1 高次方程一般没有根式解

1.1 背景介绍

解代数方程一直是数学中的重要问题。对于二次方程$ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ 而言，我们很容易能解出其两个根为$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。事实上，古巴比伦留下的陶片显示，在大约公元前 2000 年（2000 BC）古巴比伦的数学家就能解一元二次方程了。对于三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ 而言，由于涉及到复数开根，所以其一般解被发现的较晚。一般而言我们认为是尼科洛 · 塔尔塔利亚最早在 1553 年发现了三次方程的一般解。三次方程的根式解复杂程度比二次方程提高了很多，其中包括了开三次根、复数等运算。四次方程的根式解在三次方程根式解出现不久后就被人们发现，但是其解的复杂程度非常巨大，已经几乎失去了实用价值，只有理论研究的作用。

当二次、三次、四次方程的根式解被得到后，数学家当然不会满足，他们开始向五次方程挑战。人们相信五次方程根式解的出现只是时间问题，不管它有多复杂，总会被人们发现。然而无论数学家如何改进解方程的方法，都无法在与五次方程斗争的路上前进哪怕一小步。终于，在 1824 年，阿贝尔证明了一般的五次方程没有根式解。之后，伽罗瓦创造性地引入了群这一数学概念，对方程是否存在根式解给出了一个具体的刻画。至此，解代数方程的这一挑战才画上（不那么完美的）句号。

1.2 定理叙述

要想证明高次方程无根式解，我们首先需要定义什么叫根式解。所谓根式解就是用加、减、乘、除、开n 次根号进行有限次迭代的解。具体而言，我们有

定义 1. *设$f(x)\in K[x]$ 是一个多项式，其中K 是一个域。若存在域扩张链*

$$K=K_0\subset K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_m$$

满足K_m 包含f 的所有根，且对于$t=0,\cdots,m-1$，有$K_{t+1}=K_t[a]$，其中a 满足$\exists n\in\mathbb{N}, a^n\in K_t$。则称$f$ 有根式解，或者f 根式可解。

阿贝尔发现五次方程一般没有根式解，即

定理 1. *存在一个五次多项式f 使得f 根式不可解。*

伽罗瓦在描述可解性的时候引入了伽罗瓦群的概念。

定义 2. *设$f(x)\in K[x]$ 为一个多项式，设F 为f 的分裂域。定义f 的伽罗瓦群为$\mathrm{Gal}_K(f)=\{\sigma: \sigma\text{是}F\text{的自同构，且}\sigma|_K=\mathrm{id}\}$。*

同时与可解多项式对应地定义了可解群。

定义 3. *若一个有限群G 满足存在正规子群链$G=G_m\trianglerighteq G_{m-1}\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_0$，且$G_{t+1}/G_t$ 都是循环群，则称G 是可解群。*

伽罗瓦神奇地洞察了可解多项式与可解群的关系，即

定理 2. *如果f 可根式解，那么$\mathrm{Gal}_K(f)$ 是可解群；如果$\mathrm{Gal}_K(f)$ 是可解群，且域K 的特征满足$\operatorname{char}K\nmid\deg f$，则$f$ 可根式解。*

在大部分情况下五次以上的多项式的伽罗瓦群并不可解，因此不能根式解。