

1 高次方程一般没有根式解

1.1 背景介绍

解代数方程一直是数学中的重要问题. 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$ 而言, 我们很容易能解出其两个根为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 事实上, 古巴比伦留下的陶片显示, 在大约公元前 2000 年(2000 BC)古巴比伦的数学家就能解一元二次方程了. 对于三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0, a \neq 0$ 而言, 由于涉及到复数开根, 所以其一般解被发现的较晚. 一般而言我们认为是尼科洛·塔尔塔利亚最早在 1553 年发现了三次方程的一般解. 三次方程的根式解复杂程度比二次方程提高了很多, 其中包括了开三次根、复数等运算. 四次方程的根式解在三次方程根式解出现不久后就被人们发现, 但是其解的复杂程度非常巨大, 已经几乎失去了实用价值, 只有理论研究的作用.

当二次、三次、四次方程的根式解被得到后, 数学家当然不会满足, 他们开始向五次方程挑战. 人们相信五次方程根式解的出现只是时间问题, 不管它有多复杂, 总会被人们发现. 然而无论数学家如何改进解方程的方法, 都无法在与五次方程斗争的路上前进哪怕一小步. 终于, 在 1824 年, 阿贝尔证明了一般的五次方程没有根式解. 之后, 伽罗瓦创造性地引入了群这一数学概念, 对方程是否存在根式解给出了一个具体的刻画. 至此, 解代数方程的这一挑战才画上(不那么完美的)句号.

1.2 定理叙述

要想证明高次方程无根式解, 我们首先需要定义什么叫根式解. 所谓根式解就是用加、减、乘、除、开 n 次根号进行有限次迭代的解. 具体而言, 我们有

定义 1. 设 $f(x) \in K[x]$ 是一个多项式, 其中 K 是一个域. 若存在域扩张链

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m$$

满足 K_m 包含 f 的所有根, 且对于 $t = 0, \dots, m-1$, 有 $K_{t+1} = K_t[a]$, 其中 a 满足 $\exists n \in \mathbb{N}, a^n \in K_t$. 则称 f 有根式解, 或者 f 根式可解.

阿贝尔发现五次方程一般没有根式解, 即

定理 1. 存在一个五次多项式 f 使得 f 根式不可解.

伽罗瓦在描述可解性的时候引入了伽罗瓦群的概念.

定义 2. 设 $f(x) \in K[x]$ 为一个多项式, 设 F 为 f 的分裂域. 定义 f 的伽罗瓦群为 $\text{Gal}_K(f) = \{\sigma : \sigma \text{ 是 } F \text{ 的自同构, 且 } \sigma|_K = \text{id}\}$.

同时与可解多项式对应地定义了可解群.

定义 3. 若一个有限群 G 满足存在正规子群链 $G = G_m \supseteq G_{m-1} \supseteq \cdots \supseteq G_0$, 且 G_{t+1}/G_t 都是循环群, 则称 G 是可解群.

伽罗瓦神奇地洞察了可解多项式与可解群的关系, 即

定理 2. 如果 f 可根式解, 那么 $\text{Gal}_K(f)$ 是可解群; 如果 $\text{Gal}_K(f)$ 是可解群, 且域 K 的特征满足 $\text{char } K \nmid \deg f$, 则 f 可根式解.

在大部分情况下五次以上的多项式的伽罗瓦群并不可解, 因此不能根式解.

2 四平方和定理

2.1 背景介绍

四平方和定理说明每个正整数均可表示为 4 个整数的平方和. 它是费马多边形数定理和华林问题的特例. 1743 年, 瑞士数学家欧拉发现了一个著名的恒等式: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = (ax + by + cz + dw)^2 + (ay - bx + cw - dz)^2 + (az - bw - cx + dy)^2 + (aw + bz - cy - dx)^2$ 根据上述欧拉恒等式可知如果正整数 m 和 n 能表示为 4 个整数的平方和, 则其乘积 mn 也能表示为 4 个整数的平方和. 1751 年, 欧拉又得到了另一个一般的结果. 即对任意奇素数 p , 同余方程 $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 必有一组整数解 x, y 满足 $0 \leq x < \frac{p}{2}, 0 \leq y < \frac{p}{2}$

至此, 证明四平方和定理所需的全部引理已经全部证明完毕. 此后, 拉格朗日和欧拉分别在 1770 年和 1773 年作出最后的证明.

