21/05/2025 - Matematicas Discretas 1 (Ude@ | wv 14-16)

1. Repaso rapido de la clase anterior:

   a. Equivalencia:

   ① $\forall x \neg\neg P(x) \equiv \forall x P(x)$

   ② $\exists x \neg\neg P(x) \equiv \exists x P(x)$

   ⋮

   b. Leyes de Morgan cuanticas

   ① $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ $\quad (\neg\forall \equiv \exists)$

   ② $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ $\quad (\neg\exists \equiv \forall)$

   c. Alcance: El uso de ( ) → Asociatividad

Prioridad	Operador
①	$\forall, \exists$
②	$\neg$
③	$\wedge$
④	$\vee$
⑤	$\rightarrow$
⑥	$\leftrightarrow$

Ejemplo:

$$\underbrace{\underbrace{\forall x P(x)}_{①} \vee \underbrace{Q(x)}_{②}}_{③ = ① \vee ②} \equiv (\forall x P(x)) \vee Q(x)$$

Ojo: $\cancel{\forall x P(x) \vee Q(x) \equiv \forall x (P(x) \vee Q(x))}$

2. Cuantificadores anidados:

$\forall i \forall j P(i,j)$ ↔ Externo i / Interno j

```
for i in [0, 1]
    for j in [1, 2, 3]
        print (i, j)
    print ('---')
```

$\Updownarrow$

$\forall i (\forall j P(i,j))$

Cual seria la salida?

$i = 0,\ j = 1, 2, 3$ →

$i = 1,\ j = 1, 2, 3$

0, 1
0, 2
0, 3

1, 1
1, 2
1, 3
---

a. Orden de los cuantificadores

① Cuantificadores iguales – El orden no importa

$$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$$

$$\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$$

② Cuantificadores son diferentes – El orden importa

$$\underline{\forall x \exists y\, P(x,y)} \not\equiv \underline{\exists y \forall x\, P(x,y)}$$

No se dice lo mismos.

b. Alcance y el contexto

– Evitar la ambigüedad – Los parentesis bien usados dan claridad

$$\forall x \exists y\, \text{ama}(x,y) \equiv \forall x(\exists y(\text{ama}(x,y)))$$

$$\exists x \forall y\, \text{ama}(x,y) \equiv \forall x(\exists y(\text{ama}(x,y)))$$

Ejemplo:

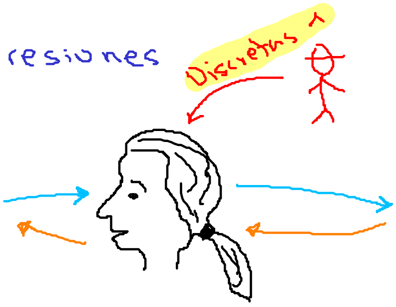
$$\forall x\, \underbrace{(\text{estudiante}(x) \longrightarrow \exists y\, \underbrace{(\text{libro}(y) \land \text{lee}(x,y))}_{\text{Alcance } y})}_{\text{Alcance } x}$$

Sentido

Todos los estudiantes leen algun libro

3. Traducción de expresiones

Lenguaje Natural



Lenguaje Formal (Modelo)

Formas Aristotelicas:

Las cuatro formas aristotélicas son proposiciones categóricas básicas que forman la base del silogismo clásico en la lógica aristotélica:

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \to P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo:** Todos los hombres son mortales. **Expresión:** $\forall x(hombre(x) \to mortal(x))$
Forma E: Universal afirmativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \to \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo:** Ningún cuadrado es circulo. **Expresión:** $\forall x(cuadrado(x) \to \neg circulo(x))$
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \land P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo:** Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión:** $\exists x(estudiante(x) \land ingeniero(x))$
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \land \neg P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo:** Algún pájaro no vuela. **Expresión:** $\exists x(pajaro(x) \land \neg vuela(x))$

Ejemplos

Ejemplo 1:
Usando los predicados
- $Persona(p)$: p es una persona
- $Ama(x,y)$: que indica que x ama a y,

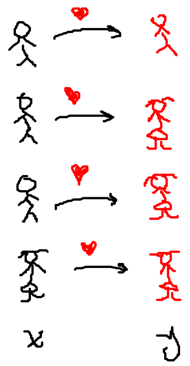
$\forall, \exists, \exists!$

Escriba una oración en lógica de primer orden que signifique:

"Cada persona ama a alguien".

$\forall x$ $\exists y$

Cada Persona ama a alguien



Universo: U: seres vivos

Variables: $x, y, p, q \in U$

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \to P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.
Forma E: Universal afirmativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \to \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \land P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \land \neg P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.

$\forall x$

Cada persona ama a alguien

1

$\forall x$ (persona$(x) \longrightarrow$ ama a alguien)

$\exists y$

2 existe otra persona que es amada por x.

$\exists y(persona(y) \land y \neq x \land ama(x,y))$

Solución: $\forall x\,(persona(x) \longrightarrow \exists y(persona(y) \land (x \neq y) \land ama(x,y)))$

Ejemplo 2: Usando los predicados

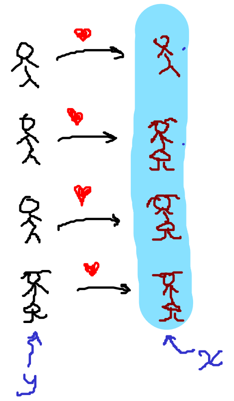
- $Persona(p)$: p es una persona
- $Ama(x, y)$: que indica que x ama a y,

Escriba una oración en lógica de primer orden que signifique:

"hay una persona a la que todos los demás aman".

$\exists x$ persona(x) persona(y) $\forall y$ ama(x, y)

Hay una persona a la que todos aman



Dominio: Seres vivos

Variables: $x, y, p, q \in U$

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S, P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ **Interpretación**: Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.
Forma E: Universal afirmativa	Ningún S es P	$E(S, P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$ **Interpretación**: Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S, P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación**: Existe al menos un x tal que x es S y también es P.
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S, P)$	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ **Interpretación**: Existe al menos un x tal que x es S y no es P.

$\exists x$

Hay una persona a la que todos aman

$\forall y$

(1) $\exists x$ (persona(x) $\wedge$ a la que todos los demas aman)

(2) $\forall y$ (persona(y) $\wedge$ (y $\neq$ x) $\rightarrow$ ama (y, x))

Solución: $\exists x$ (persona(x) $\wedge$ $\exists y$ (persona(y) $\wedge$ (y $\neq$ x) $\rightarrow$ ama (y, x)))