02/10/2025 - Matematicas Discretas 1 (Ude@)

1. Repaso conceptos previos

a. Conceptos iniciales

Conceptos claves

En lógica de predicados es importante tener claros los siguientes conceptos:

- Universo o dominio
- Objetos o individuos
- Predicados
- Variables
- Conjunto de verdad
- Cuantificadores.
- Funciones proposicionales

U

x

TRANSFORMERS

$x = OP$

Optimus Prime esta enfermo

S P

Enfermo(x)

Concepto	Representación	Expresión
Universo	Transformers (Autobots y Decepticons)	$U = \{Optimus, Bubumblebee, \ldots\}$
Objeto	Optimus Prime	$Optimus$
Predicado	x está enfermo	$enfermo(x)$
Variables	Cualquier transformer	x
Cuantificadores	Luego lo veremos.	---

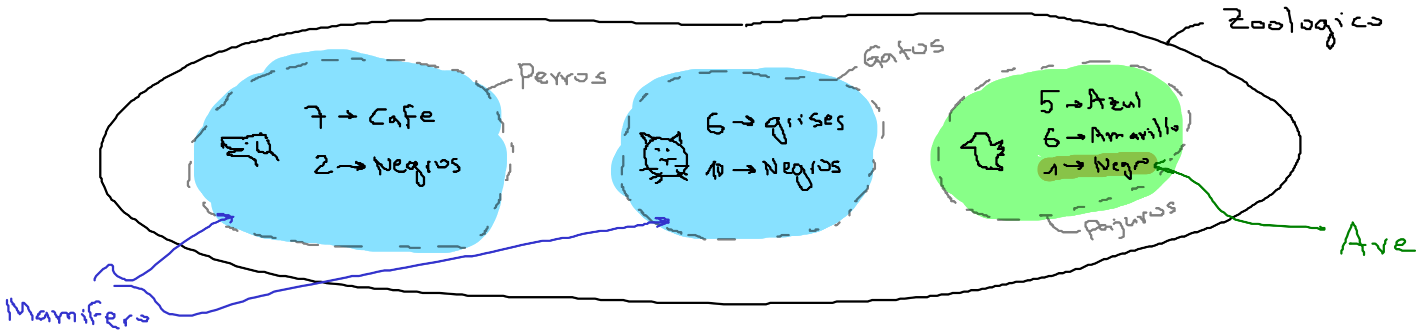
Ejemplo:

1. Un zoológico tiene siete perros de color café, dos perros de color negro, seis gatos grises, diez gatos negros, cinco pájaros azules, seis pájaros amarillos y un pájaro negro. Determine cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.
   a. Hay un animal en el zoológico que es rojo. ✓
   b. Todo animal en el zoológico o es un ave o es un mamífero. ✓
   c. Todo animal en el zoológico es de color café, gris o negro. ✓
   d. Hay un animal en el zoológico que no es ni un gato ni perro. ✓
   e. Ningún animal en el zoológico es de color azul. ✓
   f. Hay en el zoológico un perro, un gato y un pájaro que todos tienen el mismo color. ✓

Ademas defina:

1. Universo ✓

2. Predicados con los que puede describir el problema.



U = Todos los animales del zoologico

$U = \{Perro_1, \ldots, Perro_9, Gato_1, \ldots, Gato_{16}, Pajaro_1, \ldots, Pajaro_{12}\}$

37 animales; 9; 16; 12

x = Un animal del zoologico cualquiera $(x \in U)$

a. $\underbrace{\text{Hay un animal}}_{\exists x}$ en el zoologico que es rojo (Falso)

b. $\underbrace{\text{Todo animal}}_{\forall x}$ en el zoologico o es un ave o es un mamifero (Verdadero)

c. $\underbrace{\text{Todo animal}}_{\forall x}$ del zoologico es de color cafe, gris o negro. (Falso)

d. $\underbrace{\text{Hay algun animal}}_{\exists x}$ en el zoologico que no es gato ni perro (Verdadero)

e. $\underbrace{\text{Ningun animal}}_{\neg \exists x}$ en el zoologico es color azul (Falso)

f. $\underbrace{\text{Hay en el zoologico}}_{\exists x}$ un perro, un gato o un pajaro con el mismo color (Verdadero)