2.2 定理叙述

定理 3. 设 $n \in \mathbb{N}^+$, 则存在 $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ 使得 $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

2.3 证明概述

只需证明所有素数可以写为四平方和. $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, 因此只需证明奇质数可以表示成四个整数的平方和.

证明. 根据欧拉 1753 年的结果, 存在 $0 < x, y < \frac{p}{2}$ 使得 $x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2 = kp$. 令 $m_0 := \min\{k \in \mathbb{N}^+ : \exists x_i, i = 1, 2, 3, 4, kp = \sum_{i=1}^4 x_i^2\}$. 从 $0 < x, y < \frac{p}{2}$ 可知 $m_0 < p$.

若 m_0 是偶数, 且 $m_0 p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. 不失一般性设 x_1, x_2 的奇偶性相同, 奇偶分析知 x_3, x_4 的奇偶性也相同, 则 $x_1 + x_2, x_1 - x_2, x_3 + x_4, x_3 - x_4$ 均为偶数. 从而 $\frac{m_0}{2} p = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - x_4}{2}\right)^2$ 但 $\frac{m_0}{2} < m_0$, 与 m_0 的定义矛盾.

现在用反证法证明 $m_0 = 1$. 设 $m_0 > 1$. 易知 m_0 不可整除 x_1, x_2, x_3, x_4 的最大公因数, 否则 m_0^2 可整除 $m_0 p$, 则得 m_0 是 p 的因数, 但 $1 < m_0 < p$ 且 p 为质数, 矛盾. 故存在不全为零、绝对值小于 $\frac{1}{2}m_0$ (注意 m_0 是奇数在此的重要性) 的整数 y_1, y_2, y_3, y_4 使得

$$y_i \equiv x_i \pmod{m_0}, 0 < \sum_{i=1}^4 y_i^2 < 4\left(\frac{1}{2}m_0\right)^2 = m_0^2, \sum_{i=1}^4 y_i^2 \equiv \sum_{i=1}^4 x_i^2 \equiv 0 \pmod{m_0}$$

从而 $\sum_{i=1}^4 y_i^2 = m_0 m_1$, 其中 $m_1 \in \mathbb{N}^+, m_1 < m_0$. 下证 $m_1 p$ 可以表示成四平方和. 令:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4, z_2 = x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 \\ z_3 = x_1 y_3 - x_2 y_4 - x_3 y_1 + x_4 y_2, z_4 = x_1 y_4 + x_2 y_3 - x_3 y_2 - x_4 y_1 \end{cases}$$

则有 $\sum_{i=1}^4 z_i^2 = \sum_{i=1}^4 y_i^2 \times \sum_{i=1}^4 x_i^2$. 且易知 $z_1 \equiv \sum_{i=1}^4 x_i^2 \equiv 0 \pmod{m_0}$. 又有 $z_2 \equiv x_1 x_2 - x_2 x_1 + x_3 x_4 - x_4 x_3 \equiv 0 \pmod{m_0}$, 同理 $z_3, z_4 \equiv 0 \pmod{m_0}$. 故 z_1, z_2, z_3, z_4 是 m_0 的倍数, 令 $z_i = m_0 t_i, i = 1, 2, 3, 4$, 则有 $m_0^2 \sum_{i=1}^4 t_i^2 = m_0 m_1 m_0 p$, 从而 $\sum_{i=1}^4 t_i^2 = m_1 p < m_0 p$, 与 m_0 的定义矛盾. \square

14. Brouwer 不动点定理

背景介绍

数学中有许多不动点定理——泛函分析中的 Banach 不动点定理、拓扑学中的 Brouwer 不动点定理、它的推广与延伸——Schauder 不动点定理和 Kakutani 不动点定理, 以及 Lefschetz 不动点定理等等. 在数十个不动点定理中, 本文的主角 Brouwer 不动点定理尤为出名, 它不仅在拓扑学上有着极为重要的地位, 更是在微分方程、微分几何乃至博弈论等方面有着各式各样的应用. 定理以荷兰数学家、哲学家 L. E. J. Brouwer(1881-1966) 命名, 他在拓扑学、集合论、复分析和数学基础和哲学等领域作出了重要贡献.

