

# 1 四色定理

## 背景介绍

每个无外飞地的地图都可以用不多于四种颜色来染色,且不会有两个邻接的区域颜色相同,即四色定理. 这最早是 Guthrie 在 1852 年提出的猜想,之后 De Morgan 致力于推动这个问题的研究工作. 1879 年, Kempe 发表了一个四色定理的”证明”,当时数学界认为四色问题的猜想已经得到解决. 但在 1890 年, Heawood 发表了一篇文章,指出了 Kempe 证明中的一个错误. 虽然 Heawood 没能修正这个错误,但 Heawood 将 Kempe 的证明加以修改,证明了较弱的五色定理.

证明的主要思想是,将一个含有  $n$  片区域的地图,约化为不超过  $n - 1$  片区域的地图,从而可以证明定理成立. 之后的证明工作便成了寻找”不可避免的可约构形集”,是由 Birkhoff 提出的,即假设四色定理不成立,则存在最小的不能约化的五色地图,且最少用五种颜色染色的地图必出现某些构形,只要再证明这些构形可以约化为区域更少的问题,就可以推出矛盾,最后证明四色定理. 1969 年,德国数学家 Heesch 提出了”放电法”,为寻找不可避免的构形提供了系统的方法. 由于人工寻找构形并验证不可约过于缓慢,Heesch 试图利用计算机辅助证明. 后来,Heesch 的工作被介绍到了美国. 1975 年, Haken, Appel 在 Koch 提供计算机算法的帮助下,最终得到了一个有 1936 个构形的不可避免构形集,经伊利诺伊大学的主电脑”IBM 360” 1200 小时的计算,最终证明了这些构形都是可约构形,至此四色定理得到了成功证明. 这是首个主要借助计算机证明的定理.

## 证明概述

这里我们简述五色定理的证明,其中的细节可参考王敬康《直观拓扑》. Kempe 证明四色定理的过程虽有误,但提供了”分构形研究”的重要思想,这在五色定理的证明中有所体现.

**引理 1.** 地图染色问题中,必存在一个区域,与它边界相邻的区域数小于等于 5.

这个引理可以利用平面图 Euler 公式  $V - E + F = 1$  证明.

**定理 1 (五色定理).** 每个无外飞地的地图都可以用不多于五种颜色来染色,且不会有两个邻接的区域颜色相同

证明. 对于一个区域数为  $n$  的地图,由引理,我们只需要讨论如图 1 所示的四种构形. 其中 a, b, c 三种构形显然可以用五种颜色染色. 以 c 为例,若  $C_1, C_3, C_2, C_4$  是不同的区域,则此构形的染色问题可以约化为将  $C$  和  $C_1$  合并后的染色问题. 若  $C_1$  和  $C_3$  是同一片区域,则可以合并  $C$  和  $C_2$ . 对于构形 d,  $D_1$  至  $D_5$  中一定有两个所代表的区域是不相邻的,不妨设为  $D_1$  和  $D_3$ ,则  $D_1$  和  $D_3$  可以染成同色,这样构形 d 也可以用五种颜色染色,此构形的染色问题可以约化为将  $D_1, D, D_3$  合并后的染色问题. 至此我们把原问题约化为了  $n - 1$  或  $n - 2$  个区域的染色问题.  $\square$

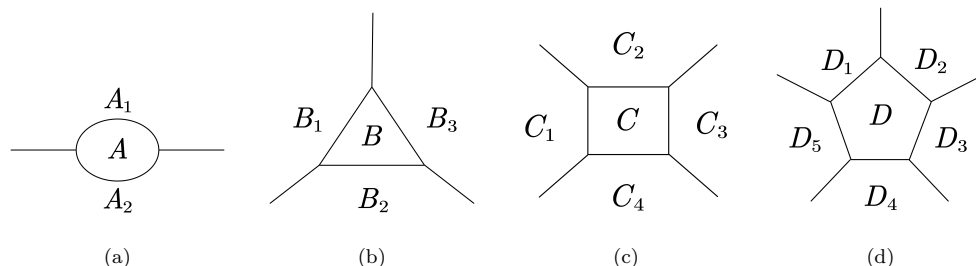


图 1. Kempe 使用的不可避免构形集