Markov 过程复习资料

白永乐

2024 年 6 月 19 日

目录

2 基本概念和例子

2.1 基本概念

2.1.1 随机过程的定义

Definition 1. 设 I 是非空指标集，$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是概率空间。若 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 是一组定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的随机变量（取值为 $\mathbb{R}^d$），则称 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 为一个**随机过程**。

Definition 2. 假设 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 和 $(Y_\alpha : \alpha \in J)$ 是两个随机过程。若对于任何有限序列 $(s_1, \cdots, s_n) \subset I, (t_1, \cdots, t_m) \subset J$，都有 $(X_{s_1}, \cdots, X_{s_n}) \perp (Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_m})$，则称这两个**随机过程独立**。

2.1.2 轨道和修正

Definition 3. 设 $(X_\alpha : \alpha \in I)$ 为随机过程。固定 $\omega \in \Omega$，称 $t \mapsto X_t(\omega)$ 为 X 的一条**轨道**。

Definition 4. 称一个随机过程是（**左连续**//**右连续**//**连续**//**左极右连**//**左连右极**）的，若它的所有轨道都是（左连续//右连续//连续//左极右连//左连右极的）。

Definition 5. 设 $(X_t : t \in I)$ 和 $(Y_t : t \in I)$ 是两个随机过程。若 $\forall t \in I$，有 $\mathbb{P}(X_t = Y_t) = 1$，则称它们互为**修正**。若 $\mathbb{P}(\forall t \in I, X_t = Y_t) = 1$，则称它们是**无区别**的。

Theorem 1. 设 $(X_t : t \geq 0)$ 和 $(Y_t : t \geq 0)$ 是两个右连续的随机过程，而 D 是 $(0, \infty)$ 的可数稠密子集。若 $\forall s \in D, \mathbb{P}(X_s = Y_s) = 1$，则有 $(X_t : t \geq 0)$ 和 $(Y_t : t \geq 0)$ 是无区别的。

2.1.3 有限维分布族

为了简化记号，我们用 $S(I)$ 表示 I 的全体有序有限子集。即：

$$S(I) := \{(t_1, \cdots, t_n) : n \geq 1, t_i \in I, \forall i = 1, \cdots, n\}$$

用 E 表示 $\mathbb{R}^d$，用 $\mathcal{E}$ 表示博雷尔代数。

Definition 6. 设 I 是非空指标集。若对于每个 $J \in S(I)$，都对应一个 $(E^|J|, \mathcal{E}^|J|)$ 上的概率测度 u_J，则称 $(\mu_J : I \in S(I))$ 为 E 上的一个**有限维分布族**，其中每个 μ_J 称为一个**有限维分布**。设 $X = (X_t : t \in I)$ 是一个随机过程，用 μ_J^X 表示 $(X_{t_1}, \cdots, X_{t_n})$ 的分布。称 $\mathcal{D}_X := \{\mu_J^X : J \in S(I)\}$ 为 X 的有限维分布族，称 μ_J^X 为其中的一个有限维分布。

Definition 7. 给定 $(E, \mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D}$，若存在随机过程 $X = (X_t : t \in I)$ 使得 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}$，则称 X 为 $\mathcal{D}$ 的一个**实现**。若两个随机过程 X, Y 满足 $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_Y$，则称它们为**等价**的。两个等价的过程互称实现。显然，两个互为修正的随机过程一定等价，反过来却未必。

2.1.4 左极右连实现

Definition 8. 状态空间 $E = \mathbb{R}^d$ 上的随机过程有左极右连实现 $\iff$ 它有左极右连修正。证明见教材 *p5*

2.2 随机游动

Definition 9. 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是独立同分布的 d 维随机变量列，而 X_0 是与之独立的一个 d 维随机变量。令 $X_n := X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$。称 $(X_n : n \geq 0)$ 为 d 维**随机游动**，并称 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 为其**步长列**。