Predicados:

x : Un animal cualquiera del zoologico $(x \in U)$

[]

perro(x): x es un perro

gato(x): x es un gato

pajaro(x): x es un ave

[cafe, negro, gris, azul, amarillo, rojo]

cafe(x): x es cafe

negro(x): x es negro

azul(x): x es azul

amarillo(x): x es amarillo

rojo(x): x es rojo

[ave, mamifero]

ave(x): x es un ave

mamifero(x): x es mamifero

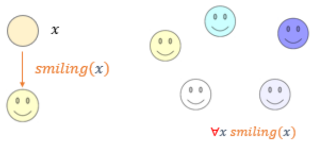
b. Cuantificadores

- $\forall$ Universal
- $\exists$ Existencial
- $\exists!$ De unicidad

Cuantificador universal ($\forall$)

Este cuantificador afirma que la propiedad o relación que le sigue es verdadera para todos los elementos del dominio de discurso considerado.

Símbolo	$\forall$	
Lectura	"Para todo", "Para cada", "Para cualquier"	
Formato	$\forall x\, P(x)$ significa que "Para todo x, la propiedad P es verdadera para x"	
Valor de verdad	Verdadero	La sentencia $\forall x\, P(x)$ es **verdadera** si, y solo si, sin importar el elemento "a" del dominio que se elija, $P(a)$ es verdadero.
	Falso	Si se encuentra un elemento "a" del dominio para el que $P(a)$ es falso, la sentencia $\forall x\, P(x)$ es **falsa**.



Método del contraejemplo: técnica de refutación que consiste en **encontrar un solo caso** donde una proposición que afirma que algo es siempre verdadero (es decir, usa un cuantificador universal $\forall$) **no se cumple**. Esto es encontrar un x_0 tal que $P(x_0)$ se falsa.

Cuantificador existencial ($\exists$)

Este cuantificador afirma que hay al menos un elemento en el dominio de discurso que satisface la propiedad o relación que le sigue.

Símbolo	$\exists$	
Lectura	"Existe al menos uno", "Para algún", "Hay algún".	
Formato	$\exists x\, P(x)$ significa que "Existe al menos un x tal que la propiedad P es verdadera para x"	
Valor de verdad	Verdadero	La sentencia $\exists x\, P(x)$ es **verdadera** si, y solo si, se puede encontrar al menos un elemento "a" del dominio para el cual $P(a)$ es verdadero.
	Falso	Si se comprueban todos los elementos y para ninguno de ellos $P(x)$ es verdadero, entonces, la sentencia $\exists x\, P(x)$ es **falsa**.

Cuantificador de unicidad ($\exists!$)

Este cuantificador que permite expresar que **existe exactamente un** elemento que cumple cierta propiedad.

Símbolo	$\exists!$	
Lectura	"Existe un único", "Existe exactamente un", "uno y solo uno".	
Formato	$\exists! x\, P(x)$ significa que "Existe una única x tal que la propiedad P es verdadera para x"	
Forma desarrollada	El cuantificador de unicidad no es realmente necesario ya que la restricción de que existe un x único tal que $P(x)$ se puede expresar como: $\exists x\,(P(x) \land \forall y(P(y) \to y = x))$	
	Parte 1: Existencia	$\exists x\, P(x)$ - existe **al menos uno** que cumple $P(x)$
	Parte 2: Unicidad	$\forall y(P(y) \to y = x)$ - **cualquier otro** que lo cumpla debe ser igual a x

$\exists!_x\, pajaro(x) \land negro(x)$

$\exists! = f(\forall, \exists)$

Es importante anotar que con los cuantificadores universal y existencial podemos defendernos.

