# 素数定理

## 背景介绍

素数, 指在大于 1 的自然数中, 除了 1 和该数自身外, 无法被其他自然数整除的数。素数在数论中非常重要: 算术基本定理指出, 每个大于 1 的整数均可唯一的写成素数乘积, 即素数可被认为是自然数的"基本建材". 在实际应用中, 素数不仅在公开密钥的算法中具有奠基性的作用, 而且在汽车, 导弹等等现代设备的设计中起着重要作用.

关于素数有许多悬而未决的大问题, 比如大家耳熟能详的黎曼猜想, 哥德巴赫猜想, 孪生素数猜想 $\cdots\cdots$ 素数分布是数论中研究素数性质的困难且重要的课题, 而素数定理描述了素数在自然数中分布的渐进情况. 简单来说就是前 $n$ 个数中有几个素数.

## 定理叙述

**定理 1** (素数定理)**.** *定义 $\pi(x)$ 为素数计数函数, 也就是小于等于 $x$ 的正整数中的素数个数, 则*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{x/\ln x}=1.$$

关于 $\pi(x)$ 还有一个更精确的估计:

**定理 2** (另一个估计)**.** *记 $Li(x)=\int_2^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, 则当 $x\to+\infty$ 时,*

$$\pi(x)=Li(x)+O(xe^{-\frac{1}{15}\sqrt{\ln x}})$$

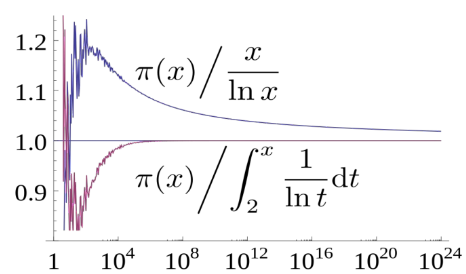



图 1: $\pi(x)$ 与两个近似值的比例的图像

## 发展历程

1797 年至 1798 年间, 法国数学家勒让德根据素数表猜测 $\pi(x)$ 具有 $\frac{x}{A\ln x+B}$ 的形式 (其中 $A,B$ 是参数). 高斯也自称在 15 岁或 16 岁 (1792 或 1793 年) 的时候考虑过类似的问题.1832 年, 狄利克雷经过跟高斯的交流之后, 给出了一个新的逼近函数 $Li(x)$ (事实上他是用一个有点不一样的级数表达式)

1859 年, 黎曼提交了一篇关于素数分布的非常重要的报告《论小于给定数值的素数个数》, 这也是黎曼在这个领域的唯一一篇文章, 但这篇文章有着举足轻重的地位. 黎曼在报告中使用了创新的想法, 将 $\zeta$ 函数的定义解析延拓到整个复平面，并且将素数的分布与 $\zeta$ 函数的零点紧密的联系起来, 具体来说是 $\zeta$ 函数在 $z=1+\mathrm{i}t(t>0)$ 这些复数上的取值都非零. 这篇报告是历史上首次用复分析的方法研究实函数 $\pi(x)$, 对后来数论的研究影响深远.

# 二次互反律

# Law of quadratic reciprocity

## 背景与定理内容

二次方程 $x^2-7=0$ 没有整数解和有理数解, 但有实数解 $\pm\sqrt{7}$. 这启示我们, 如果将解的条件放宽 (这里是允许解存在于一个更大的环或域, 如整环 $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ 或实数域 $\mathbb{R}$), 方程的可解性可能会发生变化. 换个角度, 我们在模 $p$ ($p$ 为素数) 的意义下考虑上述方程整数解的存在性, 即允许系数与解变动 $p$ 的若干整数倍. 例如, 取 $p=3$, 有 $4^2=16\equiv 7 \pmod 3$, 从而在模 3 的意义下 $x=4$ 是上述方程的一个解. 现在考虑一般的情形:

**定义 1** (二次剩余)**.** *设 $p$ 为素数, $n$ 为与 $p$ 互素的整数. 称 $n$ 为模 $p$ 的**二次剩余**, 如果存在整数 $m$ 使得 $m^2\equiv n \pmod p$ 成立, 否则称 $n$ 为模 $p$ 的**二次非剩余**.*

为表征二次剩余与否, 我们定义 **Legendre 符号**

$$\left(\frac{n}{p}\right) := \begin{cases} 1, & \text{若 } n \text{ 是模 } p \text{ 的二次剩余}, \\ -1, & \text{若 } n \text{ 是模 } p \text{ 的二次非剩余}, \\ 0, & \text{若 } n=0. \end{cases}$$

两个 (奇) 素数之间的二次剩余满足如下关系, 称为**二次互反律**.

**定理 3** (二次互反律)**.** *对于奇素数 $p\neq q$, 有*

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

**定理 4** (补充定理)**.** *对于奇素数 $p$, 有 $\left(\frac{-1}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}, \left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.*

## 应用举例

二次互反律可以简化 Legendre 符号的计算, 尤其对于较大的素数. 在此之前, 我们需要列举 Legendre 符号的基本性质:

**命题 1.**

- *设 $p$ 为素数, $a$ 为与 $p$ 互素的整数, $k$ 为任意整数, 有 $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a+kp}{p}\right)$.*
- *乘性: 设 $p$ 为素数, $m$,$n$ 为与 $p$ 互素的整数, 有 $\left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{n}{p}\right)=\left(\frac{mn}{p}\right)$.*
- *Euler 准则: 设 $p$ 为奇素数, $a$ 为与 $p$ 互素的整数, 有 $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p$.*

第一条性质从 Legendre 符号的定义即可看出; 第二条性质说明为判断二次方程 $x^2\equiv n \pmod p$ 的可解性, 只需分别考虑 $n$ 的素因子; 第三条性质为 Legendre 符号的计算提供了一般方法.

**例 1** (开始的例子)**.** *由 Euler 准则, $\left(\frac{7}{3}\right)\equiv 7^{\frac{3-1}{2}}\equiv 1 \pmod 3$, 从而 7 是模 3 的二次剩余.*

**例 2** (大素数)**.** *31 是模 103 的二次非剩余, 因为 $\left(\frac{31}{103}\right)\overset{*}{=}-\left(\frac{103}{31}\right)=-\left(\frac{-21}{31}\right)=-\left(\frac{-1}{31}\right)\left(\frac{21}{31}\right)=\left(\frac{21}{31}\right)=\left(\frac{3}{31}\right)\left(\frac{7}{31}\right)\overset{*}{=}-\left(\frac{31}{3}\right)\cdot\left[-\left(\frac{31}{7}\right)\right]=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{7}\right)\overset{*}{=}\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left[-\left(\frac{7}{3}\right)\right]=-1$. 其中带 $*$ 的等号用到了二次互反律.*

# Euler 的多面体公式 $V - E + F = 2$

## 背景介绍

对于一个简单多面体 (表面能同胚于一个球面的多面体), 记它的**顶点 (vertex)** 数为 $V$, **棱 (edge)** 数为 $E$, **面 (face)** 数为 $F$, 则这三个量满足公式 $V - E + F = 2$, 即 Euler 多面体公式 (Euler's Polyhedron Formula). 这一公式早在 1639 年被 Descartes 注意到并证明; 通过 Descartes 的手稿, Leibniz 1675 年也知道这个公式; 1750 年, Euler 独立证明并发表了这个公式.

