# Psychologische Forschungsmethoden

BSc Philosophie-Neurowissenschaften-Kognition WiSe 2022/23

BSc Psychologie WiSe 2022/23

Prof. Dr. Dirk Ostwald

# (8) Ordinalmessung

**Vorbemerkungen**

Strenge schwache Ordnungen

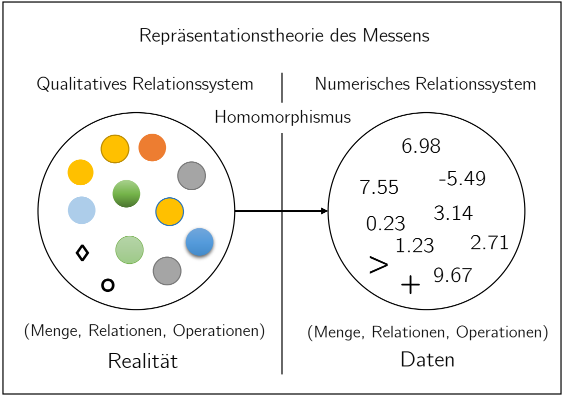
Repräsentation und Eindeutigkeit

Selbstkontrollfragen

# Vorbemerkungen

## Vorgehensweisen messtheoretischer Überlegungen

$\Rightarrow$ Vom qualitativen Relationssystem zum Homomorphismus und numerischen Relationssystem




$\Leftarrow$ Vom numerischen Relationssystem und Homomorphismus zum qualitativen Relationssystem

# Vorbemerkungen

## Vorgehensweisen messtheoretischer Überlegungen

### $\Rightarrow$ Vom qualitativen Relationssystem zum Homomorphismus und numerischen Relationssystem

Im Anwendungskontext stellt man sich vor, dass ein bestimmter Gegenstandsbereich als qualitatives Relationssystem mit bestimmten Eigenschaften beschrieben werden kann. Letztlich sind die Eigenschaften empirisch zu überprüfen, dafür bietet die klassische Messtheorie aber keine Methodik. Man legt also ein in gewisser Weise idealisiertes qualitatives Relationssystem zugrunde und fragt dann, ob es einen Homomorphismus in ein numerisches Relationssystem, z.B. $(\mathbb{R}, >)$ oder $(\mathbb{R}, >, +)$ geben kann. Insgesamt hat dieser Ansatz sicherlich einen hohen intuitiven Appeal.

### $\Leftarrow$ Vom numerischen Relationssystem und Homomorphismus zum qualitativen Relationssystem

Im Theoriekontext fragt man dagegen oft, wenn man ein bestimmtes numerisches Relationssystem, z.B. $(\mathbb{R}, >)$ oder $(\mathbb{R}, >, +)$ und die Existenz eines Homomorphismus zugrundelegt, welche Eigenschaften dann ein qualitatives Relationssystem mindestens genügen muss. Dementsprechend geht es einerseits darum, numerische Relationen wie $>$ oder $\geq$ oder Operationen wie $+$ auf den reellen Zahlen mithilfe qualitativer Relationsbegriffe zu beschreiben. Dies motiviert dann z.B. Beispiel die Charakterisierung von (qualitativen) Ordnungsrelationen. Zum anderen versucht man, nur eben jene Eigenschaften von qualitativen Relationssystemen zu fordern, die für den Nachweis der Existenz eines Homomorphismus in ein bestimmtes numerisches Relationssystem oder die so induzierte Skalenart gerade nötig sind. Der intuitive Appeal dieser Herangehensweise ist sicherlich geringer, die erreichbare formale Strenge und Einfachheit jedoch leichter gewährleistet als im obigem Ansatz. Die Inhalte der Einheiten zu Ordinalmessungen, Extensivmessungen und Differenzmessungen sollten auch vor dem Hintergrund dieses zweiten Ansatzes rezipiert werden.

## Ordnungsrelationen

Ziel der Ordinalmessung ist die strukturerhaltende Repräsentation von *Ordnungsrelationen*. Ordnungsrelationen sind Binärrelationen und formalisieren Intuitionen von Rangfolgen wie z.B. "größer als", "mehr als" oder "wird präferiert über". Vertraute Ordnungsrelationen sind $>$ und $\geq$ auf der Menge der reellen Zahlen.

