Wahrscheinlichkeitstheorie und Frequentistische Inferenz

Dirk Ostwald

2024-01-21

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Mathematische Grundlagen

1. Sprache und Logik

1.1. Mathematik ist eine Sprache

Mathematik ist die Sprache der naturwissenschaftlichen Modellbildung. So entspricht zum Beispiel der Ausdruck

$$F = ma \tag{1.1}$$

im Sinne des zweiten Newtonschen Axioms einer Theorie zur Bewegung von Objekten unter der Einwirkung von Kräften (Newton (1687)). Gleichermaßen entspricht der Ausdruck

$$\max_{q(z)} \int q(z) \ln \left(\frac{p(y,z)}{q(z)} \right) \, dz \tag{1.2}$$

im Sinne der Variational Inference der zeitgenössischen Theorie zur Funktionsweise des Gehirns (Friston (2005), Friston et al. (2023), Ostwald et al. (2014), Blei et al. (2017)). Mathematische Symbolik dient dabei insbesondere der genauen Kommunikation wissenschaftlicher Erkenntnisse und zielt darauf ab, komplexe Sachverhalte exakt und effizient zu beschreiben. Wie beim reflektierten Umgang mit jeder Form von Sprache steht also die Frage "Was soll das heißen?" als Leitfrage im Umgang mit mathematischen Inhalten und Symbolismen immer im Vordergrund.

Als Sprachgebäude weist die Mathematik einige Besonderheiten auf. Zum einen sind ihre Inhalte oft abstrakt. Dies rührt daher, dass sich die Mathematik um eine möglichst breite Allgemeinverständlichkeit und Anwendbarkeit bemüht. Mathematische Zugänge zu den Phänomenen der Welt sind dabei an einer möglichst einfache Transferierbarkeit von Erkenntnissen in andere Kontexte interessiert. Um dies zu ermöglichen, versucht die Mathematik möglichst genau und verständlich, also im Sinne präziser Begriffsbildungen zu arbeiten. Sie geht dabei insbesondere streng hierarchisch vor, so dass an späterer Stelle eingeführte Begrifflichkeiten oft ein gutes Verständnis der ihnen zugrundeliegenden und an früherer Stelle eingeführten Begrifflichkeiten voraussetzen.

Die Genauigkeit der mathematischen Sprache impliziert dabei eine hohe Informationsdichte. Sie ist daher eher nüchtern und lässt überflüssiges weg, so dass in mathematischen Texten im besten Fall *alles* für die Kommunikation einer Idee relevant ist. Als Rezipient:in mathematischer Texte nimmt man die Informationsdichte mathematischer Texte anhand des hohen Verbrauchs an kognitiver Energie beim Lesen eines Textes wahr. Dieser hohe Energieverbrauch gebietet insbesondere Ruhe und Langsamkeit bei einem auf ein gutes Verständnis abzielenden Lesen. Als Leitsatz im Umgang mit mathematischen Texten mag dabei folgendes Zitat dienen: "Einen mathematischen Text kann man nicht lesen wie einen Roman, man muss ihn sich erarbeiten" (Unger (2000)). Nach dem Lesen eines kurzen mathematischen Textes sollte man sich immer kritisch fragen, ob man das Gelesene wirklich verstanden hat oder ob man zur Klärung des Sachverhaltes weitere Quellen heranziehen sollte. Auch ist es hilfreich, sich im Sinne des berühmten Zitats

"What I cannot create, I do not understand" von Richard Feynman eigene Aufzeichnungen anzufertigen und mathematische Sprachgebäude selbst nachzubauen.

Möchte man sich also die Welt der naturwissenschaftliche Modellbildung erschließen, so ist es hilfreich, beim Umgang mit ihrer mathematischen Ausdrucksweise und Symbolik die gleichen Strategien wie beim Erlernen einer Fremdsprache anzuwenden. Hierzu gehört neben dem Eintauchen in den entsprechenden Sprachraum, also der ständige Exposition mit mathematischen Ausdrucksweisen, sicherlich auch zunächst einmal das Auswendiglernen von Begriffen und das aktive Lesen und das Übersetzen von Texten in die Alltagssprache. Ein tiefes und sicheres Verständnis mathematischer Modellbildung ergibt sich dann insbesondere durch die Anwendung mathematischer Herangehensweisen in schriftlicher und mündlicher Form.

