数,$f_1, \cdots, f_n$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的复可测函数。则 $g(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的实（复）可测函数。

SOLUTION.
1. 由定理 2.6（2）可知 $F := (f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的 n 维实（复）可测函数。故由定理 2.7 可得 $g \circ F = g(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的实（复）可测函数。

2. 由定理 2.6（2）可知 $F := (f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的 n 维实（复）可测函数。故由定理 2.7 可得 $g \circ F = g(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A})$ 上的实（复）可测函数。

$\square$

PROBLEM VI

1. 设 g 是 $(\overline{\mathbb{R}}^n, \overline{\mathcal{B}}^n)$ 上的实(复)可测函数,$f_1, \cdots, f_n$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的随机变量。且 $\mathbb{P}(|g(f_1, \cdots, f_n)| = \infty) = 0$。则 $g(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的实（复）随机变量。

2. 设 g 是 $(\overline{\mathbb{C}}^n, \overline{\mathcal{B}}_c^n)$ 上的实(复)可测函数,$f_1, \cdots, f_n$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的复随机变量。且 $\mathbb{P}(|g(f_1, \cdots, f_n)| = \infty) = 0$。则 $g(f_1, \cdots, f_n)$ 是 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的实（复）随机变量。

SOLUTION. 由V可知 $g(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ 是实（复）可测函数。又由 $\mathbb{P}(|g(f_1, \cdots, f_n)| = \infty) = 0$ 知其几乎处处有限，故有 $g(f_1, \cdots, f_n) \overset{\text{a.s.}}{=} \mathbb{1}_{|g(f_1, \cdots, f_n)| < \infty} g(f_1, \cdots, f_n)$。而后者值域为 $\mathbb{R}$（$\mathbb{C}$），故在几乎处处相等的意义下 $g(f_1, \cdots, f_n)$ 是实（复）随机变量。 $\square$