28/10/2025 - Matematicas Discretas 1 (Ude@)

0. Avisos:

Tema: Logica cuantificacional

Parcial 2: Jueves 30 de octubre

Diapositivas: 5, 6, 7

1. Repaso

Ejemplo

Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’ y B el conjunto asociado de letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’. Determine:

1. La representación por comprensión y extensión de cada conjunto.
2. El conjunto universal.
3. Dibuje el diagrama de ven que represente el problema.
4. Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.
5. Las letras que aparecen en ambos conjuntos.
6. Las que solo aparecen en el conjunto A pero que no están en el conjunto B.
7. Las que solo aparecen en el conjunto B pero que no están en el conjunto A.
8. Las letras que no se encuentran en A.
9. Las letras que no se encuentran en B.
10. Las letras que están solo en A o en B.

Solución:

1. Representación:

- U: Letras minusculas del abecedario
- A: Letras que aparecen en la palabra "calculo"
- B: Letras que aparecen en la palabra "matematicas discretas"

Conjunto A: calculo

Extension

$$A = \{c, a, l, u, o\}$$

Comprensión:

$$A = \{x \in U \mid x \text{ es una letra de "calculo"}\}$$

$P(x)$: x es una letra de "calculo"

$$A = \{x \in U \mid P(x)\}$$

Conjunto B: matemáticas discretas

Extensión

$$B = \{m, a, t, e, i, c, s, r, d\}$$

Comprensión:

$$B = \{x \in U \mid x \text{ es una letra de "matemáticas discretas"}\}$$

Q(x): x es una letra de "matemáticas discretas"

$$B = \{x \in U \mid Q(x)\}$$

2. Conjunto universal

- U: Letras minúsculas del abecedario

Extensión:

$$U = \{a, b, c, \dots, m, n, ñ, o, p, \dots, x, y, z\}$$

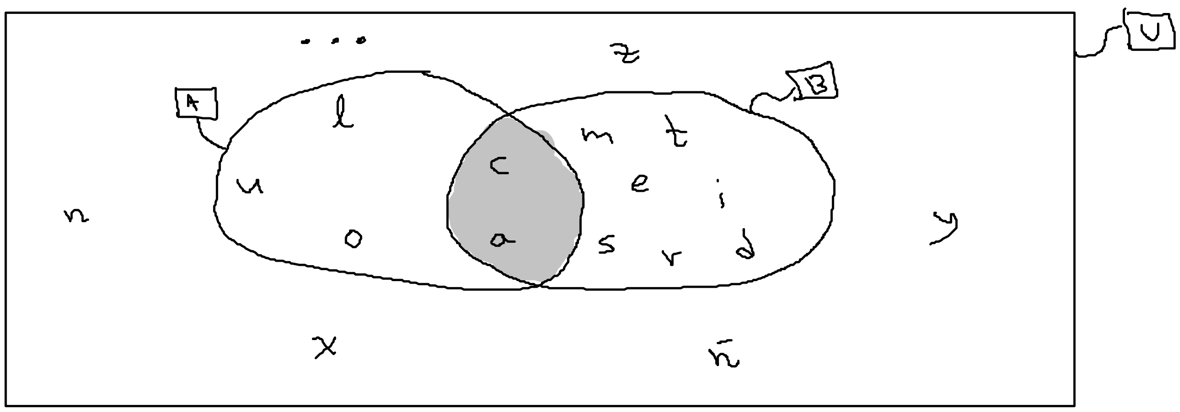
Comprensión:

$$U = \{x \mid x \text{ es una letra minúscula del abecedario}\}$$

3. Diagrama de Venn

$$A = \{c, a, l, u, o\}$$

$$B = \{m, a, t, e, i, c, s, r, d\}$$



2. Relaciones entre conjuntos.

① Igualdad $(A = B)$:

$$A = B \longleftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

② Diferencia $(A \neq B)$:

$$A \neq B \longleftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

③ Subconjunto $(A \subseteq B)$:

$$A \subseteq B \longleftrightarrow \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

④ No es Subconjunto $(A \nsubseteq B)$:

$$A \nsubseteq B \longleftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

⑤ Subconjunto propio $(A \subset B)$

$$A \subset B \longleftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

⑥ No es Subconjunto propio

$$A \not\subset B \longleftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B) \wedge \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$$

Relaciones importantes en términos de subconjuntos

En la siguiente tabla se muestra que es posible expresar las relaciones anteriores en términos de subconjuntos:

