Nombre Diego Luis Salazar Pedraza Fecha día mes año

Profesor Materia

Institución Curso Nota

① Distancia entre señales

Las señales dadas son:

$$x_1(t) = Ae^{-jn\omega_0 t} \quad ; \quad x_2(t) = Be^{jm\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad A, B \in \mathbb{R}^+ \quad ; \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

La distancia al cuadrado es:

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt$$

Expandiendo el término al cuadrado

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = x_1(t)x_1^*(t) - x_1(t)x_2^*(t) - x_2(t)x_1^*(t) + x_2(t)x_2^*(t)$$

Sustituyendo las expresiones de $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = (Ae^{-jn\omega_0 t})(Ae^{jn\omega_0 t}) - (Ae^{-jn\omega_0 t})(Be^{-jn\omega_0 t}) +$$
$$- (Be^{jn\omega_0 t})(Ae^{jn\omega_0 t}) + (Be^{jn\omega_0 t})(Be^{-jn\omega_0 t})$$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = A^2e^0 + B^2e^0 - AB(e^{-j(n+m)\omega_0 t} + e^{j(n+m)\omega_0 t})$$

Usando la identidad de Euler $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos(\theta)$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)$$

Integrando sobre/respecto un periodo de señal

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T (A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t))dt$$

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[\int_0^T (A^2 + B^2)dt - \int_0^T 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)dt\right]$$

Componente DC

$$\int_0^T (A^2 + B^2)dt = (A^2 + B^2)[t]_0^T = \underline{(A^2 + B^2)T}$$

Componente senoidal

$\Rightarrow$ Caso 1: $n+m \neq 0$

$$\int_0^T \cos((n+m)\omega_0 t)\,dt = \left[\frac{\text{sen}((n+m)\omega_0 t)}{(n+m)\omega_0}\right]_0^T = \frac{\text{sen}((n+m)\omega_0 T) - \text{sen}(0)}{(n+m)\omega_0}$$

$\omega_0 T = 2\pi \Rightarrow \text{sen}((n+m)2\pi) = 0$

$$\boxed{\Rightarrow \int_0^T 2AB\cos((n+m)\omega_0 t)\,dt = 0}$$

$\Rightarrow$ Caso 2: $n+m = 0$

$$\int_0^T \cos(0)\,dt = \int_0^T 1\,dt = T \quad \boxed{\Rightarrow \int_0^T 2AB\cos(0)\,dt = 2ABT}$$

Sumando ambos componentes

$\Rightarrow$ Caso 1

$$d^2(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[(A^2+B^2)T - 0\right] = A^2 + B^2$$

$\Rightarrow$ Caso 2

$$d^2(x_1,x_2) = \frac{1}{T}\left[(A^2+B^2)T - 2ABT\right] = \frac{T}{T}\left[A^2+B^2-2AB\right] = (A-B)^2$$

En conclusión, la distancia media cuadrada entre las señales es:

$$d^2(x_1,x_2) = \begin{cases} A^2+B^2 & \text{si } n+m \neq 0 \\ (A-B)^2 & \text{si } n+m \neq 0 \end{cases}$$

② Conversión análogo-digital

La señal dada es:

$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\text{sen}(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Las frecuencias de la señal son, en sus componentes angulares, estas:

$\omega_1 = 1000\pi \Rightarrow f_1 = 500\,Hz$
$\omega_2 = 3000\pi \Rightarrow f_2 = 1500\,Hz$
$\omega_3 = 11000\pi \Rightarrow f_3 = 5500\,Hz$

La $f_s = 5000\text{Hz}$ es menor que $2f_{max} = 2f_3$, por tanto no se cumple el teorema de Nyquist.

Se procede a diseñar un CAD con $f_s \geq 2f_{max} \Rightarrow \hat{f}_s \geq 11000\text{Hz}$

Se muestrea (discretiza) sustituyendo $t = n\hat{T}_s = n/\hat{f}_s$

$$x(n) = x(n/\hat{f}_s) = 3\cos\left(\frac{1000\pi n}{11000}\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3000\pi n}{11000}\right) + 10\cos\left(\frac{11000\pi n}{11000}\right)$$

$$\boxed{x(n) = 3\cos\left(\frac{\pi n}{11}\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{3\pi n}{11}\right) + 10\cos(\pi n)}$$

