

under Graduate Homework In Mathematics

Probability 1

白永乐

202011150087

202011150087@mail.bnu.edu.cn

2025 年 10 月 11 日



General fire extinguisher

PROBLEM I 证明 σ -代数是集代数。

SOLUTION. 设 \mathcal{A} 是 σ -代数, 则由定义知 $\Omega \in \mathcal{A}$ 。下面证 $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \setminus B \in \mathcal{A}$ 。易知 $A \setminus B = A \cap B^c = (A^c \cup B)^c$ 。由 $A \in \mathcal{A}$ 及 \mathcal{A} 是 σ -代数知 $A^c \in \mathcal{A}$ 。又 $A^c, B \in \mathcal{A}$, 可取 $A_1 = A^c, A_2 = B, A_n = \emptyset, \forall n \geq 3$, 可知 $A^c \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ 。最后由 $A^c \cup B \in \mathcal{A}$ 知 $A \setminus B = (A^c \cup B)^c \in \mathcal{A}$ 。

综上知 \mathcal{A} 是集代数。 \square

PROBLEM II 设 \mathcal{C} 是集类, 则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 。

SOLUTION. 定义 $\mathcal{D} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$ 。对于 $A \in \mathcal{C}$, 易知 $A \in \sigma\{A\}$, 故 $A \in \mathcal{D}$ 。从而 $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ 。又显然有 $\mathcal{D} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 故要证 $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$, 只需证 \mathcal{D} 是 σ -代数。

1. 由 $\Omega \in \{\emptyset, \Omega\} = \sigma(\emptyset)$ 知 $\Omega \in \mathcal{D}$ 。
2. 对 $A \in \mathcal{D}$, 取满足条件的 \mathcal{C}_1 , 则由 $A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 知 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$, 故 $A^c \in \mathcal{D}$ 。
3. 对 $A_n \in \mathcal{D}, n = 1, 2, \dots$, 分别取满足条件的 \mathcal{C}_n 。考查 $\mathcal{C}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 。由 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{C}_0)$ 及 $\sigma(\mathcal{C}_0)$ 为 σ -代数可知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \sigma(\mathcal{C}_0)$ 。又由 \mathcal{C}_n 是可数的, 得 \mathcal{C}_0 是可数的。故 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$ 。

综上知 \mathcal{D} 为 σ -代数, 故 $\mathcal{D} = \sigma(\mathcal{C})$, 也即 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 。 \square

PROBLEM III σ -代数 \mathcal{A} 称为可数生成的, 如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ 。证明 \mathcal{B}^d 是可数生成的。

SOLUTION. 令 $\mathcal{C} := \{B(x, r) : x = (x_1, \dots, x_d), x_i \in \mathbb{Q}, i = 1, \dots, d, r \in \mathbb{Q}\}$ 。易知 \mathcal{C} 可数。令 \mathcal{O} 为全体开集。易知 $\mathcal{C} \subset \mathcal{O}$, 故 $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}^d$ 。故要证 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}^d$, 只需 $\sigma(\mathcal{C}) \supset \mathcal{B}^k$ 。又由 $\sigma(\mathcal{C})$ 为 σ -代数, 且 $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{O})$, 故只需证 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$ 。对于 $O \in \mathcal{O}$, 我们只需证 $O = \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C \in \sigma(\mathcal{C})$ (由 \mathcal{C} 可数知其为可数并)。显然有 $O \supset \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$, 故只需证 $O \subset \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$ 。取 $x \in O$, 由 O 为开集知 $\exists r > 0, B(x, r) \subset O$ 。设 $x = (x_1, \dots, x_d)$, 由有理数的稠密性知 $\exists y_i \in \mathbb{Q}, |x_i - y_i| < \frac{r}{100d}$ 。再取 $s \in \mathbb{Q}$ 使 $\frac{r}{3} < s < \frac{r}{2}$ 。则易知 $B(y, s) \subset B(x, r) \subset O$, 且 $x \in B(y, s) \in \mathcal{C}$ 。故 $x \in \bigcup_{C \in \mathcal{C}: C \subset O} C$ 。

综上 $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{C})$ 是可数生成的。 \square

PROBLEM IV 设 \mathcal{C}_n 是单调上升的集类。

1. 设 \mathcal{C}_n 是集代数, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 是集代数
2. 设 \mathcal{C}_n 是 σ -代数, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 未必是 σ -代数。

SOLUTION. 1. (a) 显然 $\Omega \in \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$ 。

