30/09/2025 – Matematicas Discretas 1 (UdeA)

1. Repaso - Conceptos claves

En lógica de predicados es importante tener claros los siguientes conceptos:

- Universo o dominio
- Objetos o individuos
- Predicados
- Variables
- Conjunto de verdad
- Cuantificadores.
- Funciones proposicionales

Optimus Prime esta enfermo

Concepto	Representación	Expresión
Universo	Transformers (Autobots y Decepticons)	$U = \{Optimus, Bubumblebee, \dots\}$
Objeto	Optimus Prime	$Optimus$
Predicado	x está enfermo	$enfermo(x)$
Variables	Cualquier transformer	x
Cuantificadores	Luego lo veremos.	---

2. Cuantificadores ⇝ Cantidad :

1. $\forall$: Para todo
2. $\exists$: Existe

Sea: 1. $H(x)$: x es hombre
2. $I(x)$: x es Ingeniero

Funciones proposicionales: ¿Valor de la Verdad?
– $H(x)$
– $I(x)$

(1) (2)

(1) Evaluación de F. Proposic.

$x = CPH \rightarrow H(CPH) = V$

$\rightarrow \neg I(CPH) = F$

$\rightarrow \underbrace{H(CPH) \wedge I(CPH) = V \wedge V = V}_{\text{Proposición}}$

(2) Usar $\underbrace{\text{cuantificadores}}_{\text{Proposicion}}$

Charles Proteus Steinmetz (link)

CPH

x_i = x es una persona de la foto

$U = \{x_1, x_2, \underset{AE}{x_3}, x_4, \underset{CPH}{x_5}, x_6, x_7, x_8\}$

1. $\forall x H(x)$: Para todo x, x es un Hombre
   ||
   Todas las personas de la foto son hombres = V

2. $\exists x I(x)$: Existe un x, tal que x es ingeniero
   ||
   Hay al menos una persona de la foto que es ingeniero = V

3. $\forall x I(x)$: Todos los de la Foto son ingeneros = F

4. $\forall x \neg H(x)$: Todos los de la foto no son hombres = Ninguno de la foto es hombre = F

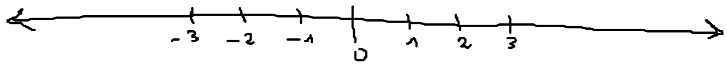
Ejemplos

1. **Determinación de los valores de verdad de un predicado**: Sea $P(x)$ el predicado "$x^2 > x$" con dominio el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. Escriba $P(2)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ e indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.

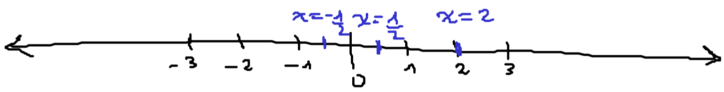
Datos:

_ Predicado : $P(x) : x^2 > x$

- Dominio : $U = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$



_ $P(2) = ?$; $P(1/2) = ?$; $P(-1/2) = ?$



* $P(2) = (2)^2 > (2) = 4 > 2 = V$

* $P(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > \frac{1}{2} = 0.25 > 0.5 = F$

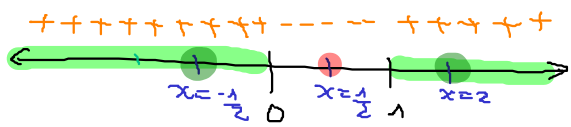
* $P(-1/2) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > -\frac{1}{2} = 0.25 > -0.5 = V$

Conjunto de verdad de $P(x)$ → Valores de x que hacen que $P(x)$ sea verdadero.

$P(x) = x^2 > x$
↓
$x^2 > x$

$x^2 - x > 0$

$x(x-1) > 0$
↓ $x = 0$ ↓ $x - 1 = 0$, $x = 1$



$(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

2. **Determinación del conjunto de verdad de un predicado**: Sea $Q(n)$ el predicado "n es un factor de 8". Determine el conjunto de verdad de $Q(n)$ si:
   a. el dominio de n es el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de todos los enteros positivos.
   b. el dominio de n es el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros.

Datos: _ Sea $Q(n)$: "n es un Factor de 8" → Un divisor : $8 \% n = 0$

- Conjunto de verdad de $Q(n)$? $Q(n) : 8 \% n = 0$

$\{ n \in U \mid Q(n) \text{ sea } V \} = \{ n \in U \mid n \text{ sea un Factor de } 8 \}$

a. $U = \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$

$n=1 \rightarrow 8 \% 1 = 0$ ✓
$n=2 \rightarrow 8 \% 2 = 0$ ✓
$n=3 \rightarrow 8 \% 3 = 2$ ✗
$\vdots$
$n=8 \rightarrow 8 \% 8 = 0$ ✓

Conjunto de verdad

$\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid 8 \% n = 0 \text{ sea } V\} = \{1, 2, 4, 8\}$

b. $U = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$n=-1 \longrightarrow 8 \% (-1) = 0$
$n=1 \longrightarrow 8 \% (1) = 0$
$n=-2 \longrightarrow 8 \% (-2) = 0$
$n=2 \longrightarrow 8 \% (2) = 0$
$\vdots$

Conjunto de verdad

$\{n \in \mathbb{Z} \mid 8 \% n = 0 \text{ sea } V\} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

3. Profundizando un poco mas sobre los cuantificadores.

(1) Cuantificador Universal $\forall$ (2) Cuantificador existencial

Característica	Cuantificador universal (∀)	Cuantificador existencial (∃)
Símbolo	∀	∃
Lectura común	"Para todo", "Para cada", "Para cualquier"	"Existe (al menos) un", "Para algún", "Hay algún"
Significado	La propiedad es verdadera para **todos** los elementos del dominio	La propiedad es verdadera para **al menos uno** del dominio
Estructura típica	$\forall x\, P(x)$	$\exists x\, P(x)$
Condición de verdad	$P(x)$ es verdadero para todo x.	Hay algún x para el cual $P(x)$ es verdadero.
Condición de falsedad	Hay algún x para el cual $P(x)$ es falso.	$P(x)$ es falso para cada x.
Palabras claves asociadas (al lenguaje natural)	Todos, cada, cualquiera, ninguno (usado con negación), siempre, para todo.	Existe, algún, algunos, hay, al menos uno, a veces, para algún.

(3) Cuantificador de Unicidad $(\exists!)$

Símbolo	∃!	
Lectura	"Existe un único", "Existe exactamente un", "uno y solo uno".	
Formato	$\exists! x\, P(x)$ significa que "Existe una única x tal que la propiedad P es verdadera para x"	
Forma desarrollada	El cuantificador de unicidad no es realmente necesario ya que la restricción de que existe un x único tal que $P(x)$ se puede expresar como: $$\exists x\, (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x))$$	
	Parte 1: Existencia	$\exists x\, P(x)$ - existe **al menos uno** que cumple $P(x)$
	Parte 2: Unicidad	$\forall y (P(y) \rightarrow y = x)$ - **cualquier otro** que lo cumpla debe ser igual a x