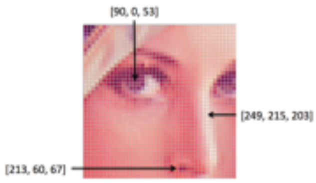
13/11/2025 – Matematicas Discretas 1 (Ude@)

1. Repaso clase anterior.

Conceptos claves

N-tuplas



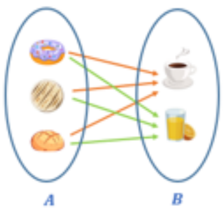
(R, G, B)

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

(i, j)

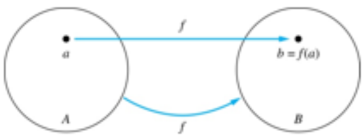
Producto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1,2, \ldots, n\}$$

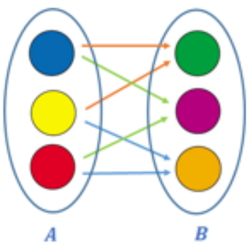


Funciones

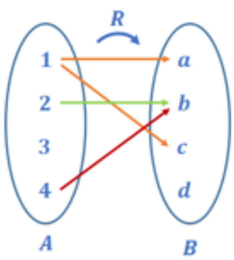
$$f = \{(a, b) \in A \times B | \text{a cada } a \in A \text{ le corresponde un unico } b \in B\}$$



Relaciones



$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge P(x, y)\}$$



Relaciones

Concepto	Definición	Ejemplo
Producto Cartesiano ($A \times B$)	Conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que se pueden formar con un elemento de A y uno de B.	Si $A = \{1,2\}$, $B = \{a, b\}$ entonces: $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$
Cardinalidad del producto cartesiano ($\lvert A \times B \rvert$)	Numero de elementos del producto cartesiano: $\lvert A \times B \rvert = \lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert$	$\lvert A \times B \rvert = \lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert = 2 \cdot 2 = 4$
Relación (R)	Subconjunto de $A \times B$ que cumple una propiedad $P(x, y)$	Sea R una relación $R \subseteq A \times B$ definida por: $R = \{(1, a), (2, b)\}$
Dominio de R ($\mathrm{dom}(R)$)	El conjunto de los primeros elementos de los pares en la relación.	$\mathrm{dom}(R) = \{1,2\}$
Rango de R ($\mathrm{ran}(R)$)	El conjunto de los segundos elementos de los pares en la relación.	$\mathrm{ran}\ (R) = \{a, b\}$
Número total de relaciones de A en B	Número total de relaciones de A en B: $\lvert \mathcal{P}(A \times B) \rvert = 2^{\lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert}$	$\lvert \mathcal{P}(A \times B) \rvert = 2^{\lvert A \rvert \cdot \lvert B \rvert} = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 16$

2. Representacion de las relaciones binarias

Representación de las relaciones

Sea la siguiente relación $T \subseteq A^2$. Suponiendo que se tiene el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones sobre este y que la relación T contiene los pares de puntos:

$$T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

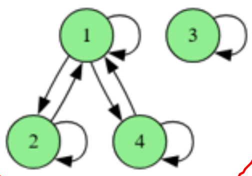
Arreglo matricial

T	1	2	3	4
1	X	X		X
2	X	X		
3			X	
4	X			X

Matriz binaria

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafo dirigido

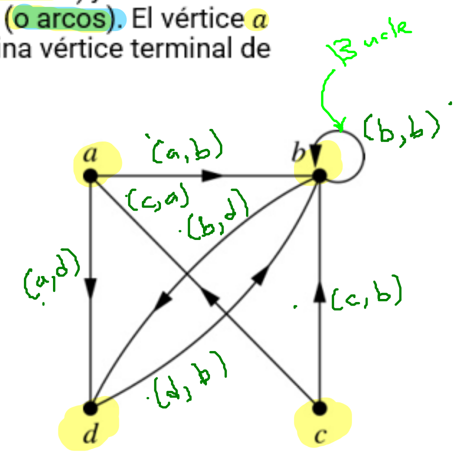


Vamos a verlo hoy

3. Grafo dirigido (Digrafo)

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

- Un grafo dirigido, o dígrafo, consiste en un conjunto V de vértices (o nodos) junto con un conjunto E de pares ordenados de elementos de V, llamados aristas (o arcos). El vértice a se denomina vértice inicial de la arista (a, b), y el vértice b se denomina vértice terminal de esta arista.
  inicio Fin
  - Una arista de la forma (a, a) se denomina bucle.



- **Ejemplo 4**: A continuación se muestra un dibujo del grafo dirigido con vértices a, b, c, d y e y aristas $(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b)$ y (d, b).

Grafo = G(V, E)

$V = \{a, b, c, d\}$

$E = \{(a,b), (b,b), (c,b), (c,a), (b,d), (d,b), (a,d)\}$

Ejemplo

14. Determine los pares ordenados en las relaciones en $\{1, 2, 3, 4\}$ correspondientes a estas matrices (donde las filas y columnas corresponden a los enteros listados en orden creciente):

a. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$M_{R_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

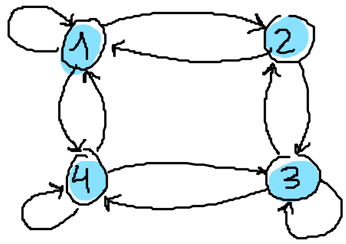
$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{ (1,1), (1,2), (1,4),$
$(2,1), (2,3)$
$(3,2), (3,3), (3,4),$
$(4,1), (4,3), (4,4) \}$

Obtenga el grafo dirigido. $G(V, E)$

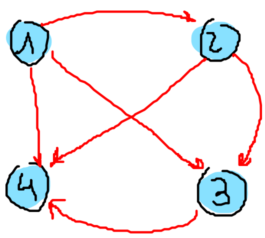
$V = \{1, 2, 3, 4\}$

$E = \{ (1,1), (1,2), (1,4),$
$(2,1), (2,3)$
$(3,2), (3,3), (3,4),$
$(4,1), (4,3), (4,4) \}$



12. Represente cada una de estas relaciones en $\{1, 2, 3,4\}$ con una matriz (con los elementos de este conjunto listados en orden creciente).

a. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$



4. Propiedades de las relaciones

A continuación se listan las propiedades (o características) de las relaciones:

1. Propiedad reflexiva.
2. Propiedad no reflexiva.
3. Propiedad antireflexiva.
4. Propiedad simétrica.
5. Propiedad no simétrica.
6. Propiedad antisimétrica.
7. Propiedad asimétrica.
8. Propiedad transitiva.
9. Propiedad no transitiva.
10. Propiedad antitransitiva.

Relación Reflexiva

Bucles

De manera informal, esta es una relación que solo relaciona cada **elemento consigo mismo**, y con ningún otro.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es reflexiva si, y solo si, todas las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales pertenecen a R, esto es:

$$R \text{ es reflexiva} \leftrightarrow \forall x\big((x, x) \in R\big)$$

Relación no Reflexiva

La relación **no es reflexiva** si **al menos** un elemento de A **no está relacionado consigo mismo**.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es no reflexiva si, y solo si, **no todas** las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales pertenecen a R:

$$R \text{ es no reflexiva} \leftrightarrow \exists x\big((x, x) \notin R\big)$$

Ejemplo:

Parejas de elementos iguales: (1,1),(2,2),(3,3),(4,4)

Consider the following relations on $\{1, 2, 3, 4\}$:

Reflexiva | No reflexiva

$R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$, Falta (3,3)

$R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$,

$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$,

$R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$,

$R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,

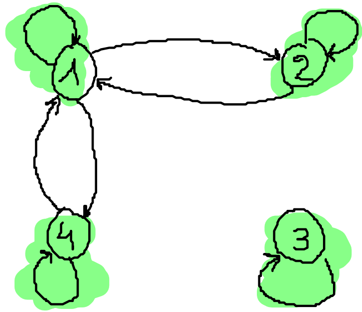
$R_6 = \{(3, 4)\}$.