Brouwer 不动点定理是代数拓扑的早期成果之一, $n = 3$ 的情形由 Piers Bohl 在 1904 年证明, 但他的工作并未被人注意. 1909 年, Brouwer 也证明了此情形; 一年后, J. Hadamard 证明了一般情形, 同年, Brouwer 系统性地使用同调论等工具也完成了对任意维数的证明.

定理叙述

定理的常见形式有以下两种, 后者更为一般化, 可以直接推广到 Banach 空间上成为 Schauder 不动点定理. 记 n 维球面 $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

定理 4. 若 $f : D^n \rightarrow D^n$ 连续, 则存在 $x \in D^n$, 使得 $f(x) = x$.

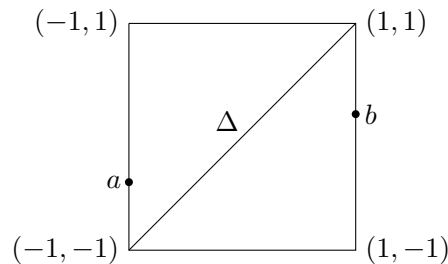
定理 5. 设 K 是欧氏空间的非空紧凸子集, 则连续映射 $f : K \rightarrow K$ 必有不动点.

证明概述

我们为大家叙述 $n = 1$ 时的一种 (分析的) 证明, 注意 $D^1 = [-1, 1]$.

定理 6. 连续函数 $f : D^1 \rightarrow D^1$ 有不动点.

证明. 定义 $g : [-1, 1] \rightarrow [-2, 2]$, $g(x) = f(x) - x$, 它显然是连续的. 若 $g(1)$ 或 $g(-1)$ 为 0, 则命题得证. 若不然, 则有 $g(-1) = f(-1) + 1 > 0$, $g(1) = f(1) - 1 < 0$. 故由零点定理, 存在 $c \in (-1, 1)$, $g(c) = 0$, 此即 $f(c) = c$. \square



遗憾的是, 上述证明没有高维的推广 (特别地, $n = 2$ 的情形可以用代数拓扑中基本群的工具解决). M.W.Hirsch 利用单纯逼近定理给出了一个证明 (*A proof of the nonretractibility of a cell onto its boundary*, 1963); 另有分析学的证明, 主要思想是利用适当的光滑函数来逼近 f (N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators I*, 1958, pp467-470); 最常见的 (也是最初的) 还是代数拓扑的证明. 在证明中, 我们构造 “同调函子” H_n 将问题进行转化, 具体过程这里略去了.

简而言之, 代数拓扑的强大工具将本问题转移到了代数领域, 并在那里得以解决. 在拓扑学中, 这一结果与 Jordan 曲线定理、毛球定理、维数不变性定理 (这一重要结果的论证在 1911 年也由 Brouwer 给出) 和 Borsuk-Ulam 定理一样, 是表征 Euclid 空间拓扑的关键定理之一.

3 二项式定理

定理 7. 设 n 是正整数, x 和 y 是实数, 则可以将 $x + y$ 的 n 次幂展开成和的形式

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

其中每个 $\binom{n}{k}$ 为一个称作二项式系数的特定正整数, 其等于 $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

二项式定理描述了二项式的幂的代数展开. 根据该定理, 可以将两个数之和的整数次幂诸如 $(x+y)^n$ 展开为类似 $ax^b y^c$ 项之和的恒等式, 其中 b, c 均为非负整数且 $b+c=n$. 系数 a 是依赖于 n 和 b 的正整数. 当某项的指数为 0 时, 通常略去不写. 例如:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4.$$

$ax^b y^c$ 中的系数 a 被称为二项式系数, 记作 $\binom{n}{b}$ 或 $\binom{n}{c}$ (二者值相等). 二项式定理可以推广到任意实数次幂, 即广义二项式定理.