Die $>$ und $\geq$ Relationen auf den reellen Zahlen haben unterschiedliche Eigenschaften. Zum Beispiel ist die Relation $>$ nicht reflexiv, weil $x \not> x$, also $(x, x) \notin >$, aber die Relation $\geq$ ist reflexiv, weil $x \geq x$, also $(x, x) \in \geq$.

Die Theorie der Ordnungsrelationen versucht, Eigenschaften wie die (Ir)Reflexivität von $>$ und $\geq$ zu abstrahieren und auf andere, nicht numerische Mengen, zu übertragen. Je nach den konkreten Eigenschaften einer Ordnungsrelation definiert man zum Beispiel folgende Ordnungsrelationen (aus Roberts (1984), S. 15):

**Table 1.3.** Order Relations*

| | Relation Type | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Property | Quasi Order | Weak Order | Simple Order | Strict Simple Order | Strict Weak Order | Partial Order | Strict Partial Order |
| Reflexive | √ | | | | | √ | |
| Symmetric | | | | | | | |
| Transitive | √ | √ | √ | √ | | √ | √ |
| Asymmetric | | | | √ | √ | | √ |
| Antisymmetric | | | √ | | | √ | |
| Negatively transitive | | | | | √ | | |
| Strongly complete | | √ | √ | | | | |
| Complete | | | | √ | | | |

*A given type of relation can satisfy more of these properties than those indicated. Only the defining properties are indicated.

Für jeder der in der Tabelle angegebenen Ordnungsrelationen können das Repräsentationsproblem und das Eindeutigkeitsproblem der Ordinalmessung untersucht werden. Wir betrachten hier der Einfachheit halber nur den Fall der Ordinalmessung bei Vorliegen einer **strengen schwachen Ordnung** (strict weak order).

# Vorbemerkungen

## Ordinalmessungen

Ziel von Ordinalmessungen ist es, den Elementen einer Menge $M$, die in einer gegebenen Ordnungsrelation $R$ stehen, durch eine Funktion $f$ Zahlen in $\mathbb{R}$ so zuzuordnen, dass gilt

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \tag{1}$$

oder, in Abhängigkeit von $R$, auch

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) \geq f(n). \tag{2}$$

Da die Struktur von $R$ durch den Homomorphismus per Definition nicht verändert wird, die Funktion $f$ also keine zusätzliche Information im Vergleich zu $R$ enkodiert, stellt sich die Frage, was durch eine Ordinalmessung bei bekannter Ordnungsrelation $R$ wissenschaftlich überhaupt gewonnen wird.

Mögliche Antworten auf diese Frage sind folgende:

- $(m, n) \in R \vee (m, n) \notin R$ sind binäre Aussagen, $f(m), f(n) \in \mathbb{R}$ sind Zahlen. Die Übersetzung einer qualitativen Ordnungsrelation erlaubt es also, die Methoden der angewandten Mathematik auf die numerisch repräsentierte Ordnungsrelation anzuwenden. Die den Elementen von $M$ zugeordneten Funktionswerte $f(m) \in \mathbb{R}$ können zum Beispiel im Sinne von abhängigen Variablen mit anderen den Elementen von $M$ zugeordneten Funktionswerten $g(m) \in \mathbb{R}$ als unabhängige Variablen statistisch in Bezug gesetzt werden.
- In ähnlicher Weise sind Antworten auf Fragen der relativen Position eines $m \in M$ unter Umständen anhand der Menge der $f(m)$ leichter zu evaluieren. Zum Beispiel müssen für das ranghöchste oder rangniedrigste $m \in M$ lediglich $\text{argmin}_{m \in M} f(m)$ und $\text{argmax}_{m \in M} f(m)$ evaluiert und nicht alle paarweisen Vergleiche gezogen werden.
- $(m, n) \in R \vee (m, n) \notin R$ sind $|M^2|$ Aussagen, $f(m)$ sind $|M|$ Zahlen. Die numerisch repräsentierte Ordnungsrelation kann also eventuell mit weniger Aufwand enkodiert werden.