Definition 10. 若 X_0, ξ_1 均取值与 $\mathbb{Z}^d$，则该随机游动状态空间可以取为 $\mathbb{Z}^d$。特别地，若还有 $\mathbb{P}(|\xi_1| = 1) = 1$，则称其为**简单随机游动**。进一步地，若对于 $\mathbb{Z}^d$ 中的任一单位向量 v，均有 $\mathbb{P}(\xi_1 = v) = \frac{1}{2d}$，则称其为**对称简单随机游动**。

2.2.1 轨道的无界性

方便起见，考虑 $\mathbb{Z}$ 上的简单随机游动 S_n，设其步长列为 $\xi_n : n \geq 1$。设 $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p, \mathbb{P}(\xi_n = -1) = q$，其中 $p, q \in (0,1), p+q = 1$。

Theorem 2. $(S_n : n \geq 1)$ 的轨道是几乎必然无界的。即：

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0} |S_n| = \infty) = 1. \tag{1}$$

证明见教材 *p9*

2.2.2 首达时分布

Definition 11. 记 $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid S_0 = i)$。

Definition 12. 定义 $(S_n : n \geq 0)$ 到达 $x \in \mathbb{Z}$ 的**首达时** $\tau_x := \inf\{n \geq 0 : S_n = x\}$。

Theorem 3. 当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，对于 $a < b, i \in [a,b], a, b, i \in \mathbb{Z}$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b < \tau_a) = \frac{i-a}{b-a}, \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \frac{b-i}{b-a} \tag{2}$$

当 $p \neq q$ 时，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b < \tau_a) = \frac{1-(\frac{q}{p})^{i-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}}, \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \frac{(\frac{q}{p})^{i-a} - (\frac{q}{p})^{b-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}} \tag{3}$$

证明见教材 *p10*

Theorem 4. 当 $p \geq q$，对 $a \leq i \leq b \in \mathbb{Z}$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a < \infty) = (\frac{q}{p})^{i-a}, \mathbb{P}_i(\tau_b < \infty) = 1 \tag{4}$$

当 $p \leq q$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a < \infty) = 1, \mathbb{P}_i(\tau_b < \infty) = (\frac{p}{q})^{b-i} \tag{5}$$

证明见教材 *p11*

2.3 布朗运动

2.3.1 背景和定义

Definition 13. 假定 $\sigma^2 > 0$，具有连续轨道的实值过程 $(B_t : t \geq 0)$ 满足：

1. $\forall 0 \leq s \leq t$，$B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$；
2. $\forall 0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n$，$B_0, B_1 - B_0, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 独立，

称 $(B_t : t \geq 0)$ 是以 σ^2 为参数的**布朗运动**。特别的，当 $\sigma^2 = 1$，$(B_t : t \geq 0)$ 为**标准布朗运动**。

Definition 14. 有限维分布为正态分布的随机过程称为**正态过程**。

2.3.2 布朗运动的构造

Theorem 5. 布朗运动是有连续实现的。证明见教材 *p13.*

2.3.3 布朗运动的性质

Theorem 6. 从原点出发的零均值高斯过程 $(B_t : t \geq 0)$ 是标准布朗运动 $\iff \forall s, t \geq 0$，$\mathbb{E}(B_t B_s) = t \wedge s$。证明 *p17.*

Theorem 7. 布朗运动轨道几乎处处不可导。证明 *p17-18.*

2.4 普瓦松过程

Definition 15. $(N_t : t \geq 0)$ 是非负整数不降随机过程，$\alpha \geq 0$ 满足：

1. $\forall s, t \geq 0$，$N_{s+t} - N_s \sim P(\alpha t)$，即：$\mathbb{P}(N_{s+t} - N_s = k) = \frac{\alpha^k t^k}{k!} \mathrm{e}^{-\alpha t}$；
2. $\forall 0 \leq t_0 < \cdots < t_n$，$N_0, N_{t_1} - N_{t_0}, \cdots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ 相互独立。