二项式系数的三角形排列通常被认为是法国数学家布莱兹·帕斯卡的贡献, 他在 17 世纪描述了这一现象. 但早在他之前, 就曾有数学家进行类似的研究. 例如, 古希腊数学家欧几里得于公元前 4 世纪提到了指数为 2 的情况. 公元前三世纪, 印度数学家青目探讨了更高阶的情况. 帕斯卡三角形的雏形于 10 世纪由印度数学家大力罗摩发现. 在同一时期, 波斯数学家卡拉吉和数学家兼诗人欧玛尔·海亚姆得到了更为普遍的二项式定理的形式. 13 世纪, 中国数学家杨辉也得到了类似的结果. 卡拉吉用数学归纳法的原始形式给出了二项式定理和帕斯卡三角形 (巴斯卡三角形) 的有关证明. 艾萨克·牛顿勋爵将二项式定理的系数推广到有理数.

4 π 是超越数

4.1 背景介绍

超越一词最早在莱布尼兹 1962 年的一篇论文中出现, 用来描述函数. 他证明了 $\sin x$ 是 x 的超越函数. 现代超越数的概念最早由欧拉在 18 世纪提出. 1844 年, 刘维尔证明了超越数存在, 并在 1851 年给出了第一个例子: $L_b := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$. 1873 年, 埃尔米特证明了自然对数的底 e 是超越数. 1874 年, 康托证明了实数几乎是超越数, 并给出了一个构造超越数的系统方法. 1882 年, 林德曼证明了 π 是超越数. 后来, 又有许多数, 如 $e^{\pi}, 2^{\sqrt{2}}, \sin 1, \ln a, e^b$ 等, 其中 a 是不为 1 的正有理数, b 是不为 0 的代数数.

4.2 定理叙述

定义 4. 若一个复数 $x \in \mathbb{C}$ 不是任何一个非零有理系数多项式的根, 则称其为超越数. 否则称其为代数数.

定理 8. π 是超越数, 即对于任何非零有理系数多项式 $f(x)$, 都有 $f(\pi) \neq 0$.

4.3 证明概述

证明 π 是无理数很简单, 但是证明其是超越数却很难. 我们将使用林德曼-魏尔斯特拉斯定理证明 π 是超越数, 在此之前我们需要先做一些基础的准备:

定义 5. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. 若对于不全为 0 的 $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$, 都有 $\sum_{i=1}^n b_i \alpha_i \neq 0$, 则称它们在 \mathbb{Q} 上线性无关. 从定义可以得到, 一个不为 0 的复数自己本身一定是线性无关的.

设 $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{C}$. 若对于非 0 的有理系数 n 元多项式 $f(x_1, \dots, x_n)$, 均有 $f(y_1, \dots, y_n) \neq 0$, 则称它们在 \mathbb{Q} 上代数无关. 从定义可以得到, 一个复数自己是代数无关的当且仅当这个复数是超越数.

定义 6. 对于复数 $z \in \mathbb{C}$, 令 $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. 这样我们就将 $f(x) = e^x$ 延拓到了 \mathbb{C} 上.

引理 1. 全体代数数构成一个数域, 即代数数的和、差、积、商仍为代数数.

至此基本的概念已经建立, 下面不加证明地叙述这个重要的定理:

引理 2 (林德曼-魏尔斯特拉斯定理). 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 都是代数数, 且他们在 \mathbb{Q} 上线性无关, 则 $e^{\alpha_1}, e^{\alpha_2}, \dots, e^{\alpha_n}$ 在 \mathbb{Q} 上代数无关.

准备工作完毕, 下面我们来证明 π 是超越数.

证明. 由指数函数的定义知 $e^{i\theta} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!}$. 整理可得 $e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \theta + i \sin \theta$. 从而 $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$. 故 $e^{i\pi} + 1 = 0$, 从而 $e^{i\pi}$ 在 \mathbb{Q} 上是代数相关的. 由引理 2 可知 $i\pi$ 不是代数数. 又由引理 1 可知, 若 π 是代数数, 则由于 $i^2 + 1 = 0$ 知 i 是代数数, 从而 $i\pi$ 是代数数, 矛盾! 故 π 不是代数数, 从而是超越数. \square

5 拉格朗日定理

在群论中, 拉格朗日定理表明了对任何有限群 G , 每个 G 的子群的阶 (元素个数) 整除 G 的阶, 该定理以约瑟夫-路易-拉格朗日命名. 定理进一步表明, 对于有限群 G 的子群 H 而言, $|G|/|H|$ 不仅是个整数, 而且它的值等于指标 $[G : H]$, 其中 $[G : H]$ 是 H 在 G 中左陪集的个数.