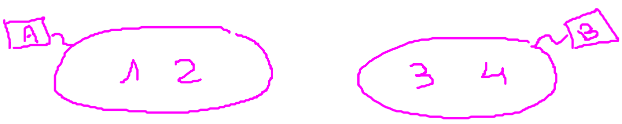
Relación	Expresión en términos de subconjuntos
Igualdad	$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
Diferencia	$A \neq B \Leftrightarrow (A \nsubseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$
Subconjunto propio	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$

⑦ Subconjuntos disyuntos $(A \underbrace{\cap}_{\text{Operaciones}} B = \emptyset)$

Clasificacion

$A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4\}$



$$A \cap B = \emptyset \longleftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \notin B)$$

3. Clasificacion de los conjuntos:

✓ 1. Conjunto vacio: $\phi = \{\}$

✓ 2. Conjunto unitario: $A = \{a\}$; $B = \{\phi\}$

✓ 3. Conjunto finito : $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

✓ 4. Conjunto infinito: $A = \{a_1, a_2, ...\}$

✓ 5. Conjunto Universal: U depende del contexto

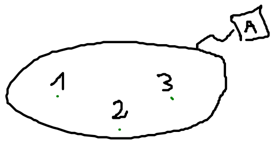
✓ 6. Conjunto Homogeneo:

✓ 7. Conjunto Heterogeneo:

→ Propiedad: Cardinalidad = Numero de elementos de un conjunto

$$A = \{1, 2, 3\}$$

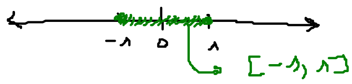
$|A| = card(A) = n(A) = \#$ de elementos de A



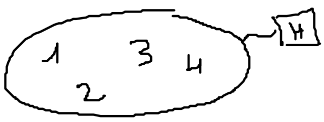
$|A| = 3$

Ejemplo:

Conjunto	Cardinalidad
$A = \{3\}$	$\lvert A \rvert = 1$
$B = \{\}$	$\lvert B \rvert = 0$
$C = \{L, M, W, J, V, S, D\}$	$n(C) = 7$
$\mathbb{Z} = \{..., -1, 0, 1, ...\}$	$n(\mathbb{Z}) = \infty \rightsquigarrow n(\mathbb{Z}) = \aleph_0$
$D = [-1, 1]$	$card(D) = \infty$
$E = \{5, 6, 7, ...\}$	$\#(E) = \infty$
$F = \{\phi\}$	$\lvert F \rvert = 1$
$G = \{\{\}\}$	$\lvert G \rvert = 1$



ojo → $H = \{1, 1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\} \to |H| = 4$



8- Conjunto Potencia

$P(A)$ = Conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

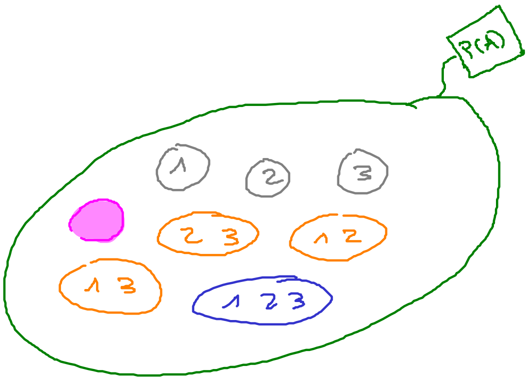
$$|P(A)| = card(P(A)) = n(P(A)) = 2^{|A|} = 2^{n(A)}$$

$P(A) = ?$

$A = \{1, 2, 3\} \to |A| = 3$

$\to |P(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

$P(A) = \{ \{\} \rightsquigarrow \emptyset,$
$\{1\}, \{2\}, \{3\},$
$\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$
$\{1,2,3\}$ A
$\}$



Ejemplo: – $X = \{0, 1, 2\}$ $\quad |x| = 3$

– $P(X) = ?$

$P(x) = ?$

① $|P(x)| = 2^{|x|} = 2^3 = 8$

$|P(x)| = n(P(x)) = 8$

Sea $A = \{a\} \rightsquigarrow |P(A)| = 2^{|A|} = 2^1 = 2$

$P(A) = \{ \{\}, \{a\} \}$

Sea $A = \{a, b\} \rightsquigarrow |P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$

$P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$

Sea $A = \{\{a\}, \{b\}\} \rightsquigarrow |P(A)| = 2^{|A|} = 2^2 = 4$

$P(A) = \{ \emptyset,$
$\{\{a\}\}, \{\{b\}\},$
$\{\{a\}, \{b\}\} \}$

1. Sea A = {{a}, {b}, {c}, {d}}; determina por extensión *P(A)*. $\quad |P(A)| = 2^{|A|} = 2^4 = 16$

$P(A) = \{ \emptyset,$
$\{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \{\{d\}\},$
$\{\{a\},\{b\}\}, \{\{a\},\{c\}\}, \{\{a\},\{d\}\}, \{\{b\},\{c\}\}, \{\{b\},\{d\}\}, \{\{c\},\{d\}\},$
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \{\{a\},\{c\},\{d\}\}, \{\{b\},\{c\},\{d\}\}, \{\{a\},\{b\},\{d\}\},$
$\{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\}\} \}$