1.2. Grundbausteine mathematischer Kommunikation

In diesem Abschnitt stellen wir mit den Begriffen der *Definition*, des *Theorems* und des *Beweises* drei Grundbausteine mathematischer Kommunikation vor, die uns durchgängig begleiten.

Definition

Eine *Definition* ist eine Grundannahme eines mathematischen Systems, die innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird. Definitionen können nur nach ihrer Nützlichkeit innerhalb eines mathematischen Systems bewertet werden. Eine Definition lernt man am besten erst einmal auswendig und hinterfragt sie erst dann, wenn man ihren Nutzen in der Anwendung verstanden hat oder von diesem nicht überzeugt ist. Etwas Entspannung und Ruhe beim Umgang mit auf den ersten Blick komplexen Definitionen ist generell hilfreich. Um zu kennzeichnen, dass wir ein Symbol als etwas definieren, nutzen wir die Schreibweise ":=". Zum Beispiel definiert der Ausdruck "$a := 2$" das Symbol a als die Zahl Zwei. Definitionen enden in diesem Text immer mit dem Symbol $\bullet$.

Theorem

Ein *Theorem* ist eine mathematische Aussage, die mittels eines Beweises als wahr (richtig) erkannt werden kann. Dass heißt, ein Theorem wird immer aus Definitionen und/oder anderen Theoremen hergeleitet. Theoreme sind in diesem Sinne die empirischen Ergebnisse der Mathematik. Im Deutschen werden Theoreme auch oft als *Sätze* bezeichnet. In der angewandten, datenanalytischen Mathematik sind Theoreme oft für Berechnungen hilfreich. Es lohnt sich also, sie auswendig zu lernen, da sie meist die Grundlage für Datenauswertung und Dateninterpretation bilden. Oft tauchen in Theoremen Gleichungen auf. Diese ergeben sich dabei aus den Voraussetzungen des Theorems. Um Gleichungen zu kennzeichnen nutzen wir das Gleichheitszeichen "=". So besagt also zum Beispiel der Ausdruck "$a = 2$" in einem gegebenen Kontext, dass aufgrund bestimmter Voraussetzungen das Symbol oder die Variable a den Wert zwei hat. Theoreme enden in diesem Text immer mit dem Symbol $\circ$.

Beweis

Ein *Beweis* ist eine logische Argumentationskette, die auf bekannte Definitionen und Theoreme zurückgreift, um die Wahrheit (Richtigkeit) eines Theorems zu belegen. Kurze

Beweise tragen dabei oft zum Verständnis eines Theorems bei, lange Beweise eher nicht. Beweise sind also insbesondere die Antwort auf die Frage, warum eine mathematische Aussage gilt ("Warum ist das so?"). Beweise lernt man nicht auswendig. Wenn Beweise kurz sind, ist es sinnvoll, sie durchzuarbeiten, da sie meist als bekannt vorausgesetzte Inhalte wiederholen. Wenn sie lang sind, ist es sinnvoller sie zunächst zu übergehen, um sich nicht in Details zu verlieren und vom eigentlichen Weg durch das entsprechende mathematische Gebäude abzukommen. Beweise enden in diesem Text immer mit dem Symbol $\square$.

Neben den oben vorgestellten Begriffen gibt es mit *Axiomen*, *Lemmata*, *Korollaren* und *Vermutungen* noch weitere typische Grundbausteine mathematischer Texte. Wir werden diese Begriff nicht verwenden und geben deshalb für sie nur einen kurzen Überblick.

Axiome sind unbeweisbare Theoreme, in dem Sinne, als dass sie als Grundannahmen zum Aufbau mathematischer Systeme dienen. Der Übergang zwischen Definitionen und Axiomen ist dabei oft fließend. Da wir mathematisch nicht besonders tief arbeiten, bevorzugen wir in den allermeisten Fällen den Begriff der Definition.

