

Probabilistische Datenanalyse für die Psychologie

Dirk Ostwald

2024-01-25

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Willkommen | 3 |
| Vorwort | 4 |
| | |
| I. Mathematische Grundlagen | 5 |
| 1. Sprache und Logik | 6 |
| 1.1. Mathematik ist eine Sprache | 6 |
| 1.2. Grundbausteine mathematischer Kommunikation | 7 |
| 1.3. Aussagenlogik | 8 |
| 1.4. Beweistechniken | 13 |
| 1.5. Selbstkontrollfragen | 14 |
| 2. Mengen | 15 |
| 2.1. Grundlegende Definitionen | 15 |
| 2.2. Verknüpfungen von Mengen | 17 |
| 2.3. Spezielle Mengen | 18 |
| 2.4. Selbstkontrollfragen | 21 |
| | |
| Referenzen | 22 |

Willkommen

Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 4.0 International Lizenz.

Vorwort

Teil I.

Mathematische Grundlagen

1. Sprache und Logik

1.1. Mathematik ist eine Sprache

Mathematik ist die Sprache der naturwissenschaftlichen Modellbildung. So entspricht zum Beispiel der Ausdruck

$$F = ma \tag{1.1}$$

im Sinne des zweiten Newtonschen Axioms einer Theorie zur Bewegung von Objekten unter der Einwirkung von Kräften (Newton (1687)). Gleichermäßen entspricht der Ausdruck

$$\max_{q(z)} \int q(z) \ln \left(\frac{p(y, z)}{q(z)} \right) dz \tag{1.2}$$

im Sinne der Variational Inference der zeitgenössischen Theorie zur Funktionsweise des Gehirns (Friston (2005), Friston et al. (2023), Ostwald et al. (2014), Blei et al. (2017)). Mathematische Symbolik dient dabei insbesondere der genauen Kommunikation wissenschaftlicher Erkenntnisse und zielt darauf ab, komplexe Sachverhalte exakt und effizient zu beschreiben. Wie beim reflektierten Umgang mit jeder Form von Sprache steht also die Frage “Was soll das heißen?” als Leitfrage im Umgang mit mathematischen Inhalten und Symbolismen immer im Vordergrund.

Als Sprachgebäude weist die Mathematik einige Besonderheiten auf. Zum einen sind ihre Inhalte oft abstrakt. Dies rührt daher, dass sich die Mathematik um eine möglichst breite Allgemeinverständlichkeit und Anwendbarkeit bemüht. Mathematische Zugänge zu den Phänomenen der Welt sind dabei an einer möglichst einfachen Transferierbarkeit von Erkenntnissen in andere Kontexte interessiert. Um dies zu ermöglichen, versucht die Mathematik möglichst genau und verständlich, also im Sinne präziser Begriffsbildungen zu arbeiten. Sie geht dabei insbesondere streng hierarchisch vor, so dass an späterer Stelle eingeführte Begrifflichkeiten oft ein gutes Verständnis der ihnen zugrundeliegenden und an früherer Stelle eingeführten Begrifflichkeiten voraussetzen.

Die Genauigkeit der mathematischen Sprache impliziert dabei eine hohe Informationsdichte. Sie ist daher eher nüchtern und lässt überflüssiges weg, so dass in mathematischen Texten im besten Fall *alles* für die Kommunikation einer Idee relevant ist. Als Rezipient:in mathematischer Texte nimmt man die Informationsdichte mathematischer Texte anhand des hohen Verbrauchs an kognitiver Energie beim Lesen eines Textes wahr. Dieser hohe Energieverbrauch gebietet insbesondere Ruhe und Langsamkeit bei einem auf ein gutes Verständnis abzielenden Lesen. Als Leitsatz im Umgang mit mathematischen Texten mag dabei folgendes Zitat dienen: “Einen mathematischen Text kann man nicht lesen wie einen Roman, man muss ihn sich erarbeiten” (Unger (2000)). Nach dem Lesen eines kurzen mathematischen Textes sollte man sich immer kritisch fragen, ob man das Gelesene wirklich verstanden hat oder ob man zur Klärung des Sachverhaltes weitere Quellen heranziehen sollte. Auch ist es hilfreich, sich im Sinne des berühmten Zitats

“What I cannot create, I do not understand” von Richard Feynman eigene Aufzeichnungen anzufertigen und mathematische Sprachgebäude selbst nachzubauen.

Möchte man sich also die Welt der naturwissenschaftliche Modellbildung erschließen, so ist es hilfreich, beim Umgang mit ihrer mathematischen Ausdrucksweise und Symbolik die gleichen Strategien wie beim Erlernen einer Fremdsprache anzuwenden. Hierzu gehört neben dem Eintauchen in den entsprechenden Sprachraum, also der ständige Exposition mit mathematischen Ausdrucksweisen, sicherlich auch zunächst einmal das Auswendiglernen von Begriffen und das aktive Lesen und das Übersetzen von Texten in die Alltagssprache. Ein tiefes und sicheres Verständnis mathematischer Modellbildung ergibt sich dann insbesondere durch die Anwendung mathematischer Herangehensweisen in schriftlicher und mündlicher Form.

1.2. Grundbausteine mathematischer Kommunikation

In diesem Abschnitt stellen wir mit den Begriffen der *Definition*, des *Theorems* und des *Beweises* drei Grundbausteine mathematischer Kommunikation vor, die uns durchgängig begleiten.