## Überblick

- Wir geben in dieser Einheit einen Überblick zu messtheoretischen Überlegungen zur Repräsentation und Eindeutigkeit von strengen schwachen Ordnungen.
- Im Abschnitt **Strenge schwache Ordnungen** führen wir mit der Asymmetrie und der negativen Transitivität zunächst die definierenden Eigenschaften strenger schwacher Ordungen ein. Weiterhin zeigen wir, dass strenge schwache Ordnungen auch immer irreflexive und transitive Ordnungsrelationen sind.
- Im Abschnitt **Repräsentation und Eindeutigkeit** zeigen wir zunächst, dass für eine strenge schwache Ordnung $R$ auf einer Menge $M$ immer ein Homomorphismus in das numerische Relationssystem $(\mathbb{R}, >)$ existiert und geben damit für den betrachteten Fall eine Antwort auf das Repräsentationsproblem der Messtheorie. Insbesondere konstruieren wir sogar einen Homomorphismus.
- Im gleichen Abschnitt zeigen wir dann weiterhin, dass der konstruierte Homomorphismus nicht eindeutig ist und durch die Klasse der monoton steigenden Funktionen in weitere Homomorphismen vom betrachteten qualitatitven Relationssystem in das betrachtete numerische Relationssysteme transformiert werden kann. Die Klasse der zulässigen Transformationen von Homomorphismen sind im vorliegenden Fall also die monoton steigenden Funktionen. Damit haben wir dann auch die Ordinalskalenart der Repräsentation strenger schwacher Ordnungen nachgewiesen.
- Schließlich geben wir ein Anwendungsbeispiel aus dem Bereich der Präferenzmessung.

# Strenge schwache Ordnungen

## Definition (Asymmetrie)

Eine Binärrelation $R$ auf einer Menge $M$ heißt *asymmetrisch*, wenn für alle $(m, n) \in R$ gilt, dass $(n, m) \notin R$ ist.

Bemerkungen und Beispiele

- Die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist asymmetrisch, weil für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass wenn $x > y$ gilt, auch $y \not> x$ gilt.
- Die $\geq$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist nicht asymmetrisch, weil für $x = y$ bei $x \geq y$ nicht gilt, dass $y \not\geq x$.
- Für $M := \{a, b, c\}$ ist die Relation

$$R := \{(a, b), (a, c), (b, c)\} \tag{3}$$

  asymmetrisch, weil gilt, dass

$$\begin{aligned} (a, b) \in R &\Rightarrow (b, a) \notin R \\ (a, c) \in R &\Rightarrow (c, a) \notin R \\ (b, c) \in R &\Rightarrow (c, b) \notin R \end{aligned} \tag{4}$$

- Die (rationale, normative, idealisierte) Präferenzrelation "wird präferiert über" ist asymmetrisch.
- Die Präferenzrelation "wird präferiert über oder wird gleichermaßen präferiert" ist nicht asymmetrisch.

## Definition (Negative Transitivität)

Eine Binärrelation $R$ auf einer Menge $M$ heißt *negativ transitiv*, wenn für alle $m, n, p \in M$ gilt, dass aus $(m, n) \notin R$ und $(n, p) \notin R$ folgt, dass $(m, p) \notin R$ ist.

Bemerkungen und Beispiele

- Die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ ist negativ transitiv, weil für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt, dass aus $x \not> y$ und $y \not> z$ folgt, dass $x \not> z$. Seien zum Beispiel $x = 1, y = 3$ und $z = 6$. Offenbar gelten dann $x \not> y$ und $y \not> z$ und auch $x \not> z$.
- Für $M := \{a, b, c\}$ ist die Relation

$$R := \{(a, b), (a, c), (b, c)\} \tag{5}$$

  negativ transitiv. Hier gilt zum Beispiel, dass mit $(c, b) \notin R$ und $(b, a) \notin R$ auch $(c, a) \notin R$ ist. Für einen vollständigen Nachweis der negativen Transitivität muss allerdings gezeigt werden, dass dies für alle relevanten Paare von Tupeln in $M \times M$ gilt.
- Die (rationale, normative, idealisierte) Präferenzrelation "wird präferiert über" ist negativ transitiv.

# Strenge schwache Ordnungen

## Definition (Strenge schwache Ordnung)

$M$ sei eine Menge und $R$ sei eine Binärrelation auf $M$. $R$ heißt *strenge schwache Ordnung* auf $M$, wenn $R$ asymmetrisch und negativ transitiv ist.

Bemerkungen und Beispiele

- Wir haben oben gesehen, dass die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ asymmetrisch und negativ transitiv ist. Die $>$ Relation ist also eine strenge schwache Ordnung auf $\mathbb{R}$.
- Wir haben oben auch gesehen, dass die $\geq$ Relation auf $\mathbb{R}$ nicht asymmetrisch ist. Die $\geq$ Relation ist also keine strenge schwache Ordnung auf $\mathbb{R}$.
- Wir haben oben angemerkt, dass eine (rationale, normative, idealisierte) Präferenzrelation asymmetrisch und negativ transitiv und damit eine strenge schwache Ordnung ist.