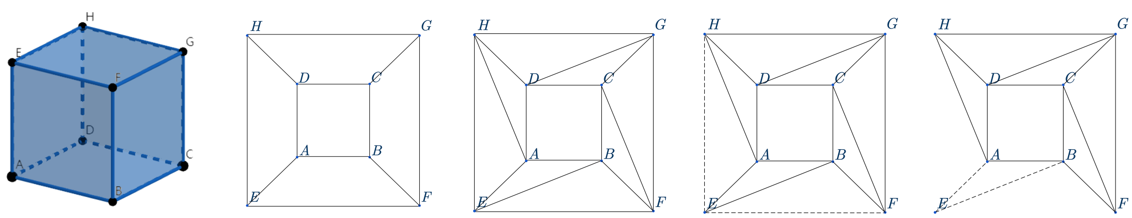
后来, Poincaré 认识到 Euler 多面体公式的推广是典型的拓扑性质的定理, 即 $V - E + F = \chi$, 其中 $\chi$ 为 **Euler 示性数 (Euler characteristic)**, 是一个拓扑不变量; 例如上述球面 (sphere) 有 $\chi = 2$, 而环面 (torus) 有 $\chi = 0$. 这确立了 Euler 公式在拓扑学中的重要地位.

## 证明概述

**定理 5.** *(Euler 的多面体公式) 对于简单多面体, 有公式* $V - E + F = 2$.

在这里, 我们给出 Cauchy 在 1811 年提出的一种证明方法. 勒让德利用球面三角学给出了证明; Descartes 在他的手稿中也给出了证明, 用到了球面上多边形的立体角和它的平面角之间的关系. 后两种证明请阅读**王敬赓《直观拓扑》** p18&p21

*证明.* 任取球面上一点, 去掉该点任意一个闭邻域, 得到的图形同胚于一个平面; 由于简单多面体同胚于球面, 故去掉任意一个面的简单多面体可以在给定平面上展开成**平面图 (各边互不交叠)**. 以正方体为例, 如图 1 所示, 这里正方体 2a去掉了面 EFGH, 展开成为平面图 2b.




(a) (b) (c) (d) (e)

图 2. 以正方体为例的操作流程

由于只去掉了一个面, 证多面体的 Euler 公式等价于证平面图的 Euler 公式 $V - E + F = 1$. 我们接着对平面图做以下操作: 对于平面图里顶点数不是 3 的面, 在保持图是平面图的前提下, 向这个面添加**边 (edge)**(比如从给定顶点出发, 向在同个面内的所有其他顶点连线); 我们对所有的面做这样的操作, 最后得到了一个每个面只有 3 个顶点的平面图, 如图 2c.

接着从最外围的面开始 (至少有 1 条边不与其他面相邻), 如果这个面只有 1 条边不与其它面相邻, 去掉这条边, 如图 2d; 如果这个面有 2 条边不与其他面相邻, 同时去掉这 2 条边, 如图 2e.

我们重复上述操作, 最终得到一个三角形平面图, 这个图 $V = 3$, $E = 3$, $F = 1$, 满足 $V - E + F = 1$. 由于所有关于平面图的操作均保持 $V - E + F$ 不变, 故原来的关于平面图的等式也成立, 至此 Euler 的多面体公式得证. □

## 应用

1. 得到不可平面图的必要条件　2. 证明正多面体只有五种　参考: 王敬赓《直观拓扑》

# 高次方程一般没有根式解

## 背景介绍

解代数方程一直是数学中的重要问题. 对于二次方程 $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ 而言, 我们很容易能解出其两个根为 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 事实上, 古巴比伦留下的陶片显示, 在大约公元前 2000 年 (2000 BC) 古巴比伦的数学家就能解一元二次方程了. 对于三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ 而言, 由于涉及到复数开根, 所以其一般解被发现的较晚. 一般而言我们认为是尼科洛 · 塔尔塔利亚最早在 1553 年发现了三次方程的一般解. 三次方程的根式解复杂程度比二次方程提高了很多, 其中包括了开三次根、复数等运算. 四次方程的根式解在三次方程根式解出现不久后就被人们发现, 但是其解的复杂程度非常巨大, 已经几乎失去了实用价值, 只有理论研究的作用.

当二次、三次、四次方程的根式解被得到后, 数学家当然不会满足, 他们开始向五次方程挑战. 人们相信五次方程根式解的出现只是时间问题, 不管它有多复杂, 总会被人们发现. 然而无论数学家如何改进解方程的方法, 都无法在与五次方程斗争的路上前进哪怕一小步. 终于, 在 1824 年, 阿贝尔证明了一般的五次方程没有根式解. 之后, 伽罗瓦创造性地引入了群这一数学概念, 对方程是否存在根式解给出了一个具体的刻画. 至此, 解代数方程的这一挑战才画上 (不那么完美的) 句号.

## 定理叙述

**定理 6.** *五次及以上的代数方程一般没有根式解.*

所谓一般没有根式解, 是指在绝大多数情况下都没有根式解, 或者说没有统一的根式解的形式，而不是说所有的高次方程都一定没有根式解. 比如$x^5=1$ 显然有根式解$x=\sqrt[5]{1}$. 对于绝大多数高次方程, 如$x^5-x-1=0$ 而言, 都是没有根式解的.

# 证明概述

伽罗瓦创造性地引入了群（Group）的概念来证明高次方程没有根式解。所谓的群就是一个用来描述对称性的代数结构。比如全体整数就是一个群，可以用来描述整数轴在平移下的对称性，因为保持整数轴不变的平移方法刚好是平移$n$ 格，其中$n$ 是整数。

一般而言，一个体系对称性越好，其对称群元素就越多。比如正方形在旋转下的对称群有四个元素（旋转$\dfrac{k\pi}{4}\mathrm{rad}, k=0,1,2,3$）；而旋转对称性更好的圆的对称群则有无数个元素。

一个体系的对称性越好，我们就越难从其中确定一个元素。在正方形中，我们要找一个特定的点，如顶点，只需在四个顶点中挑出这个点即可。由于其对称群是有限的，我们总是可以把要找的点限定在一个有限集合中。但是在圆中，想确定一个点却很困难。一个圆上的所有点都是没有区别的，我们很难找到一个特定的点。

伽罗瓦发现，一个代数方程的根的复杂程度也可以用群来描述。具体而言，一个代数方程的根的复杂程度取决于交换某些根的位置能否被代数系统“发现”。如$x^2-2=0$ 的两个根$\pm\sqrt{2}$ 就无法由四则运算和有理数区分。如果$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=e+f\sqrt{2}$，那么同样有$(a-b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})=(e-f\sqrt{2})$。而$x^4-1=0$ 的四个根$\pm 1, \pm\mathrm{i}$ 就可以被区分，我们知道$1*2=2$，但$\mathrm{i}*2\neq 2$。

我们知道，对称性越强，就越难具体表达。根式解作为一种表达方式，其能处理的对称性也是有限的。具体而言，伽罗瓦定义了一个多项式的所有根的置换中无法被四则运算和有理数发现的部分为这个多项式的伽罗瓦群，然后发现多项式是否可根式解只和这个群有关。当这个群比较简单，如$x^2-2=0$ 的伽罗瓦群中只有两个元素，这个多项式就可以根式解，对应的群也被称为可解群。当这个群很复杂时，这个多项式就不可解，对应的群就叫不可解群。如$x^5-x-1=0$，

它的五个根任意交换位置都不能被初等代数系统发现，因此其伽罗瓦群很复杂，有$5! = 120$ 个元素，从而不能根式解。

# 四平方和定理

## 背景介绍

四平方和定理说明每个正整数均可表示为 4 个整数的平方和. 它是费马多边形数定理和华林问题的特例.