Which of these relations are reflexive?

Observe las relaciones R_3 y R_1

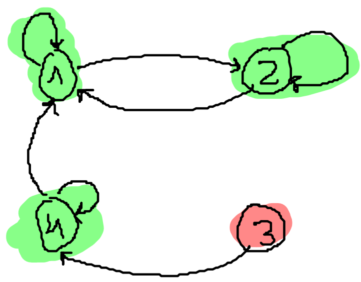
* $R_3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$$M_{R_3} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



* $R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$

$$M_{R_1} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

Relación antirreflexiva

Una relación es **antirreflexiva** (o **irreflexiva**) cuando ningún elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es antireflexiva si, y solo si, **ninguna** de las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales, cumplen R:

$$R \text{ es antirreflexiva} \leftrightarrow \neg\exists x\big((x,x) \in R\big)$$

Para las siguientes relaciones tenga en cuenta que $A = \{1,2,3,4\}$

- $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
- $S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
- $T = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
- $U = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
- $V = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

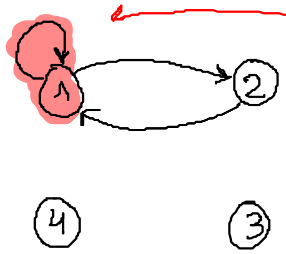
Ejemplo:

Analicemos S y U:

No sea antireflexiva

$* \; S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ ⟶ No es antirreflexiva (Bucle)

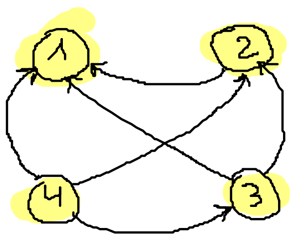
$$M_S = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



$* \; U = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$ ⟶ Antirreflexiva (No hay bucles).

$$M_U = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Antireflexiva



Relación simétrica

Una relación es simétrica si es una "relación de ida y vuelta", es decir Si a está relacionado con b, entonces b también lo está con a.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es simétrica si **todas** de las parejas ordenadas del conjunto producto $A \times A$ cumplen que: Si $(x, y) \in R$, entonces cumplen$(y, x) \in R$:

$$R \text{ es simetrica} \leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R\big)$$

Relación no simétrica

Una relación no simétrica es una "relación de un solo sentido" o una que no siempre es de ida y vuelta, en otras palabras es una relación en la cual cuando existe al menos un par de elementos donde uno se relaciona con el otro, pero no al revés.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es no simétrica si, y solo si, **no todas** las parejas de $A \times A$, cumplen que: Si $(x, y) \in R$, entonces cumplen$(y, x) \in R$:

$$R \text{ es no simetrica} \leftrightarrow \neg \forall x \forall y \big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R\big)$$

Ejemplo

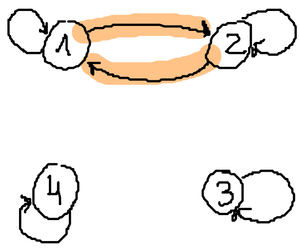
a. $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$
b. $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ Si
c. $\{(2,4), (4,2)\}$ Si
d. $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$
e. $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$
f. $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$

Veamos el punto b, c y f

Simetrica: $(x,y) \rightarrow (y,x)$

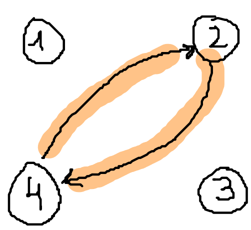
b. $R_b = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$ Si es simetrica

$$M_{R_b} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



c. $R_c = \{(2,4), (4,2)\}$

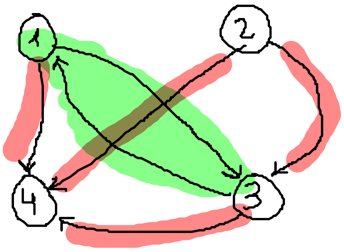
$$M_{R_b} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Si es simetrica

f. $R_f = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$ Falta: $(4,1), (3,2), (4,2)$ $(4,3)$ → No es simétrica

$$M_{R_5} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



Relación antisimétrica

De manera informal, una relación antisimétrica es una "relación de un solo sentido estricto" lo cual implica que solo se acepta el "doble vínculo" si es con uno mismo.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es antisimétrica si, y solo si, **ninguna** de las parejas ordenadas del conjunto producto $A \times A$ cumplen que: Si $(x, y) \in R$, entonces cumplen$(y, x) \in R$:

$$R \text{ es antisimetrica} \leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \wedge x \neq y \rightarrow (y, x) \notin R\big)$$

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$ No es antisimetrica
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$ Si es antisimetrica
- $W = \{(3,4)\}$ Si es antisimetrica

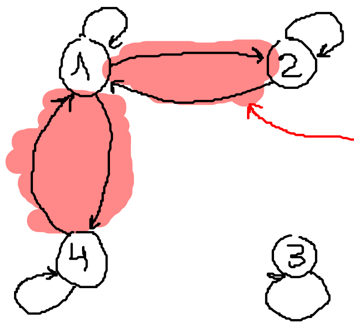
Ejemplo:

Analicemos T, V, W

* $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

No es antisimetrica

$$M_T = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

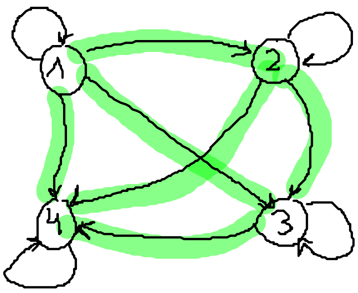


Relación en doble vía

* $V = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

Si es antisimétrica

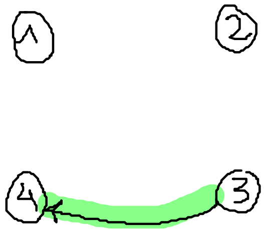
$$M_V = \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$



* $W = \{(3,4)\}$

Si es antisimétrica

$$M_W = \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$



Relación asimétrica

De manera informal, una relación es asimétrica cuando todo va en un solo sentido y nunca hay retroceso. Además, nadie se relaciona consigo mismo (no hay lazos).

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es asimétrica si, y solo si, se cumple que: Si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \notin R$:

$$R \text{ es asimetrica} \leftrightarrow \forall x \forall y\big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R\big)$$

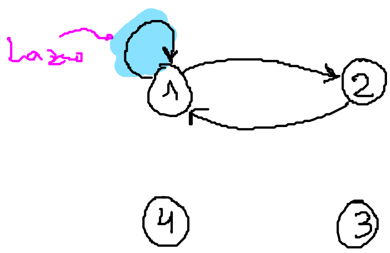
- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

Ejemplo: Veamos S, U, W.

