Macchine a stati finiti

G. MARSELLA
UNIVERSITÀ DEL SALENTO

Introduzione

- Al più alto livello di astrazione il progetto logico impiega un modello, la cosiddetta "*macchina a stati finiti*", per descrivere e classificare comportamento e struttura di ogni blocco di hardware.
- Il modello è importante in due diversi momenti dell'attività progettuale:
  - all'inizio del procedimento di sintesi, quando occorre puntualizzare che cosa dovrà fare la macchina da costruire e come dovrà essere organizzata;
  - alla fine del procedimento di analisi, quando si vuole capire il comportamento e le modalità d'impiego di una macchina che altri hanno in precedenza costruito.

Introduzione

- Le macchine a stati si utilizzano per modellare sistemi fisici caratterizzabili mediante:
  - un insieme di variabili di ingresso (controllabili)
  - un insieme di variabili di uscita (osservabili)
  - un insieme di variabili stato che non possono essere osservate o misurate direttamente
- La conoscenza dei valori delle variabili di stato consente per un dato ingresso di determinare le uscite del sistema
- Il valore corrente delle variabili di stato viene genericamente denotato come "stato" del sistema

Concetto di stato

- Poiché le uscite dipendono anche dallo stato, l'applicazione dello stesso ingresso puó produrre risultati diversi
- Questo non è il caso delle reti logiche combinatorie
- In pratica, lo stato del sistema rappresenta sinteticamente la storia del sistema
- Chiaramente, lo stato contiene le informazioni necessarie per calcolare l'uscita del sistema, e non é in generale possibile l'inferenza della sequenza di ingressi che ha portato il sistema in un certo stato

Macchina a stati finiti

- Si suppone che l'insieme delle possibili configurazioni di ingresso e di uscita e che l'insieme degli stati abbiano una cardinalitá finita (realizzabilitá)
- X insieme finito di simboli di ingresso
- Z insieme finito di simboli di uscita
- S insieme finito di stati

Modello del Tempo

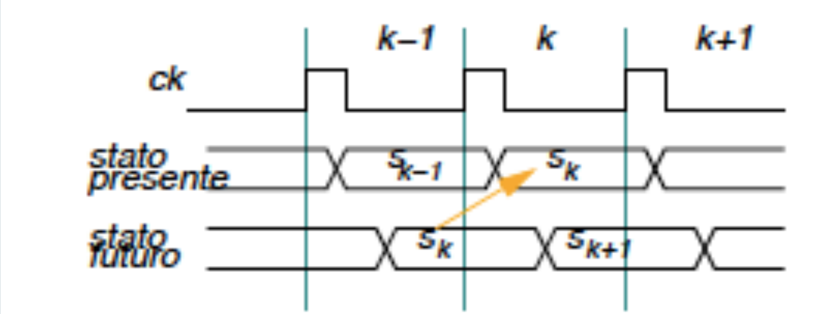
- In generale lo stato di una macchina a stati (che nel caso piú generale é di tipo asincrono) evolve in presenza di un evento sull'ingresso o sullo stato stesso
- Le macchine a stati sincrone possono invece evolvere esclusivamente in presenza di eventi (istanti di campionamento) sul segnale di sincronizzazione (clock)
- In presenza di sistemi sincroni si puó astrarre un modello tempo discreto dal tempo continuo
- In tale caso la macchina si dice sincrona e si é interessati solo al valore di ingresso, uscita e stato negli istanti di sincronizzazione (t_k , con $k = 0; 1; 2; \ldots$)
- Si vedranno criteri precisi che consentono di progettare macchine di questo tipo

Determinismo

- I sistemi fisici (macroscopici) sono deterministici, per cui fissato l'ingresso e lo stato, uscita ed evoluzione dello stato sono fissati
- Esistono anche modelli non deterministici, in cui dato l'ingresso e lo stato possono esistere diversi modi in cui la macchina puó evolvere
- Tali modelli non corrispondono a sistemi fisici (macroscopici) reali, ma sono utili per descrivere ad esempio le incertezze che possono essere presenti al livello di specifiche

