目录

1 基本概念和例子 **1**

1.1 基本概念 1

1.1.1 随机过程的定义 1

1.1.2 轨道和修正 1

1.1.3 有限维分布族 1

1.1.4 左极右连实现 2

1.2 随机游动 2

1.2.1 轨道的无界性 2

1.2.2 首达时分布 2

1.3 布朗运动 3

1.3.1 背景和定义 3

1.3.2 布朗运动的构造 3

1.3.3 布朗运动的性质 3

1.4 普瓦松过程 3

1 基本概念和例子

1.1 基本概念

1.1.1 随机过程的定义

Definition 1. 设 I 是非空指标集，$(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 是概率空间。若 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 是一组定义在 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ 上的随机变量（取值为 $\mathbb{R}^d$），则称 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 为**一个随机过程**。

Definition 2. 假设 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 和 $(Y_\alpha:\alpha\in J)$ 是两个随机过程。若对于任何有限序列 $(s_1,\cdots,s_n)\subset I,(t_1,\cdots,t_m)\subset J$，都有 $(X_{s_1},\cdots,X_{s_n})\perp(Y_{t_1},\cdots,Y_{t_m})$，则称这两个**随机过程独立**。

1.1.2 轨道和修正

Definition 3. 设 $(X_\alpha:\alpha\in I)$ 为随机过程。固定 $\omega\in\Omega$，称 $t\mapsto X_t(\omega)$ 为 X 的一条**轨道**。

Definition 4. 称一个随机过程是（**左连续**//**右连续**//**连续**//**左极右连**//**左连右极**）的，若它的所有轨道都是（左连续//右连续//连续//左极右连//左连右极的）。

Definition 5. 设 $(X_t:t\in I)$ 和 $(Y_t:t\in I)$ 是两个随机过程。若 $\forall t\in I$，有 $\mathbb{P}(X_t=Y_t)=1$，则称它们互为**修正**。若 $\mathbb{P}(\forall t\in I,X_t=Y_t)=1$，则称它们是**无区别**的。

Theorem 1. 设 $(X_t:t\geq 0)$ 和 $(Y_t:t\geq 0)$ 是两个右连续的随机过程，而 D 是 $(0,\infty)$ 的可数稠密子集。若 $\forall s\in D,\mathbb{P}(X_s=Y_s)=1$，则有 $(X_t:t\geq 0)$ 和 $(Y_t:t\geq 0)$ 是无区别的。

1.1.3 有限维分布族

为了简化记号，我们用 $S(I)$ 表示 I 的全体有序有限子集。即：

$$S(I):=\{(t_1,\cdots,t_n):n\geq 1,t_i\in I,\forall i=1,\cdots,n\}$$

用 E 表示 $\mathbb{R}^d$，用 $\mathcal{E}$ 表示博雷尔代数。

Definition 6. 设 I 是非空指标集。若对于每个 $J\in S(I)$，都对应一个 $(E^{|}J|,\mathcal{E}^{|}J|)$ 上的概率测度 u_J，则称 $(\mu_J:I\in S(I))$ 为 E 上的**一个有限维分布族**，其中每个 μ_J 称为**一个有限维分布**。设 $X=(X_t:t\in I)$ 是一个随机过程，用 μ_J^X 表示 $(X_{t_1},\cdots,X_{t_n})$ 的分布。称 $\mathcal{D}_X:=\{\mu_J^X:J\in S(I)\}$ 为 X 的有限维分布族，称 μ_J^X 为其中的一个有限维分布。

Definition 7. 给定 $(E,\mathcal{E})$ 上的有限维分布族 $\mathcal{D}$，若存在随机过程 $X=(X_t:t\in I)$ 使得 $\mathcal{D}_X=\mathcal{D}$，则称 X 为 $\mathcal{D}$ 的一个**实现**。若两个随机过程 X,Y 满足 $\mathcal{D}_X=\mathcal{D}_Y$，则称它们为**等价的**。两个等价的过程互称实现。显然，两个互为修正的随机过程一定等价，反过来却未必。

1.1.4 左极右连实现

Definition 8. 状态空间 $E=\mathbb{R}^d$ 上的随机过程有左极右连实现 $\iff$ 它有左极右连修正。证明见教材 *p5*

1.2 随机游动

Definition 9. 设 $\{\xi_n:n\geq 1\}$ 是独立同分布的 d 维随机变量列，而 X_0 是与之独立的一个 d 维随机变量。令 $X_n:=X_0+\sum_{k=1}^{n}\xi_k$。称 $(X_n:n\geq 0)$ 为 d 维**随机游动**，并称 $\{\xi_n:n\geq 1\}$ 为其**步长列**。

