Universidade de Brasília

Faculdade do Gama

Matemática Discreta 2

Prof. Dr. Glauco Vitor Pedrosa

Resumo do que veremos na aula de hoje...

- **Subgrupos**
  - **- Regras para verificar se um subconjunto H é subgrupo de G**
    - O elemento neutro de H é o elemento neutro de G
    - O simétrico de h ∈ H é o mesmo simétrico de h em G
    - Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Então a ordem de H divide a ordem de G. Em particular denotamos (G:H) = $\frac{|G|}{|H|}$
  - **Subconjunto das potências**
    - a^m = a*a*a*....*a
    - a^0 = elemento neutro
    - a^{-1} = elemento simétrico de a
  - **Subgrupo Gerador**
    - H = <a> = {a^0, a^1, a^2, a^3,...}
  - **Grupo Cíclico**
    - H é um grupo cíclico se H pode ser gerado por algum elemento do grupo
    - Ou seja, se existe a ∈ H, tal que H = <a>

Grupo

- Exemplo: Seja $\mathbb{Z}$ e x*y = x+y
- A estrutura <$\mathbb{Z}$, *> é um grupo? **Sim!**

- **É associativa**? Sim, pois

(x * y) *z = x * (y * z)

x+y * z = x+y+z

x+y+z = x+y+z

- **Tem elemento neutro**? Tem

x * e = x	e * x = x
x+e = x	e+x = x
e = 0	e = 0

- **Tem elemento simétrico**? Tem

x * x^{-1} = e

x + x^{-1} = 0

$x^{-1} = -x$

Grupo

- Exemplo: Seja N e x*y = x+y
- A estrutura <N, *> é um grupo? **Não!**

- **É associativa**? Sim, pois

(x * y) *z = x * (y * z)

x+y * z = x+y+z

x+y+z = x+y+z

- **Tem elemento neutro**? Tem

x * e = x	e * x = x
x+e = x	e+x = x
e = 0	e = 0

- **Tem elemento simétrico**? Não

$x * x^{-1} = e$

$x + x^{-1} = 0$

$x^{-1} = -x$

Grupo

- Exemplo: Seja Z e x*y = x
- A estrutura <Z, *> é um grupo? **Não!**

- **É associativa**? Sim, pois

(x * y) *z = x * (y * z)

x * z = x * y

x = x

- **Tem elemento neutro**? Não

x * e = x   e * x = x

x = x   e = x

- **Tem elemento simétrico**? Se não tem elemento neutro, não tem elemento simétrico

Subgrupo

- Seja <G,*> um grupo.
- Um subgrupo de G é uma estrutura algébrica <H,*> que satisfaz as seguintes condições:

1) H é um subconjunto **não vazio** de G
2) A operação * é uma operação binária interna em H

Subgrupo

- Exemplo: Seja Z e x*y = x+y
- A estrutura < Z, *> é um grupo? **Vimos no 2° slide que sim, pois a operação * satisfaz as propriedades associativa, tem elemento neutro e tem elemento simétrico**
- Então G = {0, 1} é um subgrupo de < Z, *>?

Não! Por que?

- Então Z_2 é um subgrupo de < Z, *>?

Sim! Por que?

- Então G = {0} é um subgrupo de < Z, *>?

Sim! Por que?

Subgrupos Triviais

- Todo grupo G, tal que $|G| \geq 2$, tem pelo menos, dois subgrupos triviais:

- ele próprio

- o conjunto formado pelo elemento neutro de G

Teorema de Lagrange

- Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Então a ordem de H divide a ordem de G. Em particular denotamos (G:H) = $\frac{|G|}{|H|}$

- Esse teorema nos diz quais **subconjuntos podem ser subgrupos** e quais podem não ser.

- **Porém, este teorema não é 100% confiável!**

Subgrupos Não-Triviais

- Seja <Z_5,+>, então H = {0,1,3} é um subgrupo? **Não, pois 1+3 = 4 e 4 não está em H**

Regra para verificar se um subconjunto H é subgrupo de G

- Seja G um grupo e H um subgrupo de G
  - O elemento neutro de H é o elemento neutro de G
  - O simétrico de h ∈ H é o mesmo simétrico de h em G

- Usando a regra acima, determine um subgrupo de <Z_4,+>

Teorema de Lagrange

- Exemplo: Usando o teorema de Lagrange, quais dos subconjuntos abaixo é um subgrupo do grupo <Z_{10}, +>

- H_1={0,2,4,8}
- H_2={0,2,4}
- H_3={0,8}
- H_4={0,5}
- H_5={1,2,4,8,6}
- H_6={0,2,4,6}

Subconjunto das potências

- Seja <G,*> um grupo e a ∈ G

Define-se:

$$a^m = \underbrace{a*a*a*a*..*a}_{\text{m vezes}}$$

- Exemplo: Seja <Z, *> em que a*b = 2ab

$a^2 = a*a = 2aa$

$a^3 = a*a*a = 2aa * a = 4aaa$

$a^4 = a*a*a*a = 4aaa * a = 8aaaa$

a^0 = elemento neutro do grupo

a^{-1} = simétrico de a

$a^{-2} = a^{-1} * a^{-1}$

Exercício

- Dada a tábua ao lado, determine:

a) 1^4
b) 2^4
c) 5^{-4}
d) 5^0
e) $1*1^4$
f) $2 * 1^4$
g) $5^4 * 2^{-2}$
h) $1^4 * 5^4 * 2^4$
i) $(1* 1^{-3} *5)^3$
j) $(1*2)^{(5*1)}$

*	1	5	2	3
1	1	5	2	3
5	5	1	5	5
2	2	5	1	1
3	3	5	1	5

Subgrupo Gerador

- Seja G um grupo e <u>a</u> ∈ G
- Um **subgrupo gerador H** é um subgrupo gerado pelo elemento a^m, para m ∈ Z
- Denotamos este subgrupo H por:

H = <a>

Subgrupo Gerador

- Exemplo:

Seja <Z_4, +>

O subgrupo gerador H = <2>

H = <2> = {... 2^{-3}, 2^{-2}, 2^{-1}, 2^{0}, 2^1,2^2,2^3, ...}

H = <2> = {0, 2}

O subgrupo gerador H = <3>

H = <3> = {... 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^{0}, 3^1, 3^2, 3^3, ...}

H = <3> = {0, 3, 2, 1}

Teorema de Lagrange

- Se *x* é elemento de um grupo G então $x^{|G|}$ = e

- Onde |G| é a ordem do grupo G, ou seja, a quantidade de elementos

- Exemplo:

Seja <Z_3, +>. A ordem de |Z_3| = 3 e o elemento neutro de Z_3 é 0

Então, $1^3 = 0$, $2^3 = 0$, $0^3 = 0$

Grupo Cíclico

- Seja G um grupo.
- Diz-se que G é um **grupo cíclico** se existe um elemento a ∈ G tal que o conjunto G coincide com o subconjunto gerado pelo elemento a
- Seja <Z_4, +>.

Z_4 é um grupo cíclico?

Se sim, quais são os subgrupos geradores de Z_4 ?

Exercício

- Dada a tábua abaixo, determine:

a) O subgrupo gerado por b

b) A ordem de c

c) Os geradores de G

d) Determine x ∈ G tal que b*x*c = a^{-1}

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b