11/09/2025 – Matemáticas Discretas I (UdeA)

1. Repaso clase anterior

Demostraciones → Verdad

Demostraciones → Validez ⇝ Argumento: $P \rightarrow Q$

Premisa / Hipótesis / Antecedente (P)

Conclusión / Tesis / Consecuente (Q)

Argumento:

Notación de consecuentes

Premisas (V) $\begin{cases} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{cases}$

Conclusión $\{ \therefore Q$

Notación proposicional

$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$

Tautología.

$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$

Demostración	Enfoque basado en Modelos	Enfoque axiomático
Verdad	Tabla de verdad: ✓ $A \leftrightarrow B$ es tautología	✓ $A \equiv B$; $A \equiv A_1$, A_2, $\vdots$, B } Identidades lógicas
Validez	✓ Tabla de verdad $A \rightarrow B$ ↳ Renglones críticos deben ser verdaderos	* Lo veremos hoy...

Ejemplo: Represente el siguiente argumento simbólicamente y determine si es valido

Premisas $\{$ Si $\underbrace{2 = 3}_{P}$, entonces $\underbrace{\text{yo me comí mi sombrero}}_{Q}$

Me comí mi sombrero Q

Conclusión $\{ \therefore \underbrace{2 = 3}_{P}$

1. Proposiciones simples

- P: $2 = 3$
- Q: Yo me comí mi sombrero

2. Expresión lógica del Argumento.

Notación de consecuentes

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \\ \hline \therefore P \end{array}$$

Notación Proposicional

$P \rightarrow Q, Q \vdash P$

Tautología

$(P \rightarrow Q) \wedge Q \longrightarrow P$

3. Demostracion de Validez (Tabla de Verdad)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{Q \qquad} \\ \therefore P \end{array}$$

i. Variables: P, Q

ii. filas: $n = 2 \rightarrow$ filas $= 2^n = 2^2 = 4$

iii. Tabla de verdad

premisas — conclusión

P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	P
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0 ×
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1 ✓

Renglon critico

Por lo tanto el argumento es <u>invalido</u>

2. Enfoque axiomatico:

Usar:
1. Identidades logicas (Tabla de axiomas)
2. Silogismos (Tabla de inferencias)

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \rightarrow q$, p / $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$ / $\therefore p$
Modus Tollens	$p \rightarrow q$, $\neg q$ / $\therefore \neg p$	Conjunción	p, q / $\therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$p \rightarrow q$, $q \rightarrow r$ / $\therefore p \rightarrow r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$, $p \rightarrow r$, $q \rightarrow r$ / $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$, $\neg p$ / $\therefore q$		
Adición	p / $\therefore p \vee q$	Resolución	$p \vee q$, $\neg p \vee r$ / $\therefore q \vee r$

Ejemplo 1

Ejemplo: Demuestre que el siguiente argumento lógico es valido:

$$\underbrace{[p \wedge (p \to q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \to \neg q)] \to (s \vee t)}_{}$$ ← Tautologia

Notación de Consecuentes

$$\left.\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ s \vee r \\ r \to \neg q \end{array}\right\} \text{Premisas}$$
$$\overline{\therefore\ s \vee t}\ \} \text{ Conclusión}$$

Notación proposicional

$$p,\ p \to q,\ s \vee r,\ r \to \neg q \vdash s \vee t$$

Demostración

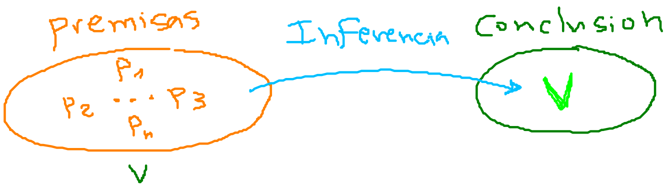
Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$, p / $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$ / $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$, $\neg q$ / $\therefore \neg p$	Conjunción	p, q / $\therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$p \to q$, $q \to r$ / $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$, $p \to r$, $q \to r$ / $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$, $\neg p$ / $\therefore q$		
Adición	p / $\therefore p \vee q$	Resolución	$p \vee q$, $\neg p \vee r$ / $\therefore q \vee r$

$$\begin{array}{ll} p & (a)\ ✓ \\ p \to q & (b)\ ✓ \\ s \vee r & (c)\ ✓ \\ r \to \neg q & (d)\ ✓ \\ \hline \therefore\ s \vee t & \end{array}$$