* $S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$

No es asimétrica

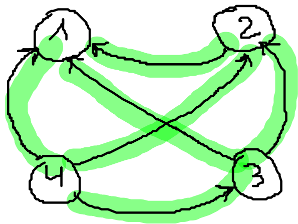
$$M_S = \begin{array}{cc} & \begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix} & \begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$



* $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$$M_U = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

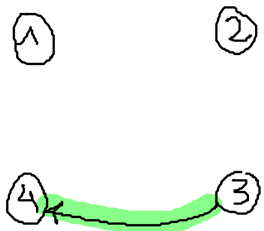
Si es asimétrica:
- no hay lazos (✓)
- Un solo sentido (✓)



* $W = \{(3,4)\}$

$$M_W = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Si es asimétrica



Relación transitiva

Una relación es transitiva cuando si un elemento está relacionado con un segundo, y ese segundo con un tercero, entonces el primero también está relacionado con el tercero. Es como una especie de "cadena lógica" que debe cerrarse.

$x \to y$ & $y \to z \Rightarrow x \to z$

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es transitiva, si y solo si, se cumple que: si un elemento esta relacionado con un segundo y este con un tercero, el primero esta relacionado con el tercero:

$$R \text{ es transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R\big)$$

Relación no transitiva

Una relación es no transitiva cuando la lógica de “si A se relaciona con B y B con C, entonces A con C” no siempre se cumple. Es decir, hay al menos un caso donde esa cadena se rompe.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es no transitiva, si y solo si, se cumple que: un elemento esta relacionado con un segundo, este con un tercero y el primero no esta relacionado con el tercero.

$$R \text{ es no transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \wedge (x,z) \notin R\big)$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

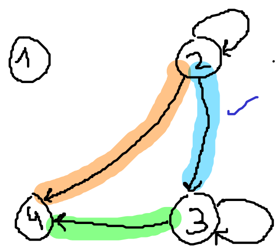
a. $\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$
b. $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
c. $\{(2,4),(4,2)\}$
d. $\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
e. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$
f. $\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,1),(3,4)\}$

$(x,y), (y,z), (x,z)$

b. $R_a = \{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

Si es transitiva

$$M_{R_a} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

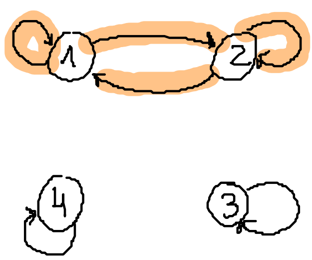


x	y	
2	3	(x,y)
y	z	
3	4	(y,z)
x	z	
2	4	(x,z)

b. $R_b = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

Si es transitivo

$$M_{R_b} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

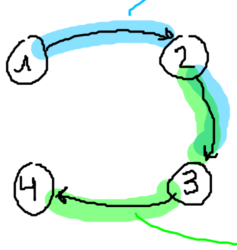


$(1,2) \to (x,y)$
$(2,2) \to (y,z)$
$(1,2) \to (x,z)$

d. $R_d = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

No es transitiva

$$M_{R_b} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



$(1,2)$
$(2,3)$
$\cancel{(2,4)}$

$(2,3)$
$(3,4)$
$\cancel{(2,4)}$

Relación antitransitiva

Informalmente, una relación es antitransitiva si es una "relación sin atajos" o una "relación de un solo paso". En otras palabras es como una regla que rompe la cadena lógica: si hay dos pasos seguidos, no puede haber un tercero que cierre el ciclo.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es antitransitiva, si y solo si, se cumple que: si un elemento esta relacionado con un segundo y este con un tercero, el primero no esta relacionado con el tercero.

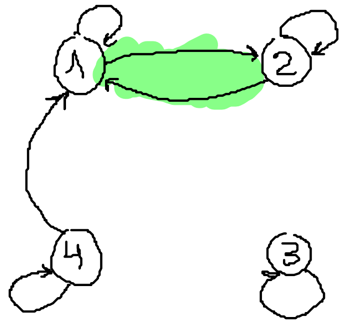
$$R \text{ es no transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\big((x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \notin R\big)$$

- $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$
- $S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$
- $T = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$
- $U = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$
- $V = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

* $T = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$

Es antitransitiva

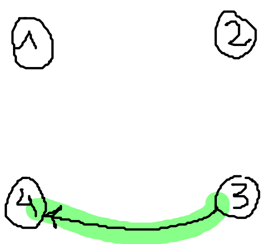
$$M_T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



* $W = \{(3,4)\}$

Si es antitransitiva

$$M_W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Resumen

La siguiente tabla resume las propiedades de las relaciones, asumiendo una relación de R sobre un conjunto A (es decir $R \subseteq A \times A$)

Propiedad	Descripción formal	Descripción informal
Reflexiva	$\forall x \in A, (x,x) \in R$	Todo elemento se relaciona consigo mismo
No Reflexiva	$\exists x \in A, (x,x) \notin R$	Hay al menos un elemento que no se relaciona consigo mismo
Antireflexiva	$\forall x \in A, (x,x) \notin R$	Ningún elemento se relaciona consigo mismo
Simétrica	$\forall x, y \in A, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$	Si un elemento se relaciona con otro, también al revés
No Simétrica	$\exists x, y \in A, (x,y) \in R \wedge (y,x) \notin R$	Hay al menos un par que no cumple la simetría
Antisimétrica	$\forall x, y \in A, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y$	Si dos elementos se relacionan en ambos sentidos, deben ser iguales
Asimétrica	$\forall x, y \in A, (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$	Si un elemento se relaciona con otro, no ocurre al revés
Transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$	Si un elemento se relaciona con un segundo, y este con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero
No transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \wedge (x,z) \notin R$	Hay casos donde se rompe la transitividad
Antitransitiva	$\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \notin R$	Nunca se forma una cadena transitiva

Resumen resultados

Antes de explicar las diferentes propiedades, suponiendo que se tiene el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones sobre este:

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

Resumen resultados

	Relación					
Propiedad	$R = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), \\ (2,1), (2,2), \\ (3,4), (4,1), \\ (4,4) \end{Bmatrix}$	$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), \\ (2,1) \end{Bmatrix}$	$T = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), \\ (1,4), (2,1), \\ (2,2), (3,3), \\ (4,1), (4,4) \end{Bmatrix}$	$U = \begin{Bmatrix} (2,1), (3,1), \\ (3,2), (4,1), \\ (4,2), (4,3) \end{Bmatrix}$	$V = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), \\ (1,3), (1,4), \\ (2,2), (2,3), \\ (2,4), (3,3), \\ (3,4), (4,4) \end{Bmatrix}$	$W = \{(3,4)\}$
Reflexiva	No	No	Si	No	Si	No
No Reflexiva	Si	Si	No	Si	No	Si
Antireflexiva	No	No	No	Si	No	Si
Simétrica	No	Si	Si	No	No	No
No Simétrica	Si	No	No	Si	Si	Si
Antisimétrica	No	No	No	Si	Si	Si
Asimétrica	No	No	No	Si	No	Si
Transitiva	No	No	No	Si	Si	Si
No transitiva	Si	Si	Si	No	No	No
Antitransitiva	No	No	No	No	No	Si

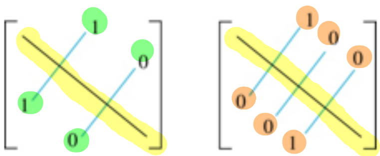
5. Representaciones y propiedades

Matrices de relaciones en conjuntos

- Si R es una relación reflexiva, todos los elementos de la diagonal principal de M_R son iguales a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- R es una relación simétrica si y solo si $m_{ij} = 1$ siempre que $m_{ji} = 1$. R es una relación antisimétrica si y solo si $m_{ij} = 0$ o $m_{ji} = 0$ cuando $i \neq j$.