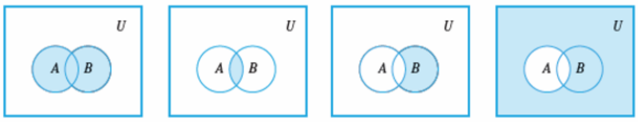
3. Operaciones entre conjuntos

Las operaciones entre conjuntos permiten combinar o modificar conjuntos para crear nuevos conjuntos. Las principales son:

- Unión
- Intersección.
- Diferencia de conjuntos.
- Complemento de un conjunto.
- Diferencia simétrica.

Resumen

Operación		Definición	Ejemplo
Unión	$A \cup B = A + B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Conjunto de elementos que están en A o en B (o en ambos)	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \cup B = \{1,2,3\}$
Intersección	$A \cap B = A \cdot B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Conjunto de elementos que están tanto en A como en B	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \cap B = \{2\}$
Diferencia	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Conjunto de elementos que están en A pero no en B	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{2\}$ $A - B = \{1,3\}$ $B - A = \{\square\} = \emptyset$
Diferencia simétrica	$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$	Conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ → $\{1, 2, 3\}$ $A \oplus B = \{1,3\}$
Complemento	$A' = A^C = U - A$	Conjunto de elementos que están en el universo pero no en A	$U = \{1,2,3\}$ $A = \{1,2\}$ $A' = A^C = \{3\}$



La región sombreada representa $A \cup B$. La región sombreada representa $A \cap B$. La región sombreada representa $B - A$. La región sombreada representa A^c.

Sobre la notación

Negación → Complemento

$\neg A$ → $A' = \tilde{A} = A^c$

Conjunto Universal

$\mathcal{U} = 1$

Union → Unión

$A \cup B$ → $A + B$

Conjunto Vacío

$\Phi = 0$

Interseccion → Interseccion

$A \cap B$ → $A \cdot B = AB$

Ejemplo

Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo 'calculo' y B el conjunto asociado de letras que aparecen en 'matemáticas discretas'. Determine:

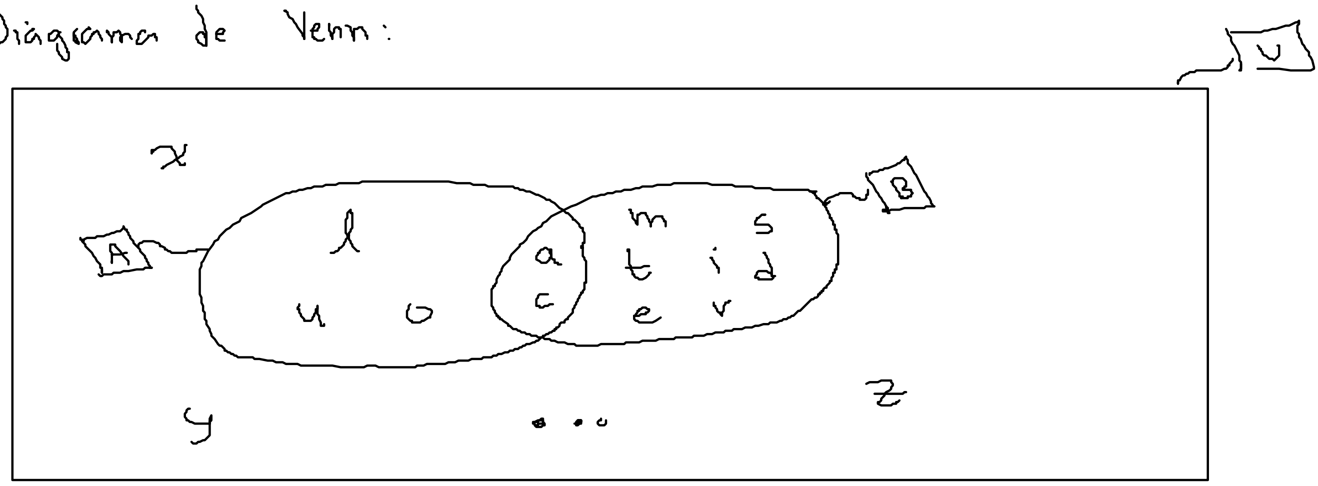
1. La representación por comprensión y extensión de cada conjunto.
2. El conjunto universal.
3. Dibuje el diagrama de ven que represente el problema.
4. Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos. $A \cup B$
5. Las letras que aparecen en ambos conjuntos. $A \cap B$
6. Las que solo aparecen en el conjunto A pero que no están en el conjunto B. $A - B$
7. Las que solo aparecen en el conjunto B pero que no están en el conjunto A. $B - A$
8. Las letras que no se encuentran en A. $A^c = U - A$
9. Las letras que no se encuentran en B. $B^c = U - B$
10. Las letras que están solo en A o en B. $A \oplus B$

