Markov 过程复习资料

白永乐

2024 年 6 月 18 日

目录

2 基本概念和例子

2.1 基本概念

2.1.1 随机过程的定义

Definition 1. 设 I 是非空指标集，$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间。若 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 是一组定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量（取值为 $\mathbb{R}^d$），则称 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 为一个**随机过程**。

Definition 2. 假设 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 和 $(Y_\alpha:\alpha\in J)$ 是两个随机过程。若对于任何有限序列 $(s_1,\cdots,s_n)\subset I,(t_1,\cdots,t_m)\subset J$，都有 $(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})\perp(Y_{t_1},\cdots,Y_{t_m})$，则称这两个**随机过程独立**。

2.1.2 轨道和修正

Definition 3. 设 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 为随机过程。固定 $\omega\in\Omega$，称 $t\mapsto X_t(\omega)$ 为 X 的一条**轨道**。

Definition 4. 称一个随机过程是（**左连续**//**右连续**//**连续**//**左极右连**//**左连右极**）的，若它的所有轨道都是（左连续//右连续//连续//左极右连//左连右极的）。

Definition 5. 设 $(X_t:t\in I)$ 和 $(Y_t:t\in I)$ 是两个随机过程。若 $\forall t\in I$，有 $\mathbb{P}(X_t=Y_t)=1$，则称它们互为**修正**。若 $\mathbb{P}(\forall t\in I,X_t=Y_t)=1$，则称它们是**无区别**的。

Theorem 1. 设 $(X_t:t\geq 0)$ 和 $(Y_t:t\geq 0)$ 是两个右连续的随机过程，而 D 是 $(0,\infty)$ 的可数稠密子集。若 $\forall s\in D,\mathbb{P}(X_s=Y_s)=1$，则有 $(X_t:t\geq 0)$ 和 $(Y_t:t\geq 0)$ 是无区别的。

2.1.3 有限维分布族

为了简化记号，我们用 $S(I)$ 表示 I 的全体有序有限子集。即：

$$S(I):=\{(t_1,\cdots,t_n):n\geq 1,t_i\in I,\forall i=1,\cdots,n\}$$

用 E 表示 $\mathbb{R}^d$，用 $\mathcal{E}$ 表示博雷尔代数。

Definition 6. 设 I 是非空指标集。若对于每个 $J\in S(I)$，都对应一个 $(E^{|}J|,\mathcal{E}^{|}J|)$ 上的概率测度 u_J，则称 $(\mu_J:I\in S(I))$ 为 E 上的一个**有限维分布族**，其中每个 μ_J 称为一个**有限维分布**。设 $X=(X_t:t\in I)$ 是一个随机过程，用 μ_J^X 表示 $(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$ 的分布。称 $\mathcal{D}_X:=\{\mu_J^X:J\in S(I)\}$ 为 X 的有限维分布族，称 μ_J^X 为其中的一个有限维分布。

Definition 7. 给定 $(E,\mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D}$，若存在随机过程 $X=(X_t:t\in I)$ 使得 $\mathcal{D}_X=\mathcal{D}$，则称 X 为 $\mathcal{D}$ 的一个**实现**。若两个随机过程 X,Y 满足 $\mathcal{D}_X=\mathcal{D}_Y$，则称它们为**等价**的。两个等价的过程互称实现。显然，两个互为修正的随机过程一定等价，反过来却未必。

2.1.4 左极右连实现

Definition 8. 状态空间 $E=\mathbb{R}^d$ 上的随机过程有左极右连实现 $\iff$ 它有左极右连修正。证明见教材 *p5*

2.2 随机游动

Definition 9. 设 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 是独立同分布的 d 维随机变量列，而 X_0 是与之独立的一个 d 维随机变量。令 $X_n := X_0 + \sum_{k=1}^n \xi_k$。称 $(X_n : n \geq 0)$ 为 d 维**随机游动**，并称 $\{\xi_n : n \geq 1\}$ 为其**步长列**。

Definition 10. 若 X_0, ξ_1 均取值与 $\mathbb{Z}^d$，则该随机游动状态空间可以取为 $\mathbb{Z}^d$。特别地，若还有 $\mathbb{P}(|\xi_1| = 1) = 1$，则称其为**简单随机游动**。进一步地，若对于 $\mathbb{Z}^d$ 中的任一单位向量 v，均有 $\mathbb{P}(\xi_1 = v) = \frac{1}{2d}$，则称其为**对称简单随机游动**。

2.2.1 轨道的无界性

方便起见，考虑 $\mathbb{Z}$ 上的简单随机游动 S_n，设其步长列为 $\xi_n : n \geq 1$。设 $\mathbb{P}(\xi_n = 1) = p, \mathbb{P}(\xi_n = -1) = q$，其中 $p, q \in (0,1), p+q = 1$。

Theorem 2. $(S_n : n \geq 1)$ 的轨道是几乎必然无界的。即：

$$\mathbb{P}(\sup_{n \geq 0} |S_n| = \infty) = 1. \tag{1}$$

证明见教材 *p9*

2.2.2 首达时分布

Definition 11. 记 $\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid S_0 = i)$。

Definition 12. 定义 $(S_n : n \geq 0)$ 到达 $x \in \mathbb{Z}$ 的**首达时** $\tau_x := \inf\{n \geq 0 : S_n = x\}$。

Theorem 3. 当 $p = q = \frac{1}{2}$ 时，对于 $a < b, i \in [a,b], a, b, i \in \mathbb{Z}$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b < \tau_a) = \frac{i-a}{b-a}, \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \frac{b-i}{b-a} \tag{2}$$

当 $p \neq q$ 时，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b < \tau_a) = \frac{1 - (\frac{q}{p})^{i-a}}{1 - (\frac{q}{p})^{b-a}}, \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \frac{(\frac{q}{p})^{i-a} - (\frac{q}{p})^{b-a}}{1 - (\frac{q}{p})^{b-a}} \tag{3}$$

证明见教材 *p10*

Theorem 4. 当 $p \geq q$，对 $a \leq i \leq b \in \mathbb{Z}$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a < \infty) = (\frac{q}{p})^{i-a}, \mathbb{P}_i(\tau_b < \infty) = 1 \tag{4}$$

当 $p \leq q$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a < \infty) = 1, \mathbb{P}_i(\tau_b < \infty) = (\frac{p}{q})^{b-i} \tag{5}$$

证明见教材 *p11*

2.3 布朗运动