under Graduate Homework In Mathematics

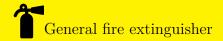
SetTheory 7

白永乐

202011150087

202011150087@mail.bnu.edu.cn

2024年1月30日



若 $m, n \in \mathbb{Z}$, 且 gcd(m, n) = 1, 则 $\exists u, v \in \mathbb{Z}$, 使得 um + vn = 1.

证明. 令 $A := \{um + vn : u, v \in \mathbb{Z}\}$ 。注意到 $\forall x, y \in A, \ \forall s, t \in \mathbb{Z}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, sx + ty = um + vn$ 。 令 $B := \{x \in A : x > 0\}$ 。令 $x = \min B$ 。若 $y \in A, x \nmid y$,则 y = kx + r, 0 < r < x。由 r = y - kx = (-k)x + 1y 得 $r \in A$,又 r > 0,故 $r \in B$,矛盾! 故 $\forall y \in A, x \mid y$ 。故 $x \mid m, x \mid n$ 。故 $x \mid \gcd(m, n)$ 。从而 x = 1。

设 $d, m, n \in \mathbb{Z}$, 则关于 x, y 的方程 xm + yn = d 有整数解的充分必要条件是什么? 证明. 充分必要条件为 $\gcd(m, n) \mid d$, 理由如下: