Universidade de Brasília
Faculdade do Gama

Matemática Discreta 2

Prof. Dr. Glauco Vitor Pedrosa

Indução Matemática

- É um método matemático utilizado para demonstrar a verdade de proposições
- Exemplo:

A soma dos n primeiros números naturais é dado por:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

O conjunto dos números naturais é infinito. Então, o teorema acima precisa ser verdade para qualquer valor de n. Como provar isso?

Indução Matemática

- A prova por Indução Matemática é dividida em dois passos:
- **Passo base**:
  - Provar que a proposição é válida para um valor pequeno
- **Passo Indutivo**:
  - Assumir que a proposição é válida para o valor n
  - Mostrar que a proposição continua válida para o valor n+1

Indução Matemática

Vamos provar por indução finita o seguinte teorema:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

- **Passo base**:
  - Para n = 1, temos:

$$1 = \frac{1.(1+1)}{2} = \mathbf{1}$$

O passo base é verdadeiro, então podemos prosseguir para o passo indutivo

Indução Matemática

Vamos provar por indução finita o seguinte teorema:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

- **Passo indutivo**:
  - Vamos assumir que o teorema acima é verdade para um valor n
  - Devemos provar que o teorema acima continua verdadeiro para um valor n+1
  - Para um valor n+1 temos a seguinte expressão:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{\mathbf{(n+1)}.(\mathbf{(n+1)}+1)}{2}$$

Será que isso é verdade?

Indução Matemática

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\frac{n.(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{(n+1).((n+1)+1)}{2}$$

$$\underbrace{\frac{n.(n+1)}{2} + (n+1)}_{\frac{n.(n+1)+2(n+1)}{2}}$$

$$\underbrace{\frac{n.(n+1)+2(n+1)}{2}}_{\frac{(n+1).(n+2)}{2}}$$

$$\frac{(n+1).(n+2)}{2}$$

São iguais, logo o teorema é verdade

Exercícios

Demonstrar as seguintes proposições

a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n\text{-}1) = n^2$, para $n \geq 1$

b) $2 + 4 + 6 + \ldots. + 2n = n(n+1)$, para $n \geq 1$

c) $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n-2) = n^2$, para $n \geq 1$

d) $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3}, \forall \text{ inteiros } n \geq 2$

e) $n < 2^n$ para $n \geq 1$

f) $n^2 > (n+1)$ para $n \geq 2$

g) $n^2 < 2^n$ para $n \geq 5$

h) $(n-1)! < n!$ para $n \geq 2$

Exercícios

Prove por indução matemática que

$n < 2^n$ para $n \geq 1$

Passo base

Para n = 1, temos que:

$$1 < 2^1$$

$$1 < 2$$

Temos que o passo base é verdadeiro, logo podemos prosseguir com o passo indutivo

Exercícios

Prove por indução matemática que

$n < 2^n$ para $n \geq 1$

Passo indutivo

- Assumimos que a expressão é verdadeira para n, ou seja, $\mathbf{n < 2^n}$
- Devemos mostrar que a expressão continua verdadeira para (n+1):

$$(\mathbf{n+1}) < 2^{n+1}$$

$$(\mathbf{n+1}) < 2^n + 2^n$$

Anteriormente, assumimos como verdade a seguinte expressão $\mathbf{n < 2^n}$. Se multiplicarmos por 2 em ambos os lados temos:

$$n.2 < 2^n.2$$

$$n+n < 2^n+2^n$$

Logo, temos que $n+1 < n+n < 2^n + 2^n$

Temos que a expressão é válida.

Exercícios

Prove por indução matemática que

$n^2 > (n+1)$ para $n \geq 2$

Passo base

Para n = 2, temos que:

$$2^2 > (2+1)$$

$$4 > 3$$

Temos que o passo base é verdadeiro, logo podemos prosseguir com o passo indutivo

Exercícios

Prove por indução matemática que

$n^2 > (n+1)$ para $n \geq 2$

Passo indutivo

- Assumimos que a expressão é verdadeira para n, ou seja, **$n^2 > (n+1)$**
- Devemos mostrar que a expressão continua verdadeira para (n+1):

$$(\mathbf{n+1})^2 > ((\mathbf{n+1})+1)$$

$$n^2+2n+1 > (n+2)$$

Anteriormente, assumimos como verdade a seguinte expressão $n^2 > (n+1)$.
Se somarmos **+1** em ambos os lados temos:

$$n^2+\mathbf{1} > (n+1)\mathbf{+1}$$

$$n^2+1 > n+2$$

Logo, temos que $n^2+2n+1 > n^2+1 > n+2$

Temos que a expressão é válida.

Exercícios

Prove por indução matemática que

$n^2 < 2^n$ para $n \geq 5$

Passo base

Para $n = 5$, temos que:

$$5^2 < 2^5$$

$$25 < 32$$

Temos que o passo base é verdadeiro, logo podemos prosseguir com o passo indutivo

Exercícios

Prove por indução matemática que

$n^2 < 2^n$ para $n \geq 5$

Passo indutivo

- Assumimos que a expressão é verdadeira para n, ou seja, $\mathbf{n^2 < 2^n}$
- Devemos mostrar que a expressão continua verdadeira para (n+1):

$$(\mathbf{n+1})^2 < 2^{\mathbf{n+1}}$$

$$n^2+2n+1 < \mathbf{2^n + 2^n}$$

Anteriormente, assumimos como verdade a seguinte expressão $\mathbf{n^2 < 2^n}$.
Se somarmos 2^n em ambos os lados temos:

$$n^2 \mathbf{+ 2^n} < 2^n \mathbf{+ 2^n}$$

Logo, temos que $n^2+2n+1 < n^2 + 2^n < 2^n + 2^n$

Temos que a expressão é válida.

Exercícios

Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n$ definida por:

$$a_1 = 3$$
$$a_i = 7.\, a_{i-1}$$

Prove, por indução matemática, que $a_n = \ 3.7^{n-1}$

Exercícios

Seja a sequência $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ definida recursivamente por:

$$a_0 = 1$$
$$a_i = 2.\,a_{i-1}$$

Ache a fórmula fechada para o i-ésimo termo e prove por indução matemática

Exercícios

Prove por indução matemática que, para todo número inteiro n > 0, então (3^n - 2) é um número ímpar.

Resposta:

Prova (por indução matemática):

(a) Passo base: Para $n = 1$, $3^1 - 2 = 1$ é ímpar. O passo base é verdadeiro.

(b) Passo indutivo: se a afirmação é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

- Hipótese indutiva: $\forall k \geq 1, 3^k - 2$ é ímpar.
- Deve-se mostrar que: $3^{k+1} - 2$ é ímpar.

Sabe-se que: $3^{k+1} - 2 = 3 \cdot 3^k - 2 = 3 \cdot 3^k - 6 + 4 = 3(3^k - 2) + 4$.

Pela hipótese indutiva $3^k - 2$ é um número ímpar que quando multiplicado por 3 e somado com 4 continua sendo um número ímpar.

Exercícios

Prove por indução matemática que:

$n! > 3^n$, para n > 6

Exercícios

Encontre a fórmula fechada do seguinte somatório e prove por indução:

$1 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^n$