

Lista de exercícios preparatórios para a 3ª Prova

1. Classifique a estrutura algébrica $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ em que $x*y = x+xy$

Resposta: grupóide

2. Classifique a estrutura algébrica $\langle K, * \rangle$ em que $K = \{1, 2, 7, 9\}$ e $x*y = y$

Resposta: semi-grupo

3. Classifique a estrutura algébrica $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ em que $x*y = x+y-3$

Resposta: grupo abeliano

4. Se $G = \{e, a, b, c\}$ é um grupo abeliano e regular, complete a tabela abaixo:

| * | e | a | b | c |
|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c |
| a | a | b | | |
| b | b | c | | |
| c | c | e | a | b |

5. Construir a tabela de um grupo $G = \{e, a, b, c, d, f\}$, sabendo que :

- I) G é abeliano
- II) O elemento neutro é e ;
- III) $a * f = b * d = e$
- IV) $a * d = b * c = f$
- V) $a * c = b * b = d$
- VI) $c * d = a$
- VII) é regular

| * | e | a | b | c | d | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| e | | | | | | |
| a | | | | | | |
| b | | | | | | |
| c | | | | | | |
| d | | | | | | |
| f | | | | | | |

6. O conjunto $G = \{e, a, b, c, d, f\}$ tem uma estrutura de grupo em relação à tabela abaixo:

| * | e | a | b | c | D | f |
|---|---|---|---|---|---|---|
| e | e | a | b | c | D | f |
| a | a | b | e | f | C | d |
| b | b | e | a | d | F | c |
| c | c | d | f | e | A | b |
| d | d | f | c | b | E | a |
| f | f | c | d | a | B | e |

- a) Seja $H_1 = \{e, c\}$. Verifique se H_1 é subgrupo de G . **É um subgrupo**

b) Seja $H_2 = \{e, a, f\}$. Verifique se H_2 é subgrupo de G . **Não é um subgrupo, pois $a*f = d$**

7. Verifique se $\langle \mathbb{Z}, *, \Delta \rangle$ é um anel. Considere as operações $*$ e Δ em \mathbb{Z} , definidas como: $a * b = a + b + 1$ e $a \Delta b = a + ab$

8. Sabe-se que $A = \{a, b, c, d\}$ e $\langle A, *, \Delta \rangle$ é um anel em que os elementos neutros das operações $*$ e Δ são, respectivamente, a e b . Conhecendo-se os compostos $b * b = a$, $c * c = a$, $c \Delta d = a$, construir as tábuas das duas operações. **(considere que as duas operações contem somente elementos regulares)**

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | a | d | c |
| c | c | d | a | b |
| d | d | c | b | a |

| Δ | a | b | c | d |
|----------|---|---|---|---|
| a | c | a | d | b |
| b | a | b | c | d |
| c | d | c | b | a |
| d | b | d | a | c |

9. Julgue as afirmações abaixo em V ou F

- a) (**V**) O subconjunto $H = \{0, 2, 4\}$ não é subgrupo de $\langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$
- b) (**V**) O subconjunto $H = \{0, 2, 4\}$ não é subgrupo de $\langle \mathbb{Z}_6, + \rangle$
- c) (**V**) O grupo $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ é cíclico
- d) (**F**) $(2^3 * 3^2) * 1^3 = 1$ no grupo $\langle \mathbb{Z}_4, + \rangle$ **Falso, pois dá 3**

10. Verifique se $\langle C, *, \Delta \rangle$ é um corpo, onde $C = \{a, b, c\}$ e as operações $*$ e Δ são definidas nas tábuas abaixo:

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | c | a |
| c | c | a | b |

| Δ | a | b | c |
|----------|---|---|---|
| a | a | a | a |
| b | a | b | c |
| c | a | c | b |

11. Verifique se $\langle \mathbb{R}, *, \Delta \rangle$ é um corpo. As operações são definidas como:

$$(a, b) * (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \Delta (c, d) = (ad - bc, ad + bc)$$

12. Qual a condição que deve ser imposta aos inteiros p e q de modo que a operação $x * y = p.x + q.y$, em \mathbb{Z} , seja :

- a) Associativa
- b) Comutativa
- c) Admita elemento neutro

Para satisfazer as três operações juntas, **$p = 1$ e $q = 1$**

13. Construa a tábua do grupo $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sabendo que :

- a) G é abeliano e regular
- b) O neutro é o elemento 5
- c) $1 * 6 = 2 * 4 = 5$
- d) $1 * 4 = 2 * 3 = 6$
- e) $1 * 3 = 2 * 2 = 4$
- f) $3 * 4 = 1$

| * | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | |
| 2 | | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | | | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | | | | |

14. Seja $\langle H, * \rangle$, em que $H = \{3, 5, 7, 9\}$ e a operação $*$ é dada pela tábua abaixo. Verifique se H é um grupo cíclico, se sim, determine os seus elementos geradores.

| * | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 5 | 5 | 7 | 9 | 3 |
| 7 | 7 | 9 | 3 | 5 |
| 9 | 9 | 3 | 5 | 7 |

15. Quais são os elementos regulares do grupo $\langle \mathbb{Z}_4, . \rangle$? **São os elementos $\{1, 3\}$**

16. Mostre que $\langle \mathbb{Q}, *, \Delta \rangle$ é um anel comutativo e com unidade, onde:

$$x * y = x + y - 3$$

$$x \Delta y = x + y - \frac{xy}{3}$$

Resposta: ela é um corpo

17. Seja $A = \{a, b, c, d\}$ e a seguinte operação

| * | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | a | b | c | d |
| b | b | c | d | a |
| c | c | d | a | b |
| d | d | a | b | c |

Determine o valor de $[(d * a^{-1})^{-1} * b^{-1}]^{-1}$

Resposta: a