Tabla comparativa de cuantificadores

La siguiente tabla muestra un resumen entre los cuantificadores:

Característica	Cuantificador universal ($\forall$)	Cuantificador existencial ($\exists$)
Símbolo	$\forall$	$\exists$
Lectura común	"Para todo", "Para cada", "Para cualquier"	"Existe (al menos) un", "Para algún", "Hay algún"
Significado	La propiedad es verdadera para **todos** los elementos del dominio	La propiedad es verdadera para **al menos uno** del dominio
Estructura típica	$\forall x\, P(x)$	$\exists x\, P(x)$
Condición de verdad	$P(x)$ es verdadero para todo x.	Hay algún x para el cual $P(x)$ es verdadero.
Condición de falsedad	Hay algún x para el cual $P(x)$ es falso.	$P(x)$ es falso para cada x.
Palabras claves asociadas (al lenguaje natural)	Todos, cada, cualquiera, ninguno (usado con negación), siempre, para todo.	Existe, algún, algunos, hay, al menos uno, a veces, para algún.

Nota importante: El valor de la verdad para cualquiera de los cuantificadores depende del dominio.

Considere el siguiente enunciado:

Enunciado → Para todo jugador de baloncesto x, x es alto. ✓

$\forall$

¿Cuál de las siguientes formas de expresión son equivalentes de este enunciado?

$\forall$ a. Todo jugador de baloncesto es alto. Si

b. Entre todos los jugadores de baloncesto, algunos son altos. No

c. Algunas de las personas altas son jugadores de baloncesto. No

d. Cualquier persona alta es un jugador de baloncesto. No

$\forall$ e. Todas las personas que son jugadores de baloncesto son altos. Si

$\forall$ f. Cualquier persona que es un jugador de baloncesto es una persona alta. Si

$\forall x\,(B(x) \longrightarrow A(x))$

U = Son todas las personas

$x \in U$: x es cualquier persona

$\underbrace{\text{Para todo}}_{\forall x}$ jugador de baloncesto x, x es alto

$B(x)$: x es jugador de baloncesto

$A(x)$: x es alto

$\Downarrow$

$\underbrace{\text{Para todo } x,}_{\forall x}$ Si $\underbrace{x \text{ es jugador de baloncesto}}_{B(x)}$, entonces $\underbrace{x \text{ es alto}}_{A(x)}$

$$\forall x\,(B(x) \longrightarrow A(x))$$

2. Precedencia y cuantificadores

$5((2+3)+8) = 5(5+8) = 5(13) = 65$

- Es el orden en que se interpretan los cuantificadores (como ∀ y ∃) cuando aparecen anidados o en combinaciones.
- Aunque los cuantificadores no tienen una "precedencia rígida" como los operadores aritméticos, su **orden importa** muchísimo porque cambia completamente el significado de una expresión. → Próxima clase
- Los cuantificadores ∀ y ∃ tienen mayor precedencia que todos los operadores lógicos.
  - **Ejemplo 1**: $\forall x P(x) \vee Q(x)$ es la disyunción de $\forall x P(x)$ y $Q(x)$, en otras palabra esta expresión es equivalente a $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ y no a $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.
  - **Ejemplo 2**: Aunque las expresiones $\forall x \exists y\, P(x,y)$ y $\exists y \forall x\, P(x,y)$ tienen los mismos símbolos, no significan lo mismo.

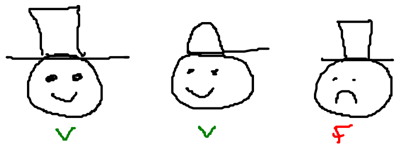
Expresión	**Significado**
$\forall x \exists y\, P(x,y)$	Para **cada x**, existe **un y distinto** (posiblemente) que cumple con $P(x,y)$
$\exists y \forall x\, P(x,y)$	Hay **un único y** que sirve para **todos los x**

Ejemplo 1: $\underbrace{\forall x\, P(x)}\vee Q(x) \equiv \underbrace{(\forall x\, P(x))} \vee Q(x)$