(b) 设 $A, B \in \mathcal{C}$, 则 $\exists n, m$ 使 $A \in \mathcal{C}_n, B \in \mathcal{C}_m$ 。取 $k > n, m$, 则 $A, B \in \mathcal{C}_k$ 。故 $A \setminus B \in \mathcal{C}_k \subset \mathcal{C}$ 。故 \mathcal{C} 是集代数。

2. 令 $\Omega = \mathbb{N}$, 令 \mathcal{C}_n 是由 $\{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}$ 生成的 σ -代数。考察 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n = \{A : A \text{ 有限} \vee A^c \text{ 有限}\}$, 易知 $\forall n, \{2n\} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$, 但 $2\mathbb{N} \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 。故其不是 σ -代数。

\square

PROBLEM V 证明 σ -代数不能与 \mathbb{N} 等势。

SOLUTION. 设 \mathcal{F} 是一个 σ -代数。考察其原子集族 \mathcal{A} 。若 \mathcal{A} 是 Ω 的覆盖, 则考察 $|\mathcal{A}|$ 。若 \mathcal{A} 有限, 则易知 $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{A}|}$ 也有限。若 \mathcal{A} 无限, 则取一个 \mathcal{A} 的可数子集 \mathcal{A}_1 , 加上 $\Omega \setminus \bigcup \mathcal{A}_1$ 构成一个 Ω 的可数分割, 记为 \mathcal{B} 。故 $|\mathcal{F}| \geq |\sigma(\mathcal{B})| = 2^{|\mathcal{B}|} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$ 。

若 \mathcal{A} 不是 Ω 的覆盖, 则 \mathcal{F} 中一定有无穷递降列 $F_1 \supset F_2 \supset \cdots$ 。令 $A_n := F_n \setminus F_{n+1}$, 则 $A_n \in \mathcal{F}$ 两两不交。取 $\mathcal{B} := \{A_n : n \in \mathbb{N}_+\} \cup \{\Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$, 则由前面的讨论知 \mathcal{F} 不可数。 \square

PROBLEM VI 设 \mathcal{C} 是 Ω 中任一集代数, 则存在 Ω 中的单调类 \mathcal{M}_0 满足:

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$,
2. 对于包含 \mathcal{C} 的单调类 \mathcal{M} , 有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ 。

称这样的单调类为 \mathcal{C} 生成的单调类, 记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 。

SOLUTION. 令

$$\mathcal{M}_0 := \bigcap_{\mathcal{M}: \mathcal{C} \subset \mathcal{M}, \mathcal{M} \text{ 为 } \Omega \text{ 上的单调类}} \mathcal{M} \quad (1)$$

。显然 2^Ω 是包含 \mathcal{C} 的单调类, 故 \mathcal{M}_0 良定义。由 \mathcal{M}_0 的定义易知 1, 2 是成立的。故只需证 \mathcal{M}_0 是单调类。

对 $A_1, \cdots \in \mathcal{M}_0, A_1 \subset A_2 \subset \cdots$, 我们要证 $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}_0$ 。对于 (1) 中的 \mathcal{M} , 由 \mathcal{M}_0 的定义知 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$, 故 $A_n \in \mathcal{M}$ 。又由 \mathcal{M} 为单调类, 故 $A \in \mathcal{M}$ 。由 \mathcal{M} 的任意性可知 $A \in \mathcal{M}_0$ 。对单调下降集列同理可得。故 \mathcal{M}_0 是单调类, 从而 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 是良定义的。 \square

PROBLEM VII 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个集合, \mathcal{A}_i 是 Ω_i 上的 σ -代数。证明 $\mathcal{C} = \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION. 事实上只需 \mathcal{A}_i 是半集代数就够了。

1. 显然 $\Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i \in \mathcal{C}$, 且 $\emptyset = \prod_{i=1}^n \emptyset \in \mathcal{C}$ 。
2. 设 $A = \prod_i A_i, B = \prod_i B_i \in \mathcal{C}$, 则 $A \cap B = \prod_i A_i \cap B_i \in \mathcal{C}$ 。
3. 设 $A = \prod_i A_i, B_0 = \prod_i B_{0i} \in \mathcal{C}$, 且 $B \subset A$ 。则有 $\forall i, B_{0i} \subset A_i$ 。由 \mathcal{A}_i 为半集代数可知 $\exists B_{1i}, \cdots, B_{n_i i} \in \mathcal{A}_i, A_i = \sum_{j=1}^{n_i} B_{ji}$ 。于是 $A = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n: 0 \leq i_n \leq n_i} \prod_{j=1}^n B_{ij}$, $i_1 = i_2 = \cdots = i_n = 0$ 时取到 B 。