定理 9 (拉格朗日定理). 设 G 是有限群, 若 H 是 G 的子群, 那么 $|G| = [G : H] \cdot |H|$.

如果将 $|G|$, $|H|$, 和 $[G : H]$ 看作基数, 那么这个定理对 G 是无限阶群的情况也是成立的.

证明. 规定 G 中的元素 x 与 y 等价如果存在 $h \in H$, 使得 $x = yh$, 这是一个等价关系. 于是 H 在 G 中的左陪集便是在此等价关系中的等价类. 因此, 左陪集构成了 G 的一个分划. 每个左陪集 aH 有与 H 相同的基数, 因为 $x \mapsto ax$ 定义了从 $H \rightarrow aH$ 的一个双射. 而左陪集的数量是指标 $[G : H]$, 综上所述,

$$|G| = [G : H] \cdot |H|.$$

□

5.1 应用

这个定理的一个推论是指群中元素的阶整除群的阶: 若群 G 有 n 个元素, $a \in G$, 那么 $a^n = e$. 这个定理可以用来证明费马小定理以及它的一般化: 欧拉定理.

这个定理也表明任何素数阶群 G 是循环群, 也是单群, 因为由任何非单位元生成的子群必须是群 G 本身.

拉格朗日定理还可以用来证明有无限多个素数: 假设存在一个最大的素数 p , 那么梅森素数 $2^p - 1$ 的任何素因子 q 满足: $2^p \equiv 1 \pmod{q}$, 意味着乘法群 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 中 2 的阶是 p . 由拉格朗日定理, 2 的阶必须整除 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 的阶 $q - 1$, 于是 p 整除 $q - 1$, 所以 $p < q$, 这与 p 是最大的素数矛盾!

6 正弦定理和余弦定理

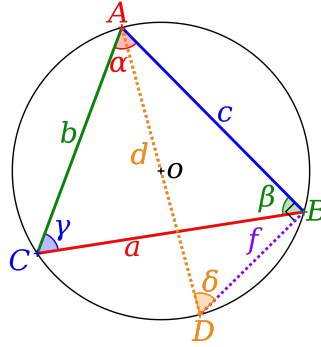
在三角学中, 正弦定理是一个把三角形的边与角联系起来的定理, 这定理表明:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

这里 a, b 和 c 是三角形的边长, 而 α, β 和 γ 则分别是三条边所对应的角. R 是三角形外接圆半径. 当这式子的最后一部分不被使用时, 该定理也被陈述为以下形式:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

当两个角度和一条边已知时, 正弦定理可用于计算三角形的剩余边, 这种技术称为三角测量.



在三角学中, 余弦定理涉及三角形的边长与其一个角的余弦值. 余弦定理指出:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta.$$

这里 a, b 和 c 是三角形的边长, 而 α, β 和 γ 则分别是三条边所对应的角.

余弦定理涵盖了勾股定理. 如果 γ 是直角, 则 $\cos \gamma = 0$, 余弦定律变化为 $c^2 = a^2 + b^2$, 这就是勾股定理.

如果我们设边 c 所对应的角为 θ , 把三角形放在笛卡尔坐标系中, 将 BC 边放在 x 轴上, 顶点 C 与坐标原点重合, 那么点 A, B, C 的坐标即为

$$A = (b \cos \theta, b \sin \theta), B = (a, 0), \text{ and } C = (0, 0).$$

由距离公式:

$$c = \sqrt{(a - b \cos \theta)^2 + (0 - b \sin \theta)^2}.$$

将式子两边平方并化简:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b \cos \theta)^2 + (-b \sin \theta)^2 \\ &= a^2 - 2ab \cos \theta + b^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta \\ &= a^2 + b^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta. \end{aligned}$$

这个证明的一个优点在于它不需要分情况考虑三角形是否是锐角、直角或钝角.