Definition

Eine *Definition* ist eine Grundannahme eines mathematischen Systems, die innerhalb dieses Systems weder begründet noch deduktiv abgeleitet wird. Definitionen können nur nach ihrer Nützlichkeit innerhalb eines mathematischen Systems bewertet werden. Eine Definition lernt man am besten erst einmal auswendig und hinterfragt sie erst dann, wenn man ihren Nutzen in der Anwendung verstanden hat oder von diesem nicht überzeugt ist. Etwas Entspannung und Ruhe beim Umgang mit auf den ersten Blick komplexen Definitionen ist generell hilfreich. Um zu kennzeichnen, dass wir ein Symbol als etwas definieren, nutzen wir die Schreibweise “:=”. Zum Beispiel definiert der Ausdruck “ $a := 2$ ” das Symbol a als die Zahl Zwei. Definitionen enden in diesem Text immer mit dem Symbol •.

Theorem

Ein *Theorem* ist eine mathematische Aussage, die mittels eines Beweises als wahr (richtig) erkannt werden kann. Dass heißt, ein Theorem wird immer aus Definitionen und/oder anderen Theoremen hergeleitet. Theoreme sind in diesem Sinne die empirischen Ergebnisse der Mathematik. Im Deutschen werden Theoreme auch oft als *Sätze* bezeichnet. In der angewandten, datenanalytischen Mathematik sind Theoreme oft für Berechnungen hilfreich. Es lohnt sich also, sie auswendig zu lernen, da sie meist die Grundlage für Datenauswertung und Dateninterpretation bilden. Oft tauchen in Theoremen Gleichungen auf. Diese ergeben sich dabei aus den Voraussetzungen des Theorems. Um Gleichungen zu kennzeichnen nutzen wir das Gleichheitszeichen “=”. So besagt also zum Beispiel der Ausdruck “ $a = 2$ ” in einem gegebenen Kontext, dass aufgrund bestimmter Voraussetzungen das Symbol oder die Variable a den Wert zwei hat. Theoreme enden in diesem Text immer mit dem Symbol ◦.

Beweis

Ein *Beweis* ist eine logische Argumentationskette, die auf bekannte Definitionen und Theoreme zurückgreift, um die Wahrheit (Richtigkeit) eines Theorems zu belegen. Kurze

Beweise tragen dabei oft zum Verständnis eines Theorems bei, lange Beweise eher nicht. Beweise sind also insbesondere die Antwort auf die Frage, warum eine mathematische Aussage gilt (“Warum ist das so?”). Beweise lernt man nicht auswendig. Wenn Beweise kurz sind, ist es sinnvoll, sie durchzuarbeiten, da sie meist als bekannt vorausgesetzte Inhalte wiederholen. Wenn sie lang sind, ist es sinnvoller sie zunächst zu übergehen, um sich nicht in Details zu verlieren und vom eigentlichen Weg durch das entsprechende mathematische Gebäude abzukommen. Beweise enden in diesem Text immer mit dem Symbol \square .

Neben den oben vorgestellten Begriffen gibt es mit *Axiomen*, *Lemmata*, *Korollaren* und *Vermutungen* noch weitere typische Grundbausteine mathematischer Texte. Wir werden diesen Begriff nicht verwenden und geben deshalb für sie nur einen kurzen Überblick.

Axiome sind unbeweisbare Theoreme, in dem Sinne, als dass sie als Grundannahmen zum Aufbau mathematischer Systeme dienen. Der Übergang zwischen Definitionen und Axiomen ist dabei oft fließend. Da wir mathematisch nicht besonders tief arbeiten, bevorzugen wir in den allermeisten Fällen den Begriff der Definition.

Ein *Lemma* ist ein “Hilfstheorem”, also eine mathematische Aussage, die zwar bewiesen wird, aber nicht so bedeutend ist wie ein Theorem. Da wir einerseits auf bedeutende Inhalte fokussieren und andererseits mathematische Aussagen nicht diskriminieren wollen, verzichten wir auf diesen Begriff und nutzen stattdessen den Begriff des Theorems.

Ein *Korollar* ist eine mathematische Aussage, die sich durch einen einfachen Beweis aus einem Theorem ergibt. Da die “Einfachheit” mathematischer Beweise eine relative Eigenschaft ist, verzichten wir auf diesen Begriff und nutzen stattdessen auch hier den Begriff des Theorems.

Vermutungen sind mathematische Aussagen von denen unbekannt ist, ob sie beweisbar oder widerlegbar sind. Da wir im Bereich der angewandten Mathematik arbeiten, treffen wir nicht auf Vermutungen.

1.3. Aussagenlogik

Nachdem wir nun einige Grundbausteine mathematischer Modellbildung kennengelernt haben, wollen wir uns mit der *Aussagenlogik* einem einfachen System nähern, das es erlaubt, Beziehungen zwischen mathematischen Aussagen herzustellen und zu formalisieren. Im Folgenden spielt die Aussagenlogik zum Beispiel in der Definition von Mengenoperationen, bei Optimierungsbedingungen von Funktionen und in vielen Beweisen eine tragende Rolle. In der mathematischen Anwendung ist Aussagenlogik die Grundlage der Booleschen Logik der Programmierung. In der mathematischen Psychologie ist die Aussagenlogik zum Beispiel die Grundlage der Repräsentationstheorie des Messens.

Wir beginnen mit der Definition des Begriffs der mathematischen *Aussage*.

Definition 1.1 (Aussage). Eine *Aussage* ist ein Satz, dem eindeutig die Eigenschaft *wahr* oder *falsch* zugeordnet werden kann.