Significato dello stato

- Il simbolo prodotto in uscita all'istante t_k é univocamente determinato dal simbolo di ingresso e dallo stato all'istante t_k
- Lo stato all'istante successivo t_{k+1} é anch'esso determinato in modo univoco da ingresso e stato all'istante t_k
- Lo stato all'istante t_k viene comunemente definito stato presente, mentre quello all'istante successivo t_{k+1} viene definito stato futuro



Definizione di MSF (sincrona)

- Una macchina a stati finiti sincrona (M) é un sistema sincrono caratterizzato da un alfabeto di ingresso finito X = 1; 2; ...; p, un alfabeto di uscita Z = 1; 2; ...; q e un insieme finito di stati S = 1; 2; ...; r e da una coppia di relazioni:
  - 1 uscita: $z_k = (x_k ; s_k)$
  - 2 stato futuro (next state): $s_{k+1} = (x_k ; s_k)$
- Ove x, z_k e s_k rappresentano rispettivamente il simbolo di ingresso, di uscita e lo stato all'istante k.

Definizione di MSF (sincrona)

- La definizione precedente corrisponde a una macchina detta di Mealy, ed é definita da:
  - $M = (S;X;Z; \lambda; \delta; \sigma_o)$
- ove σ_o rappresenta lo stato a $t = t_o$ (stato iniziale)
- La funzione λ é definita come λ: X x S -> Z
- La funzione δ é definita come δ: X x S -> S

Macchine di Mealy e di Moore

- La macchina descritta in precedenza, viene definita di Mealy. Un suo caso particolare é la macchina di Moore dove l'uscita non dipende dall'ingresso corrente per cui:
  - λ: S -> Z e quindi $z_k = \lambda(s_k)$
- La differenza principale é data dal fatto che l'automa di Moore non puó rispondere immediatamente a un cambiamento del simbolo presente in ingresso, ma solo con un ciclo di clock di ritardo
- Esistono metodi per passare da una rappresentazione all'altra

Trasformazione da un tipo di macchina a un altra

- Due macchine si dicono equivalenti se a paritá di stato iniziale e per ogni sequenza di ingressi le uscite sono le stesse
- Per una sequenza di j simboli di ingresso la macchina di Moore genera j + 1 simboli di uscita e quella di Mealy ne genera j La differenza sta nel simbolo generato in presenza dello stato iniziale σ_0 che viene generato solo dalla macchina di Moore Se si vogliono confrontare le due macchine bisogna ignorare tale simbolo

Equivalenza

- Una macchina di Mealy
  - M' = (S';X;Z; λ'; δ'; σ_o)
- e una di Moore
  - M" = (S";X;Z; λ"; δ"; σ_o)
- sono equivalenti se e solo se ignorando z_o = λ"(σ_o), le uscite sono coincidenti per ogni possibile sequenza di ingresso

Trasformazioni

- Moore => Mealy
  - Si tratta solo di associare l'uscita appartenente a uno stato a tutte le transizioni che partono da tale stato
- Mealy =>Moore
  - Ogni stato della macchina di partenza va replicato tante volte quante sono le transizioni con uscite differenti che portano a tale stato.
- Tali nuovi stati avranno il valore di uscita uguale a quello della transizione da cui sono stati originati

Rappresentazione di MSF

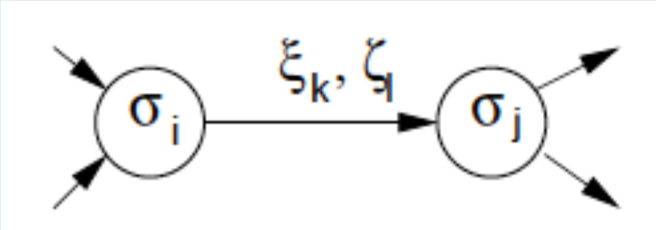
- Una macchina a stati finiti puó essere descritta sia in modo comportamentale che strutturale
- Si hanno 2 descrizioni comportamentali
  - grafo di transizione dello stato (STG)
  - tabella di transizione dello stato
- Si ha poi il modello di Huffman che é invece descrizione strutturale

