

# Probability 4

白永乐

25110180002

ylbai25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 19 日

PROBLEM I 设  $f$  的积分存在。证明:  $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu \left( \left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\} \right)$ 。

SOLUTION. 对一般的测度  $\mu$  不成立, 反例如下:

取  $\Omega = [1, \infty)$ ,  $\mu$  为勒贝格测度,  $f(x) := -\frac{1}{x^2}$ , 则易知  $f(x)$  是可积的, 故积分存在。但对任何  $n$ , 有  $\mu \left( \left\{ \frac{-1}{2^n} \leq f < \frac{0}{2^n} \right\} \right) = \infty$ , 于是  $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu \left( \left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\} \right) = -\infty$ , 故题设不成立。

对有限测度  $\mu$  是成立的, 下面给出证明:

记  $A_{n,i} := \{x : \frac{i}{2^n} \leq f(x) < \frac{i+1}{2^n}\}$ 。令  $g_n(x) := \frac{\lfloor f(x) 2^n \rfloor}{2^n}$ , 则有  $g_n(x) = \frac{i}{2^n} \iff i \leq f(x) 2^n < i+1 \iff x \in A_{n,i}$ , 故  $g_n(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{A_{n,i}}(x) \frac{i}{2^n}$ 。由  $A_{n,i}$  的定义可知  $g_n(x) \leq f(x) < g_n(x) + \frac{1}{2^n}$ , 故  $|g_n| \leq |f| + \frac{1}{2^n}$ 。由  $f$  可积,  $\mu$  有限, 知  $|f| + \frac{1}{2^n}$  可积, 于是由控制收敛定理知  $\int_{\Omega} f d\mu = \lim_n \int_{\Omega} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2^n} \mu \left( \left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\} \right)$ 。□

PROBLEM II 设  $f$  为非负可测函数, 令:  $\bar{\int}_{\Omega} f d\mu := \inf \{ \int_{\Omega} g d\mu : g \geq f, g \text{ 为简单函数} \}$ 。举例说明  $\bar{\int}$  与  $\int$  未必相同, 并解释为何不将积分定义为  $\bar{\int}$ 。

SOLUTION. 令  $\Omega = [1, \infty)$ ,  $\mu$  为勒贝格测度, 令  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , 则易知  $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$ 。考查  $g \geq f$  为简单函数, 令  $\varepsilon = \inf_{x \in \Omega} g(x)$ , 由于  $g(x)$  值域有限, 故  $\exists x \in \Omega, g(x) = \varepsilon \geq f(x) > 0$ 。于是  $\int_{\Omega} g d\mu \geq \int_{\Omega} \varepsilon d\mu = \varepsilon \mu(\Omega) = \infty$ 。故  $\bar{\int}_{\Omega} f d\mu = \infty \neq \int_{\Omega} f d\mu$ 。

使用  $\int$  而不是  $\bar{\int}$  的原因应该是为了保证所有广义黎曼可积的非负函数都可积。□

PROBLEM III 设  $\{f_{nm}\}_{n,m \geq 1}$  为一族非负实数。证明  $\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$ 。

SOLUTION. 令  $\Omega = \mathbb{N}_+$ ,  $\mu$  为计数测度。记  $g_m(n) := f_{nm}$ 。则  $\int_{\Omega} g_m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\{n\} g_m(n) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm}$ 。由 Fatou 定理知  $\liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{nm} = \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_m d\mu \geq \int_{\Omega} \liminf_{m \rightarrow \infty} g_m d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \liminf_{m \rightarrow \infty} f_{nm}$ 。□

PROBLEM IV 若  $\xi_n$  依分布收敛于  $\xi$ , 则  $\mathbb{E}|\xi| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}|\xi_n|$ 。

Lemma 1. 若  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ , 则对任何有界连续函数  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 有  $\mathbb{E}g(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E}g(\xi)$ 。

证明. 不妨设  $g$  非负, 否则用  $g - \inf g$  代替  $g$ 。

首先证明  $\forall x \in \mathbb{R}, \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x) \geq \mathbb{P}(\xi < x), \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \leq \mathbb{P}(\xi \leq x)$ 。记  $\xi_n, \xi$  的分布函数分别为  $F_n, F$ 。由  $F$  不连续点至多可数, 可取  $\varepsilon_n \searrow 0$ , 使  $F$  在  $x \pm \varepsilon_n$  处连续。于是  $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < x - \varepsilon_m) = \mathbb{P}(\xi < x - \varepsilon_m), \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \leq \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n < x + \varepsilon_m) = \mathbb{P}(\xi \leq x + \varepsilon_m)$ 。令  $m \rightarrow \infty$  即得。

