

under Graduate Homework In Mathematics

Set Theory 7

白永乐

202011150087

202011150087@mail.bnu.edu.cn

2024 年 1 月 30 日



General fire extinguisher

若 $m, n \in \mathbb{Z}$, 且 $\gcd(m, n) = 1$, 则 $\exists u, v \in \mathbb{Z}$, 使得 $um + vn = 1$ 。

证明. 令 $A := \{um + vn : u, v \in \mathbb{Z}\}$ 。注意到 $\forall x, y \in A, \forall s, t \in \mathbb{Z}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, sx + ty = um + vn$ 。
令 $B := \{x \in A : x > 0\}$ 。令 $x = \min B$ 。若 $y \in A, x \nmid y$, 则 $y = kx + r, 0 < r < x$ 。由 $r = y - kx = (-k)x + 1y$ 得 $r \in A$, 又 $r > 0$, 故 $r \in B$, 矛盾! 故 $\forall y \in A, x \mid y$ 。故 $x \mid m, x \mid n$ 。故 $x \mid \gcd(m, n)$ 。从而 $x = 1$ 。□

设 $d, m, n \in \mathbb{Z}$, 则关于 x, y 的方程 $xm + yn = d$ 有整数解的充分必要条件是什么?

证明. 充分必要条件为 $\gcd(m, n) \mid d$, 理由如下:

“ \implies ”: 取一组解 x, y , 则 $d = xm + yn$ 。由 $\gcd(m, n) \mid m, n$ 得 $\gcd(m, n) \mid xm + yn = d$ 。

“ \impliedby ”: 令 $A := \{um + vn : u, v \in \mathbb{Z}\}$ 。注意到 $\forall x, y \in A, \forall s, t \in \mathbb{Z}, \exists u, v \in \mathbb{Z}, sx + ty = um + vn$ 。令 $B := \{x \in A : x > 0\}$ 。令 $x = \min B$ 。若 $y \in A, x \nmid y$, 则 $y = kx + r, 0 < r < x$ 。由 $r = y - kx = (-k)x + 1y$ 得 $r \in A$, 又 $r > 0$, 故 $r \in B$, 矛盾! 故 $\forall y \in A, x \mid y$ 。故 $x \mid m, x \mid n$ 。故 $x \mid \gcd(m, n)$ 。故 $x \mid d$ 。设 $x = um + vn, d = kx$, 则 $d = (ku)m + (kv)n \in A$ 。□