Ein *Lemma* ist ein "Hilfstheorem", also eine mathematische Aussage, die zwar bewiesen wird, aber nicht so bedeutend ist wie ein Theorem. Da wir einerseits auf bedeutende Inhalte fokussieren und andererseits mathematische Aussagen nicht diskriminieren wollen, verzichten wir auf diesen Begriff und nutzen stattdessen den Begriff des Theorems.

Ein *Korollar* ist eine mathematische Aussage, die sich durch einen einfachen Beweis aus einem Theorem ergibt. Da die "Einfachheit" mathematischer Beweise eine relative Eigenschaft ist, verzichten wir auf diesen Begriff und nutzen stattdessen auch hier den Begriff des Theorems.

Vermutungen sind mathematische Aussagen von denen unbekannt ist, ob sie beweisbar oder widerlegbar sind. Da wir im Bereich der angewandten Mathematik arbeiten, treffen wir nicht auf Vermutungen.

1.3. Aussagenlogik

Nachdem wir nun einige Grundbausteine mathematischer Modellbildung kennengelernt haben, wollen wir uns mit der *Aussagenlogik* einem einfachem System nähern, das es erlaubt, Beziehungen zwischen mathematischen Aussagen herzustellen und zu formalisieren. Im Folgenden spielt die Aussagenlogik zum Beispiel in der Definition von Mengenoperationen, bei Optimierungsbedingungen von Funktionen und in vielen Beweisen einen tragende Rolle. In der mathematischen Anwendung ist Aussagenlogik die Grundlage der Booleschen Logik der Programmierung. In der mathematischen Psychologie ist die Aussagenlogik zum Beispiel die Grundlage der Repräsentationstheorie des Messens.

Wir beginnen mit der Definition des Begriffs der mathematischen *Aussage*.

Definition 1.1 (Aussage)**.** Eine *Aussage* ist ein Satz, dem eindeutig die Eigenschaft *wahr* oder *falsch* zugeordnet werden kann.

•

Das Adjektiv *wahr* kann auch als *richtig* verstanden werden. Wir kürzen wahr mit "w" und falsch mit "f" ab. Im Körper der reellen Zahlen ist zum Beispiel die Aussage $1+1=2$ wahr und die Aussage $1+1=3$ falsch. Man beachte, dass die Binärität des Wahrheitsgehalts von Aussagen eine Grundannahme der Aussagenlogik und damit formal wissenschaftlich und nicht empirisch zu verstehen ist. Wahrheitsgehalte beziehen sich nicht auf Definitionen, Definitionen sind immer wahr. Eine erste Möglichkeit, mit Aussagen zu arbeiten, ist, sie zu negieren. Dies führt auf folgende Definition.

Definition 1.2 (Negation)**.** A sei eine Aussage. Dann ist die *Negation von A* die Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist und die wahr ist, wenn A falsch ist. Die Negation von A wird mit $\neg A$, gesprochen als "nicht A", bezeichnet.

•

Beispielsweise ist die Negation der Aussage "Die Sonne scheint" die Aussage "Die Sonne scheint nicht". Die Negation der Aussage $1+1=2$ ist die Aussage $1+1\neq 2$ und die Negation der Aussage $x>1$ ist die Aussage $x \le 1$. Tabellarisch stellt man die Definition der Negation einer Aussage A wie folgt dar.

A	$\neg A$
w	f
f	w

Tabellen dieser Form nennt man *Wahrheitstafeln*. Sie sind ein beliebtes Hilfsmittel in der Aussagenlogik. Möchte man zwei Aussagen logisch verbinden, so bieten sich zunächst die Begriffe der *Konjunktion* und *Disjunktion* an.

Definition 1.3 (Konjunktion)**.** A und B seien Aussagen. Dann ist die *Konjunktion von A und B* die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind. Die Konjunktion von A und B wird mit $A \wedge B$, gesprochen als "A und B", bezeichnet.

•

Die Definition der Konjunktion impliziert folgende Wahrheitstafel.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Als Beispiel sei A die Aussage $2 \ge 1$ und B die Aussage $2 > 1$. Da sowohl A und B wahr sind, ist auch die Aussage $2 \ge 1 \wedge 2 > 1$ wahr. Als weiteres Beispiel sei A die Aussage $1 \ge 1$ und B die Aussage $1 > 1$. Hier ist nun A wahr und B falsch. Also ist die Aussage $1 \ge 1 \wedge 1 > 1$ falsch.

