Graduate Homework In Mathematics

Probability 4

白永乐

25110180002

ylbai25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 6 日

General fire extinguisher

PROBLEM I 设 f 的积分存在。证明：$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。

SOLUTION. 取 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，$f(x):=-\frac{1}{x^2}$，则易知 $f(x)$ 是可积的，故积分存在。但对任何 n，有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n}\le f<\frac{0}{2^n}\})=\infty$，于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)=-\infty$，故题设不成立。 $\square$

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数，令：$\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \inf\left\{\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu : g\ge f, g\text{为简单函数}\right\}$。举例说明 $\overline{\int}$ 与 $\int$ 未必相同，并解释为何不将积分定义为 $\overline{\int}$。

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m\ge1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ，则 $\mathbb{E}|\xi|\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|\xi_n|$。