•

Das Adjektiv *wahr* kann auch als *richtig* verstanden werden. Wir kürzen wahr mit “w” und falsch mit “f” ab. Im Körper der reellen Zahlen ist zum Beispiel die Aussage $1 + 1 = 2$ wahr und die Aussage $1 + 1 = 3$ falsch. Man beachte, dass die Binärität des Wahrheitsgehalts von Aussagen eine Grundannahme der Aussagenlogik und damit formal wissenschaftlich und nicht empirisch zu verstehen ist. Wahrheitsgehalte beziehen sich nicht auf Definitionen, Definitionen sind immer wahr. Eine erste Möglichkeit, mit Aussagen zu arbeiten, ist, sie zu negieren. Dies führt auf folgende Definition.

Definition 1.2 (Negation). A sei eine Aussage. Dann ist die *Negation von A* die Aussage, die falsch ist, wenn A wahr ist und die wahr ist, wenn A falsch ist. Die Negation von A wird mit $\neg A$, gesprochen als “nicht A ”, bezeichnet.

•

Beispielsweise ist die Negation der Aussage “Die Sonne scheint” die Aussage “Die Sonne scheint nicht”. Die Negation der Aussage $1 + 1 = 2$ ist die Aussage $1 + 1 \neq 2$ und die Negation der Aussage $x > 1$ ist die Aussage $x \leq 1$. Tabellarisch stellt man die Definition der Negation einer Aussage A wie folgt dar.

| A | $\neg A$ |
|-----|----------|
| w | f |
| f | w |

Tabellen dieser Form nennt man *Wahrheitstafeln*. Sie sind ein beliebtes Hilfsmittel in der Aussagenlogik. Möchte man zwei Aussagen logisch verbinden, so bieten sich zunächst die Begriffe der *Konjunktion* und *Disjunktion* an.

Definition 1.3 (Konjunktion). A und B seien Aussagen. Dann ist die *Konjunktion von A und B* die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind. Die Konjunktion von A und B wird mit $A \wedge B$, gesprochen als “ A und B ”, bezeichnet.

•

Die Definition der Konjunktion impliziert folgende Wahrheitstafel.

| A | B | $A \wedge B$ |
|-----|-----|--------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

Als Beispiel sei A die Aussage $2 \geq 1$ und B die Aussage $2 > 1$. Da sowohl A und B wahr sind, ist auch die Aussage $2 \geq 1 \wedge 2 > 1$ wahr. Als weiteres Beispiel sei A die Aussage $1 \geq 1$ und B die Aussage $1 > 1$. Hier ist nun A wahr und B falsch. Also ist die Aussage $1 \geq 1 \wedge 1 > 1$ falsch.

Definition 1.4 (Disjunktion). A und B seien Aussagen. Dann ist die *Disjunktion von A und B* die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A und B wahr ist. Die Disjunktion von A und B wird mit $A \vee B$, gesprochen als “ A oder B ”, bezeichnet.

•

Die Definition der Disjunktion impliziert folgende Wahrheitstafel

| A | B | $A \vee B$ |
|-----|-----|------------|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

$A \vee B$ ist also insbesondere auch dann wahr, wenn A und B beide wahr sind. Damit ist das hier betrachtete “oder” genauer ein “und/oder”. Man nennt die Disjunktion daher auch ein “nicht-exklusives oder”. Als Beispiel sei A die Aussage $2 \geq 1$ und B die Aussage $2 > 1$. A ist wahr und B ist wahr. Also ist die Aussage $2 \geq 1 \vee 2 > 1$ wahr. Sei nun wiederum A die Aussage $1 \geq 1$ wahr und B die Aussage $1 > 1$. Dann ist A wahr und B falsch. Also ist die Aussage $1 \geq 1 \vee 1 > 1$ wahr.

Eine Möglichkeit, Aussagen in einen mechanischen logischen Zusammenhang zu stellen, ist die *Implikation*. Diese ist wie folgt definiert.

Definition 1.5 (Implikation). A und B seien Aussagen. Dann ist die *Implikation*, bezeichnet mit $A \Rightarrow B$, die Aussage, die dann und nur dann falsch ist, wenn A wahr und B falsch ist. A heißt dabei die *Voraussetzung (Prämisse)* und B der *Schluss (Konklusion)* der Implikation. $A \Rightarrow B$ spricht man als “aus A folgt B ”, “ A impliziert B ”, oder “wenn A , dann B ”.

•

Man mag \Rightarrow auch als “daraus folgt” lesen. Die Definition der Implikation impliziert folgende Wahrheitstafel.

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Ein Verständnis der Definition der Implikation im Sinne obiger Wahrheitstafel ergibt sich am ehesten, indem man sie als Versuch liest, die intuitive Vorstellung einer Folgerung im Kontext der Aussagenlogik abzubilden und zu formalisieren. Betrachtet man obige Wahrheitstafel unter diesem Gesichtspunkt, so sieht man, dass wenn A wahr ist und $A \Rightarrow B$ wahr ist, B wahr ist. Konstruiert man basierend auf einer wahren Aussage also (zum Beispiel durch das Umformen von Gleichungen) eine wahre Implikation so folgt, dass auch B wahr ist. Ist dies nicht möglich (dass also gilt, wenn A wahr ist, dass

$A \Rightarrow B$ immer falsch ist), dann ist auch B falsch. So mag man Aussagen widerlegen. Schließlich sieht man, dass wenn A falsch ist und $A \Rightarrow B$ wahr ist, B wahr oder falsch sein kann. Aus einer wahren Voraussetzung folgt also nur bei wahrer Implikation eine wahre Konklusion. Insbesondere genügt die Definition der Implikation damit der Forderung “Aus Falschem folgt beliebiges (ex falso sequitur quodlibet)”. Aus falschen Aussagen kann man also mithilfe der Implikation nichts richtiges folgern.