Grafo di transizione dello stato

- É una rappresentazione grafica molto comoda nelle fasi iniziali di progetto in cui si passa da una descrizione formale della macchina al suo modello comportamentale
- Si tratta di un grafo orientato in cui ogni stato é rappresentato da un nodo, e ogni arco corrisponde a una transizione dello stato
- Per ogni coppia di stati appartenenti alla relazione (stato presente - stato futuro), esiste un arco orientato che va dallo stato presente a quello futuro

Esempi

- Macchina di Mealy: ciascun arco é annotato dal simbolo di ingresso corrispondente alla transizione di stato e dal simbolo di uscita prodotto



- Macchina di Moore: il simbolo di uscita é annotato all'interno del nodo

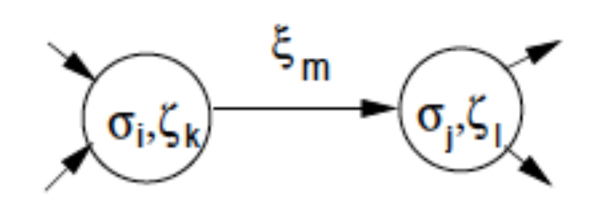


Tabella di transizione dello stato

- Si tratta di una descrizione tabellare in cui si ha una riga per ogni stato (presente) e una colonna per ogni simbolo di ingresso
- La casella σ_i ; ξ_k di tale tabella contiene i valori di stato futuro e uscita forniti dalle funzioni δ e λ
- Nella macchina di Moore, per compattezza, l'informazione sull'uscita (che dipende solo dallo stato) é riportata in unica colonna

Rappresentazione utile per manipolazioni sistematiche della MSF

Tabella di transizione dello stato (Mealy)

	ξ_0	ξ_1	....	ξ_k	....	ξ_q
σ_0						
....						
σ_i				$\delta(\sigma_i, \xi_k), \lambda(\sigma_i, \xi_k)$		
....						
σ_p						

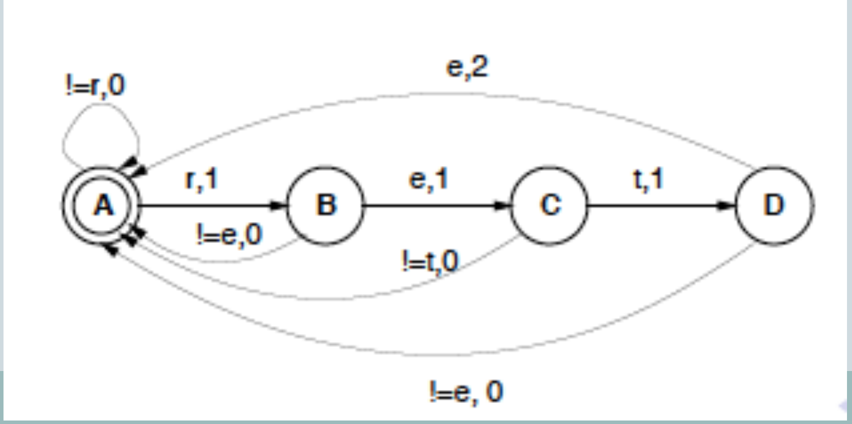
Tabella di transizione dello stato (Moore)

	ξ_0	ξ_1	....	ξ_k	....	ξ_q	
σ_0							$\lambda(\sigma_0)$
....							
σ_i				$\delta(\sigma_i, \xi_k)$			$\lambda(\sigma_i)$
....							
σ_p							$\lambda(\sigma_p)$

Esempio di STG

- Si realizzi una macchina a stati (automa) che riceve in ingresso una sequenza di caratteri e riconosce la parola "rete". L'uscita prodotta é 0 se non si sta riconoscendo la parola, 1 mentre la si sta riconoscendo e 2 una volta che sia stata riconosciuta. Si utilizzi una macchina di Mealy. Nota: i simboli errati vengono scartati.

$$M = \langle \mathcal{S} = \{A, B, C, D\}, \mathcal{X} = \{a, b, c, d, ..., z\}, \mathcal{Z} = \{0, 1, 2\}, \lambda, \delta, \sigma_0 = A \rangle$$