Operaciones entre conjuntos

Solución:

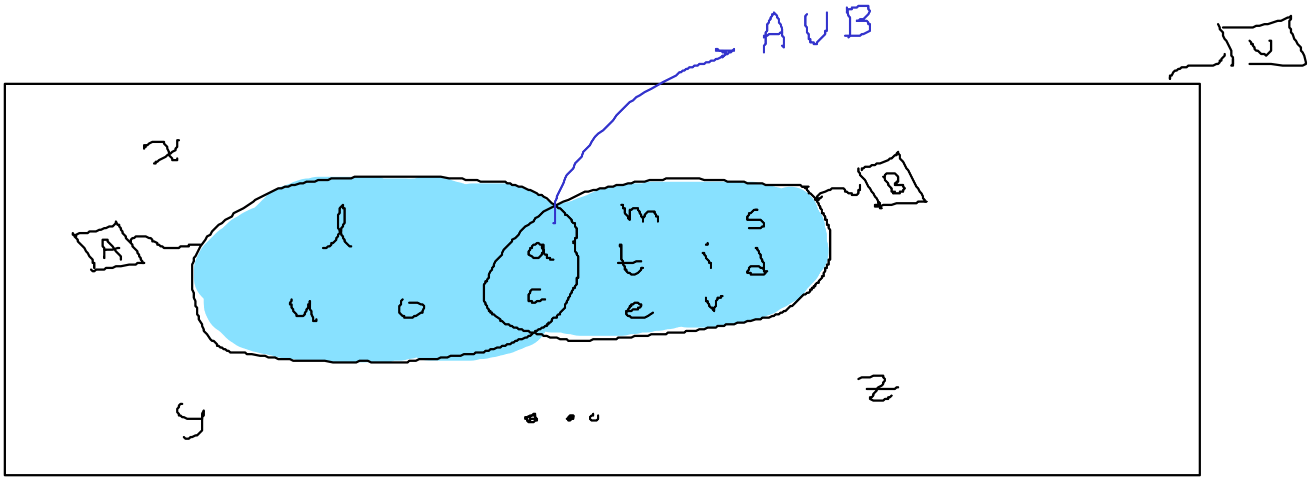
- $A = \{c, a, l, u, o\} \longrightarrow |A| = 5$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\} \longrightarrow |B| = 9$
- $U = \{a, b, c, \dots, m, n, ñ, o, p, \dots, x, y, z\} \rightarrow |U| = 27$

Diagrama de Venn:



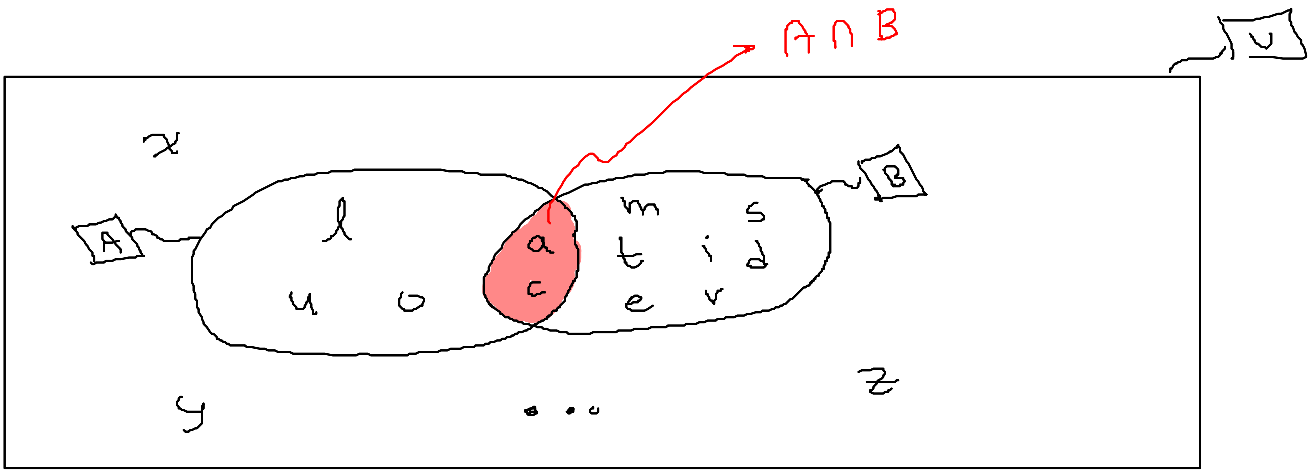
4. $U = A \cup B = \{c, a, l, u, o, m, t, e, i, s, d, r\} \rightarrow |A \cup B| = 12$

