Universidade de Brasília

Faculdade do Gama

Matemática Discreta 2

Prof. Dr. Glauco Vitor Pedrosa

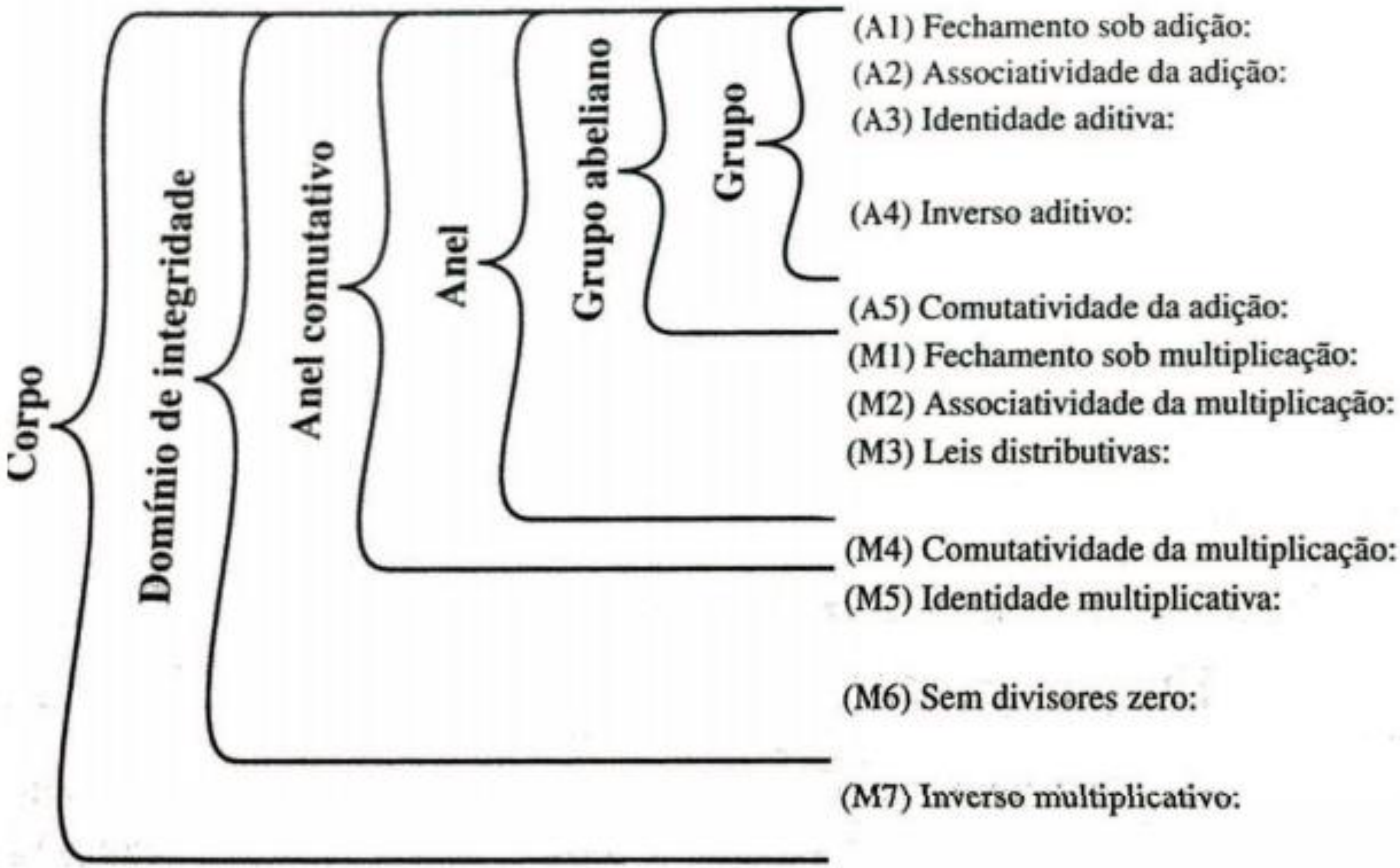
UnB Gama
O novo endereço da tecnologia

Álgebra Abstrata

- Por que se estuda Matemática?
- Além do fato dela permitir o exercício de algumas ações práticas do cidadão (como o gerenciamento de suas finanças, por exemplo) e a compreensão de alguns fenômenos relativos à sociedade (como a evolução de uma população, por exemplo), a Matemática fornece uma poderosa ferramenta simbólica que serve de suporte ao pensamento humano, explicitando intensidades, relações entre grandezas e relações lógicas, sendo, por este motivo e por excelência, a linguagem da Ciência.

Álgebra Abstrata

- A álgebra abstrata é uma sub-área da matemática
- É onde a linguagem matemática é definida e onde a compreensão dos conceitos, pelos seus níveis de abstração, requer o desenvolvimento de raciocínios que ajudarão na aprendizagem de outras ciências


Corpo
Domínio de integridade
Anel comutativo
Anel
Grupo abeliano
Grupo
(A1) Fechamento sob adição:
(A2) Associatividade da adição:
(A3) Identidade aditiva:
(A4) Inverso aditivo:
(A5) Comutatividade da adição:
(M1) Fechamento sob multiplicação:
(M2) Associatividade da multiplicação:
(M3) Leis distributivas:
(M4) Comutatividade da multiplicação:
(M5) Identidade multiplicativa:
(M6) Sem divisores zero:
(M7) Inverso multiplicativo:

Operação Binária

- Sejam A, B e C três conjuntos **não vazios**
- Uma operação binária * é uma função do produto cartesiano AxB em C
- *Em outras palavras, uma operação binária é uma função que leva 2 elementos (1 do conjunto A e 1 do conjunto B) para o conjunto C*
- Matematicamente, uma operação binária é denotada por:

$$*: A \times B \to C$$
$$(a, b) \to a * b = c$$