称 $(N_t : t \geq 0)$ 是**普瓦松过程**，参数为 α。

2.4.1 跳跃间隔时间

$(N_t : t \geq 0)$ 以 α 为参数的普瓦松过程，$S_0 = 0, n \geq 1$，$S_n = \inf\{t \geq 0 : N_t - N_0 \geq 0\}$，$\eta_n = S_n - S_{n-1}$。$S_n$ 是 $(N_t : t \geq 0)$ 第 n 次跳跃等待时间，η_n 第 $n-1$ 次跳跃到第 n 次跳跃的间隔时间。

Theorem 8. $\{\eta_n : n \geq 1\}$ 独立同分布，服从 $Exp(\alpha)$。$S_n, n \geq 1$，服从 $\Gamma(1, \alpha)$。证明见 *P19.*

2.4.2 轨道重构

Theorem 9. $\{\eta_n : n \geq 1\}$ 独立同分布，服从 $Exp(\alpha), \gamma > 0$。$S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n \eta_k$，则：

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{S_n \leq t} = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}.$$

则随机过程 $(N_t : t \geq 0)$ 是以参数为 α 的普瓦松过程。

2.4.3 长时间极限行为

$(N_t : t \geq 0)$ 以 α 为参数的普瓦松过程。

Theorem 10 (普瓦松过程的强大数定律)**.** $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \overset{a.s.}{=} \alpha$ 见 *p23.*

Theorem 11 (普瓦松过程的中心极限定理)**.** $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(\frac{N_t - \alpha t}{\sqrt{\alpha t}} \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} dy$。见 *p23.*

Corollary 1. $s, x > 0$，$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{e}^{-\lambda s} \sum_{k \leq \lambda x} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = \mathbb{1}_{0<s<t} + \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{s=x\}}$。见 *p24.*

Theorem 12 (拉普拉斯变换的反演公式)**.** ξ 是非负随机变量，L 为其拉普拉斯变换，则 $\forall x > 0$，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k \leq \lambda x} \frac{(-\lambda)^k}{k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\lambda^k} L(\lambda) = \mathbb{P}(\xi < x) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(\xi = x)$$

见 *p24.*

2.4.4 复合普瓦松过程

Definition 16. μ 是 $\mathbb{R}$ 上概率 $\mu(\{0\}) = 0$。$(N_t : t \geq 0)$ 以 $\alpha \geq 0$ 为参数的零初值普瓦松过程，$\{\xi_n : n \geq 1\}$ 与 N_t 独立，具有相同分布 μ，X_0 与 $(N_t), \{\xi_n\}$ 独立。令：$X_t = X_0 + \sum_{n=1}^{N_t} \xi_n, t \geq 0$，则 $(X_t : t \geq 0)$ 是以 α 为跳跃速度，μ 为跳跃分布的**复合普瓦松过程**。

Theorem 13 (复合普瓦松过程的性质)**.** $(X_t : t \geq 0)$ 为如上定义的复合普瓦松过程，则复合普瓦松过程的性质如下：

1. $\forall s, t \geq 0, \theta \in \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X_{s+t} - X_s)} = \exp(\alpha t \int_{\mathbb{R}} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta x} - 1)\mu(dx))$$
;
2. $\forall 0 \leq t_0 < \cdots < t_n, X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \cdots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ 相互独立。

2.5 普瓦松随机测度

2.5.1 定义和存在性

$(E,\mathcal{E})$ 为可测空间，μ 为 $(E,\mathcal{E})$ 上的 σ 有限测度。

Definition 17. $\{X(B): B\in\mathcal{E}\}$ 为取非负整数值随机过程，满足：

1. $\forall B\in\mathcal{E}: \mu(B)<\infty$，则 $\mathbb{E}(X(B))=\mu(B)$。

2. $\forall\{B_n: n\geq 1\}\in\mathcal{E}$ 两两不交，则 $X(\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k)=\sum_{k=1}^{\infty}X(B_k)$。

