28/08/2025 - Matematicas discretas (UdeA)

1. Repaso

a. Operadores logicos

Operador	Símbolo	Nombre	Descripción
Negación	$\neg p$	No (NOT)	Niega el valor de verdad de una proposición. Si p es verdadera, $\neg p$ es falsa.
Conjunción	$p \wedge q$	Y (AND)	Es verdadera solo si ambas proposiciones lo son. $p \wedge q$ es verdadera solo si p y q lo son.
Disyunción	$p \vee q$	O (OR)	Es verdadera si al menos una de las proposiciones lo es.
Disyunción exclusiva	$p \oplus q$	O exclusiva (XOR)	Es verdadera si una, y solo una, de las proposiciones es verdadera.
Condicional	$p \rightarrow q$	Si … entonces … (Implica)	Solo es falsa cuando p es verdadera y q es falsa.
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	… si y solo si … (Equivale)	Es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

b. Tablas de verdad

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

c. Clasificación de las expresiones condicionales

Nombre	Símbolo	Lectura	Significado lógico
Condicional (orig)	$p \rightarrow q$	Si p entonces q	Es falsa solo si p es verdadera y q es falsa.
Recíproco	$q \rightarrow p$	Si q entonces p	Invierte antecedente y consecuente.
Contrarrecíproco	$\neg q \rightarrow \neg p$	Si no q entonces no p	Lógicamente equivalente a la condicional original.
Contrario	$\neg p \rightarrow \neg q$	Si no p entonces no q	Negación de ambas partes de la condicional.

d. Expresiones lógicas (Reglas de prioridad y asociatividad

Prioridad	Símbolo	Asociatividad	Ejemplo con paréntesis
1 (más alta)	$\neg$	No aplica (unitario)	$\neg p \wedge q \mapsto ((\neg p) \wedge q)$
2	$\wedge$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \wedge q \wedge r \mapsto ((p \wedge q) \wedge r)$
3	$\vee$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \vee q \vee r \mapsto ((p \vee q) \vee r)$
4	$\oplus$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \oplus q \oplus r \mapsto ((p \oplus q) \oplus r)$
5	$\rightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \rightarrow q \rightarrow r \mapsto (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
6 (más baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \mapsto (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

Tarea: Se tiene la siguiente proposición
"Si gano la lotería, seré feliz"

Se pide:
1. Determine las proposiciones simples y la expresión lógica asociada
2. Obtenga el recíproco, el contrarecíproco y el contrario.

→ Solución:

Bonus 0.1: Jose David Villadiego.

"Si gano la lotería, seré feliz"

Preposiciones:

G = gano la lotería

F = seré feliz

Expresión lógica: ´

$$G \to F$$

Caso	Forma Lógica	Lenguaje Natural
Original	**G → F**	Si gano la lotería, seré feliz
Reciproco	**F → G**	Si soy feliz, ganaré la lotería
Inverso	**¬G → ¬F**	Si no gano la lotería, no seré feliz
Contrarrecíproco	**¬F → ¬G**	Si no soy feliz, no ganaré la lotería

Recordemos las reglas de precedencia y asociatividad

Prioridad	Símbolo	Asociatividad	Ejemplo con paréntesis
1 (más alta)	$\neg$	No aplica (unitario)	$\neg p \land q \mapsto ((\neg p) \land q)$
2	$\land$	Izquierda ($I \to D$)	$p \land q \land r \mapsto ((p \land q) \land r)$
3	$\lor$	Izquierda ($I \to D$)	$p \lor q \lor r \mapsto ((p \lor q) \lor r)$
4	$\oplus$	Izquierda ($I \to D$)	$p \oplus q \oplus r \mapsto ((p \oplus q) \oplus r)$
5	$\to$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \to q \to r \mapsto (p \to (q \to r))$
6 (más baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \mapsto (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

2. Sea $P = F$, $Q = V$, $R = V$ y $S = F$. ¿Cual es el valor de la verdad para cada una de las siguientes expresiones logicas?

- $P \wedge Q \vee \neg R \vee S$ ⇝ $((P \wedge Q) \vee (\neg R)) \vee S$
- $(P \wedge Q) \vee (\neg R \vee S)$
- $P \wedge (Q \vee \neg R) \vee S$ *
- $\neg(P \oplus \neg Q) \rightarrow S$

+

1. ( )
2. $\neg$
3. $\wedge$
4. $\vee$
5. $\oplus$
6. $\rightarrow$
7. $\leftrightarrow$

−

* $\underbrace{\overset{(F)}{P} \wedge \overbrace{(\overset{(V)}{Q} \vee \underbrace{\neg \overset{(V)}{R}}_{(F)})}}_{F} \vee \overset{(F)}{S} = F$

P	Q	P ∧ Q
F	F	F
F	V	F ←
V	F	F
V	V	V

Paso a paso:

* $\overset{F}{P} \wedge (\overset{V}{Q} \vee \neg \overset{V}{R}) \vee \overset{F}{S}$

↓ Reemplazo

$F \wedge (V \vee \underbrace{\neg (V)}) \vee F$

$F \wedge (\underbrace{V \vee F}) \vee F$

$\underbrace{F \wedge V} \vee F$

$\underbrace{F \vee F}$

F

P	Q	P ∨ Q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Las variables P, Q, R y S pueden tomar distintos valores:

	P	Q	R	S	
1	F	F	F	F	→ ?
2	F	F	F	V	→ ?
⋮		⋮			
i	F	V	V	F	→ F
⋮		⋮			
16	V	V	V	V	→ ?