Operação Binária Interna em A

- Seja A um conjunto **não vazio**
- Uma operação binária interna * é uma função do produto cartesiano AxA em A
- *Em outras palavras, uma operação binária interna é uma função que leva 2 elementos do conjunto A para 1 elemento do conjunto A*
- Matematicamente, uma operação binária interna é denotada por:

$$*: AxA \to A$$

$$(a_1, a_2) \to a_1 * a_2 = a_3$$

Exemplo

- A operação soma no conjunto dos inteiros é uma operação binária interna

$$+: Z x Z \rightarrow Z$$

$$(x, y) \rightarrow x + y = r$$

- A subtração no conjunto dos números naturais é uma operação binária, **mas não é interna**:

$$-: N x N \rightarrow Z$$

$$(x, y) \rightarrow x - y = r$$

Algumas Propriedades das Operações Binárias Internas

Sejam a, b, c ∈ A e uma operação binária interna *.

As operações binárias internas podem ter as seguintes propriedades:

- <u>Associativa</u>

  $a*(b*c) = (a*b)*c$
- <u>Comutativa</u>

  $a*b = b*a$
- <u>Elemento Neutro</u>

  $\exists\, e \in A$, tal que $e*a = a*e = a$
- <u>Elemento Simétrico</u>

  $\exists\, a' \in A$, tal que $a'*a = a*a' = e$

Exemplo

- Seja K = {1, 2, 7, 9} e a operação

$$* : K \times K \rightarrow K$$

$$(x,y) \rightarrow (x*y) = y$$

- Esta é uma operação binária interna em K, pois vou operar com 2 elementos do conjunto K e esta operação vai retornar um outro elemento dentro do conjunto K
- **Verifique se a operação * possui as propriedades:**
  - **Associativa**
  - **Comutativa**
  - **Elemento neutro**
  - **Elemento simétrico**

Exemplo

É associativa? **Sim**

$(x * y) * z = x * (y * z)$

$y*z = x * z$

$z = z$

É comutativa? **Não**

$x * y = y * x$

$y = x$

Possui elemento neutro? **Não**

$x * e = e * x = x$

$e = x = x$

O elemento neutro tem que ser único!