Definition 1.4 (Disjunktion)**.** A und B seien Aussagen. Dann ist die *Disjunktion von A und B* die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A und B wahr ist. Die Disjunktion von A und B wird mit $A \vee B$, gesprochen als "A oder B", bezeichnet.

•

Die Definition der Disjunktion impliziert folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

$A \vee B$ ist also insbesondere auch dann wahr, wenn A und B beide wahr sind. Damit ist das hier betrachtete "oder" genauer ein "und/oder". Man nennt die Disjunktion daher auch ein "nicht-exklusives oder". Als Beispiel sei A die Aussage $2 \geq 1$ und B die Aussage $2 > 1$. A ist wahr und B ist wahr. Also ist die Aussage $2 \geq 1 \vee 2 > 1$ wahr. Sei nun wiederrum A die Aussage $1 \geq 1$ wahr und B die Aussage $1 > 1$. Dann ist A wahr und B falsch. Also ist die Aussage $1 \geq 1 \vee 1 > 1$ wahr.

Eine Möglichkeit, Aussagen in einen mechanischen logischen Zusammenhang zu stellen, ist die *Implikation*. Diese ist wie folgt definiert.

Definition 1.5 (Implikation)**.** A und B seien Aussagen. Dann ist die *Implikation*, bezeichnet mit $A \Rightarrow B$, die Aussage, die dann und nur dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist. A heißt dabei die *Voraussetzung (Prämisse)* und B der *Schluss (Konklusion)* der Implikation. $A \Rightarrow B$ spricht man als "aus A folgt B", "A impliziert B", oder "wenn A, dann B".

•

Man mag $\Rightarrow$ auch als "daraus folgt" lesen. Die Definition der Implikation impliziert folgende Wahrheitstafel.

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Ein Verständnis der Definition der Implikation im Sinne obiger Wahrheitstafel ergibt sich am ehesten, indem man sie als Versuch liest, die intuitive Vorstellung einer Folgerung im Kontext der Aussagenlogik abzubilden und zu formalisieren. Betrachtet man obige Wahrheitstafel unter diesem Gesichtspunkt, so sieht man, dass wenn A wahr ist und $A \Rightarrow B$ wahr ist, B wahr ist. Konstruiert man basierend auf einer wahren Aussage also (zum Beispiel durch das Umformen von Gleichungen) eine wahre Implikation so folgt, dass auch B wahr ist. Ist dies nicht möglich (dass also gilt, wenn A wahr ist, dass

$A \Rightarrow B$ immer falsch ist), dann ist auch B falsch. So mag man Aussagen widerlegen. Schließlich sieht man, dass wenn A falsch ist und $A \Rightarrow B$ wahr ist, B wahr oder falsch sein kann. Aus einer wahren Voraussetzung folgt also nur bei wahrer Implikation eine wahre Konklusion. Insbesondere genügt die Definition der Implikation damit der Forderung "Aus Falschem folgt beliebiges (ex falso sequitur quodlibet)". Aus falschen Aussagen kann man also mithilfe der Implikation nichts richtiges folgern.

Im Kontext der Implikation ergeben sich die Begriffe der *hinreichenden* und der *notwendigen Aussagen (Bedingungen)*. Diese sind definiert wie folgt: wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, sagt man "A ist *hinreichend* für B" und "B ist *notwendig* für A". Diese Sprachregelung erklärt sich folgendermaßen. Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, gilt dass, wenn A wahr ist auch B wahr ist. Die Wahrheit von A reicht also für die Wahrheit von B aus. A ist also hinreichend (ausreichend) für B. Weiterhin gilt, dass wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, dass wenn B falsch ist, dann auch A falsch ist. Die Wahrheit von B ist also für die Wahrheit von A notwendig.

Eine sehr häufig autretender Zusammenhang zwischen zwei Aussagen ist ihre *Äquivalenz*.