Para cuantizar, se determinan los niveles

$L = 2^B$; $B = 4 \Rightarrow L = 2^4 = 16 \Rightarrow$ 16 niveles

El rango de la señal es la suma de las amplitudes de sus componentes

$$\max(|x(t)|) \leq |3| + |5| + |10| = 18$$

Asumiendo cuantización bipolar simétrica

$$R = 2 \times 18 \Rightarrow [-18, 18]$$

El espaciado entre niveles es

$$\Delta = \frac{R}{L} = \frac{36}{16} = 2.25$$

---

③ Coeficientes de la serie de Fourier

La fórmula general para los coeficientes de Fourier de $x(t)$ sobre el intervalo $[t_i ; t_f]$ con $T = t_f - t_i$ es:

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt \quad ; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Para relacionar C_n con $x''(t)$ se integra por partes

$u = x(t) \rightarrow du = x'(t)$

$dv = e^{-jn\omega_0 t} \rightarrow v = \int e^{-jn\omega_0 t} = \dfrac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}$ para $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{T}\left[x(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{t_i}^{t_f} - \int_{t_i}^{t_f} x'(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\,dt \right]$$

Dado que $x(t)$ es periódica con periodo $T = t_f - t_i$ se cumple que $x(t_f) = x(t_i)$

Además

$$e^{-jn\omega_0 t_f} = e^{-jn\omega_0 (t_i + T)} = e^{-jn\omega_0 t_i}\,e^{-jn\omega_0 T} = e^{-jn\omega_0 t_i}\,e^{-jn2\pi} = e^{-jn\omega_0 t_i}$$

Por tanto, la evaluación queda

$$x(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{t_i}^{t_f} = x(t_f)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t_f}}{-jn\omega_0} - x(t_i)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t_i}}{-jn\omega_0} = 0$$

Reescribiendo para $n \neq 0$

$$C_n = \frac{1}{T}\left[- \int_{t_i}^{t_f} x'(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\,dt \right] = \frac{1}{T}\,\frac{1}{jn\omega_0}\int_{t_i}^{t_f} x'(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

Aplicando nuevamente integración por partes

$$u = x'(t) \longrightarrow du = x''(t)$$
$$dv = e^{-jn\omega_0 t} \longrightarrow v = \frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}$$

$$\int_{t_i}^{t_f} x'(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \underbrace{x'(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\Bigg|_{t_i}^{t_f}}_{\to 0} - \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\,dt$$

$$\Rightarrow C_n = \frac{1}{T}\,\frac{1}{jn\omega_0}\left[0 - \int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0}\,dt \right]$$

$$C_n = \frac{1}{T}\,\frac{1}{jn\omega_0}\,\frac{-1}{-jn\omega_0}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$C_n = \frac{1}{T}\,\frac{1}{(jn\omega_0)^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)}\,\frac{1}{(-n^2\omega_0^2)}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\boxed{C_n = \frac{1}{+(t_i - t_f)\,n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$$

Los coeficientes de la serie de Fourier trigonométrica se puede calcular como

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\left[\cos(n\omega_0 t) - j\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\right]dt$$

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt - \frac{j}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

Usando la igualdad de la parte real de $a_n = 2\,\mathrm{Re}\{C_n\}$ se obtiene

$$\boxed{a_n = \frac{2}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt}$$

Ahora la parte imaginaria $b_n = -2\,\mathrm{Im}\{C_n\}$ se tiene que

$$\boxed{b_n = \frac{2}{(t_i - t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\,\mathrm{sen}(n\omega_0 t)\,dt}$$

---

4 Espectro de Fourier de señal triangular

De la figura se tiene que, por simetría, estos son los datos:

→ Amplitud máxima: A
Punto de cresta: $d1$ y $-d1$
Base: $d2$ y $-d2$
Periodo: $T_0 = 2d2$
Frecuencia angular: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{d_2}$

Definición de $x(t)$ en $[0, d_2]$

→ Tramo $[0,d_1]$ (subida): $x(t) = m_1 t + b_1$. Pasa por $(0,0)$ y (d_1, A)

$$m_1 = \frac{A-0}{d_1 - 0} = \frac{A}{d_1} \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{A}{d_1}t}$$

→ Tramo $[d_1,d_2]$ (bajada): $x(t) = m_2 t + b_2$. Pasa por (d_1, A) y $(d_2, 0)$

$$m_2 = \frac{0-A}{d_2 - d_1} = -\frac{A}{d_2-d_1}\ ; \quad b_2 = -m_2 d_2 \Rightarrow x(t) = -\frac{A}{d_2-d_1}t + \frac{Ad_2}{d_2-d_1}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{A}{d_2-d_1}(d_2 - t)}$$