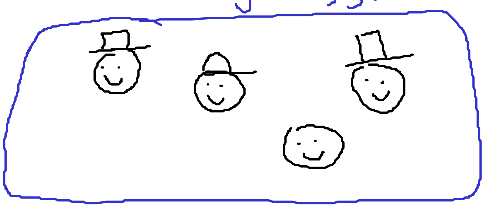
Ejemplo 2: El orden importa

$\forall x \exists y\, P(x,y)$ $\qquad$ $\exists y \forall x\, P(x,y)$

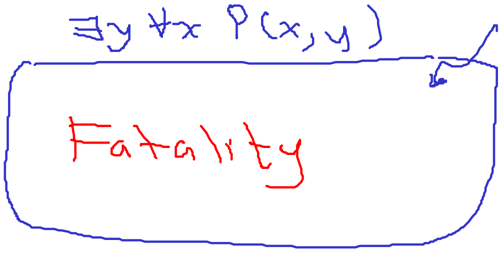
$P(x,y)$: x es feliz y tiene y



$\forall x \exists y\, P(x,y)$



$\exists y \forall x\, P(x,y)$



3. Cuantificadores como conjunciones y disyunciones

- En lógica de primer orden (cuantificacional), los cuantificadores tienen una relación estrecha con las conjunciones (∧) y disyunciones (∨) cuando los interpretamos en **dominios finitos**. → $U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Estas relaciones son las siguientes:
  1. Una proposición cuantificada universalmente (∀) es equivalente a una conjunción de proposiciones sin cuantificadores. $\forall x P(x) = P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots P(x_n)$
  2. Una proposición cuantificada existencialmente (∃) es equivalente a una disyunción de proposiciones sin cuantificadores. $\exists x P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$
- Esta relación no se puede aplicar en dominios infinitos.

Ejemplo del zoológico: $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_{36}, a_{37}\}$

→ a_i: animal i $\begin{cases} \text{perro} \\ \text{gato} \\ \text{pájaro} \end{cases}$

Total: 37 animales

Ejemplo:

$U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Suponga que el dominio de la función proposicional $P(x)$ consiste en los enteros 0, 1, 2, 3 y 4. Escriba cada una de estas proposiciones usando disyunciones, conjunciones y negaciones.

a. $\exists x\, P(x)$

b. $\forall x\, P(x)$

$U = \{\underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{1}, \underset{x_3}{2}, \underset{x_4}{3}, \underset{x_5}{4}\} \rightarrow$ Finito.

a. $\exists x P(x) = P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$

b. $\forall x P(x) = P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$

4. Lenguaje Formal . vs . Lenguaje informal

- Es importante poder traducir del lenguaje informal al formal cuando se trata de dar sentido a conceptos matemáticos nuevos.
- También, es igualmente importante poder traducir del lenguaje informal al formal cuando se analiza un problema complicado.

Funciones proposicionales
• $C(x)$: "x es cerveza" ✓   • $T(y)$: "y es tele" ✓   • $P(z)$: "z pierde la cabeza" ✓
Afirmaciones
• $P(h)$: "Homero pierde la cabeza" ✓

Pasos para traducir enunciados del lenguaje natural a lógica de predicados (cuantificacional / de primer orden).

A continuación se listan algunos pasos para traducir enunciados del lenguaje natural a lógica de primer orden:

1. **Leer y comprender el enunciado completo**: Antes de traducir, asegúrese de entender el significado exacto del enunciado.
2. **Identificar el dominio del discurso**: Defina sobre qué tipo de objetos se está hablando: personas, números, animales, ciudades, etc.
   - **Ejemplo**: "Todos los perros ladran" → **dominio**: *animales*, específicamente *perros*.
3. **Determinar las constantes y variables**:
   - **Constantes**: nombres propios o entidades específicas (ej. "Sofía", "Medellín", "3").
   - **Variables**: letras como x, y, z que representan elementos genéricos del dominio.
4. **Identificar los predicados**: Los predicados expresan propiedades o relaciones entre objetos.
   - **Ejemplos:**
     - "**Es un perro**": $perro(x)$
     - "**Ladra**": $ladra(x)$
     - "**Es mayor que**": $mayor\_que(x, y)$

5. **Traducir conectores lógicos**: Reemplace las palabras del lenguaje natural por conectores lógicos.

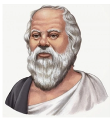
Expresión	Conector
No	¬
Y	∧
O	∨
Si ... entonces ...	→
Si y solo si ...	↔

6. **Detectar cuantificadores**:

Expresión	Conector
"Todos", "Cada", "Cualquier"	∀
"Existe", "Hay", "Alguno"	∃

7. **Armar la fórmula**: Construir la formula con los elementos anteriores.
8. **Verificar la fidelidad de la traducción**: Revise la fórmula y compare su significado con el enunciado original. Ajuste si es necesario.