Im Kontext der Implikation ergeben sich die Begriffe der *hinreichenden* und der *notwendigen Aussagen (Bedingungen)*. Diese sind definiert wie folgt: wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, sagt man “ A ist *hinreichend* für B ” und “ B ist *notwendig* für A ”. Diese Sprachregelung erklärt sich folgendermaßen. Wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, gilt dass, wenn A wahr ist auch B wahr ist. Die Wahrheit von A reicht also für die Wahrheit von B aus. A ist also hinreichend (ausreichend) für B . Weiterhin gilt, dass wenn $A \Rightarrow B$ wahr ist, dass wenn B falsch ist, dann auch A falsch ist. Die Wahrheit von B ist also für die Wahrheit von A notwendig.

Eine sehr häufig auftretender Zusammenhang zwischen zwei Aussagen ist ihre *Äquivalenz*.

Definition 1.6 (Äquivalenz). A und B seien Aussagen. Die *Äquivalenz von A und B* ist die Aussage, die dann und nur dann wahr ist, wenn A und B beide wahr sind oder wenn A und B beide falsch sind. Die Äquivalenz von A und B wird mit $A \Leftrightarrow B$ bezeichnet und gesprochen als “ A genau dann wenn B ” oder “ A ist äquivalent zu B ”.

•

Die Definition der Äquivalenz impliziert folgende Wahrheitstafel

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Die Definition des Begriffes der *logischen Äquivalenz* erlaubt es unter anderem, die Äquivalenz zweier Aussagen mithilfe von Implikationen nachzuweisen.

Definition 1.7 (Logische Äquivalenz). Zwei Aussagen heißen *logisch äquivalent*, wenn ihre Wahrheitstabellen gleich sind.

•

Als Beispiele für logische Äquivalenzen, die häufig in Beweisargumentationen genutzt werden, zeigen wir folgendes Theorem.

Theorem 1.1 (Logische Äquivalenzen).

A und B seien zwei Aussagen. Dann sind folgende Aussagen logisch äquivalent

- (1) $A \Leftrightarrow B$ und $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
- (2) $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

◦

Beweis. Nach Definition des Begriffs der logischen Äquivalenz müssen wir zeigen, dass die Wahrheitstabellen der betrachteten Aussagen gleich sind. Wir zeigen erst (1), dann (2).

(1) Wir erinnern an die Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow B$:

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|-----|-----|-----------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Wir betrachten weiterhin die Wahrheitstafel von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$:

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ |
|-----|-----|-------------------|-------------------|--|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | w | f |
| f | w | w | f | f |
| f | f | w | w | w |

Der Vergleich der Wahrheitstafel von $A \Leftrightarrow B$ mit den ersten beiden und der letzten Spalte der Wahrheitstafel von $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ zeigt ihre Gleichheit.

(2) Wir erinnern an die Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|-----|-----|-------------------|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Wir betrachten weiterhin die Wahrheitstafel von $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$:

| A | B | $\neg B$ | $\neg A$ | $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ |
|-----|-----|----------|----------|---------------------------------|
| w | w | f | f | w |
| w | f | w | f | f |
| f | w | f | w | w |
| f | f | w | w | w |

Der Vergleich der Wahrheitstafel von $A \Rightarrow B$ mit den ersten beiden und der letzten Spalte der Wahrheitstafel von $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ zeigt ihre Gleichheit.

□

Die erste Aussage von Theorem 1.1 besagt, dass die Aussage “ A und “ B sind äquivalent” logisch äquivalent zur Aussage “Aus A folgt B ” und aus “ B folgt A ” ist. Dies ist die Grundlage für viele sogenannte *direkte Beweise* mithilfe von Äquivalenzumformungen. Die zweite Aussage von Theorem 1.1 besagt, dass die Aussage “Aus A folgt B ” logisch äquivalent zur Aussage “Aus nicht B folgt nicht A ” ist. Dies ist die Grundlage für die Technik des *indirekten Beweises*.

1.4. Beweistechniken

Im letzten Abschnitt wollen wir mit den Begriffen der *direkten* und *indirekten Beweise* sowie des *Beweises durch Widerspruch* kurz drei Beweistechniken skizzieren, von denen vor allem die erste in diesem Text immer wieder zur Begründung von Theoremen herangezogen wird. Dabei haben typische Theoreme die Form $A \Rightarrow B$ für Aussagen A und B .

Es gilt dabei

- *Direkte Beweise* nutzen Äquivalenzumformungen, um $A \Rightarrow B$ zu zeigen.
- *Indirekte Beweise* nutzen die logische Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.
- *Beweise durch Widerspruch* zeigen, dass $(\neg B) \wedge A$ falsch ist.

Um diese Techniken an einem Beispiel zu erläutern, erinnern wir kurz an folgende *Äquivalenzumformungen von Gleichungen*:

- Addition oder Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten der Gleichung, zum Beispiel

$$2x + 4 = 10 \Leftrightarrow 2x = 6, \quad (1.3)$$

- Multiplikation mit einer oder Division durch eine von Null verschiedene Zahl auf beiden Seiten der Gleichung, zum Beispiel

$$2x = 6 \Leftrightarrow x = 3, \quad (1.4)$$

- Anwendung einer injektiven Funktion auf beiden Seiten der Gleichung, zum Beispiel

$$\exp(x) = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2), \quad (1.5)$$

sowie an folgende elementaren *Äquivalenzumformungen von Ungleichungen*:

- Addition oder Subtraktion einer Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung, zum Beispiel

$$-2x + 4 \geq 10 \Leftrightarrow -2x \geq 6, \quad (1.6)$$

- Multiplikation mit einer Zahl oder Division durch eine von Null verschiedene Zahl auf beiden Seiten der Ungleichung, wobei die Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl die Umkehrung der Ungleichung impliziert, zum Beispiel

$$-2x \geq 6 \Leftrightarrow x \leq -3, \quad (1.7)$$

- Anwendung monotoner Funktionen auf beiden Seiten der Ungleichung

$$\exp(x) \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln(2). \quad (1.8)$$

Damit ausgestattet wollen wir nun folgendes Theorem mithilfe eines direkten Beweises, eines indirekten Beweises und eines Beweises durch Widerspruch beweisen (vgl. Arens et al. (2018)).

