27/05/2024 - Matematicas discretas Ude@ | MJ 10-12

1. Temas clase anterior

- Tablas de verdad
- Clasificacion de las proposiciones:
  - ✓ Tautologias (V)
  - ✓ Contradicciones (F)
  - ✓ Contingencia (V y F)
- Equivalencia: Si P y Q son equivalentes ($P \equiv Q$) es porque $P \leftrightarrow Q$ es tautologia.

Ejemplo: $P \equiv \neg(\neg P)$ Variable: P $\longrightarrow$ $n = 1$; f: $2^1 = 2$

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$	$P \leftrightarrow \neg(\neg P)$
0	1	0	1
1	0	1	1

$\longrightarrow$ Es tautologia

Por lo tanto

$\therefore \boxed{P \equiv \neg(\neg P)}$

- Leyes de Morgan:

① LM para Y $\quad \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

② LM para O $\quad \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

2. Enfoque axiomatico

Proposiciones logicas $\nearrow$ Modelos: Tablas de verdad

Expresion $\longrightarrow$

P	Q	...

Proposiciones logicas $\searrow$ Axiomas: Identidades Logicas.

Recordemos en otras materias: Algebra y Trigonometria (Identidades)

Demuestre: $\underbrace{\sec^3 x \cot^2 x \operatorname{sen} x}_{A} = \underbrace{\sec x \csc x}_{B}$

$\underbrace{\sec^3 x \cot^2 x \operatorname{sen} x}_{A} = \underbrace{\left(\frac{1}{\cos^{\cancel{3}} x}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^{\cancel{2}} x}\right)\cancel{\operatorname{sen} x}}_{A1}$

$= \underbrace{\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)}_{A2}$

$= \underbrace{\sec x \csc x}_{B}$

Identidades

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ ✓

$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$ ✓

$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$

3. Identidades lógicas (Equivalencias lógicas)

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Y - conjunción

O - disyunción

Ley de absorción para el Y

Ley de absorción para el O

Enfoque axiomático: $A \equiv B$

$A \xrightarrow{A_1,\, A_2, \dots, A_i \dots} B$

$A \equiv A_1$

A_2

$\dots$

A_i

$\dots$

B

Uso de reglas (identidades lógicas

$\boxed{A \equiv B}$

Ejemplos

1. Demuestre mediante el uso de identidades lógicas demuestre la ley de la absorción para el ~~Y~~ O
2. Demuestre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ es lógicamente equivalente a $\neg p \wedge \neg q$
3. Pruebe la siguiente equivalencia lógica: $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$
4. Demuestre que $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ es una tautología.
5. Considerar el siguiente argumento: "Si la ley no fue aprobada, entonces la constitución del país queda sin modificaciones. Si la constitución del país queda sin modificaciones no se puede elegir nuevos diputados. O se eligen nuevos diputados o el informe del presidente del país se retrasará. El informe no se retrasó un mes. Por lo que la ley fue aprobada". Verificar su validez por la prueba formal de validez.

Solución:

1. Ley de Absorción para O : $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$

Procedimiento	Justificación
$A \equiv A_1$	
A_2	
$\dots$	
A_i	
$\dots$	
B	

$\boxed{A \equiv B}$ $\rightsquigarrow$ $\underbrace{P \vee (P \wedge Q)}_{A} \equiv \underbrace{P}_{B}$

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

	Justificación
$P \vee (P \wedge Q) \equiv (P \vee P) \wedge (P \vee Q)$	Ley distributiva para el $\vee$
$\equiv P \wedge (P \vee Q)$	Idempotencia para el $\vee$
$\equiv (P \vee F) \wedge (P \vee Q)$	Identidad para el $\vee$
$\equiv P \vee (F \wedge Q)$	Ley distributiva para el $\vee$ de D→I (Factorizar)
$\equiv P \vee F$	Dominación para el $\wedge$
$\equiv P$	Identidad para $\vee$

$\therefore$ $\boxed{P \vee (P \wedge Q) \equiv P}$ Ley de la Absorción para el $\vee$.

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

2. $\neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Procedimiento	Justificación
$\neg(P \vee (\neg P \wedge Q)) \equiv \neg P \wedge \neg(\neg P \wedge Q)$	Ley de Morgan para $\vee$
$\equiv \neg P \wedge (\neg(\neg P) \vee \neg Q)$	Ley de Morgan para $\wedge$
$\equiv \neg P \wedge (P \vee \neg Q)$	Doble negación
$\equiv (\neg P \wedge P) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	Distributiva para el $\wedge$
$\equiv F \vee (\neg P \wedge \neg Q)$	Complemento para el $\wedge$
$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee F$	Prop. conmutativa para el $\vee$
$\equiv \neg P \wedge \neg Q$	Identidad para el $\vee$

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

3. $\neg(\neg P \wedge Q) \wedge (P \vee Q) \equiv P$

Procedimiento	Justificación
$\neg(\neg P \wedge Q) \wedge (P \vee Q) \equiv (\neg(\neg P) \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$	ley de Morgan para y
$\equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee Q)$	Doble negacion
$\equiv P \vee (\neg Q \wedge Q)$	Distributividad I<-D para el o
$\equiv P \vee (F)$	Complemento para el y
$\equiv P$	Identidad para el o