四平方和定理

背景介绍

四平方和定理说明每个正整数均可表示为 4 个整数的平方和. 它是费马多边形数定理和华林问题的特例.

1743 年, 瑞士数学家欧拉（Euler）发现了一个著名的恒等式：$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx+cw-dz)^2+(az-bw-cx+dy)^2+(aw+bz-cy-dx)^2$ 根据上述欧拉恒等式可知如果正整数 m 和 n 能表示为 4 个整数的平方和, 则其乘积 mn 也能表示为 4 个整数的平方和.

1751 年, 欧拉又得到了另一个一般的结果. 即对任意奇素数 p, 同余方程 $x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod p$ 必有一组整数解 x,y 满足 $0\le x<\dfrac{p}{2}, 0\le y<\dfrac{p}{2}$

至此, 证明四平方和定理所需的全部引理已经全部证明完毕. 此后, 拉格朗日和欧拉分别在 1770 年和 1773 年作出最后的证明.

定理叙述

定理 1. *设 $n\in\mathbb{N}^+$, 则存在 $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ 使得 $n=a^2+b^2+c^2+d^2$.*

证明概述