Possui elemento simétrico? **Não, pois não possui elemento neutro**

Exemplo

- Seja Z e a seguinte operação:

$$* : Z \times Z \to Z$$

$$(a,b) \to (a+b-3)$$

Verifique se esta operação possui as propriedades:

Associativa

Comutativa

Elemento Neutro

Elemento Simétrico

Exemplo

É associativa? **Sim**

(x * y) * z = x * (y * z) ??

(x+y-3)*z = x * (y+z-3)

(x+y-3)+z-3 = x+(y+z-3)-3

x+y-6 = x+y-6

É comutativa? **Sim**

x * y = y * x

(x+y-3) = (y+x-3)

x+y-3 = x+y-3

Possui elemento neutro? **Sim**

x * e = e * x = x

(x+e−3) = x, temos que ε = 3

(e+x−3) = x, temos que ε = 3

Como 3 ∈ Z, então 3 é o elemento neutro dessa operação

Possui elemento simétrico? **Sim**

x * x' = e

(x+x'−3) = 3

x' = 6-x

Exemplo

- Seja Z e a operação

$$* : Z \times Z \rightarrow Z$$

$$(x,y) \rightarrow (x*y) = x+y+4x$$

- **Verifique se a operação * possui as propriedades:**
  - **Associativa**
  - **Comutativa**
  - **Elemento neutro**
  - **Elemento simétrico**

Exemplo

- Considere a seguinte operação * definida sobre o conjunto dos números reais R:

$$*: RxR \rightarrow R$$
$$(x,y) \rightarrow x*y = 2^{xy}$$

Verifique se * é comutativa, se é associativa e se tem elemento neutro

Tábua de uma Operação

- A tábua é uma matriz que representa uma operação realizada a partir da combinação de todos os elementos do conjunto
- Por exemplo, considere A = {1, 3, 4, 5} e a seguinte operação

$$*: (x,y) \rightarrow y$$

- A tábua que representa a operação acima é dada por:

*	1	3	4	5
1	1	3	4	5
3	1	3	4	5
4	1	3	4	5
5	1	3	4	5

Linha fundamental

Tábua de uma Operação

- Dado conjunto E = {1, 3, 9, 27}, construa a tábua da operação

$$*: (x,y) \to \text{mdc}(x,y)$$

*	1	3	9	27
1	1	1	1	1
3	1	3	3	3
9	1	3	9	9
27	1	3	9	27

Tábua de uma Operação

- Seja E = {0, 1, 2, 3, 4}, construa a tábua da operação

$$*: (x,y) \rightarrow (x+y) \bmod 5$$

*	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tábua de uma Operação

Como determinar as propriedades de uma operação usando a tábua?

- **Comutativa**
  - os elementos tem que ocupar posições simétricas com relação à diagonal

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1	a_{11}							
a_2		a_{22}						
$\vdots$			$\cdots$					
a_i				a_{ii}		a_{ij}		
$\vdots$					$\cdots$			
a_j				a_{ji}		a_{jj}		
$\vdots$							$\cdots$	
a_n								a_{nn}

Tábua de uma Operação

Como determinar as propriedades de uma operação usando a tábua?

- **Elemento Neutro**
  - A linha do elemento neutro é igual à linha fundamental
  - A coluna do elemento neutro é igual à linha fundamental

	a_1	a_2	$\cdots$	e	$\cdots$	a_n
a_1				a_1		
a_2				a_2		
$\vdots$				$\vdots$		
e	a_1	a_2		e		a_n
$\vdots$				$\vdots$		
a_n				a_n		

Tábua de uma Operação

Como determinar as propriedades de uma operação usando a tábua?