(a) Symmetric (b) Antisymmetric

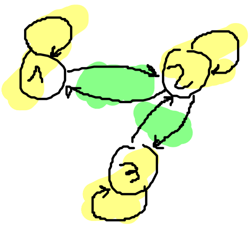
Ejemplo 3: Supongamos que la relación R en un conjunto esta representada por la matriz

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$A = \{1, 2, 3\}$

Si Si No

¿Es R reflexiva, simétrica y/o antisimétrica?



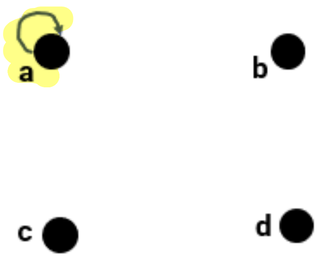
$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}$

Determinación de las propiedades de una relación a partir de su dígrafo

A partir del dígrafo se puede determinar el tipo de relación de R. A continuación se muestran algunos casos:

- **Reflexividad**: Debe haber un bucle en todos los vértices del grafo.
- **Simetría**: Si (x, y) es una arista, entonces (y, x) también lo es. (Doble sentido)
- **Antisimetría**: Si (x, y) con $x \neq y$ es una arista, entonces (y, x) no lo es. (Un solo sentido)
- **Transitividad**: Si (x, y) y (y, z) son aristas, entonces (x, z) también lo es.

Ejemplo 6: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:

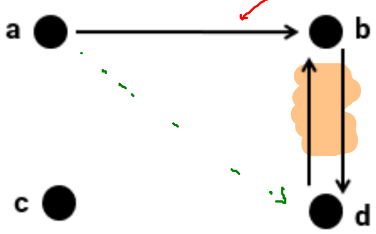


$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \{(a, a)\}$$

Reflexividad: No
Simetria : No
Antisimetria :
Transitividad :

Ejemplo 7: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:

No hay doble sentido



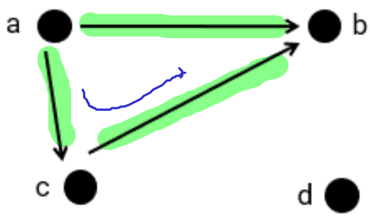
$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \{(a, b), (b, d), (d, b)\}$$

$\overset{x}{(a}, \overset{y}{b)}, (\overset{y}{b}, \overset{z}{d}) \longrightarrow \cancel{(\overset{x}{a}, \overset{z}{d})}$

No están

Reflexividad: No
Simetria : No
Antisimetria : No
Transitividad : No

Ejemplo 8: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:

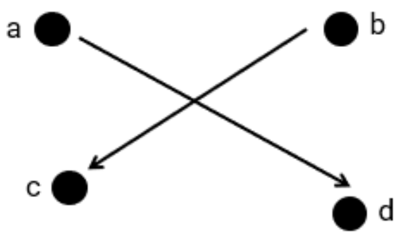


$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \{(a, b), (a, c), (c, b)\}$$

$(\overset{x}{a}, \overset{y}{c}), (\overset{y}{c}, \overset{z}{b}) \longrightarrow (a, b)$ ✓

Reflexividad: No
Simetria : No
Antisimetria : Si
Transitividad : Si

Ejemplo 9: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \{(a, d), (b, c)\}$$

Ver en diapositivas.

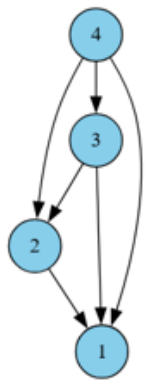
Ejemplo: A continuación se resumen todas las propiedades que cumple la relación U:

Relación	Resultado
Reflexiva	No
No Reflexiva	Si
Antireflexiva	Si
Simétrica	No
No Simétrica	Si
Antisimétrica	Si
Asimétrica	Si
Transitiva	Si
No transitiva	No
Antitransitiva	No

$$U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$M_U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U	**1**	**2**	**3**	**4**
1				
2	X			
3	X	X		
4	X	X	X	



6. Reflexividad, simetría y transitividad

La siguiente tabla resume las propiedades de las relaciones, asumiendo una relación de R sobre un conjunto A (es decir $R \subseteq A \times A$)

Propiedad	Descripción formal	Descripción informal
Reflexiva	$\forall x \in A, (x, x) \in R$	Todo elemento se relaciona consigo mismo
No Reflexiva	$\exists x \in A, (x, x) \notin R$	Hay al menos un elemento que no se relaciona consigo mismo
Antireflexiva	$\forall x \in A, (x, x) \notin R$	Ningún elemento se relaciona consigo mismo
Simétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$	Si un elemento se relaciona con otro, también al revés
No Simétrica	$\exists x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \notin R$	Hay al menos un par que no cumple la simetría
Antisimétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$	Si dos elementos se relacionan en ambos sentidos, deben ser iguales
Asimétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$	Si un elemento se relaciona con otro, no ocurre al revés
Transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$	Si un elemento se relaciona con un segundo, y este con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero
No transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \wedge (x, z) \notin R$	Hay casos donde se rompe la transitividad
Antitransitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \notin R$	Nunca se forma una cadena transitiva

Recordemos las propiedades reflexivas, simétricas y transitivas:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. ***R* es reflexiva**: Cada elemento está relacionado consigo mismo.

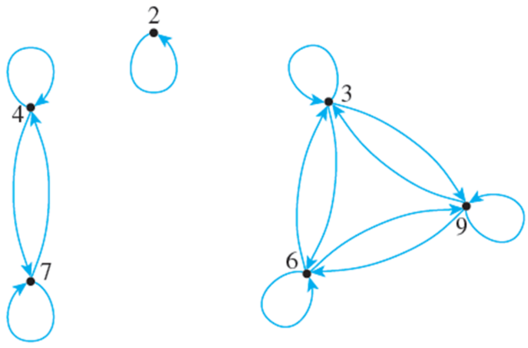
$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

2. ***R* es simétrica**: Si cualquier elemento está relacionado con cualquier otro elemento entonces, el segundo elemento está relacionado con el primero

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$$

3. ***R* es transitiva**: Si cualquier elemento está relacionado con el segundo y el segundo elemento está relacionado con el tercero entonces, el primer elemento está relacionado con el tercero.

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$$



Ahora retomemos el caso de la relacion antisimetrica.

Definición Relación antisimétrica

En términos de un dígrafo, una relación es **antisimétrica** si **nunca hay flechas en ambos sentidos entre dos elementos distintos**. Es decir, si hay una flecha que va de un elemento x a otro elemento y, y $x \neq y$, entonces **no puede existir una flecha que regrese de y a x**. La única excepción es cuando ambos elementos son iguales ($x = y$).

Formalmente, la relación R sobre un conjunto A **es antisimétrica** si:

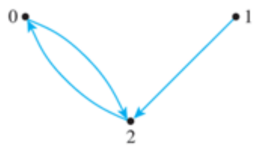
$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$$

Tomando la negación de la definición, puede ver que una relación R **no es antisimétrica** si y sólo si,

$$\exists x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \in R \land x \neq y$$

Según la expresión anterior, si existe al menor un caso en el que hay flechas en ambos sentidos entre elementos distintos R **no es antisimétrica**.