Theorem 1.2 (Quadrate positiver Zahlen). *Es seien a und b zwei positive Zahlen. Dann gilt $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$.*

◦

Beweis. Wir geben zunächst einen *direkten Beweis*. Dazu sei $a^2 < b^2$ die Aussage A und $a < b$ die Aussage B . Dann gilt

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow 0 < b^2 - a^2 \Leftrightarrow 0 < (b + a)(b - a) \Leftrightarrow 0 < (b - a) \Leftrightarrow a < b. \quad (1.9)$$

Wir geben nun einen *indirekten Beweis*. Es sei $a^2 \geq b^2$ die Aussage $\neg A$. Weiterhin sei $a \geq b$ die Aussage $\neg B$. Dann gilt

$$a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq ab \wedge ab \geq b^2 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2. \quad (1.10)$$

Schließlich geben wir einen *Beweis durch Widerspruch*. Wir zeigen, dazu, dass die Annahme $(\neg B) \wedge A$ auf eine falsche Aussage führt. Es gilt

$$a \geq b \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 \geq ab \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow ab \leq a^2 < b^2. \quad (1.11)$$

Weiterhin gilt

$$a \geq b \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow ab \geq b^2 \wedge a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 < b^2 \leq ab. \quad (1.12)$$

Insgesamt gilt dann also die falsche Aussage

$$ab \leq a^2 < b^2 \leq ab \Leftrightarrow ab < ab. \quad (1.13)$$

□

1.5. Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie die Besonderheiten der mathematischen Sprache.
2. Was sind wesentliche Tätigkeiten zum Erlernen einer Sprache?
3. Erläutern Sie den Begriff der Definition.
4. Erläutern Sie den Begriff des Theorems.
5. Erläutern Sie den Begriff des Beweises.
6. Geben Sie die Definition einer mathematischen Aussage wieder.
7. Geben Sie die Definition der Negation einer mathematischen Aussage wieder.
8. Geben Sie die Definition der Konjunktion zweier mathematischer Aussagen wieder.
9. Geben Sie die Definition der Disjunktion zweier mathematischer Aussagen wieder.
10. Geben Sie die Definition der Implikation wieder.
11. Geben Sie die Definition der Äquivalenz wieder.
12. Geben Sie die Definition der logischen Äquivalenz wieder.
13. Erläutern Sie die Begriffe des direkten Beweises, des indirekten Beweises und des Beweises durch Widerspruch.
14. Beweisen Sie, dass gilt

$$x^2 + px + q = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \vee x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (1.14)$$

2. Mengen

2.1. Grundlegende Definitionen

Mengen fassen mathematische Objekte wie beispielsweise Zahlen zusammen und bilden die Grundlage der modernen Mathematik. Wir beginnen mit folgender Definition.

Definition 2.1 (Mengen). Nach Cantor (1895) ist eine *Menge* definiert als “eine Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unsere Anschauung oder unseres Denken (welche die Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen”. Wir schreiben

$$m \in M \text{ bzw. } m \notin M \quad (2.1)$$

um auszudrücken, dass m ein Element bzw. kein Element von M ist.

•

Zur Definition von Mengen gibt es mindestens folgende Möglichkeiten:

- Auflisten der Elemente in geschweiften Klammern, z.B. $M := \{1, 2, 3\}$.
- Angabe der Eigenschaften der Elemente, z.B. $M := \{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$.
- Gleichsetzen mit einer anderen eindeutig definierten Menge, z.B. $M := \mathbb{N}_3$.

Die Schreibweise $\{x \in \mathbb{N} | x < 4\}$ wird gelesen als “ $x \in \mathbb{N}$, für die gilt, dass $x < 4$ ist”, wobei die Bedeutung von \mathbb{N} im Folgenden noch zu erläutern sein wird. Es ist wichtig zu erkennen, dass Mengen *ungeordnete* mathematische Objekte sind, dass heißt die Reihenfolge der Auflistung der Elemente einer Menge spielt keine Rolle. Zum Beispiel bezeichnen $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 2\}$ und $\{2, 3, 1\}$ dieselbe Menge, nämlich die Menge der ersten drei natürlichen Zahlen.

Grundlegende Beziehungen zwischen mehreren Mengen werden in der nächsten Definition festgelegt.

Definition 2.2 (Teilmengen und Mengengleichheit). A und B seien zwei Mengen.

- Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B , wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$. Ist A eine Teilmenge von B , so schreibt man

$$A \subseteq B \quad (2.2)$$

und nennt A *Untermenge* von B und B *Obermenge* von A .