1743 年, 瑞士数学家欧拉（Euler）发现了一个著名的恒等式：$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx+cw-dz)^2+(az-bw-cx+dy)^2+(aw+bz-cy-dx)^2$ 根据上述欧拉恒等式可知如果正整数 $m$ 和 $n$ 能表示为 4 个整数的平方和, 则其乘积 $mn$ 也能表示为 4 个整数的平方和.

1751 年, 欧拉又得到了另一个一般的结果. 即对任意奇素数 $p$, 同余方程 $x^2+y^2+1\equiv 0 \pmod p$ 必有一组整数解 $x,y$ 满足 $0\le x<\frac{p}{2}$, $0\le y<\frac{p}{2}$

至此, 证明四平方和定理所需的全部引理已经全部证明完毕. 此后, 拉格朗日和欧拉分别在 1770 年和 1773 年作出最后的证明.

## 定理叙述

**定理 7.** *设 $n\in\mathbb{N}^+$, 则存在 $a,b,c,d\in\mathbb{N}$ 使得 $n=a^2+b^2+c^2+d^2$.*

## 证明概述

只需证明所有素数可以写为四平方和. $2=1^2+1^2+0^2+0^2$, 因此只需证明奇质数可以表示成四个整数的平方和.

*证明.* 根据欧拉 1973 年的结果, 存在 $0<x,y<\frac{p}{2}$ 使得 $x^2+y^2+1^2+0^2=kp$. 令 $m_0:=\min\{k\in\mathbb{N}^+:\exists x_i,i=1,2,3,4,kp=\sum_{i=1}^4 x_i^2\}$. 从 $0<x,y<\frac{p}{2}$ 可知 $m_0<p$.

若 $m_0$ 是偶数, 且 $m_0p=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$. 不失一般性设 $x_1,x_2$ 的奇偶性相同, 奇偶分析知 $x_3,x_4$ 的奇偶性也相同, 则 $x_1+x_2,x_1-x_2,x_3+x_4,x_3-x_4$ 均为偶数. 从而 $\frac{m_0}{2}p=\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3-x_4}{2}\right)^2$ 但 $\frac{m_0}{2}<m_0$, 与 $m_0$ 的定义矛盾.

现在用反证法证明 $m_0=1$. 设 $m_0>1$. 易知 $m_0$ 不可整除 $x_1,x_2,x_3,x_4$ 的最大公因数, 否则 $m_0^2$ 可整除 $m_0p$, 则得 $m_0$ 是 $p$ 的因数, 但 $1<m_0<p$ 且 p 为质数, 矛盾. 故存在不全为零、绝对值小于 $\frac{1}{2}m_0$(注意 $m_0$ 是奇数在此的重要性) 的整数 $y_1,y_2,y_3,y_4$ 使得

$$y_i\equiv x_i \pmod{m_0}, 0<\sum_{i=1}^4 y_i^2<4(\frac{1}{2}m_0)^2=m_0^2, \sum_{i=1}^4 y_i^2\equiv\sum_{i=1}^4 x_i^2\equiv 0 \pmod{m_0}$$

从而 $\sum_{i=1}^4 y_i^2=m_0m_1$, 其中 $m_1\in\mathbb{N}^+, m_1<m_0$. 下证 $m_1p$ 可以表示成四平方和. 令:

$$\begin{cases} z_1=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4, z_2=x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3 \\ z_3=x_1y_3-x_2y_4-x_3y_1+x_4y_2, z_4=x_1y_4+x_2y_3-x_3y_2-x_4y_1 \end{cases}$$

则有 $\sum_{i=1}^4 z_i^2=\sum_{i=1}^4 y_i^2\times\sum_{i=1}^4 x_i^2$. 且易知 $z_1\equiv\sum_{i=1}^4 x_i^2\equiv 0 \pmod{m_0}$. 又有 $z_2\equiv x_1x_2-x_2x_1+x_3x_4-x_4x_3\equiv 0 \pmod{m_0}$, 同理 $z_3,z_4\equiv 0 \pmod{m_0}$. 故 $z_1,z_2,z_3,z_4$ 是 $m_0$ 的倍数, 令 $z_i=m_0t_i, i=$

$1,2,3,4$, 则有 $m_0^2\sum_{i=1}^{4}t_i^2 = m_0m_1m_0p$, 从而 $\sum_{i=1}^{4}t_i^2 = m_1p < m_0p$, 与 $m_0$ 的定义矛盾. $\square$

# 四色定理

## 背景介绍

每个无外飞地的地图都可以用不多于四种颜色来染色, 且不会有两个邻接的区域颜色相同, 即四色定理. 这最早是 Guthrie 在 1852 年提出的猜想, 之后 De Morgan 致力于推动这个问题的研究工作. 1879 年, Kempe 发表了一个四色定理的 "证明", 当时数学界认为四色问题的猜想就此得到解决. 但在 1890 年, Heawood 发表了一篇文章, 指出了 Kempe 证明中的一个错误. 虽然 Heawood 没能修正这个错误, 但 Heawood 将 Kempe 的证明加以修改, 证明了较弱的五色定理.

证明的主要思想是, 将一个含有 $n$ 片区域的地图, 约化为不超过 $n-1$ 片区域的地图, 从而可以证明定理成立. 之后的证明工作便成了寻找 "不可避免的可约构形集", 是由 Birkhoff 提出的, 即假设四色定理不成立, 则存在最小的不能约化的五色地图, 且最少用五种颜色染色的地图必出现某些构形, 只要再证明这些构形可以约化为区域更少的问题, 就可以推出矛盾, 最后证明四色定理. 1969 年, 德国数学家 Heesch 提出了 "放电法", 为寻找不可避免的构形提供了系统的方法. 由于人工寻找构形并验证不可约过于缓慢, Heesch 试图利用计算机辅助证明. 后来, Heesch 的工作被介绍到了美国. 1975 年, Haken, Appel 在 Koch 提供计算机算法的帮助下, 最终得到了一个有 1936 个构形的不可避免构形集, 经伊利诺伊大学的主电脑 "IBM 360" 1200 小时的计算, 最终证明了这些构形都是可约构形, 至此四色定理得到了成功证明. 这是首个主要借助计算机证明的定理.

## 证明概述

这里我们简述五色定理的证明, 其中的细节可参考**王敬赓《直观拓扑》**p77. Kempe 证明四色定理的过程虽有误, 但提供了 "分构形研究" 的重要思想, 这在五色定理的证明中有所体现.

