Universidade de Brasília
Faculdade do Gama

Matemática Discreta 2

Prof. Dr. Glauco Vitor Pedrosa

Estruturas Algébricas

- Uma estrutura algébrica é um par composto por um **conjunto A não vazio** e uma **operação binária em A**
- Notação: <A, *>
- As estruturas algébricas podem ser classificadas em:
  - Grupóide
  - Semi-grupo
  - Monóide
  - Grupo
  - Grupo Abeliano

Grupóide

- Um grupóide é um par <A, *>, em que * é uma operação binária interna que **<u>não</u>** precisa satisfazer nenhuma das 4 propriedades: comutativa, associativa, elemento neutro e elemento simétrico.

<Z, / >

- Exemplo: <Z, -> é um grupóide.
- Prova: Seja a, b, c ∈ Z
  - a-(b-c) = (a-b)-c → essa operação não é associativa
  - a-b = b-a → essa operação não é comutativa
  - a-e = e-a = a → não existe nenhum elemento dentro do conjunto Z que satisfaz essa propriedade
  - Como não existe elemento neutro, então também não existe elemento simétrico

Semigrupo

- Um semigrupo é uma estrutura algébrica cuja operação possui a propriedade **associativa**
- Se possuir a propriedade comutativa, dizemos que é um **semigrupo comutativo**
- Exemplo:

  $\langle N^*, *\rangle$, em que $a*b = a+b$

  $\langle Z, *\rangle$, em que $a*b = \max(a,b)$

Monóide

- Um monóide é um semigrupo que possui **elemento neutro**
- Exemplo:

<Z*, . > em que

$. : Z \times Z \rightarrow Z$

$(a,b) \rightarrow (a.b)$

a) Propriedade associativa: $(a.b).c = a.(b.c)$

b) Elemento neutro

$a, e \in Z^*$

$a.e = e.a = a$

Grupo

- Um grupo é um monóide que possui **elemento simétrico**
- Exemplo:

<Z*, . >, em que $. : Z \times Z \rightarrow Z$

$(a,b) \rightarrow (a.b)$

a) Propriedade associativa: $(a.b).c = a.(b.c)$

b) Elemento neutro

$a, e \in Z^*$

$a.e = e.a = a$

c) Elemento simétrico

$a.a' = e$

$a' = 1/a$

Grupo Abeliano

- Um grupo abeliano é um grupo que possui a propriedade **comutativa**
- Exemplo:

(Z, +), em que

$. : Z \times Z \rightarrow Z$

$(a,b) \rightarrow a+b$

a) Propriedade associativa: $(a+b)+c = a+(b+c)$

b) Elemento neutro

$a, e \in Z^*$

$a+e = e+a = 0$

c) Elemento simétrico

$a+a' = a'+a = e$

$a' = -a$

d) Propriedade comutativa

$a+b = b+a$

Exercício

- Seja A = {a,b,c,d} e a operação * dada pela tábua abaixo. Sabendo-se que a operação * é associativa, verifique se a operação é um grupo abeliano

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Exercício

- Verifique se a operação * definida pela tábua abaixo é um grupo abeliano

*	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	3	2	1
3	1	2	3	4
4	2	1	4	3

Exercício

- Verifique se a operação * definida pela tábua abaixo é um grupo abeliano

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Classes Residuais

- Denotamos por Z_m = {0, 1, 2, 3, ..., m-1}

- Exemplo:

a) Z_2 = {0, 1}

b) Z_6 = {0, 1,2,3,4,5}

b) Z_4 = {0, 1,2,3}

Exercício

- Classifique as estruturas algébricas abaixo:

a) <Z_4,*>, onde x*y = xy+y = é grupóide

b) <Z_4,+> = grupo abeliano

c) <Z_4,.> = monoide, pois não tem elemento simetrico