四色定理

背景介绍

每个无外飞地的地图都可以用不多于四种颜色来染色, 且不会有两个邻接的区域颜色相同, 即四色定理. 这最早是 Guthrie 在 1852 年提出的猜想, 之后 De Morgan 致力于推动这个问题的研究工作. 1879 年, Kempe 发表了一个四色定理的 “证明”, 当时数学界认为四色问题的猜想就此得到解决. 但在 1890 年, Heawood 发表了一篇文章, 指出了 Kempe 证明中的一个错误. 虽然 Heawood 没能修正这个错误, 但 Heawood 将 Kempe 的证明加以修改, 证明了较弱的五色定理.

证明的主要思想是, 将一个含有 n 片区域的地图, 约化为不超过 $n-1$ 片区域的地图, 从而可以证明定理成立. 之后的证明工作便成了寻找 “不可避免的可约构形集”, 是由 Birkhoff 提出的, 即假设四色定理不成立, 则存在最小的不能约化的五色地图, 且最少用五种颜色染色的地图必出现某些构形, 只要再证明这些构形可以约化为区域更少的问题, 就可以推出矛盾, 最后证明四色定理. 1969 年, 德国数学家 Heesch 提出了 “放电法”, 为寻找不可避免的构形提供了系统的方法. 由于人工寻找构形并验证不可约过于缓慢, Heesch 试图利用计算机辅助证明. 后来, Heesch 的工作被介绍到了美国. 1975 年, Haken, Appel 在 Koch 提供计算机算法的帮助下, 最终得到了一个有 1936 个构形的不可避免构形集, 经伊利诺伊大学的主电脑 “IBM 360” 1200 小时的计算, 最终证明了这些构形都是可约构形, 至此四色定理得到了成功证明. 这是首个主要借助计算机证明的定理.

证明概述

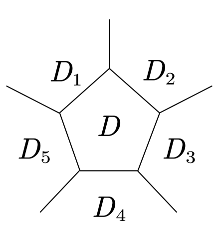
这里我们简述五色定理的证明, 其中的细节可参考**王敬赓《直观拓扑》** p77. Kempe 证明四色定理的过程虽有误, 但提供了 “分构形研究” 的重要思想, 这在五色定理的证明中有所体现.

引理 1. *地图染色问题中, 必存在一个区域, 与它边界相邻的区域数小于等于 5.*

这个引理可以利用平面图的 Euler 公式 $V-E+F=1$ 证明.

定理 1 (五色定理)**.** *每个无外飞地的地图都可以用不多于五种颜色来染色, 且不会有两个邻接的区域颜色相同.*

证明. 对于一个区域数为 n 的地图, 由引理, 我们只需要讨论如图 1 所示的四种构形. 其中 a, b, c 三种构形显然可以用五种颜色染色. 以 c 为例, 若 C_1 和 C_3, C_2 和 C_4 是不同的区域, 则此构形的染色问题可以约化为将 C 和 C_1 合并后的染色问题. 若 C_1 和 C_3 是同一片区域, 则可以合并 C 和 C_2. 对于构形 d, D_1 至 D_5 中一定有两个所代表的区域是不相邻的, 不妨设为 D_1 和 D_3, 则 D_1 和 D_3 可以染成同色, 这样构形 d 也可以用五种颜色染色, 此构形的染色问题可以约化为将 D, D_1, D_3 合并后的染色问题. 至此我们把原问题约化为了 $n-1$ 或 $n-2$ 个区域的染色问题. □



macro:(#1)#2->\ifhyperrefloaded \protected@edef \@currentlabelname {\expandafter \strip@period #1\relax .\relax \@@@ }\fi \sf@@sub@lab

(a)

图 1. Kempe 使用的不可避免构形集