1 Cayley–Hamilton 定理

1.1 定理内容

在线性代数中，Cayley–Hamilton 定理表明对于任意交换环上的方阵 (例如实方阵或复方阵) 而言, 其特征多项式就是该矩阵的零化多项式.

对于交换环 R 上的 $n \times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 设 $\boldsymbol{I}_n$ 是 R 上 $n \times n$ 的单位矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$, 其中 det 表示取行列式, $\lambda \in R$ 是该多项式的变量. Cayley–Hamilton 定理断言: $p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$, 其中 $\boldsymbol{O}$ 表示零矩阵.

举一简单的例子以助理解: 假设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) - (-2)(-3) = \lambda^2 - 5\lambda - 2 \end{aligned}$$

Cayley–Hamilton 定理声称: 将上式中的 λ 换成 $\boldsymbol{A}$, 常数项用单位矩阵替换, 则一定有

$$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{O}$$

真有这么巧吗? 让我们验算一下:

$$\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2 定理意义

Cayley–Hamilton 定理极大地**降低了寻找矩阵的零化多项式的难度**. 如果多项式 $f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 使得 $f(\boldsymbol{A}) = a_k \boldsymbol{A}^k + a_{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1} + \cdots + a_1 \boldsymbol{A} + a_0 \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{O}$, 就称多项式 $f(x)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零化多项式. 零化多项式对于研究矩阵的代数性质有很大的帮助. 从前将 n 阶方阵全体看作一个 n^2 维的向量空间时, 我们只知道每个方阵都存在零化多项式, 并且次数最多是 n^2; 有了 Cayley–Hamilton 定理之后我们发现特征多项式就是一个零化多项式, 次数也从原来的 n^2 降成了 n. 对于阶数较高的方阵, 直接计算其特征多项式比较困难, 可结合牛顿恒等式 ($n = 2$ 时就是初中时学过的韦达定理) 计算其各项系数.

既然零化多项式已经容易找到, 我们可以**减少一些矩阵运算的计算量**. 仍以 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 为例, 经过计算其特征多项式我们得到 $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{O}$, 那么 $\boldsymbol{A}^2 = 5\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I}_2$, 也就是说计算 $\boldsymbol{A}^2$ 转化为计算 $\boldsymbol{A}$ 的线性组合了. 对于一般的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 这意味着计算 $\boldsymbol{A}^k$ 可以化归为计算 $\boldsymbol{A}^{k-1}$, 起到了降幂的作用. 计算矩阵的逆也变得更简单了: 仍以 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 为例, 由 $\boldsymbol{A}^2 - 5\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}_2 = \boldsymbol{O}$ 得到 $\boldsymbol{A} \cdot \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}_2) = \boldsymbol{I}_2$, 于是直接得到 $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{A} - 5\boldsymbol{I}_2)$, 也就是说简化了逆矩阵的计算. 对于一般的 n 阶方阵也可以沿用相同的思路去计算矩阵的逆. 结合 Cayley–Hamilton 定理与多项式余式、Sylvester 公式等知识还可以进行更多矩阵相关的巧妙计算.

Cayley–Hamilton 定理的证明有诸多版本, 最简单的版本利用了伴随矩阵: 设 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $p(t)$, 又设 $\boldsymbol{B} := \operatorname{adj}(t\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})$, 则根据伴随矩阵的定义有 $(t\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \det(t\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{I}_n = p(t)\boldsymbol{I}_n$, 按 t 的幂次展开并比较该等式左右两侧系数, 再经过简单的计算即可得证. 从抽象代数的视角来看, 这实际上是建立了从矩阵环到矩阵多项式环的一个自然的环同构. 从 Zariski 拓扑的观点去看, Cayley–Hamilton 定理还说明可对角化矩阵在全体方阵中是稠密的.