02/09/2025 - Matematicas Discretas 1 (Ude@)

1. Repaso clase anterior

Tablas de verdad

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Reglas de prioridad

Prioridad	Operador	Asociatividad	Ejemplo con paréntesis
1 (la mas alta)	$\neg$	No aplica (unitario)	$\neg p \wedge q \mapsto ((\neg p) \wedge q)$
2	$\wedge$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \wedge q \wedge r \mapsto ((p \wedge q) \wedge r)$
3	$\vee$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \vee q \vee r \mapsto ((p \vee q) \vee r)$
4	$\oplus$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \oplus q \oplus r \mapsto ((p \oplus q) \oplus r)$
5	$\rightarrow$	Derecha ($D \rightarrow I$)	$p \rightarrow q \rightarrow r \mapsto (p \rightarrow (p \rightarrow r))$
6 (la mas baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($D \rightarrow I$)	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \mapsto (p \leftrightarrow (p \leftrightarrow r))$

Trabajando con tablas de verdad

Para construir una tabla de verdad se siguen los siguientes pasos:

1. Identificar las variables proposicionales.
2. Determinar el número de filas necesarias (para n variables 2^n columnas).
3. Construir las columnas de las variables (Falso = 0; Verdadero = 1).
4. Agregar columnas auxiliares si es necesario.

> **Tip de legibilidad**: Cuando la cantidad de columnas es muy grande es útil representar una expresión lógica (con letras minúsculas) con una letra mayúscula.

5. Evaluar la expresión lógica paso a paso.
6. Revisar y validar la tabla.

Tambien vimos:

- Clasificación de las proposiciones
  - Tautologia
  - Contradicción
  - Contingencia
- Equivalencia Logica: $P \leftrightarrow Q$ es Tautologia.

2. Enfoque axiomatico

Proposiciones

- Enfoque de modelos: Tablas de verdad
- Enfoque axiomatico: Identidades logicas.

Hace unos años atrás...

1. Simplifique: $\tan^3\alpha \cos\alpha \csc^2\alpha$

$\tan^3\alpha \cos\alpha \csc^2\alpha$

Aplicar las identidades

$\tan\alpha \cdot \sec\alpha$

Identidades trigonometricas basicas

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc^2\alpha = 1 + \cot^2\alpha \qquad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\tan^3\alpha \cos\alpha \csc^2\alpha = \left(\frac{\text{sen}^{\cancel{3}}\alpha}{\cos^{\cancel{3}\,2}\alpha}\right)\left(\cancel{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cancel{\text{sen}^2\alpha}}\right) = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$= \tan\alpha \cdot \sec\alpha$$

① → ②

2. Demuestre que: $\tan^3\alpha \cos\alpha \csc^2\alpha = \dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$\tan^3\alpha \cos\alpha \csc^2\alpha = \left(\frac{\text{sen}^{\cancel{3}}\alpha}{\cos^{\cancel{3}\,2}\alpha}\right)\left(\cancel{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cancel{\text{sen}^2\alpha}}\right)$$

$$= \frac{\text{sen}\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Equivalencias Lógicas.

Equivalencias lógicas		
Nombre	**Equivalencias**	
1. Leyes conmutativas	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. Leyes asociativas	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Leyes distributivas	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Leyes de la identidad	$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
5. Leyes de negación	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$
6. Ley de la doble negación	$\neg(\neg p) \equiv p$	
7. Leyes de idempotencia	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
8. Leyes universales acotadas	$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
9. Leyes de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
10. Leyes de absorción	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
11. Negaciones de **V** y **F**	$\neg\mathbf{V} = \mathbf{F}$	$\neg\mathbf{F} = \mathbf{V}$

Equivalencias lógicas con condicionales
$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge \neg q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (q \vee r) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$

Equivalencias lógicas con bicondicionales
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \vee (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

3. Demostracion de equivalencias logicas usando el enfoque axiomatico.

Demostrar: $A \equiv B$

Enfoque de Modelos

Tabla de verdad:

$A \equiv B$ es una tautologia

Enfoque axiomatico

$A \equiv B$

Se parte de un lado o de algo que es verdad para llegar al otro lado mediante transformaciones logicas aplicando Equivalencias logicas

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv A_1 \\ &\equiv A_2 \\ &\vdots \\ &\equiv B \end{aligned}\right\} \text{Equivalencias logicas.}$$

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Procedimiento	Justificacion
Operacion Logica	Identidad aplicada

Ejemplos

1. Demuestre mediante el uso de identidades lógicas demuestre la ley de la absorción para el **Y**
2. Demuestre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ es lógicamente equivalente a $\neg p \wedge \neg q$
3. Pruebe la siguiente equivalencia lógica: $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$
4. Demuestre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.
5. Considerar el siguiente argumento: "Si la ley no fue aprobada, entonces la constitución del país queda sin modificaciones. Si la constitución del país queda sin modificaciones no se puede elegir nuevos diputados. O se eligen nuevos diputados o el informe del presidente del país se retrasará. El informe no se retrasó un mes. Por lo que la ley fue aprobada". Verificar su validez por la prueba formal de validez.

2. $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$\wedge \rightarrow \cdot$

$\vee \rightarrow +$

Aplicación de las equivalencias

y ($\wedge$) o ($\vee$)

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Tarea: Demostrar usando tablas de verdad

	Procedimiento	Justificación
1	$\neg(\overbrace{p}^{P} \vee \overbrace{(\neg p \wedge q)}^{Q}) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	Ley de Morgan para el o ($\vee$)
2	$\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$	Ley de Morgan para el y ($\wedge$)
3	$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q)$	Ley de la doble negación
4	$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Ley distributiva para el y ($\wedge$)
5	$\equiv F \vee (\neg p \vee \neg q)$	Ley del complemento para el y ($\wedge$)
6	$\equiv \neg p \vee \neg q$	Ley de la Identidad para o ($\vee$)