Tip: Formas Aristotelicas



Silogismo: Forma de razonamiento deductivo que permite llegar a una conclusion necesaria a partir de dos proposiciones iniciales (premisas)

Las cuatro formas aristotélicas son proposiciones categóricas básicas que forman la base del silogismo clásico en la lógica aristotélica:

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
✓ **Forma A**: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo**: Todos los hombres son mortales. **Expresión:** $\forall x(hombre(x) \rightarrow mortal(x))$
✓ **Forma E**: Universal negativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo**: Ningún cuadrado es circulo. **Expresión:** $\forall x(cuadrado(x) \rightarrow \neg circulo(x))$
✓ **Forma I**: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo**: Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión:** $\exists x(estudiante(x) \wedge ingeniero(x))$
✓ **Forma O**: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo**: Algún pájaro no vuela. **Expresión:** $\exists x(pajaro(x) \wedge \neg vuela(x))$

- Las cuatro formas Aristotelicas pueden ser perfectamente traducidas perfectamente al lenguaje simbolico definido en la logica de primer orden.

- La logica de primer orden es una generalización y formalización de las ideas de Aristoteles

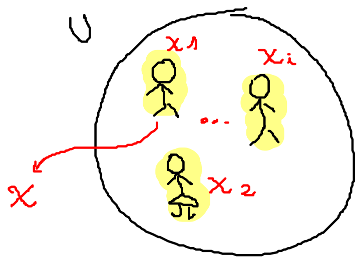
07/10/2025 – Matematicas Discretas 1 (Ude@)

Ejemplos:

Dados los siguientes enunciados en lenguaje natural (lenguaje informal), obtenga las expresiones en logica de predicados.

1. Todo estudiante de logica es curioso = $\forall x\,(estudianteLogica(x) \rightarrow curioso(x))$

- ✓ Universo: U = Todas las personas
- ✓ Variables: x = Cualquier persona $\rightarrow x \in U$
- ✓ Constantes: —
- ✓ Predicados:
  1. $estudianteLogica(x)$: x es estudiante de logica
  2. $curioso(x)$: x es curioso
- ✓ Cuantificadores: $\forall$



$\underbrace{\text{Todo}}_{\forall}\ \underbrace{\text{estudiante de logica}}_{estudianteLogica(x)}\ \underbrace{\text{es curioso}}_{curioso(x)}$

Todo estudiante de logica es curioso

$\forall$ estudianteLogica(x) curioso(x)

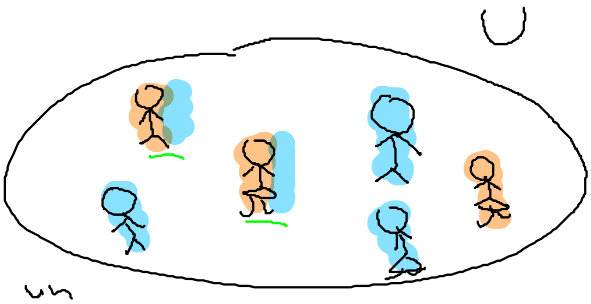
Rta: $\forall x\,(\text{estudianteLogica}(x) \rightarrow \text{curioso}(x))$

Otras formas de decir lo mismo:

→ Todo el que estudie logica es curioso $A(S,P) = \forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$

→ Para todo x, Si x es estudiante de logica, entonces x es curioso

2. Algun estudiante de esta clase ha tomado un curso de Java



- Universo: Todos los estudiantes
- Variables: x es un estudiante $\in U$
- Constantes: ___
- Predicados:
  - estudiante(x): x es estudiante de esta clase
  - Java(x): x ha tomado un curso de Java
- Cuantificadores: $\exists$