故有  $\forall x < y$ , 有  $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in (x, y)) \geq \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n < y) - \limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \leq x) \geq \mathbb{P}(\xi < y) - \mathbb{P}(\xi \leq x) = \mathbb{P}(\xi \in (x, y))$ 。对于  $\mathbb{R}$  中的开集  $O$ , 熟知  $A$  可表示为可数个不交开区间的并, 于是由 Fatou 引理知  $\liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in O) \geq \mathbb{P}(\xi \in O)$ 。注意到闭集的补集是开集, 于是对于  $\mathbb{R}$  中的闭集  $C$ , 有  $\limsup_n \mathbb{P}(\xi_n \in C) \leq \mathbb{P}(\xi \in C)$ 。

接下来证明

$$\mathbb{E}X = \int_{x \geq 0} \mathbb{P}(X > x) dx = \int_{x \geq 0} \mathbb{P}(X \geq x) dx \quad (1)$$

对任何非负的随机变量  $X$  成立。由  $\mathbb{1}_{x < X(\omega)} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} \int_0^{\infty} \mathbb{1}_{x < X(\omega)} dx d\mathbb{P} \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\Omega} \mathbb{1}_{x < X(\omega)} d\mathbb{P} dx \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(X > x) dx \end{aligned} \quad (2)$$

。在(2)中将  $x < X$  换为  $x \leq X$  也成立。故(1)成立。

于是

$$\begin{aligned} \liminf_n \mathbb{E}g(\xi_n) &= \liminf_n \int_0^{\infty} \mathbb{P}(g(\xi_n) > x) dx \\ &= \liminf_n \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n \in \{y : g(y) > x\}) dx \\ &\stackrel{Fatou}{\geq} \int_0^{\infty} \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n \in \{y : g(y) > x\}) dx \\ &\stackrel{\{y:g(y)>x\} \text{ 是开集}}{\geq} \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\xi \in \{y : g(y) > x\}) dx \\ &= \mathbb{E}g(\xi) \end{aligned} \quad (3)$$

。同理可得  $\limsup_n \mathbb{E}g(\xi_n) \leq \mathbb{E}g(\xi)$ , 于是  $\lim_n \mathbb{E}g(\xi_n) = \mathbb{E}g(\xi)$ 。  $\square$

**SOL**. 令  $g_m(x) = \min(|x|, m)$  是有界连续函数, 于是由引理 1 知  $\lim_n \mathbb{E}g_m(\xi_n) = \mathbb{E}g_m(\xi)$ 。对任何的  $m, n$  有  $g_m(\xi_n) \leq |\xi_n|$ , 于是  $\mathbb{E}g_m(\xi) \leq \liminf_n \mathbb{E}|\xi_n|$ 。注意到  $g_m(\xi) \nearrow |\xi|$ , 由单调收敛定理知  $\mathbb{E}|\xi| = \lim_m \mathbb{E}g_m(\xi) \leq \liminf_n \mathbb{E}|\xi_n|$ 。  $\square$

**PROBLEM V** 设  $\xi \geq 0$  使  $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ 。证明  $\mathbb{P}(\xi > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$ 。

**SOL**. 记  $\eta = \mathbb{1}_{\xi > 0}$ , 则由 Cauchy 不等式知:  $\mathbb{E}\xi^2 \mathbb{P}(\xi > 0) = \mathbb{E}\xi^2 \eta^2 \mathbb{E}(\eta^2) \geq \mathbb{E}(\xi \eta^2)^2 = (\mathbb{E}\xi)^2$ 。于是  $\mathbb{P}(\xi > 0) \geq \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$ 。  $\square$

PROBLEM VI 利用 Jensen 不等式证明几何平均值小于代数平均值:  $a_1, \dots, a_n \geq 0$  及  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0$  使  $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ , 有  $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ 。

SOLUTION. 记  $\ln 0 = -\infty$ , 则  $\ln x$  在  $[0, \infty)$  上上凸。于是  $\sum_{k=1}^n \alpha_k \ln a_k \leq \ln \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ , 两边取  $\exp$  即得  $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ 。  $\square$

### PROBLEM VII

1. 如  $\{f_t\}_{t \in T}$  一致可积, 则必积分一致连续;
2. 当  $\mu$  有限时, 一致可积当且仅当积分一致有界且积分一致连续。

SOLUTION. 1. 对于任何  $\varepsilon > 0$ , 由  $f_t$  一致可积知  $\exists M > 0$  使  $\sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) < \frac{\varepsilon}{2}$ 。取  $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ , 对于任何  $A \subset \Omega$  满足  $\mu(A) < \delta$ , 有  $\mu(|f_t| \mathbb{1}_A) \leq \mu(|f_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f_t| \leq M}) + \mu(|f_t| \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \leq \mu(M \mathbb{1}_A) + \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \leq M \cdot \delta + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ 。于是  $\{f_t\}$  积分一致连续。

2. 由1可知一致可积 “ $\implies$ ” 积分一致连续。由一致可积,  $\exists M > 0$  使  $\sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) < 1$ 。于是  $\sup_{t \in T} \mu(|f_t|) \leq \sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| \leq M}) + \sup_{t \in T} \mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| > M}) \leq M \mu(\Omega) + 1$ 。于是一致可积  $\implies$  积分一致有界。

