Multivariate Datenanalyse

MSc Psychologie WiSe 2021/22

Prof. Dr. Dirk Ostwald

(4) Eigenanalyse

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Vektorkoordinatentransformation

Selbstkontrollfragen

Definition (Eigenvektor, Eigenwert)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine quadratische Matrix. Dann heißt jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^m, v \neq 0$, für den gilt, dass

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ein *Eigenvektor* von A. λ heißt zugehöriger *Eigenwert* von A.

Bemerkungen

- Ein Eigenvektor v von A wird durch A mit einem Faktor λ verlängert.
- Jeder Eigenvektor hat einen zugehörigen Eigenwert.
- Die Eigenwerte verschiedener Eigenvektor können identisch sein.

Theorem (Multiplikativität von Eigenvektoren)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine quadratische Matrix. Wenn $v \in \mathbb{R}^m$ Eigenvektor von A mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, dann ist auch $av \in \mathbb{R}^m$ mit $a \in \mathbb{R}$ Eigenvektor von A und zwar mit Eigenwert $a\lambda \in \mathbb{R}$.

Beweis

Es gilt

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow a(Av) = a(\lambda)v \Leftrightarrow A(av) = (a\lambda)v \tag{2}$$

Also ist av ein Eigenvektor von A mit Eigenwert $a\lambda$.

□

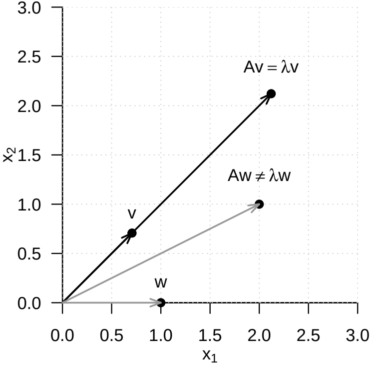
Konvention

Wir betrachten im Folgenden nur Eigenvektoren mit $\|v\| = 1$.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Visualisierung eines Eigenvektors

Für $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ist $v := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 3$, $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kein Eigenvektor.



Theorem (Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren)

$A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine quadratische Matrix. Dann ergeben sich die Eigenwerte von A als die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_m). \tag{3}$$

von A. Weiterhin seien $\lambda_i^*, i = 1, 2, ...$ die auf diese Weise bestimmten Eigenwerte von A. Die entsprechenden Eigenvektoren $v_i, i = 1, 2, ...$ von A können dann durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i^* I_m)v_i = 0_m \text{ für } i = 1, 2, ... \tag{4}$$

bestimmt werden.

Bemerkungen

- Für kleine Matrizen mit $m \leq 3$ können Eigenwerte und Eigenvektoren manuell bestimmt werden.
- Bei großen Matrizen werden Eigenwerte und Eigenvektor im Allgemeinen numerisch bestimmt.
- R's `eigen()`, Scipy's `linalg.eig()`, Matlab's `eig()`.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Beweis

(1) Bestimmen von Eigenwerten

Wir halten zunächst fest, dass mit der Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten gilt, dass

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow Av - \lambda v = 0_m \Leftrightarrow (A - \lambda I_m)v = 0_m. \tag{5}$$

Für den Eigenwert λ wird der Eigenvektor v also durch $(A - \lambda I_m)$ auf den Nullvektor 0_m abgebildet. Weil aber per Definition $v \neq 0_m$ gilt, ist die Matrix $(A - \lambda I_m)$ somit nicht invertierbar: sowohl der Nullvektor als auch v werden durch A auf 0_m abgebildet, die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (A - \lambda I_m)x \tag{6}$$

ist also nicht bijektiv, und $(A - \lambda I_m)^{-1}$ kann nicht existieren. Die Tatsache, dass $(A - \lambda I_m)$ nicht invertierbar ist, ist aber äquivalent dazu, dass die Determinante von $(A - \lambda I_m)$ Null ist. Also ist

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_m) = 0 \tag{7}$$

notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass λ ein Eigenwert von A ist.

(2) Bestimmen von Eigenvektoren

Es sei λ_i^* ein Eigenwert von A. Dann gilt mit den obigen Überlegungen, dass Auflösen von

$$(A - \lambda_i^* I_m)v_i^* = 0_m \tag{8}$$

nach v_i^* einen Eigenvektor zum Eigenwert λ^* ergibt. □

Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Wir wollen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A bestimmen.