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$



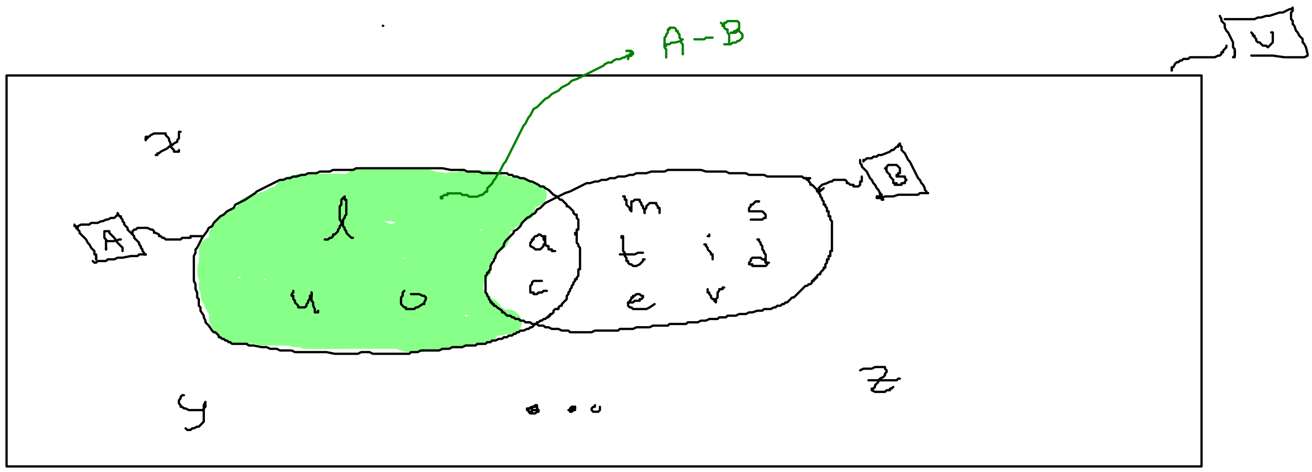
5. $A \cap B = \{c, a\} \longrightarrow |A \cap B| = 2$

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, v\}$



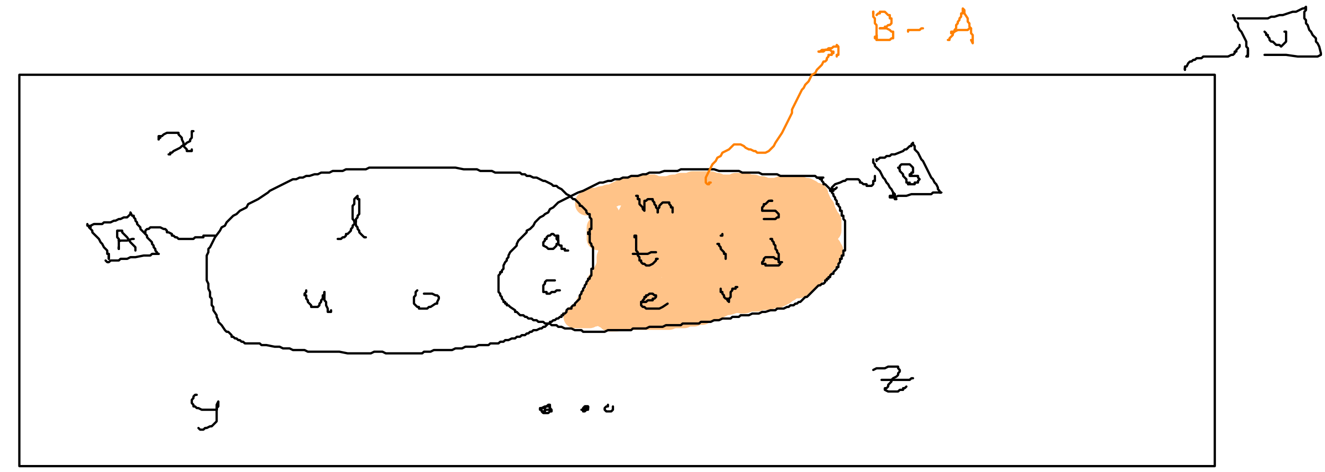
6. $A - B = \{l, o, u\} \longrightarrow |A - B| = 3$