- **Elemento Simétrico**
  - Se a operação tem elemento neutro, então para descobrir quem é o elemento simétrico de um elemento a_i, basta procurar na linha do elemento a_i pelo elemento a_j em que $a_i * a_j$ = e.
  - Se $a_j * a_i$ = e, então o elemento simétrico de a_i é a_j

	a_1	a_2	$\cdots$	a_i	$\cdots$	a_j	$\cdots$	a_n
a_1								
a_2								
$\vdots$								
a_i						e		
$\vdots$								
a_j				e				
$\vdots$								
a_n								

Exercício

- Dada a tábua da operação * abaixo, verifique se ela possui as propriedades: comutativa, possui elemento neutro, elemento simétrico e associativa

*	1	2	5	7
1	1	5	1	5
2	5	1	2	2
5	1	2	5	7
7	5	2	7	1

Exercício

- Dada a tábua da operação Δ abaixo, verifique se ela possui as propriedades: comutativa, elemento neutro, elemento simétrico e associativa

Δ	1	2	5
1	2	1	1
2	1	2	5
5	1	5	2

Exercício

- Dada a tábua da operação Δ abaixo, verifique se ela possui as propriedades: comutativa, elemento neutro, elemento simétrico e associativa

*	1	2	5
1	1	1	1
2	1	1	2
5	1	2	2

Exercício

- Verifique se a operação abaixo possui:

a) elemento neutro

b) é comutativa

c) quais são os elementos que possuem simétricos

⊡	♡	♠	♢	♣
♡	♢	♣	♡	♠
♠	♣	♡	♠	♢
♢	♡	♠	♢	♣
♣	♠	♢	♣	♡

Exercício

- Construa a tábua de uma operação * sobre o conjunto C = {a, b, c, d}, sabendo que:

a) $\underline{b}$ é o elemento neutro;

b) o simétrico de $\underline{a}$ é $\underline{a}$

c) o simétrico de $\underline{c}$ é $\underline{c}$

d) $\underline{a} * \underline{c} = \underline{d} * \underline{d} = \underline{d}$

e) $\underline{a} * \underline{d} = \underline{c} * \underline{d} = \underline{c}$

f) é comutativa

Exercício

- Construa a tábua de uma operação * sobre o conjunto C = {1, 2, 3, 4}, sabendo que:

a) <u>2</u> é o elemento neutro;

b) o simétrico de <u>1</u> é <u>3</u>

c) <u>4</u> *<u>3</u> = <u>1</u>

d) é comutativa

e) é associativa

Dicas:
(1*1)*3
(3*3)*1
(4*4)*1

Propriedades das Operações Binárias

- <u>Elemento Regular</u>

Dado um conjunto A e uma operação *, dizemos que ***a*** ∈ A é um elemento regular quando:

$$\boldsymbol{a} * a_i \neq \boldsymbol{a} * a_j \text{ para todo } a_i \neq a_j$$

- Em outras palavras, um elemento ***a*** é regular quando na linha e na coluna de ***a*** não há elementos iguais.
- **Exemplo:**

Na tábua abaixo, apenas os elementos {1 e 2} são regulares

*	1	2	5
1	1	5	2
2	5	2	1
5	2	1	1

Exercício

Construa a tábua de uma operação * sobre E={*e*,*a*,b,c} de modo que * seja: comutativa, "*e*" seja o elemento neutro, x**a* = *a* para todo x e todos os elementos sejam regulares (exceto o a)

Exercício

- Seja * uma operação sobre o conjunto E = {0, 1, *a*, b, c} cuja tábua é apresentada abaixo. Verifique se * é: comutativa, calcule (c * 1) * *a*, e determine os conjuntos dos elementos simetrizáveis e regulares.