称 $\{X(B): B\in\mathcal{E}\}$ 为以 μ 为强度的**整数值随机测度**。

Definition 18. $\{X(B): B\in\mathcal{E}\}$ 为整数值随机测度，满足：

1. $\forall B\in\mathcal{E}: \mu(B)<\infty$，则 $X(B)\sim P(\mu(B))$，即：$\mathbb{P}(X(B)=k)=\frac{\mu(B)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu(B)}, k=0,\cdots,n,\cdots$。

2. $\forall\{B_n: n\geq 1\}\in\mathcal{E}$ 两两不交，则 $\{X(B_k): k\in\mathbb{N}^+\}$ 相互独立。

称 $\{X(B): B\in\mathcal{E}\}$ 为以 α 为强度的**普瓦松随机测度**。

Theorem 14 (普瓦松随机测度的充要条件)**.** X 为 $(E,\mathcal{E})$ 上以 μ 为强度的整数值随机测度，则 X 为普瓦松随机测度的充要条件是 $\forall n\in\mathbb{N}^+,\xi_k\in\mathbb{R},B_k\in\mathcal{E},k=1,\cdots,n$，$B_i\cap B_j=\varnothing,i\neq j$，当 $\mu(B_k)<\infty,k=1,\cdots,n$，则

$$\mathbb{E}\exp(\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\theta_k X(B_k))=\exp(\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_k}-1)\mu(B_k))$$

见 *p28.*

Theorem 15 (普瓦松随机测度的存在性)**.** μ 为非零有限测度，$\eta\sim P(\mu(E))$，$\{\xi_k: k\in\mathbb{N}^+\}$ *i.i.d.* 服从 $\mu(E)^{-1}\mu$。$\eta,\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots$ 相互独立。令 $X=\sum_{j=1}^{\eta}\delta_{\xi_j}$，则 X 为以 μ 为强度的普瓦松随机测度。见 *p29.*

Theorem 16. μ 为 σ 有限测度，$\{E_k: k\in\mathbb{N}^+\}\subset\mathcal{E},\mu(E_k)<\infty,k\in\mathbb{N}^+$，$E=\bigcup_{k\in\mathbb{N}^+}E_k$，$E_i\cap E_j=\varnothing,i\neq j$。则存在 X_k 为 E_k 上的普瓦松随机测度强度为 $\mu_k:=\mu|_{E_k},k\in\mathbb{N}^+$。令 $X=\sum_{j=1}^{\infty}X_j$，则 X 为以 μ 为强度的普瓦松随机测度。见 *p29.*

2.5.2 积分与补偿的测度

Theorem 17 (普瓦松随机测度的充要条件 2)**.** X 为 $(E,\mathcal{E})$ 上以 μ 为强度的整数值随机测度，则 X 为普瓦松随机测度的充要条件是 $\forall f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}: \mu(f)<\infty$,，则

$$\mathbb{E}\exp(\mathrm{i}X(f))=\exp(\int_E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}f(x)}-1)\mu(dx))$$

见 *p28.*

4 更新过程及其应用

4.1 更新过程

4.1.1 定义和性质

Definition 19. 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是非负独立同分布随机变量序列。设 F 是它们共同的的分布函数。假设 $F(0) = \mathbb{P}(\xi_n = 0) < 1$。则 $\mu := \mathbb{E}(\xi_n) > 0$。令 $S_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k$。由大数定律可得 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mu$。令 $N(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sup\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$。称 $(N(t) : t \geq 0)$ 为**更新过程**。称 $(\xi_n : n \geq 1)$ 为**更新间隔时间**。

Theorem 18. *几乎必然有 $N(\infty) = \infty$。证明见教材 p74*

4.1.2 更新方程

Definition 20. 称 $m(t) := \mathbb{E}(N(t))$ 为更新过程 $(N(t) : t \geq 0)$ 的**更新函数**。计算可得 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N(t) \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t)$。

Theorem 19. *对于 $t \geq 0$ 有 $m(t) < \infty$。证明见教材 p76*

Definition 21. 设 H 为 $[0, \infty)$ 上的右连续的有界变差函数，而 F 为 $[0, \infty)$ 上的概率分布函数。称关于 K 的方程 $K(t) = H(t) + K * F(t), t \geq 0$ 为**更新方程**。更新方程的积分形式为 $K(t) = H(t) + \int_0^t K(t - x) \, \mathrm{d}F(x))$。