(1) Berechnen von Eigenwerten

Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A.

Das charakteristische Polynom von A ergibt als

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1. \tag{10}$$

Nullsetzen und Auflösen nach λ ergibt mit der pq-Formel

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1. \tag{11}$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel (fortgeführt)

(2) Berechnen von Eigenvektoren

Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 1$ ergeben sich durch Lösen der linearen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda_i I_2)v_i = 0_2 \tag{12}$$

Für $\lambda_1 = 3$ ergibt sich

$$(A - 3I_2)v_1 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.} \tag{13}$$

Fpr $\lambda_2 = 1$ ergibt sich

$$(A - 1I_2)v_2 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ist eine Lösung.} \tag{14}$$

Weiterhin gilt $v_1^T v_2 = 0$ und $||v_1||_2 = ||v_2||_2 = 1$.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Beispiel (fortgeführt)

```
# Matrixdefinition
A = matrix(c(2,1,
             1,2),
           nrow  = 2,
           byrow = TRUE)

# Eigenanalyse
eigen(A)
```

```
> eigen() decomposition
> $values
> [1] 3 1
>
> $vectors
>        [,1]   [,2]
> [1,] 0.707 -0.707
> [2,] 0.707  0.707
```

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Vektorkoordinatentransformation

Selbstkontrollfragen

Theorem (Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen)

Eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ hat m verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_m$ mit zugehörigen orthogonalen Eigenvektoren $q_1, ..., q_m \in \mathbb{R}^m$.

Bemerkungen

- Das Theorem ist eine Konsequenz aus dem Spektralsatz der Linearen Algebra.
- Ein vollständiger Beweis findet sich in Strang (2009), Section 6.4.

Teilbeweis

Wir setzen die Tatsache, dass S m verschiedene Eigenwerte hat, als gegeben voraus und zeigen lediglich, dass die Eigenvektoren von S orthogonal sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien also λ_i und λ_j mit $1 \le i, j \le m$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ zwei der m verschiedenen Eigenwerte von S mit zugehörigen Eigenvektoren q_i und q_j, respektive. Dann ergibt sich

$$Sq_i = \lambda_i q_i \Leftrightarrow (Sq_i)^T = (\lambda_i q_i)^T \Leftrightarrow q_i^T S = q_i^T \lambda_i \Leftrightarrow q_i^T S q_j = \lambda_i q_i^T q_j. \tag{15}$$

Ähnlicherweise gilt

$$Sq_j = \lambda_j q_j \Leftrightarrow q_i^T S q_j = \lambda_j q_i^T q_j. \tag{16}$$

Also folgt

$$\lambda_i q_i^T q_j = \lambda_j q_i^T q_j \text{ mit } q_i \neq 0, q_j \neq 0, \text{ und } \lambda_i \neq \lambda_j \tag{17}$$

und damit die Orthogonalität $q_i^T q_j = 0$. $\square$

Orthonormalzerlegung

Theorem (Orthonormale Zerlegung einer symmetrischen Matrix)

$S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine symmetrische Matrix. Dann kannn S geschrieben werden als

$$S = Q\Lambda Q^T, \tag{18}$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix ist und $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis

Weil S symmetrisch ist, hat sie m verschiedene Eigenwerte $\lambda_i, i = 1, ..., m$ und m zugehörige orthogonale Eigenvektoren $q_i, i = 1, ..., m$, so dass

$$Sq_i = \lambda_i q_i \text{ für } i = 1, ..., m. \tag{19}$$

Mit den Definitionen

$$Q := \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix} \text{ und } \Lambda := \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right), \tag{20}$$

folgt dann

$$SQ = \Lambda Q \Leftrightarrow SQ = Q\Lambda. \tag{21}$$

Rechtseitige Multiplikation mit Q^T ergibt dann

$$SQQ^T = Q\Lambda Q^T \Leftrightarrow SI_m = Q\Lambda Q^T \Leftrightarrow S = Q\Lambda Q^T \tag{22}$$

und damit ist alles gezeigt. $\square$

Orthonormalzerlegung

Beispiel (fortgeführt)

Für

$$Q := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \text{ and } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{23}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
Q\Lambda Q^T &= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}^T \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= A
\end{aligned}$$

Singulärwertzerlegung

Definition (Singulärwertzerlegung)

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei eine Matrix. Dann heißt die Zerlegung

$$X = USV^T, \tag{24}$$

wobei $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix ist, $S \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Diagonalmatrix ist und $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix ist, *Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition (SVD))* von X. Die Diagonalelemente von S heißen die *Singulärwerte* von X.