故 \mathcal{C} 为 $\prod_i \Omega_i$ 上的半集代数。 \square

PROBLEM VIII 举例说明可加测度未必有限可加。

SOLUTION. 令 $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ 。令 $\mu : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}, \mu(\{1\}) = \mu(\{2\}) = \mu(\{3\}) = \mu(\Omega) = 1$ 。由于 \mathcal{C} 中任两个集都相交, 故可加性显然满足。但 $\mu(\Omega) = 1 \neq 3 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\}) + \mu(\{3\})$ 。 \square

PROBLEM IX 设 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n), n \geq 1$ 为一列测度空间, Ω_n 两两不交。令

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \forall n \geq 1, A \cap \Omega_n \in \mathcal{A}_n\}, \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n), A \in \mathcal{A}$$

证明 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间。

SOLUTION. 先证 \mathcal{A} 为 σ -代数。

1. $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \in \mathcal{A}$ 。
2. 设 $A_n \in \mathcal{A}$, 则 $(\bigcup_n A_n) \cap \Omega_m = \bigcup_n (A_n \cap \Omega_m) \in \mathcal{A}_m$, 故 $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ 。
3. 设 $A \in \mathcal{A}$, 则 $A^c \cap \Omega_m = \Omega_m \setminus (A \cap \Omega_m) \in \mathcal{A}_m$, 故 $A^c \in \mathcal{A}$ 。

再证 μ 为测度。显然 $\mu(A) \geq 0$ 。设 $A_n \in \mathcal{A}$ 两两不交, 则 $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\bigcup_n A_n \cap \Omega_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu_k(A_m \cap \Omega_k) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m)$ 。故 μ 是测度。□

PROBLEM X 设 Ω 为一无穷集, 令 \mathcal{F} 为 Ω 中的有限集或者余有限集构成的集合, \mathbb{P} 在次两类集合上取值分别为 0 或 1。

- 证明 \mathcal{F} 为集代数, \mathbb{P} 为有限可加。
- 若 Ω 为可数集, 则 \mathbb{P} 不可能为 σ 可加。
- 若 Ω 为不可数集, 则 \mathbb{P} 为可数可加。

SOLUTION.

□

PROBLEM XI 举例说明半集代数 \mathcal{T} 生成的 σ -代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T} \right\}$$

但如果 Ω 至多可数时, 如上表述是正确的。

SOLUTION. 令 $\Omega = \mathbb{N}$, 令 $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N} : 0 \in A \text{ 且 } A^c \text{ 有限或 } 0 \notin A \text{ 且 } A \text{ 有限}\}$ 。先证 \mathcal{T} 是半集代数。只需证 \mathcal{T} 是集代数。

1. $\Omega = \mathbb{N}$ 满足 $0 \in \Omega, \Omega^c = \emptyset$ 有限, 故 $\Omega \in \mathcal{T}$ 。
2. 设 $A, B \in \mathcal{T}$ 。须证 $A \setminus B \in \mathcal{T}$ 。若 A 有限且 $0 \notin A$, 则有 $A \setminus B$ 也有限且 $0 \notin A \setminus B$, 故 $A \setminus B \in \mathcal{T}$ 。若 A^c 有限且 $0 \in A$, B 有限且 $0 \notin B$, 则 $(A \setminus B)^c = A^c \cup B$ 也有限且 $0 \in A \setminus B$, 故 $A \setminus B \in \mathcal{T}$ 。若 A^c, B^c 有限且 $0 \in A, B$, 则 $A \setminus B = A \cap B^c$ 有限, 且 $0 \notin A \setminus B$, 故 $A \setminus B \in \mathcal{T}$ 。综上, $\forall A, B \in \mathcal{T}, A \setminus B \in \mathcal{T}$ 。

令 $\mathcal{S} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$, 下证 $\mathcal{S} \neq \sigma(\mathcal{T})$ 。只需证 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}), \{0\} \notin \mathcal{S}$ 。由 $\{n\} \in \mathcal{T}, \forall n \geq 1$ 可得 $\mathbb{N}_+ \in \sigma(\mathcal{T})$, 故 $\{0\} = \mathbb{N}_+^c \in \sigma(\mathcal{T})$ 。反设 $\{0\} \in \mathcal{S}$, 则 $\{0\} = \sum_n A_n, A_n \in \mathcal{T}$ 。由 $\{0\}$ 有限知 A_n 有限, 由 \mathcal{T} 的定义知 $0 \notin A_n$, 故 $0 \notin \sum_n A_n = \{0\}$, 矛盾! 故 $\{0\} \notin \mathcal{S}$ 。从而 $\mathcal{S} \neq \sigma(\mathcal{T})$ 。

□