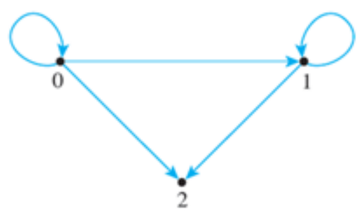
Relación R_1 no es antisimétrica



$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \{(0,2), (1,2), (2,0)\}$$

Relación R_2 es antisimetrica



$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$$

7. Relaciones de orden.

Definición

Una relación de orden es una relación binaria que organiza los elementos de un conjunto de forma estructurada. Existen dos tipos principales:

1. Relación Orden parcial
2. Relación de Orden total

a. Relacion de orden parcial.

Relación de orden parcial

Una relación $R \subseteq A \times A$ es de orden parcial si cumple las propiedades:

- **Reflexiva**: todo elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

- **Antisimétrica**: Si dos elementos están relacionados en ambos sentidos, entonces deben ser iguales.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$$

- **Transitiva**: Si x está relacionado con y y y con z, entonces x también está relacionado con z.

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$$

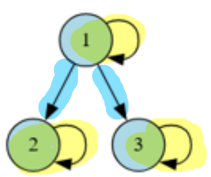
Propiedades: i. Reflexiva : $\forall x \in A, (x,x) \in R$

ii. Antisimetrica: $\forall x, y \in A, (x,y) \in R \land (y,x) \in R \to x = y$

iii. Transitiva: $\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \land (y,z) \in R \to (x,z) \in R$

Ejemplo 1: Sea $A = \{1,2,3\}$ determine si la relación $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\}$ es una relación de orden: Si

$$R_1 = \left\{\begin{matrix} (1,1), (2,2), (3,3), \\ (1,2), (1,3) \end{matrix}\right\}$$



$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓ Reflexiva: Si

✓ Antisimetrica: Si

✓ Transitiva: Si

$\underset{x\ y}{(1,3)}, \underset{y\ z}{(3,3)} \longrightarrow (1,3)$

R_1 es una relacion de orden

b. Relacion de orden total

Relación de orden total

Una relación de orden total es una relación de orden parcial en la que **todo par** de elementos es comparable.

Formalmente, Sea R un orden parcial sobre un conjunto A. Si para todo par de elementos $(x, y) \in A$, se cumple que $x\,R\,y$ y $y\,R\,x$, entonces decimos que los elementos x y y son **comparables**, y la relación R es una relación de orden total sobre A.

La notación habitual para relaciones de orden incluye símbolos como $x \leq y$ o $x \preccurlyeq y$. En este contexto, el par (A, R), donde para el caso será $(A, \leq)$ o $(A, \preccurlyeq)$ según el símbolo utilizado.

Las propiedades que caracterizan a una relación de orden (parcial o total) son:

- **Reflexiva**: $x \leq x$
- **Antisimétrica**: $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$
- **Transitiva**: $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$

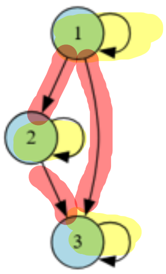
Ejemplo 2: Sea $A = \{1,2,3\}$ determine si $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$ es una relación de orden total.

Solución: La determinación de orden total se hace en dos partes.

Parte 1 - Verificación de la relación de orden

Parcial

$$R_2 = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), \\ (2,2), (2,3), (3,3) \end{Bmatrix}$$



Reflexiva: ✓

Antisimetrica: ✓

Transitiva: ✓

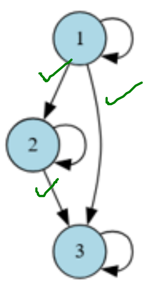
$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusión 1: Dado que la relación R_2 cumple con las tres propiedades (es reflexiva, antisimétrica y transitiva), podemos afirmar que la relación R_2 es una relación de **orden** sobre el conjunto A.

Parte 2 - Verificación de la Propiedad de Comparabilidad (Totalidad)

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), \\ (2,2), (2,3), (3,3) \end{Bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Comparabilidad total

Si

Conclusión 2: Como todos los pares de elementos distintos del conjunto A son comparables, la relación R_2 cumple la propiedad de totalidad.

Conclusión: Dado que la relación R_2 es una relación de orden parcial (es reflexiva, antisimétrica y transitiva) y además cumple con la propiedad de totalidad (todos los elementos son comparables), podemos concluir que R_2 es una relación de orden total. Mas exactamente R_2 es la relación **"menor o igual que"** ($\leq$) sobre el conjunto $A = \{1,2,3\}$, o sea:$(A, R_2) \rightarrow (A, \leq)$

7. Representaciones de relaciones de orden

a. Grafo dirigido.

Contextualización

De las diferentes formas de representación de una relación vamos a hacer énfasis en:

- Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)
- Representación usando diagramas de Hasse. (Simplificada)

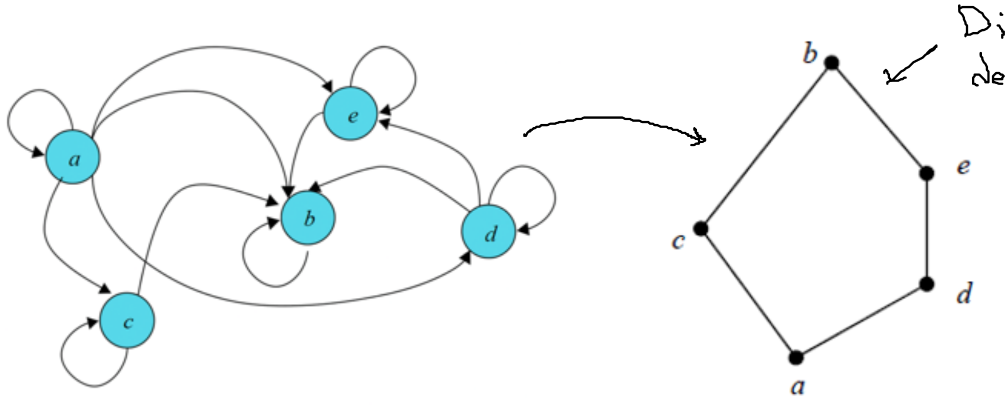


Diagrama de Hasse

Un grafo se define formalmente como un par ordenado:

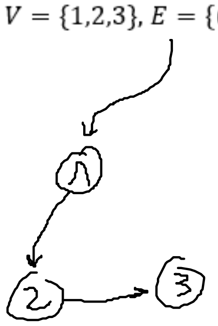
$$G = (V, E)$$

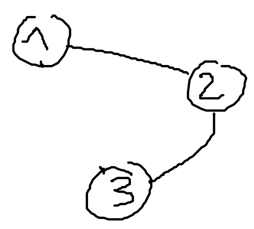
Donde:

- V es el **conjunto de vértices** (o nodos).
- E es el **conjunto de aristas** (o enlaces).

Los grafos pueden ser dirigidos o no dirigidos dependiendo de la naturaleza de E tal y como se muestra a continuación:

- **Grafo no dirigido**: $V = \{1,2,3\}$, $E = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$
- **Grafo dirigido**: $V = \{1,2,3\}$, $E = \{(1,2), (2,3)\}$



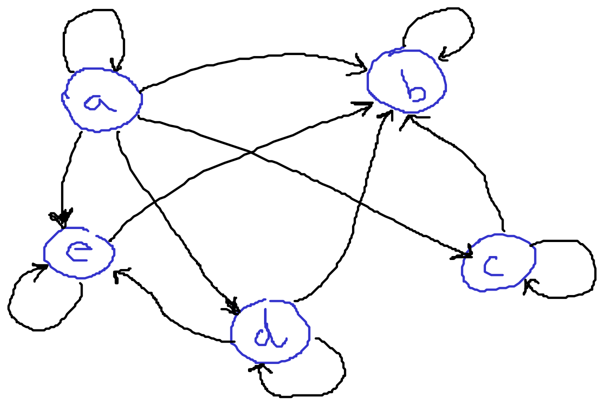


Las relaciones de orden se representan por medio de grafos dirigidos.