**引理 1.** *地图染色问题中, 必存在一个区域, 与它边界相邻的区域数小于等于 5.*

这个引理可以利用平面图的 Euler 公式 $V-E+F=1$ 证明.

**定理 8** (五色定理)**.** *每个无外飞地的地图都可以用不多于五种颜色来染色, 且不会有两个邻接的区域颜色相同.*

*证明.* 对于一个区域数为 $n$ 的地图, 由引理, 我们只需要讨论如图 1 所示的四种构形. 其中 a, b, c 三种构形显然可以用五种颜色染色. 以 c 为例, 若 $C_1$ 和 $C_3$, $C_2$ 和 $C_4$ 是不同的区域, 则此构形的染色问题可以约化为将 $C$ 和 $C_1$ 合并后的染色问题. 若 $C_1$ 和 $C_3$ 是同一片区域, 则可以合并 $C$ 和 $C_2$. 对于构形 d, $D_1$ 至 $D_5$ 中一定有两个所代表的区域是不相邻的, 不妨设为 $D_1$ 和 $D_3$, 则 $D_1$ 和 $D_3$ 可以染成同色, 这样构形 d 也可以用五种颜色染色, 此构形的染色问题可以约化为将 $D$, $D_1$, $D_3$ 合并后的染色问题. 至此我们把原问题约化为了 $n-1$ 或 $n-2$ 个区域的染色问题. □

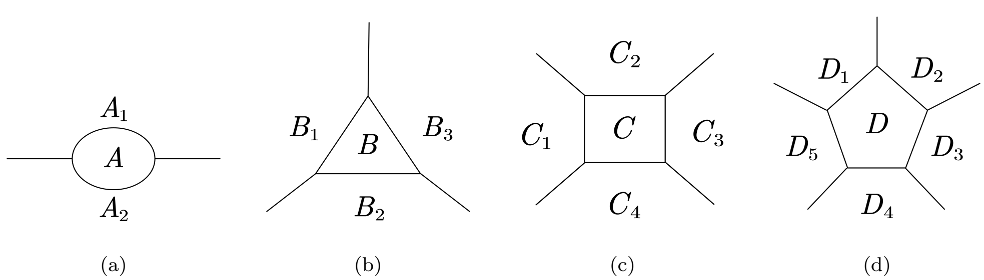



图 3. Kempe 使用的不可避免构形集

# 费马大定理

## 猜想提出

毕达哥拉斯定理说的是: 直角三角形两直角边平方之和等于斜边平方, 即 $x^2+y^2=z^2$ 。公元前 12 世纪我国《周髀算经》也提出过“勾三股四弦五”, 后称勾股定理。

那 $x^n+y^n=z^n(n>2)$ 有无正整数解? 这个问题的提出和“解答”始于法国业余数学家费马。1637 年, 在《算术》副本的空白处, 费马写到: “一般地将一个高于二次的幂分成两个同次幂之和, 这是不可能的。关于此，我确信我发现一种美妙的证法，可惜这里的空白处太小，写不下。”就是费马的糊弄的这句话, 开启了全世界数学家们 358 年的证明历程。


(a) 费马大定理纪念邮票

(b) 安德鲁 · 怀尔斯

## 定理叙述

**定理 9** (费马大定理)**.** *当整数 $n>2$ 时, 下述关于 $x, y, z$ 的不定方程无正整数解*

$$x^n+y^n=z^n$$

## 证明历程

委员会收到数千个不正确的证明, 所有纸张叠加达到约 10 英尺（3 米）的高度

1637 年, 数学家根据费马的少量提示用无穷递降法证明了 $n=4$ 的情况。

1770 年, 欧拉证明了 $n=3$ 的情况。

1825 年, 索菲 · 日耳曼证明了 $n=5$ 的情况, 她引进了一些新的方法, 可以推广到很多素数

1847 年, 加布里埃尔 · 拉梅基于 $x^p+y^p=z^p$ 在复数域内的分解给出一个伪证。库默尔将深入研究这种方法, 建立了“理想数”的理论, 解决了所有正规 (regular) 素数的情况。

1983 年, 格尔德 · 法尔廷斯证明莫德尔猜想。作为推论，对于给定的整数 $n>2$, 至多存在有限组互素的 $a, b, c$ 使得 $a^n+b^n=c^n$ 从无限到有限，前进了一大步。

1986 年, 格哈德 · 弗赖提出“$\epsilon-$ 猜想”并被证实: 若存在 $a, b, c$ 使 $a^n+b^n=c^n$ 则椭圆曲线 $y^2=x(x-a^n)(x+b^n)$ 将是谷山-志村猜想的一个反例。联系了费马大定理与椭圆曲线, 模形式。

1995 年, 安德鲁 · 怀尔斯和理查 · 泰勒在一特例范围内（半稳定椭圆曲线）证明谷山志村猜想, 上述的椭圆曲线刚好在这一特例范围内, 从而证明费马大定理。

怀尔斯证明的过程甚具戏剧性。他在不为人知（除了妻子）的情况下埋头苦干了 7 年, 然后于 1993 年 6 月宣布他的证明, 瞬即成为世界头条。但马上被检查出错误, 怀尔斯和他的学生泰勒之后用近一年时间尝试补救, 终在 1994 年 9 月以一个之前怀尔斯抛弃过的方法得到成功。

## 重大意义

怀尔斯说: “判断一个数学问题是否是好的，其标准就是看它能否产生新的数学，而不是问题本身。”费马大定理就是这样的一个好问题: 库默尔在证明中发展的“理想数”理论促进了代数数论的发展，而安德鲁 · 怀尔斯的“修补式证明”, 对代数几何、数论、调和分析、拓扑学等数学分支产生了深远的影响，在他的证明的基础下，谷山-志村猜想在 4 年后被证明。

# 布劳威尔不动点定理

## 背景介绍

数学中有许多不动点定理——泛函分析中的 Banach 不动点定理、拓扑学中的 Brouwer 不动点定理、它的推广与延伸——Schauder 不动点定理和 Kakutani 不动点定理, 以及 Lefschetz 不动点定理等等. 在数十个不动点定理中, 本文的主角布劳威尔不动点定理尤为出名, 它不仅在拓扑学上有着极为重要的地位, 更是在微分方程、微分几何乃至博弈论等方面有着各式各样的应用. 定理以荷兰数学家、哲学家布劳威尔 (L. E. J. Brouwer, 1881-1966) 命名, 他在拓扑学、集合论、复分析和数学基础和哲学等领域作出了重要贡献.

布劳威尔不动点定理是代数拓扑的早期成果之一, $n = 3$ 的情形由 Piers Bohl 在 1904 年证明, 但他的工作并未被人注意. 1909 年, 布劳威尔也证明了此情形; 一年后, 雅克-阿达马 (J. Hadamard, 1865-1963) 证明了一般情形, 同年, 布劳威尔系统性地使用同调论等工具也完成了对任意维数的证明.

## 定理叙述

定理叙述如下, 其中 $n$ 维球面 $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$.