## Theorem (Irreflexivität und Transitivität strenger schwacher Ordnung)

Eine strenge schwache Ordnung $R$ auf einer Menge $M$ ist irreflexiv und transitiv.

Beweis

Zum Nachweis der Irreflexivität ist zu zeigen, dass für alle $m \in M$ gilt, dass $(m,m) \notin R$ ist. Zum Beweis durch Widerspruch sei $(m,m) \in R$. Dann würde mit der Asymmetrie von $R$ gelten, dass mit $(m,m) \in R$ auch $(m,m) \notin R$ ist (um das einzusehen ersetze man in der Definition der Asymmetrie $n$ durch $m$) und dies ist ein Widerspruch. Also kann $(m,m) \in R$ nicht gelten und es muss $(m,m) \notin R$ gelten. Also ist $R$ irreflexiv.

Zum Nachweis der Transitivität von $R$ ist zu zeigen, dass für $(m,n) \in R$ und $(n,p) \in R$ auch $(m,p) \in R$ gilt. Es seien also $(m,n) \in R$ und $(n,p) \in R$. Zum Beweis durch Widerspruch sei $(m,p) \notin R$. Die Asymmetrie von $R$ impliziert, dass aus $(n,p) \in R$ folgt, dass $(p,n) \notin R$. Die negative Transitivität von $R$ impliziert nun für $(m,p) \notin R$ und $(p,n) \notin R$, dass $(m,n) \notin R$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $(m,n) \in R$ ist. Also kann $(m,p) \notin R$ nicht gelten und es muss für $(m,n) \in R$ und $(n,p) \in R$ gelten, dass $(m,p) \in R$ ist. Also ist $R$ transitiv.

$\square$

Vorbemerkungen

Strenge schwache Ordnungen

**Repräsentation und Eindeutigkeit**

Selbstkontrollfragen

## Theorem (Repräsentation strenger schwacher Ordnungen)

$\mathcal{M} := (M, R)$ sei ein qualitatives Relationssystem mit einer endlichen Menge $M$ und einer Binärrelation $R$ auf $M$ und $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >)$ sei ein numerische Relationssystem. Dann existiert ein Homomorphismus $f$ von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, also eine Funktion der Form

$$f : M \to \mathbb{R}, m \mapsto f(m) \tag{6}$$

mit der Eigenschaft

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \tag{7}$$

dann und nur dann, wenn $R$ eine strenge schwache Ordnung ist.

Bemerkungen

- Das Theorem beantwortet das Repräsentationsproblem für die hier betrachteten Fälle von $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$.
- Für eine strenge schwachen Ordnung auf einer endlichen Menge sind $(M, R)$ und $(\mathbb{R}, >)$ also homomorph.

Beweis

Wir zeigen in einem ersten Schritt, dass wenn ein Homomorphismus von $(M, R)$ nach $(\mathbb{R}, >)$ existiert, $R$ eine strenge schwache Ordnung sein muss. In einem zweiten Schritt zeigen wir dann, dass wenn $R$ eine strenge schwache Ordnung ist, ein Homomorphismus von $(M, R)$ nach $(\mathbb{R}, >)$ konstruiert werden kann.

(1) *Ein Homomorphismus $f$ von $(M, R)$ nach $(\mathbb{R}, >)$ existiert $\Rightarrow$ $R$ muss eine strenge schwache Ordnung sein*

Wir zeigen, dass aus der Existenz eines Homomorphismus $f$ von $(M, R)$ nach $(\mathbb{R}, >)$ die Asymmetrie und die negative Transitivität von $R$ folgen.

Zum Nachweis der Asymmetrie sei $(m, n) \in R$. Dann gilt nach Voraussetzung, dass $f(m) > f(n)$. Da die $>$ Relation auf $\mathbb{R}$ asymmetrisch ist, gilt dann $f(n) \not> f(m)$ und dementsprechend auch $(n, m) \notin R$. Also folgt für alle $(m, n) \in R$, dass $(n, m) \notin R$ ist und damit ist $R$ asymmetrisch.