Ejemplo:

Ejemplo 1: Dados los siguientes vértices y aristas, grafique el dígrafo asociado:

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $E = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (c,b), (a,d), (a,e), (e,b), (a,b), (d,b), (d,e)\}$



b. Diagrama de Hasse

Un diagrama de Hasse es una forma gráfica de representar relaciones de orden parcial $(S, \preccurlyeq)$, de manera simplificada y estructurada, eliminando la redundancia visual de reflexividad y transitividad.

Diagrama de Hasse

Para construir un diagrama de Hasse a partir de un grafo dirigido, siga estos pasos:

1. **Eliminar los bucles**: Elimine los bucles (x, x) presentes en cada vértice ya que representan la **reflexividad**, que se da por supuesta..
2. **Eliminar las aristas transitivas**: Elimine todas las aristas (x, y) para las que exista un elemento $z \in S$ tal que $x \prec z \prec y$.
3. **Organizar verticalmente**: dibuje cada arista de modo que su vértice inicial quede debajo del vértice terminal. Finalmente, elimine las flechas, ya que en un diagrama de Hasse todas las aristas se entienden como orientadas hacia arriba.

Grafo dirigido (Digrafo)

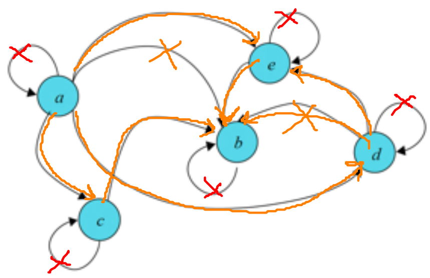
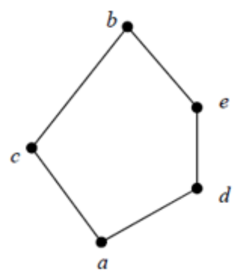
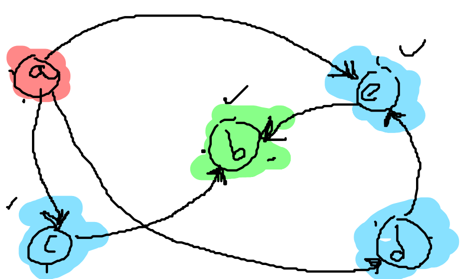
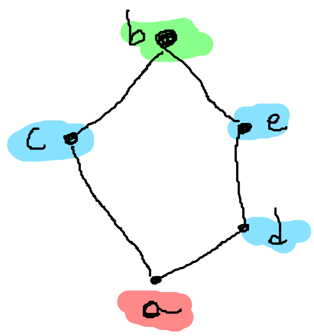


Diagrama de Hasse

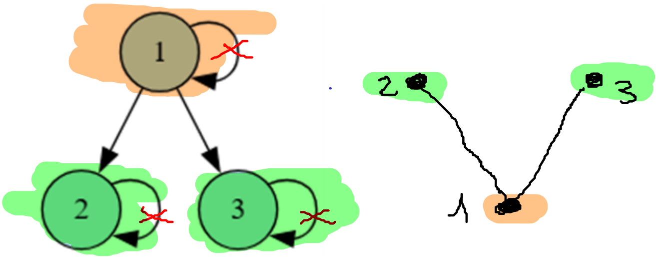




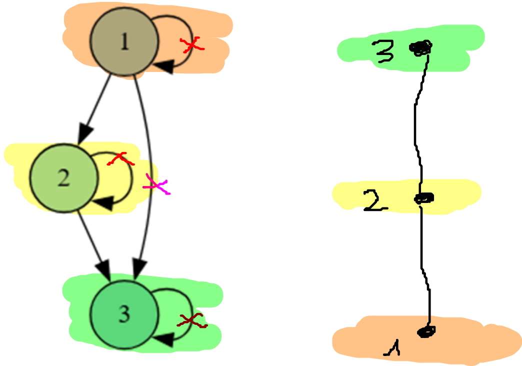


Obtengamos los diagramas de Hasse para las dos relaciones previamente vistas:

Orden Parcial

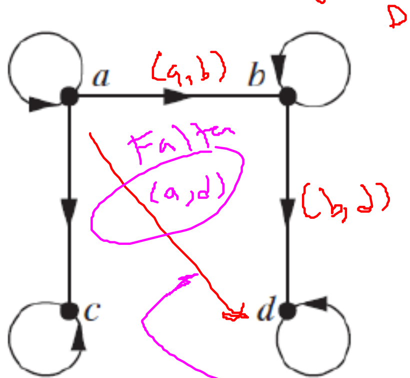


Orden total



6. Para los siguientes ejercicios, determine si la relación con el grafo dirigido que se muestra es un orden parcial.

Si el grafo es una relacion de orden parcial, Dibuje su diagrama de Hasse



No tiene diagrama de Hasse

(a,b)
(b,d)
(a,d)

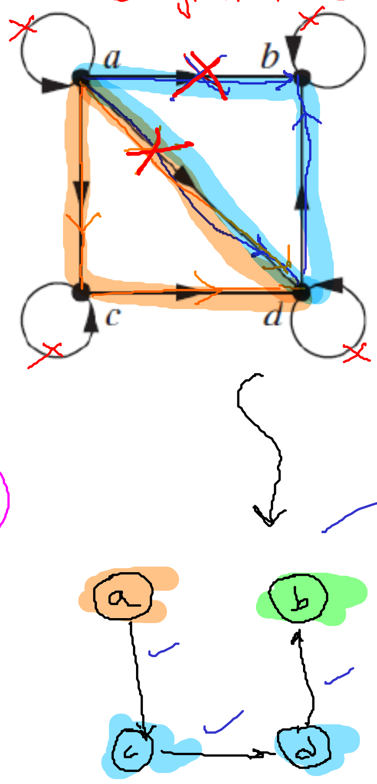
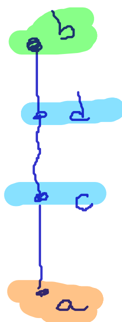
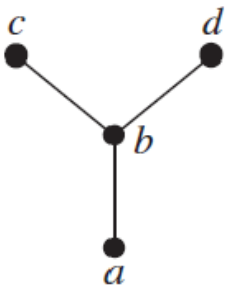
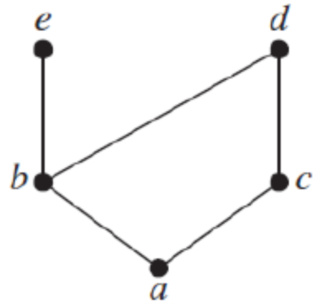