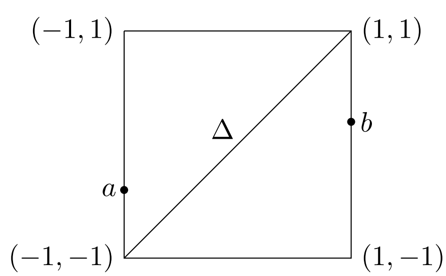
**定理 10.** *若 $f : D^n \to D^n$ 连续, 则存在 $x \in D^n$, 使得 $f(x) = x$.*

## 证明概述

我们为大家介绍 $n = 1$ 时的一种 (分析的) 证明, 注意 $D^1 = [-1, 1]$.

**定理 11.** *连续函数 $f : D^1 \to D^1$ 有不动点.*

*证明.* 定义 $g : [-1, 1] \to [-2, 2], g(x) = f(x) - x$, 它显然是连续的. 若 $g(1)$ 或 $g(-1)$ 为 0, 则命题得证. 若不然, 则有 $g(-1) = f(-1) + 1 > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$. 故由零点定理, 存在 $c \in (-1, 1), g(c) = 0$, 此即 $f(c) = c$. □




遗憾的是, 上述证明没有高维的推广 (特别地, $n = 2$ 的情形可以用代数拓扑中基本群的工具解决). 美国数学家莫里斯-赫希 (M.W.Hirsch, 1933-) 利用单纯逼近定理给出了一个证明; 另有分析学的证明, 其主要思想是利用适当的光滑函数来逼近 $f$; 最常见的 (也是最初的) 还是代数拓扑的证明. 在证明中, 我们构造了一个"同调函子"$H_n$ 将问题进行转化, 具体过程这里略去了.

简而言之, 代数拓扑的强大工具将本问题转移到了代数领域, 并在那里将问题解决. 在拓扑学中, 这一结果与 Jordan 曲线定理、毛球定理、维数不变性定理 (这一重要结果的论证在 1911 年也由布劳威尔给出) 和 Borsuk–Ulam 定理一样, 是表征欧氏空间拓扑的关键定理之一.

# Cayley–Hamilton 定理

## 定理内容

在线性代数中，Cayley–Hamilton 定理表明对于任意交换环上的方阵 (例如实方阵或复方阵) 而言, 其特征多项式就是该矩阵的零化多项式.

对于交换环 $R$ 上的 $n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 设 $\boldsymbol{I}_n$ 是 $R$ 上 $n\times n$ 的单位矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$, 其中 det 表示取行列式, $\lambda\in R$ 是该多项式的未定元. Cayley–Hamilton 定理断言: $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$, 其中 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵.

**举一简单的例子以助理解**: 假设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}p_{\boldsymbol{A}}(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-3&\lambda-4\end{vmatrix}\\=(\lambda-1)(\lambda-4)-(-2)(-3)=\lambda^2-5\lambda-2\end{aligned}$$

Cayley–Hamilton 定理声称: 将上式中的 $\lambda$ 换成 $\boldsymbol{A}$, 常数项用单位矩阵补上, 则一定有

$$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{O}$$

真有这么巧吗? 让我们验算一下:

$$\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_2=\begin{pmatrix}7&10\\15&22\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&10\\15&20\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Cayley-Hamilton 定理是一个十分优雅的定理. Hamilton 首先于 1853 年从四元数的线性函数的逆的角度出发证明了该定理的一个特殊形式, 对应 $4\times4$ 的实矩阵或者 $2\times2$ 的复矩阵; Cayley 在 1858 年叙述了该定理对于 $3\times3$ 及更低阶数方阵的结论, 但只正式出版了对于 $2\times2$ 矩阵的证明 (*读者也可尝试给出该情形下的证明*). 至于一般的 $n\times n$ 的矩阵, Cayley 认为“没有必要对一般情况下的定理给出正式的证明, 这纯粹是没有思维含量的苦力活”. 一般情形下的证明由 Ferdinand Frobenius 于 1878 年首次公开发表, 他通过引入极小多项式的概念完成了这一证明.

## 定理意义

Cayley–Hamilton 定理**降低了寻找矩阵的零化多项式的难度**. 从前将 $n$ 阶方阵全体看作一个 $n^2$ 维的向量空间时, 我们只知道每个方阵都存在零化多项式, 并且次数最多是 $n^2$; 有了 Cayley–Hamilton 定理之后我们发现特征多项式就是一个零化多项式, 次数也从原来的 $n^2$ 降成了 $n$.

既然零化多项式已经容易找到, 我们可以借此**减少一些矩阵运算的计算量**. 仍以 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 为例, 经过计算其特征多项式我们得到 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{O}$, 那么 $\boldsymbol{A}^2=5\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}_2$, 起到了降幂的作用. 计算矩阵的逆也变得更简单了: 由 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}_2=\boldsymbol{O}$ 得到 $\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}_2)=\boldsymbol{I}_2$, 于是直接得到 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}_2)$. 对于一般的 $n$ 阶方阵也可以沿用相同的思路去降幂、计算矩阵的逆. 当 $n$ 较大时, 可利用牛顿恒等式计算特征多项式的系数. 结合多项式余式、Sylvester 公式等知识还可以进行更多矩阵相关的巧妙计算.

Cayley–Hamilton 定理的完整证明有诸多版本, 目前为止最简单的版本利用了伴随矩阵: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $p(t)$, 又设 $\boldsymbol{B}:=\operatorname{adj}(t\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})$, 则根据伴随矩阵的定义有 $(t\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\det(t\boldsymbol{I}_n-\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n=p(t)\boldsymbol{I}_n$, 按 $t$ 的幂次展开并比较该等式左右两侧, 再经过简单的计算即可得证. 从抽象代数的视角来看, 这实际上是建立了从矩阵环到矩阵多项式环的一个自然的环同态. 此外, 从 Zariski 拓扑的观点去看, Cayley–Hamilton 定理还说明可对角化矩阵在全体方阵中是稠密的.

# $\pi$ 是超越数

## 背景介绍

超越一词最早在莱布尼兹 1962 年的一篇论文中出现, 用来描述函数. 他证明了 $\sin x$ 是 $x$ 的超越函数. 现代超越数的概念最早由欧拉在 18 世纪提出. 1844 年, 刘维尔证明了超越数存在, 并在 1851 年给出了第一个例子: $L_b := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$. 1873 年, 埃尔米特证明了自然对数的底 e 是超越数. 1874 年, 康托证明了实数几乎是超越数, 并给出了一个构造超越数的系统方法. 1882 年, 林德曼证明了 $\pi$ 是超越数. 后来, 又有许多数, 如 $\mathrm{e}^{\pi}, 2^{\sqrt{2}}, \sin 1, \ln a, e^b$ 等, 其中 $a$ 是不为 1 的正有理数, $b$ 是不为 0 的代数数.