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, v\}$



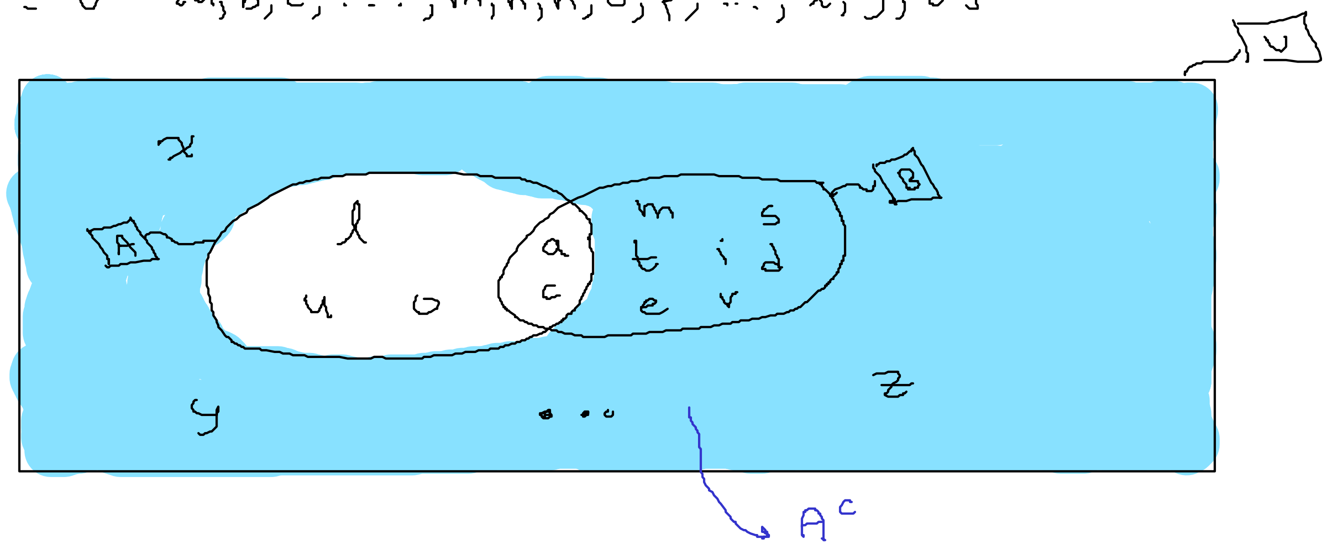
7. $B - A = \{m, t, e, i, s, d, r\} \longrightarrow |B - A| = 7$

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$



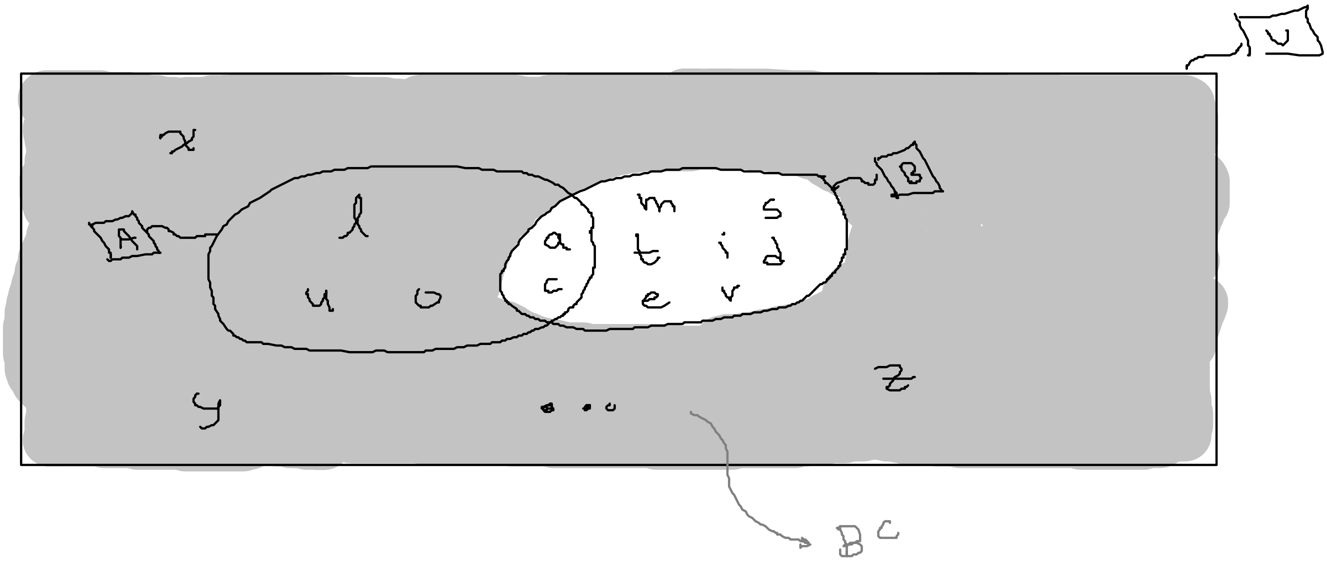
8. $A^c = U - A = U - \{c, a, l, u, o\} \longrightarrow |A^c| = 22$

