



Universidade de Brasília
Faculdade do Gama

Matemática Discreta 2

Prof. Dr. Glauco Vitor Pedrosa



Equações Diofantinas

- São equações da forma $ax + by = c$ onde a e b são números inteiros dados e x e y são incógnitas a serem determinados em \mathbb{Z}
- Exemplo: De quantos modos podemos comprar selos de R\$5 e R\$3 de modo a gastar R\$50?
- Expressão: $5x + 3y = 50$

Equações Diofantinas

- Consideremos a seguinte equação diofantina linear com duas incógnitas:

$$3x + 6y = 18$$

- Quais são os valores possíveis para x e y ?

$$3.\mathbf{4} + 6.\mathbf{1} = 18$$

$$3.\mathbf{(-6)} + 6.\mathbf{6} = 18$$

$$3.\mathbf{10} + 6.\mathbf{(-2)} = 18$$

Equações Diofantinas

- Existem equações diofantinas que **não tem solução**.

- Exemplo:

$$2x + 4y = 7$$

$$5x + 15y = 2$$

- De modo geral, uma equação diofantina $ax + by = c$ **não terá solução** se $d \nmid c$, tal que $d = \text{mdc}(a, b)$

Equações Diofantinas

- Encontre algum valor de x e y para a seguinte equações diofantinas:

a) $5x + 3y = 3$

Primeiramente, vamos verificar se a equação diofantina acima tem solução:

O $\text{mdc}(5,3) = 1$, e $1 \mid 3$, logo a equação tem solução

Em seguida, vamos resolver a seguinte equação

$$5x + 3y = 1$$

Para a equação acima temos $x = -1$ e $y = 2$

Agora vamos multiplicar os valores de x e y por **3**

Assim, temos que $x = -3$ e $y = 6$ é uma solução para a equação diofantina acima $5x + 3y = 3$.

Equações Diofantinas

- Encontre algum valor de x e y para a seguinte equações diofantinas:

b) $6x + 4y = 16$

Primeiramente, vamos verificar se a equação diofantina acima tem solução:

O $\text{mdc}(6,4) = 2$, e $2 \mid 16$, logo a equação tem solução!

Em seguida, vamos resolver a seguinte equação

$6x + 4y = 2$

Para a equação acima temos $x = 1$ e $y = -1$

Agora vamos multiplicar os valores de x e y por **8**

Assim, temos que **$x = 8$ e $y = -8$** é uma solução para a equação diofantina **$6x + 4y = 16$** .

Equações Diofantinas

- Seja (x_0, y_0) uma solução particular de $ax+by = c$
- Então todas as outras soluções de x e y serão dadas por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t \\ y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t \end{cases}$$

x_0 e y_0 são uma solução particular da equação
 a é o coeficiente que multiplica x
 b é o coeficiente que multiplica y
 d é o $\text{mdc}(a,b)$
 t é um número inteiro

Exemplo: Considere a seguinte equação diofantina **$2x+3y = 1$**

Uma solução particular para a equação acima é:

$$2(-1) + 3(1) = 1$$

Assim, temos que a solução geral dessa equação diofantina é dada por:

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

Exercício

- Encontre a **solução geral** das seguintes equações diofantinas:

a) $5x + 3y = 1$

$$\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 5t \end{cases}$$

b) $7x + 8y = 1$

$$\begin{cases} x = -1 + 8t \\ y = 1 - 7t \end{cases}$$

c) $6x + 4y = 6$

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$$

Exercício

- Encontre a **solução geral** das seguintes equações diofantinas:

a) $5x + 3y = 3$

b) $7x + 8y = 7$

c) $56x + 72y = 40$

d) $11x + 30y = 31$

e) $13x - 7y = 21$

f) $12x - 21y = 72$

Exercício

- Encontre a menor **solução positiva para x** da seguinte equação diofantina:

$$5x + 3y = 3$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 6 - 5t \end{cases}$$

Para $x > 0$, temos $-3 + 3t > 0$, $t > 1$

Logo, para $t = 2$, temos:

$$x = -3 + 3 \cdot \mathbf{2} = -3 + 6 = \mathbf{3}$$

$$y = 6 - 5 \cdot \mathbf{2} = 6 - 10 = \mathbf{-4}$$

Assim, a menor solução positiva para x da equação diofantina acima é $x = 3$ e $y = -4$

Exercício

- Encontre o menor **solução positiva para x** da seguinte equação diofantina:

$$14x + 22y = 50$$

$$\begin{cases} x = -75 + 11t \\ y = 50 - 7t \end{cases}$$

Para $x > 0$, $-75 + 11t > 0$, $t > (75/11) = 6,81\dots$

Logo para $t = 7$ temos:

$$x = -75 + 11 \cdot (7) = -75 + 77 = \mathbf{2}$$

$$y = 50 - 7 \cdot (7) = 50 - 49 = \mathbf{1}$$

Exercício

- Encontre **todas** as **soluções positivas** da seguinte equação diofantina:

$$18x + 5y = 48$$

$$\begin{cases} x = 96 + 5t \\ y = -336 - 18t \end{cases}$$

Para $x > 0$, temos $96 + 5t > 0$, $t > -(96/5) = -19,2$

Para $y > 0$, temos $-336 - 18t > 0$, $t < -(336/18) = -18,66\dots$

Logo, para $t = -19$ temos:

$$X = 96 + 5 \cdot (-19) = 96 - 95 = 1$$

$$Y = -336 - 18 \cdot (-19) = -336 + 342 = 6$$

Assim, o par de inteiros $x = 1$ e $y = 6$ é a única solução inteira e positiva da equação.

Exercício

- Em um evento foram vendidos R\$720 em ingressos. Sabendo que o valor do ingresso para homens custava R\$15 e para mulheres R\$8, quantos homens e quantas mulheres participaram do evento?

Exercício

- Dois irmãos, João e José, pescaram em uma manhã “x” e “y” peixes, respectivamente. Sabendo que $3x + 4y = 61$, determine as possíveis quantidades de peixes que eles conseguiram juntos.

Exercício

- Encontrar **todos** os números inteiros N tais que:
- O resto da divisão de N por 37 é 9
- O resto da divisão de N por 52 é 15

Exercício

- João pediu a Pedro que multiplicasse o **dia** de seu aniversário por 12 e o **mês** do aniversário por 31 e somasse os resultados. Pedro obteve 368. Qual é o produto do dia do aniversário de Pedro pelo mês de seu nascimento?

Exercício

- Guardo em um cofre só notas de R\$2 e R\$5. Quantas notas são necessárias, no mínimo, tendo ao menos 6 notas de cada valor, para que eu tenha R\$50,00