Zum Nachweis der negativen Transitivität seien $(m, n) \notin R$ und $(n, p) \notin R$. Dann gelten $f(m) \not> f(n)$ und $f(n) \not> f(p)$. Dann folgt aber auch $f(m) \not> f(p)$ und dementsprechend auch $(n, p) \notin R$.

Die Existenz eines Homomorphismus von $(M, R)$ nach $(\mathbb{R}, >)$ impliziert also, dass $R$ eine strenge schwache Ordnung auf $M$ ist.

Beweis (fortgeführt)

(2) $R$ *ist eine strenge schwache Ordnung auf* $M \Rightarrow$ *Ein Homomorphismus* $f$ *kann konstruiert werden*

Wir zeigen, dass für ein qualitatives Relationssystem $(M, R)$ aus einer endlichen Menge $M$ und einer strengen schwachen Ordnung $R$ ein Homomorphismus von $(M, R)$ nach $(\mathbb{R}, >)$ konstruiert werden kann. Wir definieren dazu eine Funktion $f$ wie folgt:

$$f : M \to \mathbb{R}, m \mapsto f(m) := |\{q \in M | (m, q) \in R\}| \tag{8}$$

Der einem Element $m \in M$ zugeordnete Funktionswert $f(m)$ soll also die Kardinalität der Menge der $q \in M$ sein, für die gilt, dass $(m, q) \in R$.

Zum Beispiel sei für $M := \{a, b, c, d\}$ die strenge schwache Ordnung

$$R := \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\} \tag{9}$$

definiert. Dann gilt für $f$, dass

$$\begin{aligned}
f(a) &= 2, \text{ weil } \{q \in M | (a, q) \in R\} = \{c, d\} \\
f(b) &= 2, \text{ weil } \{q \in M | (b, q) \in R\} = \{c, d\} \\
f(c) &= 1, \text{ weil } \{q \in M | (c, q) \in R\} = \{d\} \\
f(d) &= 0, \text{ weil } \{q \in M | (d, q) \in R\} = \emptyset
\end{aligned} \tag{10}$$

# Repräsentation und Eindeutigkeit

Beweis (fortgeführt)

Wir zeigen nun, dass ein solch definiertes $f$ die Forderung $(m,n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n)$ erfüllt. Dazu zeigen wir erstens, dass aus $(m,n) \in R$ folgt, dass $f(m) > f(n)$ ist und zweitens, dass (2) as $f(m) > f(n)$ folgt, dass $(m,n) \in R$ ist.

(1) $(m,n) \in R \Rightarrow f(m) > f(n)$

Es sei $(m,n) \in R$. Weil $R$ transitiv ist, impliziert $(n,q) \in R$ dann $(m,q) \in R$ für jedes $q \in M$. Die Anzahl der $q$ mit $(m,q) \in R$ ist also mindestens so groß wie die Anzahl der $q$ mit $(n,q) \in M$. Es gilt also

$$|\{q \in M|(m,q) \in R\}| \geq |\{q \in M|(n,q) \in R\}| \Leftrightarrow f(m) \geq f(n) \tag{11}$$

Weiterhin gilt aber auch

$$|\{q \in M|(m,q) \in R\}| \neq |\{q \in M|(n,q) \in R\}| \Leftrightarrow f(m) \neq f(n), \tag{12}$$

weil nach Voraussetzung $(m,n) \in R$, aber aufgrund der Irreflexitivität von $R$ dann $(n,n) \notin R$ gilt. Für $n$ gilt also

$$n \in \{q \in M|(m,q) \in R\}, \text{ aber } n \notin \{q \in M|(n,q) \in R\}. \tag{13}$$

Damit können die Kardinalitäten dieser beiden Mengen nicht gleich sein. Also gilt $(m,n) \in R \Rightarrow f(m) > f(n)$.

Beweis (fortgeführt)

(2) $f(m) > f(n) \Rightarrow (m,n) \in R$

Im Folgenden nutzen wir Kontrapositionsbeweise, also die logische Äquivalenz von $A \Rightarrow B$ und $\neg B \Rightarrow \neg A$, z.B.

Es regnet $(A) \Rightarrow$ Die Strasse ist nass $(B) \Leftrightarrow$ Die Strasse ist nicht nass $(\neg B) \Rightarrow$ Es regnet nicht $(\neg A)$.