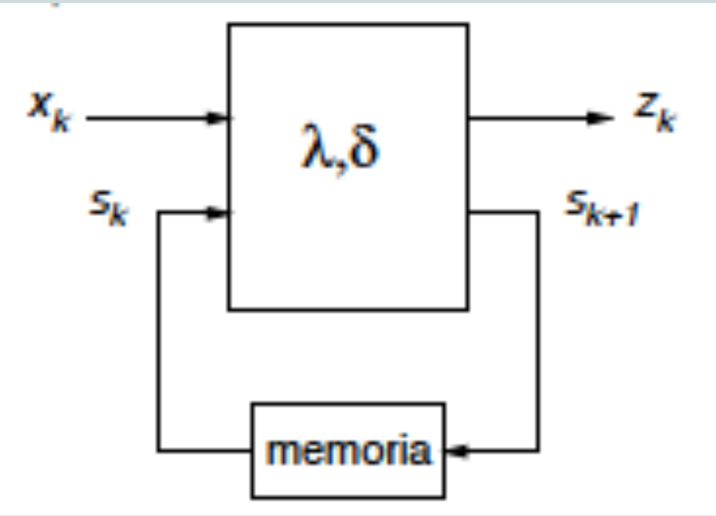


Simulazioni

- Dato uno stato iniziale (σ_i) e una sequenza di ingressi, si puó calcolare la risposta del sistema in maniera piuttosto semplice sia utilizzando il grafo o la tabella di transizione dello stato
- Si noti che il processo di elaborazione descritto da una MSF è sequenziale

Modello di Huffman

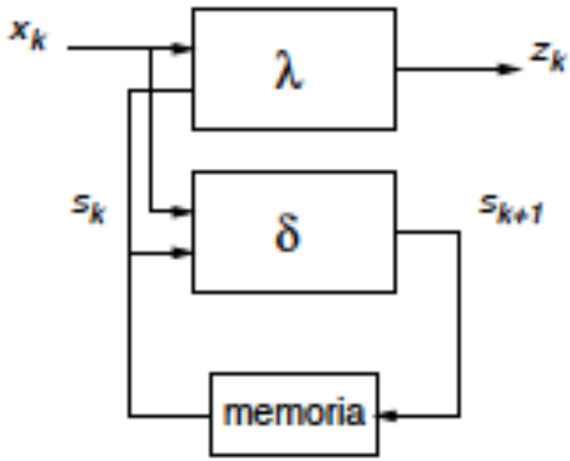
- Affinché le funzioni δ e λ possano calcolare lo stato futuro e l'uscita, lo stato presente deve rimanere stabile in ingresso per un periodo di clock.
- Questo richiede una opportuna rete di ritardo che impedisca che i cambiamenti dello stato futuro si riflettano immediatamente su quello presente



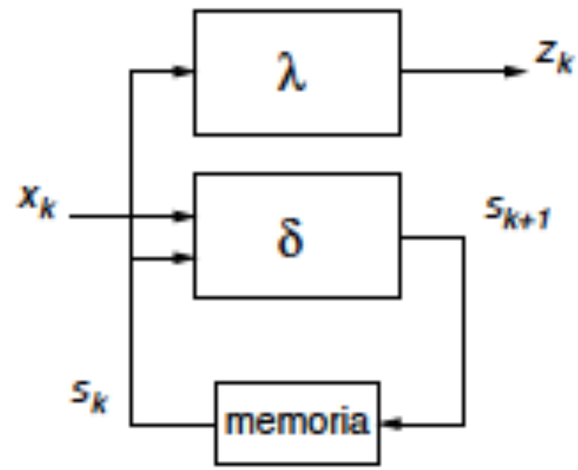
- Si nota che il blocco λ,δ non ha memoria e quindi puó essere realizzato in maniera combinatoria