Bemerkungen

- Die Existenz der Singulärwertzerlegung folgt aus dem Spektralsatz der Linearen Algebra.
- Singulärwertzerlegungen können in R mit svd() berechnet werden.

Theorem (Singulärwertzerlegung und Eigenanalyse)

$X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei eine Matrix und

$$X = USV^T \tag{25}$$

sei ihre Singulärwertzerlegung. Dann gilt:

- Die Spalten von U sind die Eigenvektoren von XX^T,
- die Spalten von V sind die Eigenvektoren von X^TX und
- die entsprechenden Singulärwerte sind die Quadratwurzeln der zugehörigen Eigenwerte.

Bemerkung

- Singulärwertzerlegung und Eigenanalyse sind eng verwandt.

Beweis

Wir halten zunächst fest, dass mit

$$\left(XX^T\right)^T = XX^T \text{ and } \left(X^TX\right)^T = X^TX, \tag{26}$$

XX^T und X^TX symmetrische Matrizen sind und somit Orthornomalzerlegungen haben. Wir halten weiterhin fest, dass mit der Definition der Singulärwertzerlegung gelten, dass sowohl

$$XX^T = USV^T\left(U\Sigma V^T\right)^T = USV^TVS^TU^T = USSU^T = U\Lambda U^T \tag{27}$$

als auch

$$X^TX = \left(USV^T\right)^T USV^T = VS^TUUS^TV^T = V\Lambda V^T \tag{28}$$

ist, wobei wir $\Lambda := SS$ definiert haben. Weil das Produkt von Diagonalmatrizen wieder eine Diagonalmatrix ist, ist Λ eine Diagonalmatrix und per Definition sind U und V orthogonale Matrizen. Wir haben also XX^T und X^TX in Form der Orthonormalzerlegungen

$$XX^T = U\Lambda U^T \text{ and } X^TX = V\Lambda V^T \tag{29}$$

geschrieben und damit ist alles gezeigt. $\square$

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Vektorkoordinatentransformation

Selbstkontrollfragen

Im Folgenden wichtige Begriffe

Euklidischer Vektorraum. Das Tupel $((\mathbb{R}^m, +, \cdot), \langle\rangle)$ aus dem reellen Vektorraum $(\mathbb{R}^m, +, \cdot)$ und dem Skalarprodukt $\langle\rangle$ auf $\mathbb{R}^m$ heißt *reeller kanonischer Euklidischer Vektorraum*.

Basis. V sei ein Vektorraum und es sei $B \subseteq V$. Dann heißt B eine *Basis von* V, wenn die Vektoren in B linear unabhängig sind und die Vektoren in B den Vektorraum V aufspannen.

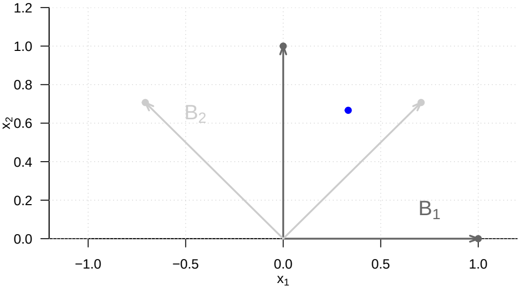
Basisdarstellung und Koordinaten. $B := \{b_1, ..., b_m\}$ sei eine Basis eines m-dimensionalen Vektorraumes V und es sei $x \in V$. Dann heißt die Linearkombination $x = \sum_{i=1}^m a_i b_i$ die *Darstellung von* x *bezüglich der Basis* B und die Koeffizienten $a_1, ..., a_m$ heißen die *Koordinaten von* x *bezüglich der Basis* B.

Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^m$. Eine Menge von m Vektoren $q_1, ..., q_m \in \mathbb{R}^m$ heißt *Orthonormalbasis* von $\mathbb{R}^m$, wenn $q_1, ..., q_m$ jeweils die Länge 1 haben und wechselseitig orthogonal sind.