- Eine Menge A heißt *echte Teilmenge* einer Menge B , wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, es aber zumindest ein Element $b \in B$ gibt, für das gilt $b \notin A$. Ist A eine echte Teilmenge von B , so schreibt man

$$A \subset B. \quad (2.3)$$

- Zwei Mengen A und B heißen *gleich*, wenn für jedes Element $a \in A$ gilt, dass auch $a \in B$, und wenn für jedes Element $b \in B$ gilt, dass auch $b \in A$. Sind die Mengen A und B gleich, so schreibt man

$$A = B. \quad (2.4)$$

•

Betrachten wir zum Beispiel die Mengen $A := \{1\}$, $B := \{1, 2\}$, und $C := \{1, 2\}$. Dann gilt mit obigen Definitionen, dass $A \subset B$, weil $1 \in A$ und $1 \in B$, aber $2 \in B$ und $2 \notin A$. Weiterhin gilt, dass $B \subseteq C$, weil $1 \in B$ und $1 \in C$ sowie $2 \in B$ und $2 \in C$ und es kein Element von C gibt, welches nicht in B ist. Ebenso gilt $C \subseteq B$, weil $1 \in C$ und $1 \in B$ sowie $2 \in C$ und $2 \in B$ und es kein Element von B gibt, welches nicht in C ist. Schließlich gilt sogar $B = C$, weil für jedes Element $b \in B$ gilt, dass auch $b \in C$, und gleichzeitig für jedes Element $c \in C$ gilt, dass auch $c \in B$.

Eine wichtige Eigenschaft einer Menge ist die Anzahl der in ihr enthaltenen Elemente. Diese wird als *Kardinalität* der Menge bezeichnet.

Definition 2.3 (Kardinalität). Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt *Kardinalität* und wird mit $|M|$ bezeichnet.

•

Eine besondere Menge ist die Menge ohne Elemente.

Definition 2.4. Eine Menge mit Kardinalität Null heißt *leere Menge* und wird mit \emptyset bezeichnet.

•

Als Beispiele seien $A := \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ und $C := \{ \}$. Dann gelten $|A| = 3$, $|B| = 4$ und $|C| = 0$.

Zu jeder Menge kann man die Menge aller Teilmengen dieser Menge betrachten. Dies führt auf den wichtigen Begriff der *Potenzmenge*.

Definition 2.5 (Potenzmenge). Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt *Potenzmenge von M* und wird mit $\mathcal{P}(M)$ bezeichnet.

•

Man beachte, dass die leere Untermenge von M und M selbst auch immer Elemente von $\mathcal{P}(M)$ sind. Wir betrachten vier Beispiele zum Begriff der Potenzmenge.

- $M_0 := \emptyset$ sei die leere Menge. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_0) = \emptyset. \quad (2.5)$$

- M_1 sei die einelementige Menge $M_1 := \{a\}$. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{a\}\}. \quad (2.6)$$

- Es sei $M_2 := \{a, b\}$. Dann hat M_2 sowohl ein- als auch zweielementige Teilmengen und es gilt

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}. \quad (2.7)$$

- Schließlich sei $M_3 := \{a, b, c\}$. Dann hat M ein-, zwei-, als auch dreielementige Teilmengen und es gilt

$$\mathcal{P}(M_3) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}. \quad (2.8)$$

Hinsichtlich der Kardinalitäten einer Menge und ihrer Potenzmenge kann man beweisen, dass aus $|M| = n$ mit $n > 0$ folgt, dass die Kardinalität der Potenzmenge $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ ist. In den obigen Beispielen haben wir die Fälle $|M_1| = 1$ und somit $|\mathcal{P}(M_1)| = 2^1 = 2$, $|M_2| = 2$ und somit $|\mathcal{P}(M_2)| = 2^2 = 4$ und schließlich $|M_3| = 3$ und somit $|\mathcal{P}(M_3)| = 2^3 = 8$, wovon man sich durch Nachzählen schnell überzeugt.

2.2. Verknüpfungen von Mengen

Zwei Mengen können auf unterschiedliche Weise miteinander verknüpft werden. Das Ergebnis einer solchen Verknüpfung ist eine weitere Menge. Wir bezeichnen die Verknüpfung zweier Mengen als *Mengenoperation* und geben folgende Definitionen.

Definition 2.6 (Mengenoperationen). M und N seien zwei Mengen.

- Die *Vereinigung von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \cup N := \{x | x \in M \vee x \in N\}, \quad (2.9)$$

wobei \vee wie immer im inklusiven Sinne als und/oder zu verstehen ist.

- Der *Durchschnitt von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \cap N := \{x | x \in M \wedge x \in N\}. \quad (2.10)$$

Wenn für M und N gilt, dass $M \cap N = \emptyset$, dann heißen M und N *disjunkt*.

- Die *Differenz von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \setminus N := \{x | x \in M \wedge x \notin N\}. \quad (2.11)$$

Die Differenz M und N heißt, insbesondere bei $M \subseteq N$, auch das *Komplement von N bezüglich M* und wird mit N^c bezeichnet.

- Die *symmetrische Differenz von M und N* ist definiert als die Menge

$$M \Delta N := \{x | (x \in M \vee x \in N) \wedge x \notin M \cap N\}, \quad (2.12)$$

Die symmetrische Differenz kann also als *exklusives oder* verstanden werden.

•

Als Beispiel betrachten wir die Mengen $M := \{1, 2, 3\}$ und $N := \{2, 3, 4, 5\}$. Dann gelten

- $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, weil $1 \in M$, $2 \in M$, $3 \in M$, $4 \in N$ und $5 \in N$.
- $M \cap N = \{2, 3\}$, weil nur für 2 und 3 gilt, dass $2 \in M$, $3 \in M$ und auch $2 \in N$, $3 \in N$. Für 1 gilt lediglich, dass $1 \in M$ und für 4 und 5 gelten lediglich, dass $4 \in N$ und $5 \in N$.
- $M \setminus N = \{1\}$, weil $1 \in M$, aber $1 \notin N$ und $2 \in M$, aber auch $2 \in N$.
- $N \setminus M = \{4, 5\}$, weil $2 \in N$ und $3 \in N$, aber auch $2 \in M$ und $3 \in M$. Dies zeigt insbesondere, dass die Differenz von M und N *nicht* symmetrisch ist, also dass *nicht* zwangsläufig gilt, dass $M \setminus N$ gleich $N \setminus M$ ist.
- $M \Delta N = \{1, 4, 5\}$, weil $1 \in M$, aber $1 \notin \{2, 3\}$, $2 \in M$, aber $2 \in \{2, 3\}$, $3 \in M$, aber $3 \in \{2, 3\}$, $4 \in N$, aber $4 \notin \{2, 3\}$ und $5 \in N$, aber $5 \notin \{2, 3\}$.