Um zu zeigen, dass aus $f(m) > f(n)$ folgt, dass $(m,n) \in R$ ist, zeigen wir also, dass umgekehrt aus $(m,n) \notin R$ folgt, dass $f(m) \not> f(n)$. Dazu halten wir fest, dass aus der negativen Transitivität von $R$ folgt, dass für $(m,n) \notin R$ aus $(n,q) \notin R$ folgt, dass $(m,q) \notin R$. Andersherum impliziert dann aber $(m,q) \in R$, dass $(n,q) \in R$ ist und damit

$$(m,n) \notin R \Rightarrow |\{q \in M|(n,q) \in R\}| \geq |\{q \in M|(m,q) \in R\}| \Leftrightarrow f(n) \geq f(m) \Leftrightarrow f(m) \not> f(n).$$

Damit ist bewiesen, dass aus $(m,n) \notin R$ folgt, dass $f(m) \not> f(n)$ und äquivalent, dass aus $f(m) > f(n)$ folgt, dass $(m,n) \in R$ ist.

## Theorem (Eindeutigkeit der Repräsentation strenger schwacher Ordnungen)

$\mathcal{M} := (M, R)$ sei ein qualitatives Relationssystem aus einer endlichen Menge $M$ und einer strengen schwachen Ordnung $R$ auf $M$, $\mathcal{N} := (\mathbb{R}, >)$ sei ein numerische Relationssystem und es sei $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ eine Ordinalskala.

Bemerkungen

- Die Klasse der zulässigen Transformationen von $f$ sind also die monoton steigenden Funktionen.
- Dass in diesem Fall $\mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \neq \emptyset$ gilt, wurde oben nachgewiesen.
- Strenge schwache Ordnungen sind also nicht eindeutig repräsentiert.

Beweis

(1) *Regularität der Repräsentation*

Wir zeigen zunächst, dass die Repräsentation $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ regulär ist, um nachzuweisen, dass es zu jedem $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ eine zulässige Transformation gibt. Dazu nutzen wir das Theorem zur Charakterisierung regulärer Skalen (vgl. (7) Skalenarten), welches besagt, dass eine Skala $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ dann und nur dann regulär ist, wenn für alle $g \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und $m, n \in M$ gilt, dass aus $f(m) = f(n)$ folgt, dass $g(m) = g(n)$ ist. Sei also $g \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, d.h. $g$ erfüllt die Eigenschaft

$$g : M \to \mathbb{R}, m \mapsto g(m) \text{ mit } (m, n) \in R \Leftrightarrow g(m) > g(n). \tag{14}$$

Sei nun weiterhin $f(m) = f(n)$. Dies impliziert, dass $(m, n) \ /R$ und $(n, m) \notin R$, weil sonst entweder $f(m) > f(n)$ oder $f(n) > f(m)$ gelten. Wenn aber $(n, m) \notin R$ und $(m, n) \notin R$, dann können auch weder $g(m) > g(n)$ noch $g(n) > g(m)$ gelten. Also muss $g(m) = g(n)$ gelten.

Weil $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ beliebig war, gilt dies für alle $f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ und damit ist die Repräsentation $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$ regulär und es gibt zu jedem $g \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ eine zulässige Transformation $\phi$, so dass $g = \phi \circ f$.

# Repräsentation und Eindeutigkeit

Beweis (fortgeführt)

(2) *Ordinalskalenart*

Wir zeigen nun, dass die Menge der zulässigen Transformationen von $(\mathcal{M}, \mathcal{N}, f)$ die Menge der monoton steigenden Funktionen ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass für eine monoton steigende Funktion $\phi$ gilt, dass $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Abschließen zeigen wir, dass aus $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ folgt, dass $\phi$ eine monoton steigende Funktion ist. Dazu halten wir zunächst noch ein einmal fest, dass für die Verkettung $\varphi \circ \psi$ zweier monoton steigender Funktionen $\varphi$ und $\psi$ gilt, dass ihre Verkettung wiederum monoton steigend ist, denn

$$x > y \Leftrightarrow \psi(x) > \psi(y) \Leftrightarrow \varphi(\psi(x)) > \varphi(\psi(y)) \Leftrightarrow (\varphi \circ \psi)(x) > (\varphi \circ \psi)(y). \tag{15}$$

(2.1) $\phi$ *ist monoton steigend* $\Rightarrow \phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ Es gilt

$$(m, n) \in R \Leftrightarrow f(m) > f(n) \Leftrightarrow \phi(f(m)) > \phi(f(n)) \Leftrightarrow (\phi \circ f)(m) > (\phi \circ f)(n). \tag{16}$$