7 Gauss-Bonnet-Chern 定理

7.1 一切的起点：三角形内角和

古希腊的 Pythagoras 学派在数学上有很多重要的发现, 其中有两个定理, 其一是 Pythagoras 定理, 是指欧式空间内的直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方, 另一个定理是欧式空间中的三角形的内角和等于 180° , 即对平面上的任何一个三角形, 若令 α, β, γ 为三角形的三个内角, 则有 $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, 然后就可以发现三角形中的内角和是一个几何不变量, 尽管三个内角 α, β, γ 会因为三角形形状的不同而取值不同.

那么对于一般的多边形, 是否还有这样的规律呢? 接下来可以看到的事实是凸 n 边形的内角和是随 n 的变化而变化, 但外角和是一个常数 2π , 是一个几何不变量. 并发现了如下定理:

定理 10. 设 P 是平面上的一个最一般的多边形, 分为 m 块且含有 g 个洞, P 的转角和 $A(P)$ 满足 $A(P) = 2\pi(m - g)$.

7.2 Euler 数

定理 1 公式的右端其实就是 Euler 数. 在 1751 年大数学家 Euler 指出, 对于三维空间中的任意闭的凸多面体, 它的顶点数 V , 棱数 E 和面数 F 满足恒等式 $V - E + F = 2$. 这就是多面体的 Euler 公式. 对于一般的流形 M , 根据它的一个单纯剖分, 则可以计算它的各个维数单形的个数, 如 n -单形共有 C_n 个, 则 M 的 Euler 数为 $\sum (-1)^n C_n$, 记作 $\chi(M)$, 且 $\chi(M)$ 是一个拓扑不变量, 与 M 的单纯剖分的选取无关.

7.3 Gauss-Bonnet-Chern 定理

对于球面, 即 S^2 上的三角形内角和, 我们有 $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{S_{\triangle ABC}}{R^2}$.

当 M 是一般的曲面 (流形) 时, 定义在 M 上的每一个点 u 的 Gauss 曲率为 $K(u)$, 其中 Gauss 曲率刻画流形 M 在点 u 处的弯曲程度, 如在半径为 R 的球面上 $K(u) = \frac{1}{R^2}$ 等, 故对于流形 M 上的曲边 $\triangle ABC$ 且假设三边都是测地线, 则有 $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \int_D K(u) dS$, 其中 D 为流形 M 上的单连通区域 ${}^Q \triangle ABC$, 如果用转角和来表示, 则上式写为 $A(D) + \int_D K(u) dS = 2\pi$, 其中 $A(D)$ 表示曲边 $\triangle ABC$ 在各顶点处的转角和.

但对于三边不是测地线的曲边 $\triangle ABC$, 则对于 $A(D) + \int_D K(u) dS = 2\pi$ 的左边需加一个连通区域 D 边界上的测地总曲率项为 $\int_{\partial D} k_g ds$, 因此就得到了流形上的 Gauss-Bonnet 公式: $A(D) + \int_D K(u) dS + \int_{\partial D} k_g ds = 2\pi$. 若令 $\varphi(D) = \frac{1}{2\pi} \left(A(D) + \int_D K(u) dS + \int_{\partial D} k_g ds \right)$, 并将 φ 推广到流形 M 上的一般曲边多边形 P , 我们最终得到以下定理 (Gauss-Bonnet-Chern):

定理 11. $\varphi(P) \equiv \frac{1}{2\pi} \left(A(P) + \int_P K(u) dS + \int_{\partial P} k_g ds \right) = \chi(P)$.

最后说明一下 Gauss-Bonnet 公式的发展历史, 1827 年, Gauss 证明了当 P 是流形 M 上的一个测地三角形时上述公式成立, 后来 Bonnet 将 Gauss 的结果推广到 M 上的一般三角形的情形, 在 1942 年又被 Weil 推广到了高维情形, 1943 年陈省身 (Chern) 给出了高维情形下的 Gauss-Bonnet 公式的一个新的证明, 为后来关于示性类的 Chern-Weil 理论打下扎实的基础, 本文到此为止就是将三角形的内角和公式推广到了高维无边流形的 Gauss-Bonnet 公式, 也称作 Gauss-Bonnet-Chern 定理 (公式). 该公式将几何量曲率和拓扑量 Euler 数联系在一起, 是数学中最为优雅和深刻的结论之一.