Schließlich wollen wir noch den Begriff der Partition einer Menge einführen.

Definition 2.7 (Partition). M sei eine Menge und $P := \{N_i\}$ sei eine Menge von Mengen N_i mit $i = 1, \dots, n$, so dass gilt

$$M = \bigcup_{i=1}^n N_i \wedge N_i \cap N_j = \emptyset \text{ für } i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (2.13)$$

Dann heißt P eine *Partition von M* .

•

Intuitiv entspricht die Partition einer Menge also dem Aufteilen der Menge in disjunkte Teilmengen. Partitionen sind generell nicht eindeutig, d.h. es gibt meist verschiedene Möglichkeiten eine gegebene Menge zu partitionieren. Betrachten wir zum Beispiel die Menge $M := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dann sind $P_1 := \{\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}\}$, $P_2 := \{\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}\}$ und $P_3 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$ drei mögliche Partitionen von M .

2.3. Spezielle Mengen

In der Naturwissenschaft versucht man, Phänomene der Welt mit Zahlen zu beschreiben. Je nach Phänomen bieten sich dazu *diskrete* oder *kontinuierliche* Zahlenmengen an. Die Mathematik stellt dazu unter anderem die in folgender Definition gegebenen Zahlenmengen bereit.

Definition 2.8 (Zahlenmengen). Es bezeichnen

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ die *natürlichen Zahlen*,
- $\mathbb{N}_n := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ die *natürlichen Zahlen der Ordnung n* ,
- $\mathbb{N}^0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ die *natürlichen Zahlen* und Null,
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ die *ganzen Zahlen*,
- $\mathbb{Q} := \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ die *rationalen Zahlen*,
- \mathbb{R} die *reellen Zahlen*, und
- $\mathbb{C} := \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}, i := \sqrt{-1}\}$ die *komplexen Zahlen*.

•

Die natürlichen und ganzen Zahlen eignen sich insbesondere zum Quantifizieren diskreter Phänomene. Die rationalen und insbesondere die reellen Zahlen eignen sich zum Quantifizieren kontinuierlicher Phänomene. \mathbb{R} umfasst dabei die rationalen Zahlen und die sogenannten *irrationalen Zahlen* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Rationale Zahlen sind Zahlen, die sich, wie oben definiert, durch Brüche ganzer Zahlen ausdrücken lassen. Dies sind alle ganzen Zahlen sowie die negativen und positiven Dezimalzahlen wie z.B. $-\frac{9}{10} = -0.9$, $\frac{1}{3} = 1.3\bar{3}$, und $\frac{196}{100} = 1.96$. Irrationale Zahlen sind Zahlen, die sich nicht als rationale Zahlen ausdrücken lassen. Beispiele für irrationale Zahlen sind die *Eulersche Zahl* $e \approx 2.71$, die *Kreiszahl* $\pi \approx 3.14$ und die Quadratwurzel von 2, $\sqrt{2} \approx 1.41$.

Die reellen Zahlen enthalten als Teilmengen die natürlichen, ganzen, und die rationalen Zahlen. Es gibt also sehr viele reelle Zahlen. Tatsächlich kann man beweisen (Cantor (1892)), dass es mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen gibt, obwohl es sowohl unendlich viele reelle Zahlen als auch unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Diese Eigenschaft der reellen Zahlen bezeichnet man als die *Überabzählbarkeit* der reellen Zahlen. Insbesondere gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Zwischen zwei reellen Zahlen gibt es unendlich viele weitere reelle Zahlen. Positiv-Unendlich (∞) und Negativ-Unendlich ($-\infty$) sind keine Zahlen, mit denen in der Standardmathematik gerechnet werden kann. Sie gehören auch nicht zu den in obiger Definition gegebenen Zahlenmengen, es gilt also sowohl $\infty \notin \mathbb{R}$ als auch $-\infty \notin \mathbb{R}$.

Komplexe Zahlen eignen sich zur Beschreibung zweidimensionaler kontinuierlicher Phänomene. Dabei werden die Werte der ersten Dimension im reellen Teil a und die Werte der zweiten Dimension im komplexen Teil b einer komplexen Zahl repräsentiert. Komplexe Zahlen kommen insbesondere bei der Modellierung physikalischer Phänomene und im Bereich der Fourieranalyse zum Einsatz. Wir vertiefen die Theorie komplexer Zahlen an dieser Stelle nicht.

Wichtige Teilmengen der reellen Zahlen sind die sogenannten *Intervalle*. Wir geben folgende Definitionen.

Definition 2.9. Zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen heißen *Intervalle*. Für $a, b \in \mathbb{R}$ unterscheidet man

- das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}, \quad (2.15)$$

- das *offene Intervall*

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}, \quad (2.16)$$

- und die *halboffenen Intervalle*

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} \text{ und } [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}. \quad (2.17)$$

•

Wie oben erwähnt sind Positiv-Unendlich (∞) und Negativ-Unendlich ($-\infty$) keine Elemente von \mathbb{R} . Es gilt also immer $] - \infty, b]$ oder $] - \infty, b[$ bzw. $]a, \infty[$ oder $[a, \infty[$, sowie $\mathbb{R} =] - \infty, \infty[$.