Modello di Huffman

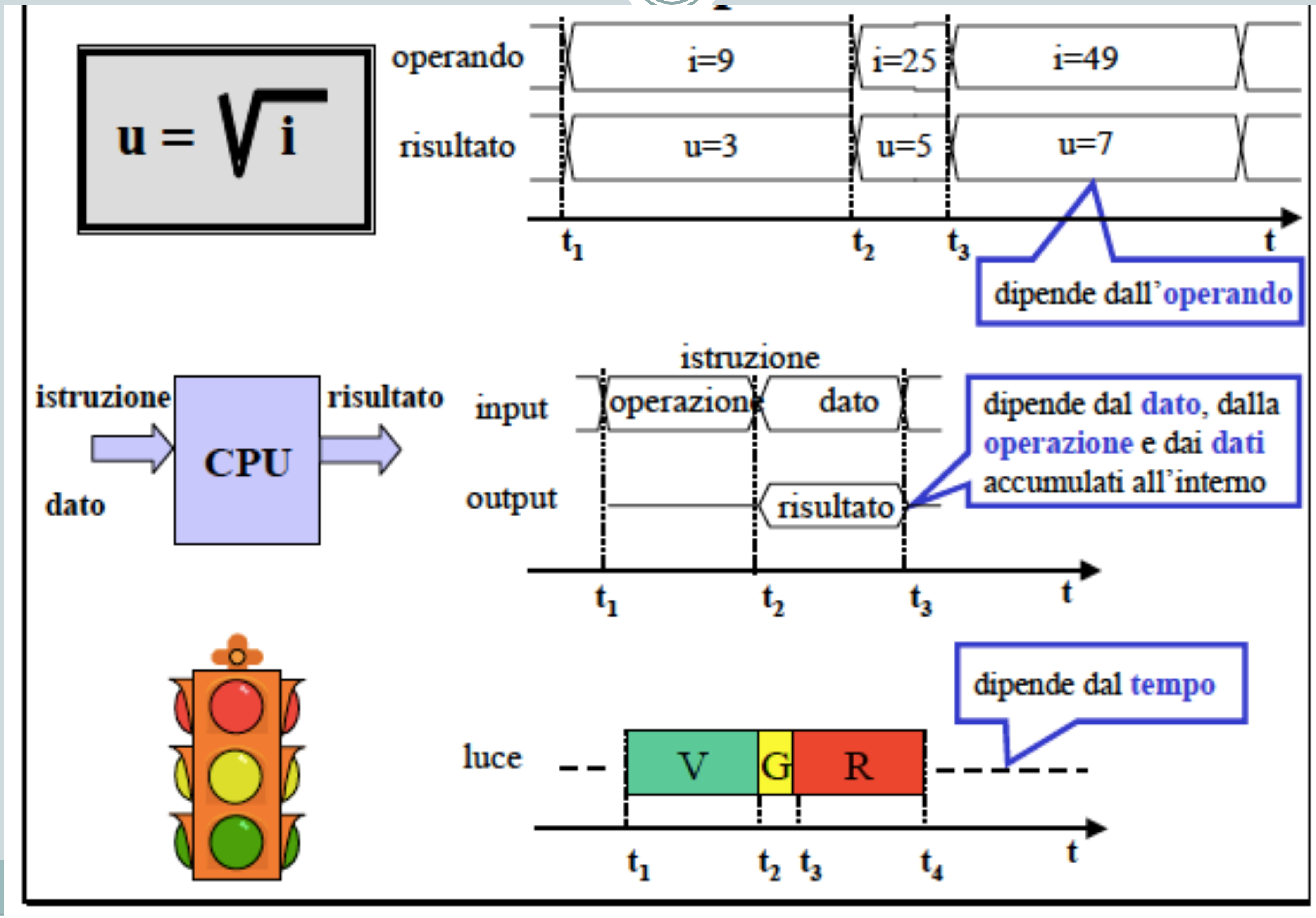
Modello di Mealy



Modello di Moore



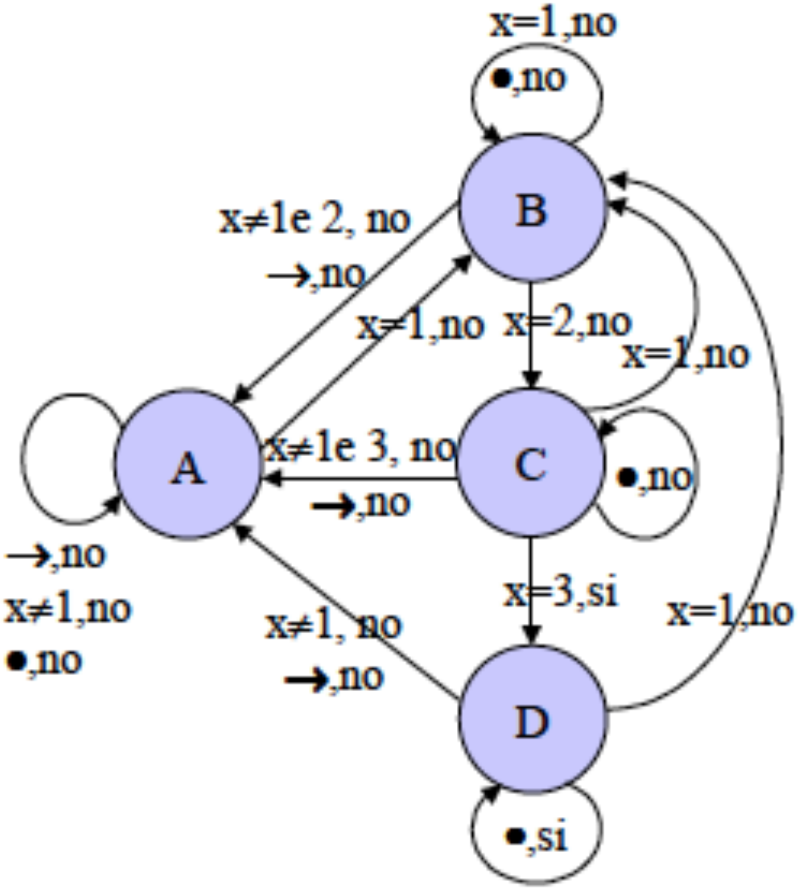
Esempi: tipologie relazioni ingresso/uscita



Esempio

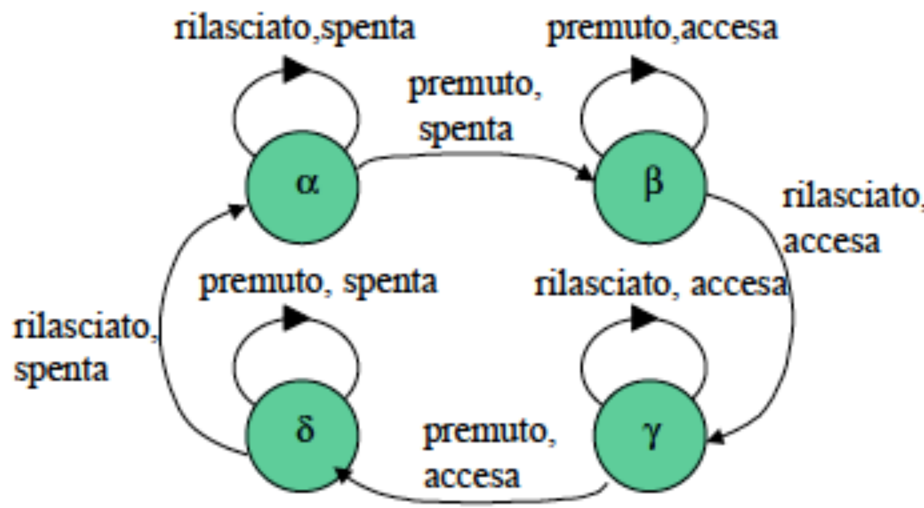
Stringa: →x• x• x• x• x• x• x• x• … con x: {0,1,..,9}

Risposta: "si" se x• x• x• = 1• 2• 3• , "no" in ogni altro caso



	→	•	1	2	3	4÷9
A	A,no	A,no	B,no	A,no	A,no	A,no
B	A,no	B,no	B,no	C,no	A,no	A,no
C	A,no	C,no	B,no	A,no	D,si	A,no
D	A,no	D,si	B,no	A,no	A,no	A,no

Un esempio di macchina asincrona: la lampada da tavolo



pulsante i ∈ I:{rilasciato,premuto}
lampadina u ∈ U:{spenta, accesa}

	rilasciato	premuto
α	**α**, spenta	**β**, spenta
β	**γ**, accesa	**β**, accesa
γ	**γ**, accesa	**δ**, accesa
δ	**α**, spenta	**δ**, spenta