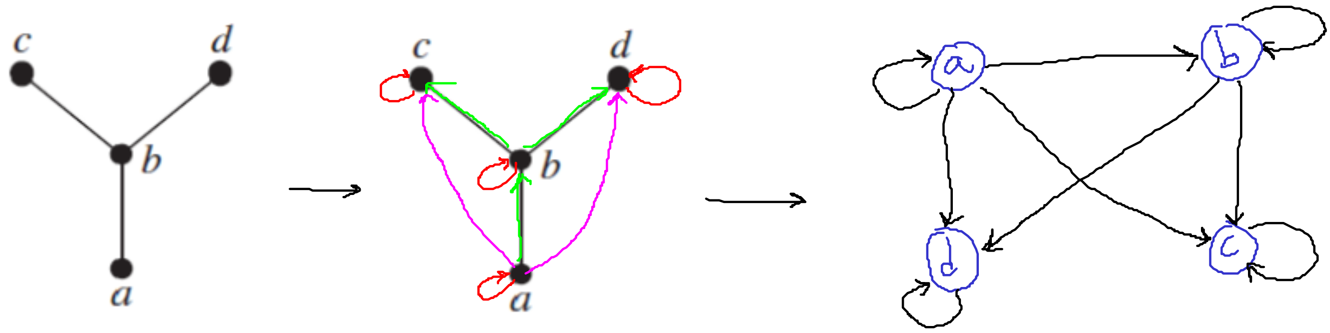
Diagrama de Hasse:



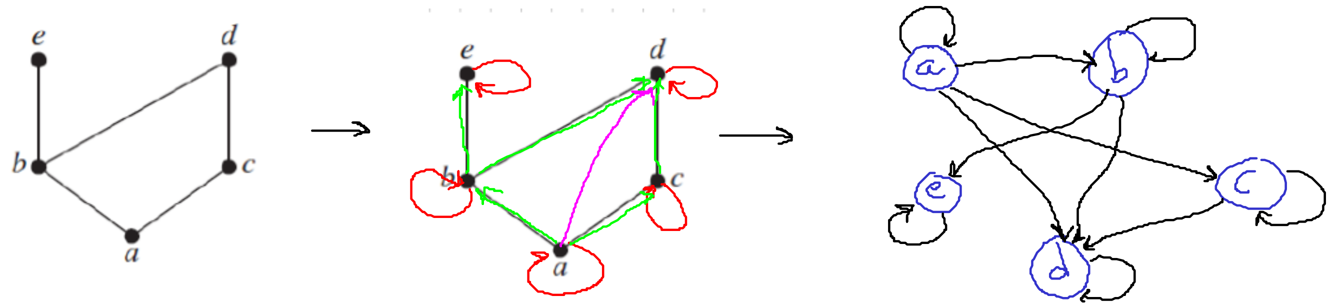
10. En los siguientes ejercicios, liste todos los pares ordenados asociados al diagrama de Hasse adjunto.







$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d),$
$(b,b), (b,c), (b,d)$
$(c,c),$
$(d,d)\}$



$R = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d),$
$(b,b), (b,d), (b,e),$
$(c,c), (c,d),$
(d,d)
$(e,e)\}$

Resumen comparativo – Relaciones de orden

Característica	Relación de Orden Parcial	Relación de Orden Total
Definición	Una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.	Un orden parcial que además cumple la propiedad de totalidad (todo es comparable).
Propiedades	1. Reflexividad 2. Antisimetría 3. Transitividad	1. Reflexividad 2. Antisimetría 3. Transitividad 4. Totalidad (o Conexidad)
Comparabilidad	No se exige que todo par de elementos sea comparable entre sí. Pueden existir elementos "incomparables".	Se exige que absolutamente todo par de elementos sea comparable. Para cualquier x, y, o $x \leq y$ o $y \leq x$.
Ejemplo clásico	La relación **"es subconjunto de"** ($\subseteq$) sobre conjuntos.	La relación **"menor o igual que"** ($\leq$) sobre los números reales
Diagrama de Hasse	Puede tener una estructura compleja con múltiples ramas y elementos en el mismo nivel.	Es siempre una **cadena vertical simple**, sin ninguna ramificación.
Analogía	Las dependencias entre tareas de un proyecto (algunas tareas pueden hacerse en paralelo, son incomparables en orden).	Las palabras en un diccionario (siempre se puede decir qué palabra va antes).

Ver el video

8. Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado.

a. Maximales, minimales, minimo y maximo

Elemento maximal y minimal

Sea A un conjunto parcialmente ordenado por medio de una relación de orden cualquiera $\preccurlyeq$, es decir, $(A, \preccurlyeq)$ Los siguientes son clases de elementos que pueden determinarse en una relación de orden parcial.

- **Elemento maximal**: es aquel que no tiene ningún otro elemento estrictamente mayor. Puede haber varios. Formalmente, sean a y x elementos de A:

$$a \text{ es maximal de } A \text{ sii } \forall x(a \leq x \rightarrow a = x)$$

- **Elemento minimal:** es aquel que no tiene ningún elemento estrictamente menor que él. Puede haber varios. Desde el punto de vista formal, sean b y x elementos de A:

$$b \text{ es minimal de } A \text{ sii } \forall x(x \leq b \rightarrow b = x)$$

Elemento máximo y mínimo

Sea A un conjunto parcialmente ordenado por medio de una relación de orden cualquiera $\preccurlyeq$, es decir, $(A, \preccurlyeq)$ Los siguientes son clases de elementos que pueden determinarse en una relación de orden parcial.

- **Elemento máximo**: es un elemento que está por encima de todos los demás. Solo puede haber uno. Formalmente, sean a y x elementos de A:

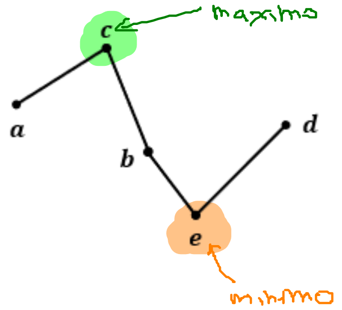
$$a \text{ es maximo de } A \text{ sii } \forall x(x \leq a)$$

- **Elemento mínimo**: es un elemento que está debajo de todos los demás. Solo puede haber uno. Desde el punto de vista formal, sean b y x elementos de A:

$$b \text{ es minimo de } A \text{ sii } \forall x(b \leq x)$$

Ejemplo:

Sea que $B = \{a, b, c, d, e\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos extremos allí ubicados:



La relación de orden $(B, \preccurlyeq)$:

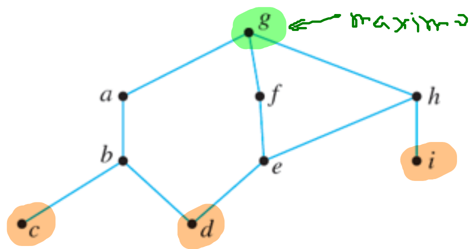
$$\preccurlyeq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(b,c),(e,b),(e,c),(e,d)\}$$

Extremos

- maximales: $\{c\}$
- minimales: $\{e\}$
- maximo: c
- minimo: e

Ejemplo:

Sea que $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos extremos allí ubicados:



La relación de orden $(A, \preccurlyeq)$:

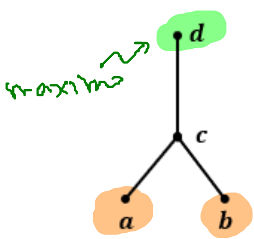
$$\preccurlyeq = \left\{ \begin{array}{c} (a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(g,g),(h,h),(i,i), \\ (c,b),(c,a),(c,g), \\ (d,b),(d,a),(d,g),(d,e),(d,f) \\ (b,a),(b,g), \\ (e,f),(e,g),(e,h), \\ (i,h),(i,g), \\ (a,g),(f,g),(h,h) \end{array} \right\}$$

Extremos

- maximales: $\{g\}$
- minimales: $\{c, d, g\}$
- maximo: g
- minimo: No posee

Ejemplo:

Sea que $A = \{a, b, c, d\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos extremos allí ubicados:



La relación de orden $(A, \preccurlyeq)$:

$$\preccurlyeq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$

Extremos

- maximales: $\{d\}$
- minimales: $\{a, b\}$
- maximo: d
- minimo: No posee

b. Cotas

Cotas

Dado un subconjunto $B \subseteq A$ de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preccurlyeq)$, tenemos:

- **Cota superior**: Un elemento a de A es cota superior de B sii:

$$\forall x (x \in B \rightarrow x \leq a)$$

  Es decir, a es mayor o igual a todos los elementos de B.