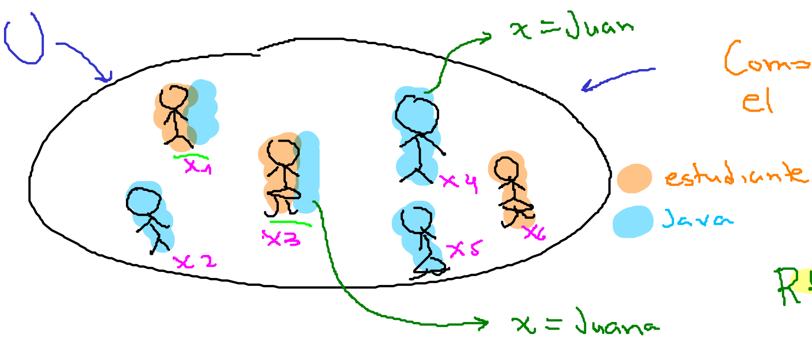
Algun estudiante de esta clase ha tomado un curso de Java

$\exists$ estudiante(x) Java(x)

- Algun S es P → $I(S,P) = \exists x\,(S(x) \wedge P(x))$
- Existe un x tal que x es S y x es P

Existe un x tal que x es un estudiante de esta clase y x ha tomado un curso de Java

Rta: $\exists x\,(\text{estudiante}(x) \wedge \text{Java}(x))$



Como seria la expresion si el Universo son estos 6 estudiantes:

$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$

$x \in U$

Rta: Verdadera

Si $\underline{U \text{ es finito}}$: $\exists_x P(x) = P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$

$U = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$

$$\exists x\,(\text{estudiante}(x) \wedge \text{Java}(x)) = (\underset{V}{\text{estuante}(x_1)} \wedge \underset{V}{\text{Java}(x_1)}) \vee$$
$$(\underset{F}{\text{estudiante}(x_2)} \wedge \underset{V}{\text{Java}(x_2)}) \vee$$
$$(\underset{V}{\text{estuante}(x_3)} \wedge \underset{V}{\text{Java}(x_3)}) \vee$$
$$(\underset{F}{\text{estudiante}(x_4)} \wedge \underset{V}{\text{Java}(x_4)}) \vee$$
$$(\underset{F}{\text{estuante}(x_5)} \wedge \underset{V}{\text{Java}(x_5)}) \vee$$
$$(\underset{V}{\text{estudiante}(x_6)} \wedge \underset{F}{\text{Java}(x_6)})$$
$$= \underline{V} \vee F \vee V \vee F \vee F \vee F = V$$

3. Sean:

Contexto

$U = \{x \mid x$ es un habitante del continente africano$\}$ → es africano

p: "Hablan frances"

U

Si $p(x)$: "x habla frances"

Escriba en lenguaje informar las siguientes expresiones formales:

- $\forall x\, p(x)$: Todo africano habla frances
- $\exists x\, p(x)$ Hay africanos que hablan frances

a. $\forall x\, p(x)$: Para todo x, x habla frances

$\Updownarrow$

Todo x habla frances

↓

Todo africano habla frances

b. $\exists x\, p(x)$: Existe un x tal que, x habla frances

$\Updownarrow$

Hay x que habla frances

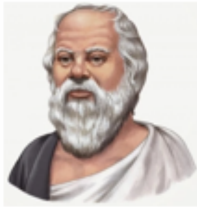
↓

Hay africanos que hablan frances

4 -

Tenemos las siguientes premisas:

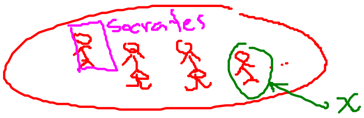
- "Todos los hombres son mortales"
- "Sócrates es un hombre"



Y la siguiente conclusión: "Sócrates es Mortal"

¿Como es la representación en lógica cuantificacional de las premisas y la conclusión?

- Universo: $U =$ Todos los humanos



- Variable: x es un humano $(x \in U)$
- Constantes: socrates $(x = \text{socrates})$
- Predicados:
  - mortal(x): x es mortal
  - hombre(x): x es un hombre

Premisas

$\forall$ Todos los hombres son Mortales (mortal(x)) $\longrightarrow$ $\forall x\,(\text{hombre}(x) \rightarrow \text{mortal}(x))$

Socrates es un Hombre (hombre(x)) $\longrightarrow$ hombre(Socrates)

Conclusión

Socrates es mortal $\longrightarrow$ Conclusión: mortal(Socrates)