

目录

| | | |
|-------|---------|---|
| 1 | 基本概念和例子 | 1 |
| 1.1 | 基本概念 | 1 |
| 1.1.1 | 随机过程的定义 | 1 |
| 1.1.2 | 轨道和修正 | 1 |
| 1.1.3 | 有限维分布族 | 1 |
| 1.1.4 | 左极右连实现 | 2 |
| 1.2 | 随机游动 | 2 |
| 1.2.1 | 轨道的无界性 | 2 |
| 1.2.2 | 首达时分布 | 2 |

1 基本概念和例子

1.1 基本概念

1.1.1 随机过程的定义

Definition 1. 设 I 是非空指标集, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间. 若 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 是一组定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量 (取值为 \mathbb{R}^d), 则称 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 为一个**随机过程**.

Definition 2. 假设 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 和 $(Y_\alpha : \alpha \in J)$ 是两个随机过程. 若对于任何有限序列 $(s_1, \dots, s_n) \subset I, (t_1, \dots, t_m) \subset J$, 都有 $(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) \perp (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_m})$, 则称这两个**随机过程独立**.

1.1.2 轨道和修正

Definition 3. 设 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 为随机过程. 固定 $\omega \in \Omega$, 称 $t \mapsto X_t(\omega)$ 为 X 的一条**轨道**.

Definition 4. 称一个随机过程是 (**左连续//右连续//连续//左极右连//左连右极**) 的, 若它的所有轨道都是 (**左连续//右连续//连续//左极右连//左连右极**) 的).

Definition 5. 设 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是两个随机过程. 若 $\forall t \in I$, 有 $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$, 则称它们互为**修正**. 若 $\mathbb{P}(\forall t \in I, X_t = Y_t) = 1$, 则称它们是**无区别的**.

Theorem 1. 设 $(X_t : t \geq 0)$ 和 $(Y_t : t \geq 0)$ 是两个右连续的随机过程, 而 D 是 $(0, \infty)$ 的可数稠密子集. 若 $\forall s \in D, \mathbb{P}(X_s = Y_s) = 1$, 则有 $(X_t : t \geq 0)$ 和 $(Y_t : t \geq 0)$ 是无区别的.

1.1.3 有限维分布族

为了简化记号, 我们用 $S(I)$ 表示 I 的全体有序有限子集. 即:

$$S(I) := \{(t_1, \dots, t_n) : n \geq 1, t_i \in I, \forall i = 1, \dots, n\}$$

用 E 表示 \mathbb{R}^d , 用 \mathcal{E} 表示博雷尔代数.

Definition 6. 设 I 是非空指标集. 若对于每个 $J \in S(I)$, 都对应一个 $(E^{|J|}, \mathcal{E}^{|J|})$ 上的概率测度 u_J , 则称 $(\mu_J : J \in S(I))$ 为 E 上的一个**有限维分布族**, 其中每个 μ_J 称为一个**有限维分布**. 设 $X = (X_t : t \in I)$ 是一个随机过程, 用 μ_J^X 表示 $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ 的分布. 称 $\mathcal{D}_X := \{\mu_J^X : J \in S(I)\}$ 为 X 的有限维分布族, 称 μ_J^X 为其中的一个有限维分布.

Definition 7. 给定 (E, \mathcal{E}) 上的有限维分布族 \mathcal{D} , 若存在随机过程 $X = (X_t : t \in I)$ 使得 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}$, 则称 X 为 \mathcal{D} 的一个**实现**. 若两个随机过程 X, Y 满足 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_Y$, 则称它们为**等价的**. 两个等价的过程互称实现. 显然, 两个互为修正的随机过程一定等价, 反过来却未必.

1.1.4 左极右连实现

Definition 8. 状态空间 $E = \mathbb{R}^d$ 上的随机过程有左极右连实现 \iff 它有左极右连修正。证明见教材 p5

1.2 随机游动

Definition 9. 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是独立同分布的 d 维随机变量列，而 X_0 是与之独立的一个 d 维随机变量。令 $X_n := X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$ 。称 $(X_n : n \geq 0)$ 为 d 维**随机游动**，并称 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 为其**步长列**。

Definition 10. 若 X_0, ξ_1 均取值与 \mathbb{Z}^d ，则该随机游动状态空间可以取为 \mathbb{Z}^d 。特别地，若还有 $\mathbb{P}(|\xi_1| = 1) = 1$ ，则称其为**简单随机游动**。进一步地，若对于 \mathbb{Z}^d 中的任一单位向量 v ，均有 $\mathbb{P}(\xi_1 = v) = \frac{1}{2d}$ ，则称其为**对称简单随机游动**。

1.2.1 轨道的无界性

方便起见，考虑 \mathbb{Z} 上的简单随机游动 S_n ，设其步长列为 $\xi_n : n \geq 1$ 。设 $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p, \mathbb{P}(\xi_n = -1) = q$ ，其中 $p, q \in (0, 1), p + q = 1$ 。

Theorem 2. $(S_n : n \geq 1)$ 的轨道是几乎必然无界的。即：

$$\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} |S_n| = \infty) = 1. \quad (1)$$

证明见教材 p9

1.2.2 首达时分布

Definition 11. 记 $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid S_0 = i)$ 。

Definition 12. 定义 $(S_n : n \geq 0)$ 到达 $x \in \mathbb{Z}$ 的**首达时** $\tau_x := \inf\{n \geq 0 : S_n = x\}$ 。

Theorem 3. 当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，对于 $a < b, i \in [a, b], a, b, i \in \mathbb{Z}$ ，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b < \tau_a) = \frac{i - a}{b - a}, \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \frac{b - i}{b - a} \quad (2)$$

当 $p \neq q$ 时，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b < \tau_a) = \frac{1 - (\frac{q}{p})^{i-a}}{1 - (\frac{q}{p})^{b-a}}, \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \frac{(\frac{q}{p})^{i-a} - (\frac{q}{p})^{b-a}}{1 - (\frac{q}{p})^{b-a}} \quad (3)$$

证明见教材 p10

Theorem 4. 当 $p \geq q$ ，对 $a \leq i \leq b \in \mathbb{Z}$ ，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a < \infty) = (\frac{q}{p})^{i-a}, \mathbb{P}_i(\tau_b < \infty) = 1 \quad (4)$$

当 $p \leq q$ ，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a < \infty) = 1, \mathbb{P}_i(\tau_b < \infty) = (\frac{p}{q})^{b-i} \quad (5)$$

证明见教材 p11

1.3 布朗运动

索引

- 步长列, **2**
- 等价, **1**
- 对称简单随机游动, **2**
- 轨道, **1**
- 简单随机游动, **2**
- 连续, **1**
- \mathbb{P}_i , **2**
- 实现, **1**
- 首达时, **2**
- $S(I)$, **1**
- 随机过程, **1**
- 随机过程独立, **1**
- 随机游动, **2**
- 无区别, **1**
- 修正, **1**
- 右连续, **1**
- 有限维分布, **1**
- 有限维分布族, **1**
- 左极右连, **1, 2**
- 左连续, **1**
- 左连右极, **1**