Orthonormale Zerlegung einer symmetrischen Matrix. $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei eine symmetrische Matrix. Dann kannn S geschrieben werden als $S = Q\Lambda Q^T$, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix ist und $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine Diagonalmatrix ist. Dabei sind die Spalten von Q die Eigenvektoren von S und die Diagonalelemente von Λ sind die entsprechenden Eigenwerte.

Vektorkoordinatentransformationn

Im Folgenden wichtige Intuition



Bei Hauptkomponenten- und Faktorenanalysen werden aus den Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis die Koordinaten desselben Vektors bezüglich einer anderen Basis berechnet.

Definition (Orthogonalprojektion)

x und q seien Vektoren im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^m$. Dann ist die *Orthogonalprojektion von x auf q* definiert als der Vektor

$$\tilde{x} = aq \text{ mit } a := \frac{q^T x}{q^T q}, \tag{30}$$

wobei der Skalar a *Projektionsfaktor* genannt wird.

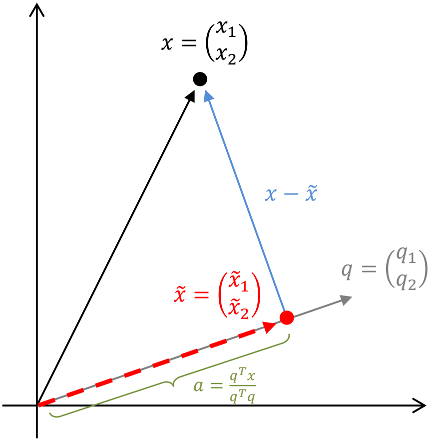
Bemerkungen

- Per definition ist $\tilde{x} = aq$ mit $a \in \mathbb{R}$ der Punkt in Richtung von q der x am nähesten ist.
- Diese minimierte Distanzeigenschaft impliziert die Orthogonalität von q und $x - \tilde{x}$.
- Die Formel von a folgt direkt aus der Orthogonalität von $x - \tilde{x}$ und q, da gilt

$$q^T(x - \tilde{x}) = 0 \Leftrightarrow q^T(x - aq) = 0 \Leftrightarrow q^T x - aq^T q = 0 \Leftrightarrow a = \frac{q^T x}{q^T q}.$$

- Wenn q die Länge $||q|| = \sqrt{q^T q} = 1$ hat, dann gilt $a = \frac{q^T x}{||q||^2} = q^T x$.

Orthogonalprojektion



Theorem (Vektorkoordinaten bezüglich einer Orthogonalbasis)

Es sei $x \in \mathbb{R}^m$ und es sei $B := \{q_1, ..., q_m\}$ eine Orthonormalbasis von von $\mathbb{R}^m$. Dann ergeben sich für $i = 1, ..., m$ die Koordinaten a_i in der Basisdarstellung von x bezüglich B als die Projektionsfaktoren

$$a_i = x^T q_i \tag{31}$$

in der Orthogonalprojektion von x auf q_i. Äquivalent ist die Basisdarstellung von x bezüglich B gegeben durch

$$x = \sum_{i=1}^{m} (x^T q_i) q_i. \tag{32}$$

Beweis

Für $i = 1, ..., m$ gilt

$$x = \sum_{j=1}^{m} a_j q_j \Leftrightarrow q_i^T x = q_i^T \sum_{j=1}^{m} a_j q_j \Leftrightarrow q_i^T x = \sum_{j=1}^{m} a_j q_i^T q_j \Leftrightarrow q_i^T x = a_i \Leftrightarrow a_i = x^T q_i. \tag{33}$$

□

Theorem (Vektorkoordinatentransformation)

$B_v := \{v_1, ..., v_m\}$ und $B_w := \{w_1, ..., w_m\}$ seien zwei Orthonormalbasen eines Vektorraums. $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ sei die Matrix, die durch die spaltenweise Konkatenation der Koordinaten der Vektoren in B_w in der Basisdarstellung bezüglich der Basis B_v ergibt. Dann können die Koordinaten $x_i, i = 1, ..., m$ eines Vektors x bezüglich der Basis B_v in die Koordinaten $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_m$ des Vektors bezüglich der Basis B_w durch

$$\tilde{x} = A^T x \tag{34}$$

transformiert werden. Analog können die Koordinaten $\tilde{y}_1, ..., \tilde{y}_m$ des Vektors hinsichtlich der Basis B_w in die Koordinaten $y_1, ..., y_m$ des Vektors hinsichtlich B_v durch

$$x = A\tilde{x}. \tag{35}$$

transformiert werden.