下面证明积分一致有界且积分一致连续  $\implies$  一致可积。由积分一致有界,  $\sup_{t \in T} \mu(|f_t|) \leq N \in \mathbb{R}$ 。任取  $\varepsilon > 0$ , 由积分一致连续知  $\exists \delta > 0, \forall A \subset \Omega : \mu(A) \leq \delta, \forall t \in T, \mu(|f_t| \mathbb{1}_A) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ 。由  $\mu(\{|f_t| \geq \frac{N}{\delta}\}) \leq \mu(\frac{|f_t|}{\frac{N}{\delta}}) = \delta$ , 得  $\mu(|f_t| \mathbb{1}_{|f_t| \geq \frac{N}{\delta}}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$  对任何  $t \in T$  都成立。故  $\{f_t\}$  一致可积。  $\square$

### PROBLEM VIII 对可测函数 $f$ , 定义本征上确界为: $\|f\|_\infty := \inf\{M : \mu(\{\omega : |f(\omega)| > M\}) = 0\}$ 。

1. 证明  $\|\cdot\|_\infty$  满足三角不等式。
2. 若  $\mu(\Omega) < \infty$ , 则  $\|f\|_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r$ 。

SOLUTION. 1. 须证对任何  $f, g$  有  $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty \geq \|f + g\|_\infty$ 。由定义, 对任何  $\varepsilon > 0$ ,  $\mu(\{\omega : |f(\omega)| + |g(\omega)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \varepsilon\}) = 0$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , 由测度的下连续性知  $\mu\{\omega : |f(\omega)| > \|f\|_\infty\} = 0$ 。同理  $\mu\{\omega : |g(\omega)| > \|g\|_\infty\} = 0$ 。又  $|f+g| \leq |f|+|g|$ , 故  $\mu(\{\omega : |f(\omega)+g(\omega)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$ , 由定义知  $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ 。

2. 对于  $M > \|f\|_\infty$ , 有:

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_r}{M} &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \frac{|f|^r}{M^r} d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \left( \frac{\|f\|_\infty}{M} \right)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_\infty}{M} (\mu(\Omega))^{\frac{1}{r}} = \frac{\|f\|_\infty}{M} < 1 \end{aligned} \tag{4}$$

于是  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r < M$ 。若  $\|f\|_\infty < \infty$ , 则令  $M \rightarrow \|f\|_\infty +$  得  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \leq \|f\|_\infty$ ; 否则  $\|f\|_\infty = \infty$ , 显然成立同样的不等式。

对于  $0 < M < \|f\|_\infty$ , 取  $M < N < \|f\|_\infty$ , 有:

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\|f\|_r}{M} &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \frac{|f|^r}{M^r} d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \left( \int_{|f| \geq N} \left( \frac{N}{M} \right)^r d\mu \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{N}{M} (\mu(\{|f| \geq N\}))^{\frac{1}{r}} = \frac{N}{M} > 1 \end{aligned} \quad (5)$$

。于是  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r > M$ 。若  $\|f\|_\infty > 0$ , 则令  $M \rightarrow \|f\|_\infty -$  得  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r \geq \|f\|_\infty$ ; 否则  $\|f\|_\infty = 0$ , 显然成立同样的不等式。

综上所述,  $\|f\|_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \|f\|_r$ 。

□

**PROBLEM IX** 设随机变量  $\xi$  具有数学期望  $m$  与方差  $\sigma^2$ 。

1. 证明  $\mathbb{P}(\xi - m \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}, \forall t \geq 0$ 。
2. 证明  $\mathbb{P}(|\xi - m| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 。

**SOLUTION.** 不妨设  $m = 0$ , 否则用  $\xi - m$  代替  $\xi$ 。方便起见记  $p = \mathbb{P}(\xi \geq t)$ 。

1. 注意到  $0 = \mathbb{E}(\xi) \geq t\mathbb{P}(\xi \geq t) - \mathbb{E}(\xi^-)$ , 故  $\mathbb{E}\xi^- \geq tp$ 。于是由 Cauchy 不等式知  $\mathbb{E}(\xi^-)^2 \mathbb{E}1_{\xi < 0} \geq (\mathbb{E}\xi^-)^2 \geq t^2 p^2$ 。结合  $\mathbb{E}1_{\xi < 0} \leq 1 - \mathbb{P}(\xi \geq t)$  知  $\mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2 \frac{p^2}{1-p}$ 。又  $\mathbb{E}(\xi^+)^2 \geq \mathbb{E}\xi^2 1_{\xi \geq t} \geq t^2 p$ , 于是  $\sigma^2 = \mathbb{E}(\xi^+)^2 + \mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2 \frac{p}{1-p}$ 。于是  $\frac{\sigma^2}{t^2}(1-p) \geq p$ , 整理得  $p \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 。
2. 对  $-\xi$  有  $\mathbb{P}(-\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ , 与  $\mathbb{P}(\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$  相加可得  $\mathbb{P}(|\xi| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}$ 。

□