# 超越数

## 背景介绍

超越一词最早在莱布尼兹(Leibniz)1962 年的一篇论文中出现,用来描述函数. 他证明了 $\sin x$ 是 $x$ 的超越函数.

现代超越数的概念最早由欧拉在 18 世纪提出.

1844 年, 刘维尔（Liouville）证明了超越数存在, 并在 1851 年给出了第一个例子: $L_b := \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$.

1873 年, 埃尔米特（Hermite）证明了自然对数的底 e 是超越数.

1874 年, 康托（Cantor）证明了实数几乎是超越数, 并给出了一个构造超越数的系统方法.

1882 年, 林德曼（Lindeman）证明了 $\pi$ 是超越数.

后来, 又有许多数, 如 $\mathrm{e}^{\pi}, 2^{\sqrt{2}}, \sin 1, \ln a, e^{b}$ 等, 其中 $a$ 是不为 1 的正有理数, $b$ 是不为 0 的代数数.

## 定理概述

**定义 1.** *若一个复数 $x \in \mathbb{C}$ 不是任何一个非零整系数多项式的根, 则称其为超越数. 否则称其为代数数.*

**定理 1.** *$\sqrt{2}$ 是代数数，所有有理数都是代数数。*

*证明.* 对于有理数$\frac{p}{q}$ 而言，我们令$f(x) = qx - p$，则易知$f(\frac{p}{q}) = 0$。故$\frac{p}{q}$ 是整系数多项式$f(x) = qx - p$ 的根，从而是代数数。

对于$\sqrt{2}$ 而言，我们令$g(x) = x^2 - 2$，则有$g(\sqrt{2}) = 0$。故$\sqrt{2}$ 是有理系数多项式$g(x) = x^2 - 2$ 的根，从而也是代数数。 □

代数数域是很大的数域，我们日常见到的很多数，如全体有理数，以及有有理数进行加减乘除开$n$ 次根号得到的数字都是代数数。而且，以代数数为系数的多项式的根也都是代数数。似乎代数数已经足够满足我们的需要了，我们目前的所有运算都在代数数域是封闭的。那么，我们为什么需要超越数呢?

**定理 2.** *自然对数的底e 是超越数。*

数学家们先后发现e 不仅是无理数，还是超越数。随后数学家们发现，代数数域对取极限是不封闭的，通过取极限的手段可以得到很多的超越数。

后来$\pi$ 被林德曼用代数学的方法证明是超越数。之后数学家们又陆续发现了许多超越数。随着一个个超越数的发现，我们发现超越数是广泛存在的。康托的结论更是说明了实数几乎全部都是超越数。

## 定理意义

超越数相关的证明，给数学带来了大的变革，解决了几千年来数学上的难题——尺规作图三大问题，即倍立方问题、三等分任意角问题和化圆为方问题。随着超越数的发现，这三大问题被证明为不可能。