Oft möchte man mehrere Eigenschaften eines Phänomens gleichzeitig quantitativ beschreiben. Zu diesem Zweck können die oben definierten eindimensionalen Zahlenmenge durch Bildung *Kartesischer Produkte* auf mehrdimensionale Zahlenmengen erweitert werden. Die Elemente Kartesischer Produkte nennt man *geordnete Tupel* oder auch *Vektoren*.

Definition 2.10 (Kartesische Produkte). M und N seien zwei Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M und N* die Menge aller geordneten Tupel (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$, formal

$$M \times N := \{(m, n) | m \in M, n \in N\}. \quad (2.18)$$

Das Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^2 := M \times M. \quad (2.19)$$

Seien weiterhin M_1, M_2, \dots, M_n Mengen. Dann ist das *Kartesische Produkt der Mengen M_1, \dots, M_n* die Menge aller geordneten n -Tupel (m_1, \dots, m_n) mit $m_i \in M_i$ für $i = 1, \dots, n$, formal

$$\prod_{i=1}^n M_i := M_1 \times \dots \times M_n := \{(m_1, \dots, m_n) | m_i \in M_i \text{ für } i = 1, \dots, n\}. \quad (2.20)$$

Das n -fache Kartesische Produkt einer Menge M mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$M^n := \prod_{i=1}^n M := \{(m_1, \dots, m_n) | m_i \in M\}. \quad (2.21)$$

•

Im Gegensatz zu Mengen sind die in Definition 2.10 eingeführten Tupel *geordnet*. Das heißt, für Mengen gilt zum Beispiel $\{1, 2\} = \{2, 1\}$, aber für Tupel gilt $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Wie oben beschrieben eignen sich insbesondere die reellen Zahlen zur Beschreibung kontinuierlicher Phänomene. Zur simultanen Beschreibung mehrere Aspekte eines kontinuierlichen Phänomens bietet sich entsprechend die *Menge der reellen Tupel n -ter Ordnung* an.

Definition 2.11 (Menge der reellen Tupel n -ter Ordnung). Das n -fache Kartesische Produkt der reellen Zahlen mit sich selbst wird bezeichnet mit

$$\mathbb{R}^n := \prod_{i=1}^n \mathbb{R} := \{x := (x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\} \quad (2.22)$$

und wird “ \mathbb{R} hoch n ” gesprochen. Wir schreiben die Elemente von \mathbb{R}^n als Spalten

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

und nennen sie *n -dimensionale Vektoren*. Zu Abgrenzung nennen wir die Elemente von $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ auch *Skalare*.

•

Ein Beispiel für $x \in \mathbb{R}^4$ ist

$$x = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 1.76 \\ 0.23 \\ 7.11 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

2.4. Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition einer Menge nach Cantor (1895) wieder.
2. Nennen Sie drei Möglichkeiten zur Definition einer Menge.
3. Erläutern Sie die Ausdrücke $m \in M$, $m \notin N$, $M \subseteq N$, $M \subset N$ für zwei Mengen M und N .
4. Geben Sie die Definition der Kardinalität einer Menge wieder.
5. Geben Sie die Definition der Potenzmenge einer Menge wieder.
6. Es sei $M := \{1, 2\}$. Bestimmen Sie $\mathcal{P}(M)$.
7. Es seien $M := \{1, 2\}$, $N := \{1, 4, 5\}$. Bestimmen Sie $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$, $M \Delta N$.
8. Erläutern Sie die Symbole \mathbb{N} , \mathbb{N}_n , und \mathbb{N}^0 .
9. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen \mathbb{N} und \mathbb{Z} und zwischen \mathbb{R} und \mathbb{Q} .
10. Geben Sie die Definition abgeschlossener, offener, und halboffener Intervalle wieder.
11. Es seien M und N Mengen. Erläutern Sie die Notation $M \times N$.
12. Geben Sie die Definition von \mathbb{R}^n wieder.

Referenzen

- Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., & Stachel, H. (2018). *Mathematik*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56741-8>
- Blei, D. M., Kucukelbir, A., & McAuliffe, J. D. (2017). Variational Inference: A Review for Statisticians. *Journal of the American Statistical Association*, 112(518), 859–877. <https://doi.org/10.1080/01621459.2017.1285773>
- Cantor, G. (1892). Über Eine Eigenschaft Des Inbegriffes Aller Reellen Algebraischen Zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1.
- Cantor, G. (1895). Beiträge Zur Begründung Der Transfiniten Mengenlehre. *Mathematische Annalen*, 46(4), 481–512. <https://doi.org/10.1007/BF02124929>
- Friston, K. (2005). A Theory of Cortical Responses. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 360(1456), 815–836. <https://doi.org/10.1098/rstb.2005.1622>
- Friston, K., Da Costa, L., Sakthivadivel, D. A. R., Heins, C., Pavliotis, G. A., Ramstead, M., & Parr, T. (2023). Path Integrals, Particular Kinds, and Strange Things. *Physics of Life Reviews*, 47, 35–62. <https://doi.org/10.1016/j.plrev.2023.08.016>
- Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society.
- Ostwald, D., Kirilina, E., Starke, L., & Blankenburg, F. (2014). A Tutorial on Variational Bayes for Latent Linear Stochastic Time-Series Models. *Journal of Mathematical Psychology*, 60, 1–19. <https://doi.org/10.1016/j.jmp.2014.04.003>
- Unger, L. (2000). *Grundkurs Mathematik*.