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $U = \{a, b, c, \ldots, m, n, ñ, o, p, \ldots, x, y, z\}$



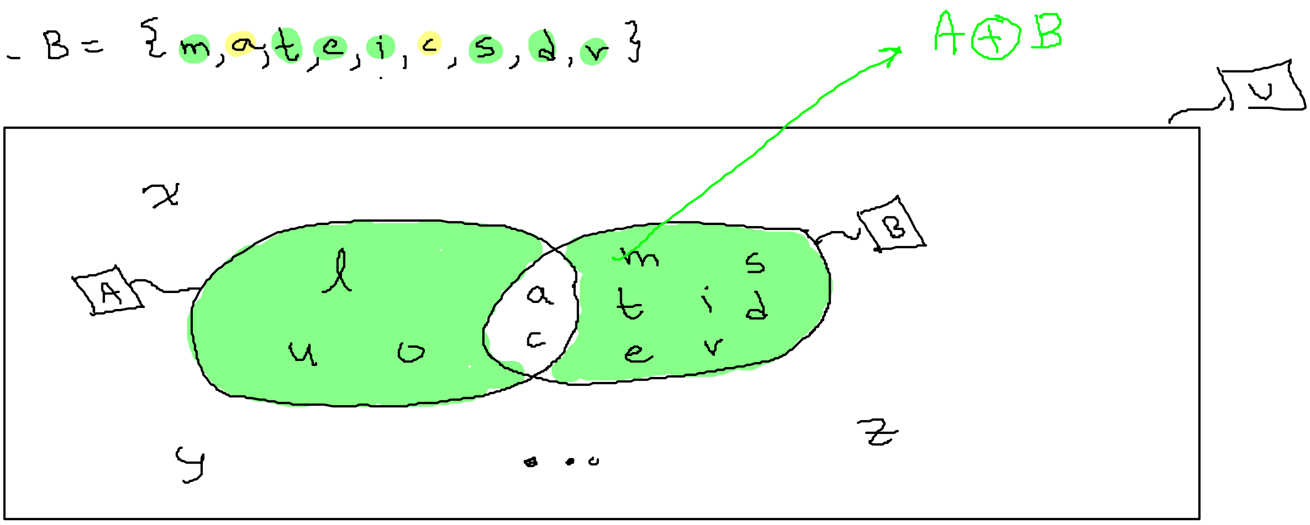
9. $B^c = U - B = U - \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\} \longrightarrow |B^c| = 18$

- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
- $U = \{a, b, c, \ldots, m, n, ñ, o, p, \ldots, x, y, z\}$



10. $A \oplus B = \{l, u, o, m, t, e, i, s, d, r\} \longrightarrow |A \oplus B| = 10$

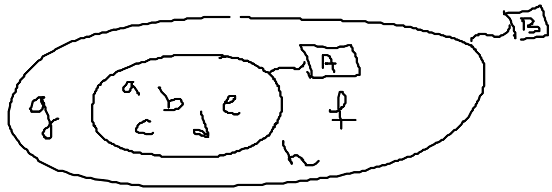
- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$



15. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Obtenga:

a. $A \cup B$
b. $A \cap B$
c. $A - B$
d. $B - A$

Diagrama de Venn



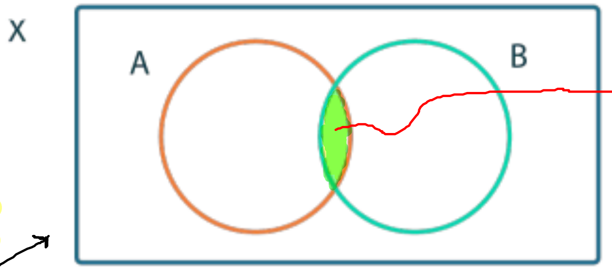
a. $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} = B \quad (A \subseteq B)$

b. $A \cap B = \{a, b, c, d, e\}$

c. $A - B = \{\ \} = \Phi$

d. $B - A = \{f, g, h\}$

3. Sea X un conjunto referencia, y sean A y B subconjuntos de X. Sombrea la región correspondiente a un subconjunto C, tal que C = AB + (A' + B')' $= AB + AB = AB$