## 定理叙述

**定义 2.** 若一个复数 $x \in \mathbb{C}$ 不是任何一个非零有理系数多项式的根, 则称其为超越数. 否则称其为代数数.

**定理 12.** $\pi$ 是超越数, 即对于任何非零有理系数多项式 $f(x)$, 都有 $f(\pi) \neq 0$.

## 证明概述

证明 $\pi$ 是无理数很简单, 但是证明其是超越数却很难. 我们将使用林德曼-魏尔斯特拉斯定理证明 $\pi$ 是超越数, 在此之前我们需要先做一些基础的准备:

**定义 3.** 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. 若对于不全为 0 的 $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{Q}$, 都有 $\sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_i \neq 0$, 则称它们在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关. 从定义可以得到, 一个不为 0 的复数自己本身一定是线性无关的.

设 $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{C}$. 若对于非 0 的有理系数 $n$ 元多项式 $f(x_1, \cdots, x_n)$, 均有 $f(y_1, \cdots, y_n) \neq 0$, 则称它们在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关. 从定义可以得到, 一个复数自己是代数无关的当且仅当这个复数是超越数.

**定义 4.** 对于复数 $z \in \mathbb{C}$, 令 $\mathrm{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. 这样我们就将 $f(x) = \mathrm{e}^x$ 延拓到了 $\mathbb{C}$ 上.

**引理 2.** 全体代数数构成一个数域, 即代数数的和、差、积、商仍为代数数.

至此基本的概念已经建立, 下面不加证明地叙述这个重要的定理:

**引理 3** (林德曼-魏尔斯特拉斯定理)**.** 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ 都是代数数, 且他们在 $\mathbb{Q}$ 上线性无关, 则 $\mathrm{e}^{\alpha_1}, \mathrm{e}^{\alpha_2}, \cdots, \mathrm{e}^{\alpha_n}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上代数无关.

准备工作完毕, 下面我们来证明 $\pi$ 是超越数.

*证明.* 由指数函数的定义知 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\theta)^k}{k!}$. 整理可得 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$. 从而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1$. 故 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$, 从而 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ 在 $\mathbb{Q}$ 上是代数相关的. 由引理 3可知 $\mathrm{i}\pi$ 不是代数数. 又由引理 2可知, 若 $\pi$ 是代数数, 则由于 $\mathrm{i}^2 + 1 = 0$ 知 i 是代数数, 从而 $\mathrm{i}\pi$ 是代数数, 矛盾! 故 $\pi$ 不是代数数, 从而是超越数. $\square$

# 柯尼斯堡七桥问题

## 背景介绍

十八世纪初, 在东普鲁士的柯尼斯堡 (今俄罗斯加里宁格勒), 有两条河流经该地, 将其划分为四片陆地, 由 7 座桥梁连接. 当地的居民热衷于一个问题: 一个散步者能否设计出一条路线, 使得他走遍七座桥, 且每座桥只走一次?

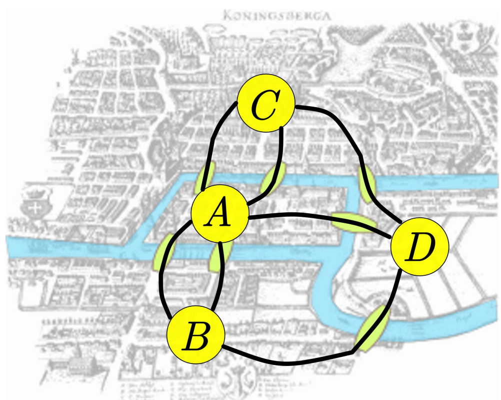



图 4. 柯尼斯堡的七座桥

这一问题在 Euler 1736 年发表的论文《柯尼斯堡的七座桥》中得到解决. Euler 将问题进行了合适的抽象, 将陆地抽象为**顶点 (vertex)**, 桥抽象为**边 (edge)**, 原始的问题就变成了**图 (graph)** 的一笔画问题: 能否遍历完所有的边而没有重复? 在数学史上, 柯尼斯堡七桥问题的解被认为是图论的第一个定理, 网络理论的第一个正确的证明, 以及拓扑学 (位置几何学) 的开端之一.

## 问题的解法

首先我们定义一个顶点上边的条数为它的**度数 (degree)**, 度数为奇数的我们称其为奇顶点, 度数为偶数的我们称其为偶顶点; 一笔画经过的第一个顶点称起点, 最后一个顶点称终点; 对于每一个顶点, 一笔画时由另一个顶点画向它的边称进入边, 由它画向另一个顶点的边称离开边.
我们可以论证以下能够一笔画的图的性质:

1. 一个图能被一笔画出, 则它一定是连通的 (任取两个顶点都存在一条路径将其连接);
2. 任取一个不是起点和终点的顶点, 由于进入边和离开边成对出现, 其必须是偶顶点;
3. 由起点出发的一条离开弧没有对应的进入弧, 画向终点的最后一条进入弧没有对应的离开弧; 若起点和终点不同, 则此图必有 2 个奇顶点; 若起点和终点相同, 则此图没有奇顶点;

对于柯尼斯堡七桥问题, 我们统计它每个顶点的度数: A 度数为 5, B,C,D 度数为 3. 则它的奇顶点数有四个, 与前面的性质 3 矛盾, 故我们断言七桥问题的图不能一笔画.

## 一笔画定理

最后, 我们介绍一笔画问题的一般判定法. 上面给出的一笔画问题的必要条件事实上也是充分条件. 具体的证明和更多的背景请阅读**王敬赓《直观拓扑》** p57

**定理 13** (一笔画定理)**.** *一个图能被一笔画出当且仅当它是连通的, 且奇顶点个数为 0 或 2.*

# 拉格朗日定理

在群论中, 拉格朗日定理表明了对任何有限群 $G$, 每个 $G$ 的子群的阶 (元素个数) 整除 $G$ 的阶, 该定理以约瑟夫-路易-拉格朗日命名. 定理进一步表明, 对于有限群 $G$ 的子群 $H$ 而言,$|G|/|H|$ 不仅是个整数, 而且它的值等于指标 $[G:H]$, 其中 $[G:H]$ 是 $H$ 在 $G$ 中左陪集的个数.

**定理 14** (拉格朗日定理)**.** *设 $G$ 是有限群, 若 $H$ 是 $G$ 的子群, 那么 $|G|=[G:H]\cdot|H|$.*

如果将 $|G|,|H|$, 和 $[G:H]$ 看作基数, 那么这个定理对 $G$ 是无限阶群的情况也是成立的.

*证明.* 规定 $G$ 中的元素 $x$ 与 $y$ 等价如果存在 $h\in H$, 使得 $x=yh$, 这是一个等价关系. 于是 $H$ 在 $G$ 中的左陪集便是在此等价关系中的等价类. 因此, 左陪集构成了 $G$ 的一个分划. 每个左陪集 $aH$ 有与 $H$ 相同的基数, 因为 $x\mapsto ax$ 定义了从 $H\to aH$ 的一个双射. 而左陪集的数量是指标 $[G:H]$, 综上所述,

$$|G|=[G:H]\cdot|H|.$$

□

## 应用

这个定理的一个推论是指群中元素的阶整除群的阶: 若群 $G$ 有 $n$ 个元素,$a\in G$, 那么 $a^n=e$.

这个定理可以用来证明费马小定理以及它的一般化：欧拉定理.

这个定理也表明任何素数阶群 $G$ 是循环群, 也是单群, 因为由任何非单位元生成的子群必须是群 $G$ 本身.