- **Cota inferior:** Un elemento b de A es cota inferior de B sii:

$$\forall x (x \in B \rightarrow b \leq x)$$

  Es decir, b está relacionado (menor o igual) con todos los elementos de B.

Cotas

Dado un subconjunto $B \subseteq A$ de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preccurlyeq)$, tenemos:

- **Mínima cota superior (m.c.s) o supremo**: Es la menor de todas las cotas superiores posibles del subconjunto. Es decir, ninguna otra cota superior está por debajo de ella. Se denota como $\sup(A)$. Un elemento a^* de A es cota superior de B sii:

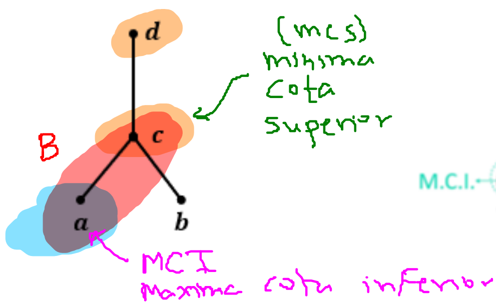
$$\forall x (a^* \leq x), \qquad \text{donde } a^* \text{ y } x \text{ son cotas superiores de } B$$

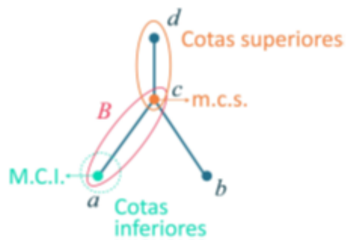
- **Máxima cota inferior (M.C.I) o ínfimo:** Es la mayor de todas las cotas inferiores posibles del subconjunto. Es decir, ninguna otra cota inferior está por encima de ella $\inf(A)$. Un elemento b^* de A es cota inferior de B sii:

$$\forall x (x \leq b^*), \qquad \text{donde } b^* \text{ y } x \text{ son cotas superiores de } B$$

Ejemplo:

Sea que $A = \{a, b, c, d\}$ y el conjunto $B = \{a, c\}$, tal que $B \subseteq A$. Determine las cotas superiores e inferiores:





Cotas superiores de B: $\{d, c\}$

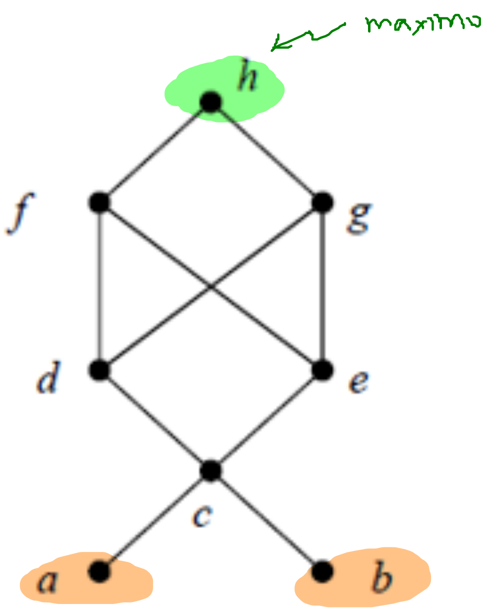
Cotas inferiores de B: $\{a\}$

mcs de B: b

MCI de B: a

Ejemplo:

Sea el conjunto parcialmente ordenado (A, R), y $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación, hallar maximales, minimales, máximo y mínimo de A.



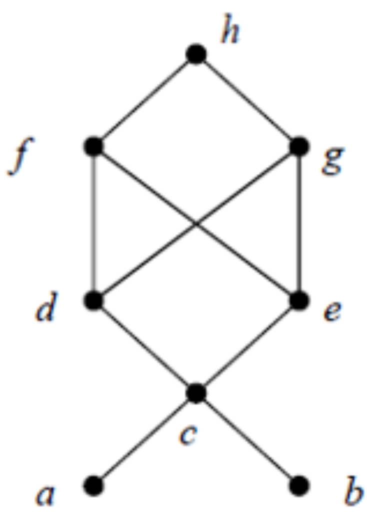
Extremos

- maximales: $\{h\}$
- minimales: $\{a, b\}$
- maximo: h
- minimo: No posee

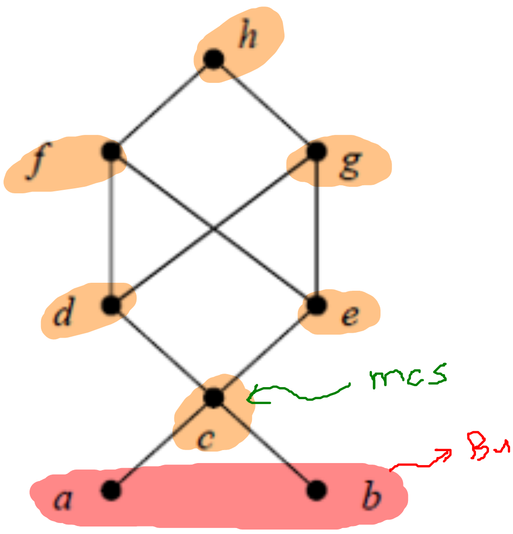
Ejemplo

Sea el conjunto parcialmente ordenado (A, R), y $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación. Hallar las cotas superiores es inferiores para los siguientes subconjuntos:

- $B_1 = \{a, b\}$
- $B_2 = \{c, d, e\}$



Respecto a $B_1 = \{a, b\}$



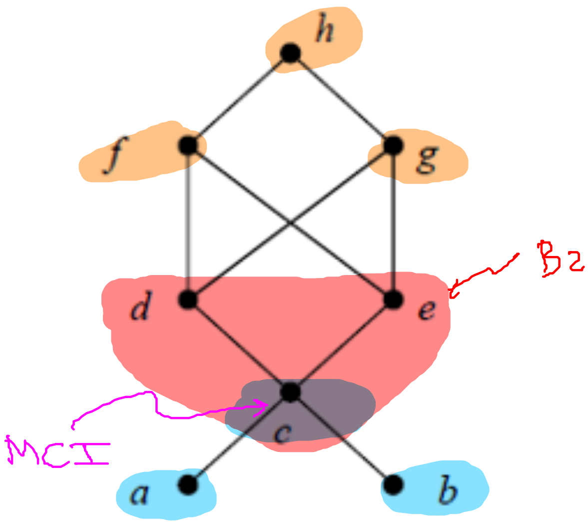
Cotas superiores de B_1: $\{c, d, e, f, g, h\}$

Cotas inferiores de B_1: ϕ

mcs de B: c

MCI de B: No posee

Respecto a $B_2 = \{c, d, e\}$



Cotas superiores de B_2: $\{f, g, h\}$

Cotas inferiores de B_2: $\{a, b, c\}$

mcs de B: No posee

MCI de B: c