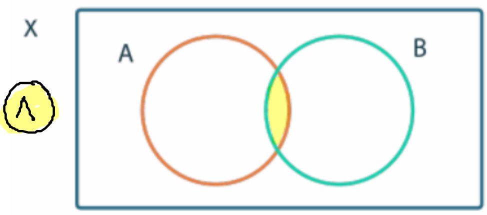
$C = AB + (A' + B')' = \underline{AB}$

1

2

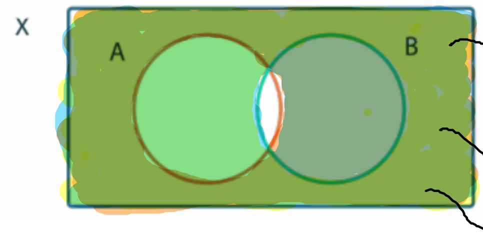
1 $AB = A \cdot B = A \cap B$

2 $(A' + B')' =$



1

$A' + B'$

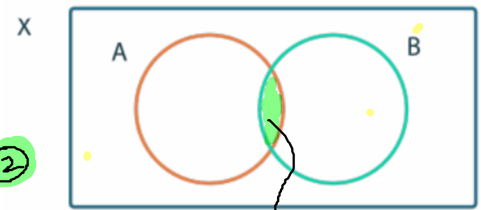


A'

B'

$A' + B'$

$(A' + B')'$



2

$(A' + B')' = AB$

4. Identidades

- Tabla de identidades basicas entre conjuntos

Nombre	$\cap = \cdot$ Equivalencia	$\cup = +$
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Ejemplo: Sea $C = AB + (A' + B')'$, obtenga la expresión simplificada

$\rightarrow C = \underbrace{AB + (A'+B')'}_{} = AB + A'' B'' = AB + AB = \underbrace{AB}_{}$

#	Pasos	Razon
1	$AB + (A'+B')'$	Premisa
2	$A \cdot B + A'' \cdot B''$	Ley de Morgan para la union ($\cup$) en 1
3.	$A \cdot B + A \cdot B$	Doble negacion en 2
4.	$\therefore A \cdot B$	Idempotencia en 3 para la unión ($\cup$)

$\therefore C = AB + (A'+B')' = AB$

- Tabla de Identidades de cardinalidad.

Nombre	Equivalencia
1	$\lvert\emptyset\rvert = 0$
2	$A \cdot B = 0 \rightarrow \lvert A + B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$
3	$\lvert A + B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cdot B\rvert$
4	$\lvert A - B\rvert = \lvert A\rvert - \lvert A \cdot B\rvert$
5	$\lvert A \cdot B\rvert \leq \lvert A\rvert$
6	$\lvert A\rvert \leq \lvert A + B\rvert$
7	$\lvert A'\rvert = \lvert U\rvert - \lvert A\rvert$
8	$a \leq \lvert A\rvert \leq b \leftrightarrow \lvert U\rvert - a \leq \lvert A'\rvert \leq \lvert U\rvert - b$
9	$Max(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert) \leq \lvert A + B\rvert \leq Min(\lvert A\rvert + \lvert B\rvert, \lvert U\rvert)$
10	$Max(0, \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert U\rvert) \leq \lvert A \cdot B\rvert \leq Min(\lvert A\rvert + \lvert B\rvert)$

- $A = \{c, a, l, u, o\} \longrightarrow |A| = 5$
- $B = \{m, c, t, e, i, a, s, d, r\} \longrightarrow |B| = 9$
- $U = \{a, b, c, \dots, m, n, ñ, o, p, \dots, x, y, z\} \rightarrow |U| = 27$

- $|A + B| = |A| + |B| - |A \cdot B| = 5 + 9 - 2 = 12$
- $|A \cdot B| = |\{c, a\}| = 2$
- $|A - B| = |A| - |A \cdot B| = 5 - 2 = 3$
- $|B - A| = |B| - |B \cdot A| = 9 - 2 = 7$
- $|A^c| = |U| - |A| = 27 - 5 = 22$
- $|B^c| = |U| - |B| = 27 - 9 = 18$
- $|A \oplus B| = |A + B| - |A \cdot B| = 12 - 2 = 10$