拉格朗日定理还可以用来证明有无限多个素数：假设存在一个最大的素数 $p$, 那么梅森素数 $2^p-1$ 的任何素因子 $q$ 满足：$2^p\equiv 1 \pmod{q}$ , 意味着乘法群 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 中 2 的阶是 $p$. 由拉格朗日定理,2 的阶必须整除 $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ 的阶 $q-1$, 于是 $p$ 整除 $q-1$, 所以 $p<q$, 这与 $p$ 是最大的素数矛盾!

# 正弦定理和余弦定理

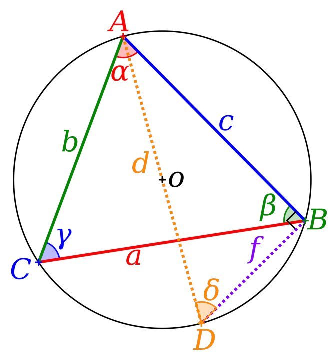
在三角学中, 正弦定理是一个把三角形的边与角联系起来的定理, 这定理表明:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

这里 $a, b$ 和 $c$ 是三角形的边长, 而 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 则分别是三条边所对应的角. $R$ 是三角形外接圆半径. 当这式子的最后一部分不被使用时, 该定理也被陈述为以下形式:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

当两个角度和一条边已知时, 正弦定理可用于计算三角形的剩余边, 这种技术称为三角测量.




在三角学中, 余弦定理涉及三角形的边长与其一个角的余弦值. 余弦定理指出:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta.$$

这里 $a, b$ 和 $c$ 是三角形的边长, 而 $\alpha, \beta$ 和 $\gamma$ 则分别是三条边所对应的角.

余弦定理涵盖了勾股定理. 如果 $\gamma$ 是直角, 则 $\cos\gamma = 0$, 余弦定律变化为 $c^2 = a^2 + b^2$, 这就是勾股定理.

如果我们设边 $c$ 所对应的角为 $\theta$, 把三角形放在笛卡尔坐标系中, 将 $BC$ 边放在 $x$ 轴上, 顶点 $C$ 与坐标原点重合, 那么点 $A, B, C$ 的坐标即为

$$A = (b\cos\theta, b\sin\theta), B = (a, 0), \text{ and } C = (0, 0).$$

由距离公式:

$$c = \sqrt{(a - b\cos\theta)^2 + (0 - b\sin\theta)^2}.$$

将式子两边平方并化简:

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b\cos\theta)^2 + (-b\sin\theta)^2 \\ &= a^2 - 2ab\cos\theta + b^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta \\ &= a^2 + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

这个证明的一个优点在于它不需要分情况考虑三角形是否是锐角、直角或钝角.

# Betrand 假设

## 背景介绍

素数分布是数论中研究素数性质的困难且重要的课题, 1975 年, 数论学家唐 · 察吉尔评论素数:“像生长于自然数间的杂草，似乎不服从概率之外的法则，（但又）表现出惊人的规律性，并有规范其行为之法则，且以军事化的精准度遵守着这些法则。”

一个明显的结论是相邻的两个素数可以间隔任意远, 因为对于 $m > 2, m!+2, m!+3, \cdots, m!+m$ 这连续的 $m-1$ 个数都不是素数。而 Bertrand 假设告诉了人们相邻的两个素数不会离得太远, 它说的是 $n$ 和 $2n$ 之间有一个素数 $(n > 2)$, 这对素数分布作了非常粗略的描述, 但也十分直观。

## 定理叙述

定理的常见形式有以下两种

**定理 15** (Betrand 假设)**.** *对每个整数 $n > 1$, 都存在素数 $p$ 使得 $n < p < 2n$*

**定理 16** (另一种表述)**.** *记第 $n$ 个素数是 $p_n$ $(p_1 = 2, p_2 = 3, \cdots)$，则 $p_{n+1} < 2p_n$*

## 证明概述

Betrand 假设有一个漂亮的初等证明, 为此我们引入如下几个简单的引理

**引理 4** (Legendre 定理)**.** *$n$ 为正整数, 则 $n!$ 素因子分解中素数 $p$ 的幂次为 $\sum_{k\geqslant 1}\lfloor \frac{n}{p^k}\rfloor$*

**引理 5.** *对所有实数 $x \geqslant 2$, 成立 $\prod_{\text{素数}p\leqslant x} p \leqslant 4^{x-1}$*

**引理 6.** *$n$ 为正整数, 则组合数 $C_n^{2n} \geqslant \frac{4^n}{2n}$,*

**引理 7.** *对于 $n > 2$ 为正整数, 满足 $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ 的素数 $p$ 不会整除 $C_n^{2n}$*

*Betrand 假设.* 首先利用引理 1 来估计 $C_n^{2n} = \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}$ 中素数 $p$ 的幂次:

$$\sum_{k\geqslant 1}\lfloor \frac{2n}{p^k}\rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k}\rfloor \ \leqslant \ \max\{\ r \mid p^r < 2n\}$$

不等号是因为每个加项 $\lfloor \frac{2n}{p^k}\rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k}\rfloor < \frac{2n}{p^k} - 2(\frac{n}{p^k} - 1) = 2$, 故至多为 1, 且在 $p^k > 2n$ 时为 0
这样一来, 我们就知道, 在 $C_n^{2n}$ 中, 大于 $\sqrt{2n}$ 的素因子的次数最多是 1, 而小于等于 $\sqrt{2n}$ 的素因子的次数则不超过 2n, 同时小于等于 $\sqrt{2n}$ 的素数不超过 $\sqrt{2n}$ 个, 结合引理 3, 4, 我们有

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant C_n^{2n} \leqslant \prod_{\text{素数}p\leqslant\sqrt{2n}} p \cdot \prod_{\text{素数}\sqrt{2n}<p\leqslant\frac{2}{3}n} p \cdot \prod_{\text{素数}n<p<2n} p$$

若 Betrand 假设不成立, 则乘积的最后一项为 0, 再结合引理 2 即可得到

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n}$$

对于 $n > 4000$ 这个式子是不成立的, 而对于较小的 $n$ 可以直接验证, 这就完成了证明 □

## 在素数定理下看 Betrand 假设

素数定理告诉我们 $x$ 之前的素数大约有 $\frac{x}{\ln x}$ 个, 所以 $2x$ 以内的素数几乎是 $x$ 以内素数的两倍 (项 $\ln 2x$ 和 $\ln x$ 的比值趋于 1)。因此, 当 $n$ 很大时, $n$ 和 $2n$ 之间的素数数量大致为 $\frac{n}{\ln n}$, 比 Bertrand 假设所保证的要多得多。

进一步的, Legendre 猜想问到 $n^2$ 与 $(n+1)^2$ 之间是否一定有一个素数? 这无法直接用素数定理得到, 目前也依然悬而未决, 期待大家的努力。

# 多边形外角和

## 定理叙述

在平面中, 任意凸多边形的外角和都是 $360°$.

尽管这一结论看起来过于显然, 从多边形的任一顶点出发, 沿着多边形的边走一圈回到原点, 转过的角之和一定是 $360°$, 但这一结论并不是平面几何的公理, 仍然需要证明.