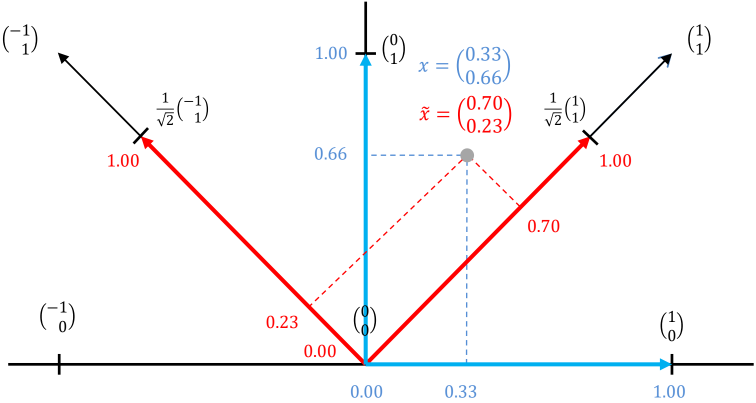
Bemerkungen

- Das Theorem erlaubt die Berechnung von Vektorkoordinaten bezüglich einer anderen Orthonormalbasis.
- Für die Berechnung muss zunächst die Matrix A gebildet und dann (nur) entsprechend multipliziert werden.
- Wir verzichten auf einen Beweis und demonstrieren das Theorem an einem Beispiel.

Ein Vektor wird hier als fester Punkt in $\mathbb{R}^m$ betrachtet; die Komponenten (Zahlen) des Vektors werden dagegen nur als Koordinaten bezüglich einer spezifischen Basis interpretiert!

Vektorkoordinatentransformation

Beispiel



Man beachte, dass x and $\tilde{x}$ am selben Ort in $\mathbb{R}^2$ liegen!

Vektorkoordinatentransformation

Beispiel

Wir nehmen an, dass wir die Koordinaten von $x = (1/3, 2/3)^T \in \mathbb{R}^2$ hinsichtlich der kanonischen Orthonormalbasis $B_v := \{e_1, e_2\}$ in die Koordinaten bezüglich der Basis

$$B_w := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\} \tag{36}$$

transformieren wollen. Die Basisdarstellungen der in Vektoren B_w bezüglich der Basisvektoren in B_v sind

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Die Projektionsfaktoren der Orthogonalprojektionen der Vektoren in B_w auf die Vektoren in B_v sind

$$a_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, a_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{38}$$

Die Transformationsmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in obigem Theorem ergibt sich also zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Die Vektorkoordinatentransformation von $x \in \mathbb{R}^2$ ergibt sich also zu

$$\tilde{x} = A^T x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.23 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Eigenvektoren und Eigenwerte

Orthonormalzerlegung

Singulärwertzerlegung

Vektorkoordinatentransformation

Selbstkontrollfragen

Selbstkontrollfragen

1. Geben Sie die Definition eines Eigenvektors und eines Eigenwertes einer quadratischen Matrix wieder.
2. Geben Sie das Theorem zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren wieder.
3. Geben Sie das Theorem zu den Eigenwerten und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen wieder.
4. Geben Sie das Theorem zur orthonormalen Zerlegung einer symmetrischen Matrix wieder.
5. Geben Sie die Definition einer Singulärwertzerlegung wieder.
6. Geben Sie das Theorem zum Zusammenhang von Singulärwertzerlegung und Eigenanalyse wieder.
7. Definieren Sie den Begriff Orthogonalprojektion.
8. Geben Sie das Theorem zu Vektorkoordinaten bezüglich einer Orthogonalbasis wieder.
9. Geben Sie das Vektorkoordinatentransformationstheorem wieder.
10. Erläutern Sie das Vektorkoordinatentransformationstheorem.

References

Strang, Gilbert. 2009. *Introduction to Linear Algebra*.