Theorem 20. *更新方程存在唯一右连续有界变差函数解 K，且该解具有表达式 $K(t) = H(t) + H * m(t)$。证明见教材 p76*

Theorem 21. *对于 $0 \leq s \leq t$，有 $\mathbb{P}(S_{N(t)} \leq s) = 1 - F(t) + \int_0^s 1 - F(t - x) \, \mathrm{d}m(x)$。证明见教材 p77*

Theorem 22 (瓦尔德恒等式)**.** *设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 为独立同分布的随机变量序列，$\mathcal{F}_n$ 为其自然 σ-代数流。设 $\mathbb{E}(\xi_1)$ 存在。设 τ 为一个停时。则有 $\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{\tau} \xi_k) = \mathbb{E}(\tau)\mathbb{E}(\xi_1)$。*

Theorem 23. *对于 $t, x > 0$，有 $\mathbb{P}(W(t) > x) = 1 - F(t + x) + \int_0^t 1 - F(t + x - y) \, \mathrm{d}m(y)$，其中 $W(T) := S_{N(t)+1} - t$ 为**待更新时间**。证明见教材 p78*

4.2 长程极限行为

4.2.1 基本更新定理

Theorem 24. *几乎必然的有 $\lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$。证明见教材 p80*

Theorem 25 (基本更新定理)**.** *有 $\lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu}$。证明见教材 p81*

4.2.2 中心极限定理

Theorem 26 (中心极限定理)**.** *假设 $\mathbb{D}(\xi_1) < \infty$，记 $\mu = \mathbb{E}(\xi_1), \sigma^2 = \mathbb{D}(\xi_1)$。对于 $x \in \mathbb{R}$，有*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{N(t) - \frac{t}{\mu}}{\sqrt{\frac{t\sigma^2}{\mu^3}}} \leq x \right) = \Phi(x) \tag{6}$$

其中 $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{\frac{-y^2}{2}} \, \mathrm{d}y$ 为正态分布的分布函数。证明见教材 p82

4.3 更新过程的应用

4.3.1 随机游动的爬升时间

Definition 22. 设 $(\xi_n : n \geq 1)$ 是独立同分布的可积随机变量序列且满足 $\mathbb{E}(\xi_1) > 0$。令 $(W_n : n \geq 0)$ 是以 $(\xi_n : n \geq 1)$ 为跳幅的随机游动，其中 $W_0 = 0$。易知 $W_n \to +\infty$。令 $S_0 = 0$，递归地定义停时 S_n，令 $S_n = \inf\{k \geq S_{n-1} : W_k > W_{S_{n-1}}\}$。称每个 S_n 为 (W_n) 的**爬升时间**。

Theorem 27. *对于 $n \geq 1$，令 $\eta_n = S_n - S_{n-1}$。则 (η_n) 是独立同分布的非负随机变量序列。证明见教材 p85*

Theorem 28. *我们有 $\mathbb{P}(\forall n \geq 1, W_n > 0) = \frac{1}{\mathbb{E}(S_1)}$。证明见教材 p86*

4.3.2 更新累积过程

Definition 23. 设 $((\xi_n, \eta_n) : n \geq 1)$ 为独立同分布的二维随机变量序列，且 $\xi_n \geq 0$。令 $N(t)$ 为以 ξ_n 为更新间隔时间的更新过程。令 $A(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \eta_n$。称 $(A(t) : t \geq 0)$ 为**更新累积过程**。

Theorem 29. 设 $0 < \mathbb{E}(\xi_1) < \infty, \mathbb{E}(|\eta_1|) < \infty$。则几乎必然有 $\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(\eta_1)}{\mathbb{E}(\xi_1)}$。且有 $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}(A(t))}{t} = \frac{\mathbb{E}(\eta_1)}{\xi_1}$。证明见教材 *p87*

索引