Definition 10. 若 X_0,ξ_1 均取值与 $\mathbb{Z}^d$，则该随机游动状态空间可以取为 $\mathbb{Z}^d$。特别地，若还有 $\mathbb{P}(|\xi_1|=1)=1$，则称其为**简单随机游动**。进一步地，若对于 $\mathbb{Z}^d$ 中的任一单位向量 v，均有 $\mathbb{P}(\xi_1=v)=\frac{1}{2d}$，则称其为**对称简单随机游动**。

1.2.1 轨道的无界性

方便起见，考虑 $\mathbb{Z}$ 上的简单随机游动 S_n，设其步长列为 $\xi_n:n\geq 1$。设 $\mathbb{P}(\xi_n=1)=p,\mathbb{P}(\xi_n=-1)=q$，其中 $p,q\in(0,1),p+q=1$。

Theorem 2. $(S_n:n\geq 1)$ 的轨道是几乎必然无界的。即：

$$\mathbb{P}(\sup_{n\geq 0}|S_n|=\infty)=1. \tag{1}$$

证明见教材 *p9*

1.2.2 首达时分布

Definition 11. 记 $\mathbb{P}_i(\cdot)=\mathbb{P}(\cdot\mid S_0=i)$。

Definition 12. 定义 $(S_n:n\geq 0)$ 到达 $x\in\mathbb{Z}$ 的**首达时** $\tau_x:=\inf\{n\geq 0:S_n=x\}$。

Theorem 3. 当 $p=q=\frac{1}{2}$ 时，对于 $a<b,i\in[a,b],a,b,i\in\mathbb{Z}$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b<\tau_a)=\frac{i-a}{b-a},\mathbb{P}_i(\tau_a<\tau_b)=\frac{b-i}{b-a} \tag{2}$$

当 $p\neq q$ 时，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_b<\tau_a)=\frac{1-(\frac{q}{p})^{i-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}},\mathbb{P}_i(\tau_a<\tau_b)=\frac{(\frac{q}{p})^{i-a}-(\frac{q}{p})^{b-a}}{1-(\frac{q}{p})^{b-a}} \tag{3}$$

证明见教材 *p10*

Theorem 4. 当 $p\geq q$，对 $a\leq i\leq b\in\mathbb{Z}$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a<\infty)=(\frac{q}{p})^{i-a},\mathbb{P}_i(\tau_b<\infty)=1 \tag{4}$$

当 $p\leq q$，有

$$\mathbb{P}_i(\tau_a<\infty)=1,\mathbb{P}_i(\tau_b<\infty)=(\frac{p}{q})^{b-i} \tag{5}$$

证明见教材 *p11*

1.3 布朗运动

1.3.1 背景和定义

Definition 13. 假定 $\sigma^2 > 0$，具有连续轨道的实值过程 $(B_t : t \geq 0)$ 满足:

1. $\forall 0 \leq s \leq t$，$B_t - B_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$；
2. $\forall 0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_n$，$B_0, B_1 - B_0, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ 独立，

称 $(B_t : t \geq 0)$ 是以 σ^2 为参数的**布朗运动**。特别的，当 $\sigma = 1$，$(B_t : t \geq 0)$ 为**标准布朗运动**。

Definition 14. 有限维分布为正态分布的随机过程称为**正态过程**。

1.3.2 布朗运动的构造

Theorem 5. 布朗运动是有连续实现的。证明见教材 *p13.*

1.3.3 布朗运动的性质

Theorem 6. 从原点出发的零均值高斯过程 $(B_t : t \geq 0)$ 是标准布朗运动 $\iff \forall s, t \geq 0$，$\mathbb{E}(B_t B_s) = t \wedge s$。证明 *p17.*

Theorem 7. 布朗运动轨道几乎处处不可导。证明 *p17-18.*

1.4 普瓦松过程

索引

标准布朗运动, **3**
步长列, **2**
布朗运动, **3**

等价, **2**
对称简单随机游动, **2**

轨道, **1**

简单随机游动, **2**

连续, **1**

$\mathbb{P}_i$, 2

实现, **2**
首达时, **2**
$S(I)$, **1**
随机过程, **1**
随机过程独立, **1**
随机游动, **2**

无区别, **1**

修正, **1**

右连续, **1**
有限维分布, **1**
有限维分布族, **1**

正态过程, **3**
左极右连, **1**, 2
左连续, **1**
左连右极, **1**