Definition 1.6 (Äquivalenz). A und B seien Aussagen. Die *Äquivalenz von A und B* ist die Aussage, die dann und nur dann wahr ist,wenn A und B beide wahr sind oder wenn A und B beide falsch sind. Die Äquivalenz von A und B wird mit $A \Leftrightarrow B$ bezeichnet und gesprochen als "A genau dann wenn B" oder "A ist äquivalent zu B".

•

Die Definition der Äquivalenz impliziert folgende Wahrheitstafel

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Die Definition des Begriffes der *logischen Äquivalenz* erlaubt es unter anderem, die Äquivalenz zweier Aussagen mithilfe von Implikationen nachzuweisen.

Definition 1.7 (Logische Äquivalenz). Zwei Aussagen heißen *logisch äquivalent*, wenn ihre Wahrheitstafeln gleich sind.

•

Als Beispiele für logische Äquivalenzen, die häufig in Beweisargumentationen genutzt werden, zeigen wir folgendes Theorem.

Theorem 1.1 (Logische Äquivalenzen).

A und B seien zwei Aussagen. Dann sind folgende Aussagen logisch äquivalent

(1) $A \Leftrightarrow B$ *und* $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

(2) $A \Rightarrow B$ *und* $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

∘

Beweis. Nach Definition des Begriffs der logischen Äquivalenz müssen wir zeigen, dass die Wahrheitstafeln der betrachteten Aussagen gleich sind. Wir zeigen erst (1), dann (2).

(1) Wir erinnern an die Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow B$:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Wir betrachten weiterhin die Wahrheitstafel von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Der Vergleich der Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow$ mit den ersten beiden und der letzten Spalte der Wahrheitstafel von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ zeigt ihre Gleichheit.

(2) Wir erinnern an die Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wir betrachten weiterhin die Wahrheitstafel von $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$:

A	B	$\neg B$	$\neg A$	$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$
w	w	f	f	w
w	f	w	f	f
f	w	f	w	w
f	f	w	w	w

Der Vergleich der Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$ mit den ersten beiden und der letzten Spalte der Wahrheitstafel von $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zeigt ihre Gleichheit.

□

Die erste Aussage von Theorem 1.1 besagt, dass die Aussage "A und"B sind äquivalent" logisch äquivalent zur Aussage "Aus A folgt B" und aus "B folgt A" ist. Dies ist die Grundlage für viele sogenannte *direkte Beweise* mithilfe von Äquivalenzumformungen. Die zweite Aussage von Theorem 1.1 besagt, dass die Aussage "Aus A folgt"B" logisch äquivalent zur Aussage "Aus nicht B folgt nicht A" ist. Dies ist die Grundlage für die Technik des *indirekten Beweises*.

1.4. Beweistechniken

Im letzten Abschnitt wollen wir mit den Begriffen der *direkten* und *indirekten Beweise* sowie des *Beweises durch Widerspruch* kurz drei Beweistechniken skizzieren, von denen vor allem die erste in diesem Text immer wieder zur Begründung von Theoremen herangezogen wird. Dabei haben typische Theoreme die Form $A \Rightarrow B$ für Aussagen A und B.

Es gilt dabei

- *Direkte Beweise* nutzen Äquivalenzumformungen, um $A \Rightarrow B$ zu zeigen.
- *Indirekte Beweise* nutzen die logische Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.
- *Beweise durch Widerspruch* zeigen, dass $(\neg B) \wedge A$ falsch ist.

Um diese Techniken an einem Beispiel zu erläutern, erinnern wir kurz an folgende *Äquivalenzumformungen von Gleichungen*:

- Addition oder Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung, zum Beispiel

$$2x + 4 = 10 \Leftrightarrow 2x = 6, \tag{1.3}$$

- Multiplikation mit einer oder Division durch eine von Null verschiedene Zahl auf beiden Seiten der Gleichung, zum Beispiel

$$2x = 6 \Leftrightarrow x = 3, \tag{1.4}$$

- Anwendung einer injektiven Funktion auf beiden Seiten der Gleichung, zum Beispiel

$$\exp(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2), \tag{1.5}$$

sowie an folgende elementaren *Äquivalenzumformungen von Ungleichungen*:

- Addition oder Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung, zum Beispiel

$$-2x + 4 \geq 10 \Leftrightarrow -2x \geq 6, \tag{1.6}$$

- Multiplikation mit einer Zahl oder Division durch eine von Null verschiedene Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung, wobei die Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl die Umkehrung der Ungleichung impliziert, zum Beispiel

$$-2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -3, \tag{1.7}$$

- Anwendung monotoner Funktionen auf beiden Seiten der Ungleichung

$$\exp(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln(2). \tag{1.8}$$

Damit ausgestattet wollen wir nun folgendes Theorem mithilfe eines direkten Beweises, eines indirekten Beweises und eines Beweises durch Widerspruch beweisen (vgl. Arens et al. (2018)).

