Universidade de Brasília

Faculdade do Gama

Matemática Discreta 2

Prof. Dr. Glauco Vitor Pedrosa

Anéis

- Anel é uma estrutura algébrica que consiste em um conjunto A (*não vazio*) associado a **duas** operações binárias:

<A, *, Δ >

- Para a estrutura algébrica acima ser considerada um anel, ela precisa satisfazer a três propriedades:
  1. a estrutura <A, *> deve ser um **grupo abeliano**
  2. a operação Δ deve ser **associativa**
  3. a operação Δ deve ser **distributiva** em relação à operação *

Exemplo

- Mostre que a estrutura $<Q, *, \Delta>$ é um anel

As operações $*$ e Δ são definidas como: $a*b = a+b-1$

$$a \Delta b = a+b-ab$$

Para mostrar que $<Q, *, \Delta>$ é um anel, precisamos mostrar que:

1) $<Q, *>$ é grupo abeliano
2) A operação Δ é associativa
3) Distributividade da operação Δ em relação a $*$, ou seja:

$$\begin{cases} a \Delta (b*c) = (a \Delta b) * (a \Delta c) \\ (a*b) \Delta c = (a \Delta c) * (b \Delta c) \end{cases}$$

Exemplo

- Seja A = {0, 1} e as operações * e Δ definidas nas tábuas abaixo. Verifique se <A, *, Δ> é um anel

*	0	1
0	0	1
1	1	0

Δ	0	1
0	0	0
1	0	1

Para mostrar que <A, *, Δ > é um anel, precisamos mostrar que:

1) <A, *> é grupo abeliano
2) A operação Δ é associativa
3) Distributividade da operação Δ em relação a *, ou seja:

$$\begin{cases} a \,\Delta\, (b*c) = (a \,\Delta\, b) * (a \,\Delta\, c) \\ (a*b) \,\Delta\, c = (a \,\Delta\, c) * (b \,\Delta\, c) \end{cases}$$

Exercício

Sabe-se que $A = \{a, b, c, d\}$ e $<A, *, \Delta>$ é um anel em que os elementos neutros das operações $*$ e Δ são, respectivamente, $\underline{a}$ e $\underline{b}$. Conhecendo-se os compostos $\underline{b} * \underline{b} = \underline{a}$, $\underline{c} * \underline{c} = \underline{a}$, $\underline{c}\ \Delta\ \underline{d} = \underline{a}$, construir as tábuas das duas operações.

Dicas:
$a\ \Delta\ (b*c)$
$b\ \Delta\ (a*d)$
$c\ \Delta\ (d*a)$
$d\ \Delta\ (b*a)$
$d\ \Delta\ (a*c)$

Exercício

Complete a tábua abaixo sabendo que <A, *, Δ> é um anel

*	0	1	2	3
0	0			
1		2		
2			0	
3				2

Δ	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Tipos de anéis

- **Anéis comutativos**
  - se a operação Δ for comutativa
- **Anéis com unidade**
  - se a operação Δ tiver elemento neutro

Exercício: Mostre que < Q, *, Δ> é um **anel comutativo e com unidade**, onde:

$x * y = x+y-3$

$x \,\Delta\, y = x + y - \frac{xy}{3}$

Exercício

- Seja $< A, *, \Delta >$, em que $A = \{e, a, b, c\}$, um anel **comutativo com unidade**
- Sabendo que:
  - o elemento neutro de Δ é a
  - o elemento neutro de $*$ é e.
  - $b * b = e$
  - $b \Delta c = e$
- Construa as tábuas das operações do anel A

Dicas:

$b \Delta (b*c)$ $\quad$ $e \Delta (b*c)$

$c \Delta (b*c)$

$c \Delta (a*c)$

Divisores de zero em um anel

- **Dado um anel <A,** *, Δ>
- Considere:
    - e_* o elemento neutro da operação *
    - a, b ∈ A, tal que: a $\neq e_*$ e b $\neq e_*$
- Se a Δ b = e_* então dizemos que a e b são **divisores de zero** do anel <A, *, Δ>
- **Exemplo:**
- Os divisores de zeros do anel <$Z_6, +, .$ > são os elementos {2,3,4}, pois 2*3 = 0 e 3*4 = 0

Exercício

- Determine os divisores de zero dos seguintes anéis:

a) $<Z_8, +, . >$

{2, 4, 6} pois 2*4 = 0 e 4*6 = 0

a) $<Z_{18}, +, . >$

{2, 3, 4, 6, 8, 9, 12}

Corpos

- Chamamos de **corpo** todo anel comutativo e com unidade no qual todo elemento possui simétrico em relação à operação Δ (exceto o elemento neutro da operação *)

O anel <Z_3, +, . > é um corpo. Por que?

O anel <Z_4, +, . > , não é um corpo. Por que?

Teorema

Todo anel <Z_p, +, . > onde p é primo é um corpo

Exercício

Verifique se <C,*, Δ> é um corpo, onde C = {a,b,c} e as operações * e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Δ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

1° passo: verificar se <C, *> é um grupo abeliano:

a) A operação * é comutativa? Sim!
b) Tem elemento neutro? Sim!
c) Tem elemento simétrico? Sim!
d) É associativa? Sim!

(a*b)*c = a*(b*c)
a*c = a*a
a = a

(b*c)*a = b*(c*a)
a*a = b*c
a = a

Exercício

Verifique se <C,*, Δ> é um corpo, onde C = {a,b,c} e as operações * e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Δ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

2° passo: verificar se a operação Δ é associativa

Podemos ver pela tábua da operação Δ que ela é comutativa.
Essa propriedade reduz nossos testes para verificar se Δ é associativa

$(a \Delta b) \Delta c = a \Delta (b \Delta c)$
$a \Delta c = a \Delta c$
$a = a$

$(b \Delta c) \Delta a = b \Delta (c \Delta a)$
$c \Delta a = b \Delta a$
$a = a$

Exercício

Verifique se <C,*, Δ> é um corpo, onde C = {a,b,c} e as operações * e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Δ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

3° passo: verificar a Distributividade da operação Δ em relação a *, ou seja:

a Δ (b*c) = (a Δ b) * (a Δ c)
a Δ a = a * a
a = a

(a*b) Δ c = (a Δ c) * (b Δ c)
b Δ c = a * c
c = c

Exercício

Verifique se <C,*, Δ> é um corpo, onde C = {a,b,c} e as operações * e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Δ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

4° passo: verificar se a operação Δ é comutativa

Só olhando na tábua já podemos confirmar que a operação Δ é comutativa

Exercício

Verifique se <C,*, Δ> é um corpo, onde C = {a,b,c} e as operações * e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Δ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

5° passo: verificar se a operação Δ tem elemento neutro

Só olhando na tábua já podemos ver que o elemento neutro de Δ é elemento b

Exercício

Verifique se <C,*, Δ> é um corpo, onde C = {a,b,c} e as operações * e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

*	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Δ	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

6° passo: verificar se todos os elementos tem elemento simétrico com relação à operação Δ

Olhando na tábua da operação Δ, o elemento a é o único elemento que não tem simétrico. Porém, o elemento a é o elemento neutro da operação *

Logo, todas as condições foram satisfeitas e, portanto, <C,*, Δ> é um corpo