Also ist $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

(2.2) $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \Rightarrow \phi$ *ist monoton steigend*

Es seien $\mu := f(m) \in f(M)$ und $\nu := f(n) \in f(M)$. Dann gilt für $\phi \circ f \in \mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, dass

$$\mu > \nu \Leftrightarrow f(m) > f(n) \Leftrightarrow m > n \Leftrightarrow (\phi \circ f)(m) > (\phi \circ f)(n) \Leftrightarrow \phi(\mu) > \phi(\nu). \tag{17}$$

Also ist $\phi$ monoton steigend.

# Repräsentation und Eindeutigkeit

## Anwendungsbeispiel

Es sei $M := \{\text{ROP}, \text{HOTD}, \text{ST4}, \text{OWK}, 1899\}$ eine Menge von Serien und es sei $R$ die durch untenstehendes Schema definierte "wird präferiert über" strenge schwache Ordnung auf $M$ eines Individuums. Dabei enkodiert eine 1 in der $m, q$-ten Zelle, dass $m$ über $q$ präferiert wird, also $(m, q) \in R$, eine 0 in der $m, q$-ten Zelle, dass dies nicht gilt, also $(m, q) \notin R$. Die letzte Spalte zeigt die Funktionswerte des im Beweis der Repräsentation strenger schwacher Ordnungen konstruierten Homomorphismus.

| $m \downarrow, q \rightarrow$ | ROP | HOTD | ST4 | OWK | 1899 | $\lvert\{q \in M \lvert (m, q) \in R\}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ROP | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| HOTD | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| ST4 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| OWK | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1899 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Eine Neuanordnung von Zeilen und Spalten anhand obiger Zeilensummen lässt die Ordnung klarer erkennen:

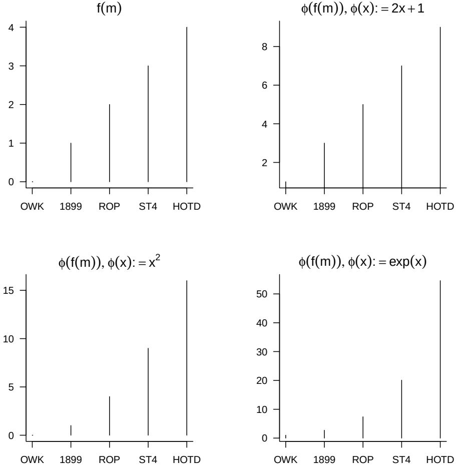
| $m \downarrow, q \rightarrow$ | HOTD | ST4 | ROP | 1899 | OWK | $\lvert\{q \in M \lvert (m, q) \in R\}\rvert$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| HOTD | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| ST4 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| ROP | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 1899 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| OWK | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Für dieses Individuum gilt für alle $m, n \in M$, dass $m$ über $n$ präferiert wird oder dass $n$ über $m$ präferiert wird.

# Repräsentation und Eindeutigkeit

## Anwendungsbeispiel

Elemente von $\mathcal{H}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ im vorliegenden Beispiel



Vorbemerkungen

Strenge schwache Ordnungen

Repräsentation und Eindeutigkeit

**Selbstkontrollfragen**

# Selbstkontrollfragen

1. Erläutern Sie zwei prinzipielle Vorgehensweisen bei messtheoretischen Überlegungen.
2. Erläutern Sie den Begriff der Ordungsrelation.
3. Erläutern Sie das Ziel und den wissenschaftlichen Gewinn von Ordinalmessungen.
4. Definieren Sie den Begriff der asymmetrischen Binärrelation.
5. Definieren Sie den Begriff der negativ transitiven Binärrelation.
6. Definieren Sie den Begriff der strengen schwachen Ordnung.
7. Geben Sie das Theorem zur Irreflexivität und Transitivität strenger schwacher Ordnungen wieder.
8. Geben Sie das Theorem zur Repräsentation strenger schwacher Ordnungen wieder.
9. Geben Sie das Theorem zur Eindeutigkeit strenger schwacher Ordnungen wieder.
10. Erläutern Sie die Konstruktion eines Homomorphismus von einer strengen schwachen Ordnung nach $(\mathbb{R}, >)$ anhand eines Beispiels aus dem Bereich der Präferenzmessung.