*	0	1	*a*	b	c
0	1	*a*	c	0	b
1	*a*	b	1	1	c
a	c	0	b	*a*	1
b	0	1	*a*	b	c
c	b	*a*	0	c	0

Propriedades das Operações Binárias

Sejam a, b, c $\in$ A e duas operações binárias internas * e Δ.

- Dizemos que Δ é distributiva à esquerda de * se:

$x \Delta (y*z) = (x \Delta y)*(x \Delta z)$

- Dizemos que Δ é distributiva à direita de * se:

$(y*z) \Delta x = (y \Delta x)*(z \Delta x)$

- Quando Δ é distributiva à esquerda e à direita de *, então dizemos que Δ é distributiva em relação a *

Exercício

- Sejam $x*y = x+xy$ e $x\Delta y = xy+1$ duas operações sobre Z. Verifique se Δ é distributiva em relação a operação *.

Verificando se Δ é distributiva à esquerda em relação a *:

$$a \ \Delta \ (b \ * \ c) = (a \Delta b) \ * \ (a \ \Delta \ c)$$

$$a \ \Delta \ (b + bc) = (ab + 1) \ * \ (ac + 1)$$

$$a \ (b + bc) + 1 = (ab + 1) + (ab + 1) (ac + 1)$$

$$a b + abc + 1 = ab + 1 + abac + ab + ac + 1$$

$$a b + a b c + 1 = a b + a^2 b c + a b + a c + 1 \quad \text{(falso)}$$

- Não é necessário verificar se é distributiva à direita, pois, mesmo que dê verdadeiro, a distributiva à esquerda já não é verdade.

  Portanto, Δ **não** é distributiva em relação a operação *

Exercício

- Dada as seguintes operações sobre o conjunto Z

$$(a,\ b)\ \Delta\ (c,\ d) = (a\,c,\ a\,d + bc)$$

$$(a,\ b) * (c,\ d) = (a + c,\ b + d)$$

Verifique se Δ é distributiva em relação a *

Verificando se Δ é distributiva à esquerda de *:

$(a,\ b)\ \Delta\ [(c,\ d) * (e,\ f)] = [(a,\ b)\ \Delta\ (c,\ d)] * [(a,\ b)\ \Delta\ (e,\ f)]$

$(a,\ b)\ \Delta\ (c + e,\ d + f) = (a\,c,\ a\,d + b\,c) * (a\,e,\ a\,f + b\,e)$

$(a\,(c + e),\ a\,(d + f) + b\,(c + e)) = (a\,c + a\,e,\ a\,d + b\,c + a\,f + b\,e)$

$(a\,c + a\,e,\ a\,d + a\,f + b\,c + b\,e) = (a\,c + a\,e,\ a\,d + b\,c + a\,f + b\,e)$

Logo, Δ é distributiva à esquerda de *

Verificando se Δ é distributiva à direita de *:

$[(c,\ d) * (e,\ f)]\ \Delta\ (a,\ b) = [(c,\ d)\ \Delta\ (a,\ b)] * [(e,\ f)\ \Delta\ (a,\ b)]$

$(c + e,\ d + f)\ \Delta\ (a,\ b) = (c\,a,\ c\,b + d\,a) * (e\,a,\ e\,b + f\,a)$

$((c + e)\,a,\ (c + e)\,b + (d + f)\,a) = (c\,a + e\,a,\ c\,b + d\,a + e\,b + f\,a)$

$(c\,a + e\,a,\ c\,b + e\,b + d\,a + f\,a) = (c\,a + e\,a,\ c\,b + d\,a + e\,b + f\,a)$

Logo, Δ é distributiva à direita de *. Portanto, a operação Δ é distributiva em relação à operação *.

Exercício

- Dada as tábuas da operações * e Δ abaixo, verifique se Δ é distributiva em relação a *

Δ	1	2	5
1	2	1	1
2	1	2	5
5	1	5	2

*	1	2	5
1	1	1	1
2	1	1	2
5	1	2	2