## 定理证明

**定理 17.** *在平面中, 若两直线平行, 则内错角相等.*

*证明.* 该定理就是欧几里得的《几何原本》[1] 中的命题 1.29, 其中关键之处在于用到了*第五条公理 (平行公设)*: 若两条直线都与第三条直线相交, 并且在同一边的内角之和小于两个直角, 则这两条直线在这一边必定相交. 不过近现代的数学家认为欧几里得的公理体系并不是有严格的数理逻辑支撑的公理体系, 尤其是第五条平行公设导致了很多问题. 后来希尔伯特建立了平面几何新的公理体系 [2], 在这一新体系下证明平行直线内错角相等主要是用到了其*合同* (Congruence) *公理的第 4 条*, 大致意思是给定一条射线和张角的大小后可唯一确定另一条射线, 具体证明可参考 [3] 的第 113 页. □

**定理 18.** *在平面中, 任意三角形的内角和都是 $180°$.*

*证明.* 欧几里得《几何原本》[1] 的命题 1.31 以及希尔伯特公理体系 [2] 的平行公理都认定过直线外一点可以作该直线的平行线. □

**推论 1.** *在平面中, 任意凸 $n$ 边形的内角和都是 $(n-2)\cdot 180°$.*

**推论 2.** *在平面中, 任意凸多边形的外角和都是 $360°$.*

*证明.* 对于凸多边形而言, 每个顶点处内角、外角之和都是 $180°$, 那么 $n$ 个顶点处的内外角之和就是 $n\cdot 180°$; 而推论 1指出内角和是 $(n-2)\cdot 180°$, 因此外角和就是 $n\cdot 180° - (n-2)\cdot 180° = 360°$. □

**注 1.** 推论 1、2对于一般的多边形 (即, 可能有大于 $180°$ 的内角) 是否成立呢? 笔者暂未想出平面几何知识下严谨的证明, 读者可以尝试证明一下:)

# 参考文献


[1] Fitzpatrick, R. (2008). Euclid's elements of geometry.

[2] Hilbert, D. (1902). The foundations of geometry. Open court publishing Company.

[3] Hartshorne, R. (2013). Geometry: Euclid and beyond. Springer Science & Business Media.

# Gauss-Bonnet-Chern 定理

## 一切的起点：三角形内角和

古希腊的 Pythagoras 学派在数学上有很多重要的发现, 其中有两个定理, 其一是 Pythagoras 定理, 是指欧式空间内的直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方, 另一个定理是欧式空间中的三角形的内角和等于 180° , 即对平面上的任何一个三角形, 若令 $\alpha,\beta,\gamma$ 为三角形的三个内角, 则有 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ , 然后就可以发现三角形中的内角和是一个几何不变量, 尽管三个内角 $\alpha,\beta,\gamma$ 会因为三角形形状的不同而取值不同.

那么对于一般的多边形, 是否还有这样的规律呢? 接下来可以看到的事实是凸 $n$ 边形的内角和是随 $n$ 的变化而变化, 但外角和是一个常数 $2\pi$, 是一个几何不变量. 并发现了如下定理:

**定理 19.** *设 $P$ 是平面上的一个最一般的多边形, 分为 $m$ 块且含有 $g$ 个洞,$P$ 的转角和 $A(P)$ 满足 $A(P)=2\pi(m-g)$ .*

## Euler 数

定理 1 公式的右端其实就是 Euler 数. 在 1751 年大数学家 Euler 指出, 对于三维空间中的任意闭的凸多面体, 它的顶点数 $V$ , 棱数 $E$ 和面数 $F$ 满足恒等式 $V-E+F=2$. 这就是多面体的 Euler 公式. 对于一般的流形 $M$, 根据它的一个单纯剖分, 则可以计算它的各个维数单形的个数, 如 $n$-单形共有 $C_n$ 个, 则 $M$ 的 Euler 数为 $\sum(-1)^n C_n$ , 记作 $\chi(M)$ , 且 $\chi(M)$ 是一个拓扑不变量, 与 $M$ 的单纯剖分的选取无关.

## Gauss-Bonnet-Chern 定理

对于球面, 即 $\mathbb{S}^2$ 上的三角形内角和, 我们有 $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\dfrac{S_{\triangle ABC}}{R^2}$.

当 $M$ 是一般的曲面 (流形) 时, 定义在 $M$ 上的每一个点 $u$ 的 Gauss 曲率为 $K(u)$, 其中 Gauss 曲率刻画流形 $M$ 在点 $u$ 处的弯曲程度, 如在半径为 $R$ 的球面上 $K(u)=\frac{1}{R^2}$ 等, 故对于流形 $M$ 上的曲边 $\triangle\, ABC$ 且假设三边都是测地线, 则有 $\alpha+\beta+\gamma=\pi+\displaystyle\int_D K(u)\mathrm{d}S$ , 其中 $D$ 为流形 $M$ 上的单连通区域 Q $\triangle\, ABC$, 如果用转角和来表示, 则上式写为 $A(D)+\displaystyle\int_D K(u)\mathrm{d}S=2\pi$, 其中 $A(D)$ 表示曲边 $\triangle\, ABC$ 在各顶点处的转角和.

但对于三边不是测地线的曲边 $\triangle ABC$ , 则对于 $A(D)+\displaystyle\int_D K(u)\mathrm{d}S=2\pi$ 的左边需加一个连通区域 $D$ 边界上的测地总曲率项为 $\displaystyle\int_{\partial D} k_g \mathrm{d}s$, 因此就得到了流形上的 Gauss-Bonnet 公式: $A(D)+\displaystyle\int_D K(u)\mathrm{d}S+\int_{\partial D} k_g\mathrm{d}s=2\pi$. 若令 $\varphi(D)=\dfrac{1}{2\pi}\left(A(D)+\displaystyle\int_D K(u)\mathrm{d}S+\int_{\partial D} k_g\mathrm{d}s=2\pi.\right)$, 并将 $\varphi$ 推广到流形 $M$ 上的一般曲边多边形 $P$, 我们最终得到以下定理 (Gauss-Bonnet-Chern):

**定理 20.** $\varphi(P)\equiv\dfrac{1}{2\pi}\left(A(P)+\displaystyle\int_P K(u)\mathrm{d}S+\int_{\partial P} k_g\mathrm{d}s\right)=\chi(P).$

最后说明一下 Gauss-Bonnet 公式的发展历史, 1827 年, Gauss 证明了当 $P$ 是流形 $M$ 上的一个测地三角形时上述公式成立, 后来 Bonnet 将 Gauss 的结果推广到 $M$ 上的一般三角形的情形, 在 1942 年又被 Weil 推广到了高维情形, 1943 年陈省身 (Chern) 给出了高维情形下的 Gauss-Bonnet 公式的一个新的证明, 为后来关于示性类的 Chern-Weil 理论打下扎实的基础, 本文到此为止就是将三角形的内角和公式推广到了高维无边流形的 Gauss-Bonnet 公式, 也称作 Gauss-Bonnet-Chern 定理 (公式). 该公式将几何量曲率和拓扑量 Euler 数联系在一起, 是数学中最为优雅和深刻的结论之一.