	Procedimiento	Justificación
1	p	Premisa (a)
2	$p \to q$	Premisa (b)
3	q ✓	Modus ponens en 1 y 2
4	$r \to \neg q$ ✓	Premisa (d)
5	$\neg r$	Modus Tollens en 3 y 4
6	$s \vee r$	Premisa (c)
7	s	Eliminación en 5 y 6
8	$\therefore\ s \vee t$	Adición en 7

$$\begin{array}{l} p \to q\ ✓ \\ \neg q\ ✓ \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline q \end{array}$$

Ejemplo 2: Demuestre que el siguiente argumento lógico es valido.

$$\begin{array}{l} (P \to Q) \to R \\ P \\ \hline \therefore Q \to R \end{array}$$

Equivalencias lógicas

y(∧) o(∨)

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$; p; $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$; $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$; $\neg q$; $\therefore \neg p$	Conjunción	p; q; $\therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$p \to q$; $q \to r$; $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$; $p \to r$; $q \to r$; $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$; $\neg p$; $\therefore q$		
Adición	p; $\therefore p \vee q$	Resolución	$p \vee q$; $\neg p \vee r$; $\therefore q \vee r$

$$\begin{array}{ll} (P \to Q) \to R & (a) \\ P & (b) \\ \hline \therefore Q \to R & \end{array}$$

	Procedimiento	Justificación
1	$(P \to Q) \to R$	Premisa (a)
2	$(\neg P \vee Q) \to R$	Implicacion en 1 $P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
3	$\neg(\neg P \vee Q) \vee R$	Implicacion en 2
4	$(P \wedge \neg Q) \vee R$	Ley de Morgan en 3 para la disyuncion (∨)
5	$R \vee (P \wedge \neg Q)$	Conmutatividad en 4 para la disyuncion (∨)
6	$(R \vee P) \wedge (R \vee \neg Q)$	Distributividad en 5 para la disyuncion (∨)
7	$R \vee \neg Q$	Simplificación en 6 $\frac{p \wedge q}{\therefore p}$
8	$\neg Q \vee R$	Conmutatividad en 7 para la disyunción
9	$\therefore Q \to R$	Implicación en 8 (I ← D)

Ejemplo 3: Demuestre el siguiente caso particular de adición entre implicaciones:

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \rightarrow R \\ \hline \therefore P \rightarrow (Q \wedge R) \end{array}$$

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica ($y(\wedge)$)	Equivalencia lógica ($o(\vee)$)
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$	Simplificación	$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$
Modus Tollens	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$	Conjunción	$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$	Prueba de división por casos	$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore r \end{array}$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$		
Adición	$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore p \vee q \end{array}$	Resolución	$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore q \vee r \end{array}$

$$\begin{array}{ll} P \rightarrow Q & (a) \\ P \rightarrow R & (b) \\ \hline \therefore P \rightarrow (Q \wedge R) & \end{array}$$

	Procedimiento	Justificación
1	$P \rightarrow Q$	Hipotesis (a)
2	$P \rightarrow R$	Hipotesis (b)
3	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	Conjunción de 1 y 2
4	$\underbrace{(\neg P \vee Q)}_{p} \wedge (\underbrace{\neg P}_{q} \vee \underbrace{R}_{r})$	Implicación en 3
5	$\underbrace{((\neg P \vee Q) \wedge \neg P)}_{(p \vee q) \wedge r} \vee \underbrace{((\neg P \vee Q) \wedge R)}_{(p \vee q) \wedge r}$	Distributividad para el $y(\wedge)$ en 4
6	$((\neg P \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg P)) \vee ((\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$	Distributividad para el $y(\wedge)$ en 5
7	$(\neg P \vee (Q \wedge \neg P)) \vee ((\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R))$	Idempotencia para el $y(\wedge)$ en 6
8	$(\neg P) \vee (Q \wedge \neg P) \vee (\neg P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$	Asociatividad para el $o(\vee)$ en 7
9	$\neg P \vee (Q \wedge R)$	Absorción para el $o(\vee)$ en 8
10	$\therefore P \rightarrow (Q \wedge R)$	Implicación en 9