Theorem 1.2 (Quadrate positiver Zahlen)**.** *Es seien a und b zwei positive Zahlen. Dann gilt $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.*

∘

Beweis. Wir geben zunächst einen *direkten Beweis*. Dazu sei $a^2 < b^2$ die Aussage A und $a < b$ die Aussage B. Dann gilt

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < b^2 - a^2 \Leftrightarrow 0 < (b+a)(b-a) \Leftrightarrow 0 < (b-a) \Leftrightarrow a < b. \tag{1.9}$$

Wir geben nun einen *indirekten Beweis*. Es sei $a^2 \geq b^2$ die Aussage $\neg A$. Weiterhin sei $a \geq b$ die Aussage $\neg B$. Dann gilt

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq ab \wedge ab \geq b^2 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2. \tag{1.10}$$

Schließlich geben wir einen *Beweis durch Widerspruch*. Wir zeigen, dazu, dass die Annahme $(\neg B) \wedge A$ auf eine falsche Aussage führt. Es gilt

$$a \geq b \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 \geq ab \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow ab \leq a^2 < b^2. \tag{1.11}$$

Weiterhin gilt

$$a \geq b \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow ab \geq b^2 \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 \leq ab. \tag{1.12}$$

Insgesamt gilt dann also die falsche Aussage

$$ab \leq a^2 < b^2 \leq ab \Leftrightarrow ab < ab. \tag{1.13}$$

□

1.5. Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Besonderheiten der mathematischen Sprache.
2. Was sind wesentliche Tätigkeiten zum Erlernen einer Sprache?
3. Erläutern Sie den Begriff der Definition.
4. Erläutern Sie den Begriff des Theorems.
5. Erläutern Sie den Begriff des Beweises.
6. Geben Sie die Definition einer mathematischen Aussage wieder.
7. Geben Sie die Definition der Negation einer mathematischen Aussage wieder.
8. Geben Sie die Definition der Konjunktion zweier mathematischer Aussagen wieder.
9. Geben Sie die Definition der Disjunktion zweier mathematischer Aussagen wieder.
10. Geben Sie die Definition der Implikation wieder.
11. Geben Sie die Definition der Äquivalenz wieder.
12. Geben Sie die Definition der logischen Äquivalenz wieder.
13. Erläutern Sie die Begriffe des direkten Beweises, des indirekten Beweises und des Beweises durch Widerspruch.
14. Beweisen Sie, dass gilt

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.14}$$

Referenzen

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., & Stachel, H. (2018). *Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56741-8

Blei, D. M., Kucukelbir, A., & McAuliffe, J. D. (2017). Variational Inference: A Review for Statisticians. *Journal of the American Statistical Association*, *112*(518), 859–877. https://doi.org/10.1080/01621459.2017.1285773

Friston, K. (2005). A Theory of Cortical Responses. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, *360*(1456), 815–836. https://doi.org/10.1098/rstb.2005.1622

Friston, K., Da Costa, L., Sakthivadivel, D. A. R., Heins, C., Pavliotis, G. A., Ramstead, M., & Parr, T. (2023). Path Integrals, Particular Kinds, and Strange Things. *Physics of Life Reviews*, *47*, 35–62. https://doi.org/10.1016/j.plrev.2023.08.016

Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society.

Ostwald, D., Kirilina, E., Starke, L., & Blankenburg, F. (2014). A Tutorial on Variational Bayes for Latent Linear Stochastic Time-Series Models. *Journal of Mathematical Psychology*, *60*, 1–19. https://doi.org/10.1016/j.jmp.2014.04.003

Unger, L. (2000). *Grundkurs Mathematik*.