→ $n = 4\ (P, Q, R, S)$

Posibles combinaciones:

$2^n = 2^4 = 16$ ← n: # de variables

2. Tablas de verdad

Material 2025/1

Diapositivas

URL
Presentación - Clase 1

URL
Presentación - Clase 2 ← Diapositiva de Tablas de verdad

URL
Presentación - Clase 3

Bonus

TAREA
Bonus 1 (opcional)

TAREA
Bonus 2 (opcional)

Talleres

ARCHIVO
Logica proposicional - Taller 1

ARCHIVO

Ejemplo: Tabla de verdad para las operaciones lógicas

* $\neg P$: Negación (Operación unitaria)

$\underbrace{\quad}_{P}$ $n = 1$ ($2^1 = 2$ Filas)

P	¬P
F	V
V	F

* $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \oplus Q$, $P \to Q$, $P \leftrightarrow Q$ (operaciones binarias)

$\underbrace{\quad}_{P, Q}$ $n = 2$ ($2^2 = 4$ Filas)

Combinaciones (columnas de las variables)

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q	P ⊕ Q	P → Q	P ↔ Q
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Las tablas de verdad facilitan la evaluación de expresiones lógicas

¿Cómo evaluar cualquier expresión lógica usando tablas de verdad?

Trabajando con tablas de verdad

Para construir una tabla de verdad se siguen los siguientes pasos:

1. Identificar las variables proposicionales.
2. Determinar el número de filas necesarias (para n variables 2^n ~~columnas~~ Filas).
3. Construir las columnas de las variables (Falso = 0; Verdadero = 1). F = 0; V = 1
4. Agregar columnas auxiliares si es necesario.

Tip de legibilidad: Cuando la cantidad de columnas es muy grande es útil representar una expresión lógica (con letras minúsculas) con una letra mayúscula.

5. Evaluar la expresión lógica paso a paso.
6. Revisar y validar la tabla.

Ejemplos: Evaluar la expresión $p \vee q \to \neg r$

1. Variables: p, q, r

2. Número de Filas: $n = 3 \to$ Filas $= 2^n = 2^3 = 8$

$$\underbrace{p \vee q}_{②} \rightarrow \underbrace{\neg r}_{①}$$

$② \rightarrow ①$

Columnas de las variables originales | Columnas auxiliares | Expresión a evaluar

p	q	r	① $\neg r$	② $p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Q P

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Ejemplo: $P \wedge (Q \vee \neg R) \vee S$

$$\underbrace{\underbrace{P \wedge \underbrace{(Q \vee \neg R)}_{①}}_{②} \vee S}_{③}$$

1. Variables: P, Q, R, S
2. Filas: $n = 4 \longrightarrow$ Filas $= 2^4 = 16$
3. Tabla

P	Q	R	S	$\neg R$	① $Q \vee \neg R$	② $P \wedge (Q \vee \neg R)$	③ $P \wedge (Q \vee \neg R) \vee S$
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

$$\underbrace{\underbrace{P \wedge \underbrace{(Q \vee \underbrace{\neg R}_{①})}_{②}}_{③} \vee S}_{④}$$

① $= \neg R$

② $= Q \vee \neg R$

③ $= P \wedge ② = P \wedge (Q \vee \neg R)$

④ $= ③ \vee S = P \wedge (Q \vee \neg R) \vee S$

Alto

( )
$\neg$
$\wedge$
$\vee$
$\oplus$
$\rightarrow$
$\leftrightarrow$

Bajo

Ejercicio 5: $\neg p \to (\neg r \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee \neg q \to p$

1. Variables: p, q, r
2. Filas: $n = 3 \longrightarrow f = 2^3 = 8$
3. Tabla

*

$$\neg p \to (\neg r \vee \underbrace{q \wedge p}_{①}) \leftrightarrow \underbrace{r \vee \neg q}_{③} \to p$$

$$\underbrace{\neg r \vee ①}_{②}$$

$$\underbrace{\neg p \to ②}_{④} \leftrightarrow \underbrace{③ \to p}_{⑤}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$f = \underbrace{④ \leftrightarrow ⑤}_{⑥}$$

$$f = \neg p \to (\neg r \vee q \wedge p) \longleftrightarrow (r \vee \neg q) \longrightarrow p \to ⑥$$

Alto

( )
$\neg$
$\wedge$
$\vee$
$\oplus$
$\to$
$\leftrightarrow$

Bajo

p	q	r	¬p	¬q	¬r	① $q \wedge p$	② $\neg r \vee (q \wedge p)$	③ $r \vee \neg q$	④ = ¬p → ② $\neg p \to (\neg r \vee q \wedge p)$	⑤ = ③ → p $(r \vee \neg q) \to p$	⑥ F
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

3. Clasificación de las proposiciones

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Tipos de Proposiciones

- Tautología → Todas las combinaciones son Verdaderas
- Contradicción → Todas las combinaciones son Falsas
- Contingencia → Hay combinaciones verdaderas y Falsas

Ejemplos:

1. $\underbrace{p \vee \neg p}_{1}$

i. variables: p

ii. Filas: $n = 1$

$\downarrow$

$\text{filas} = 2^n = 2^1 = 2$

iii. Tabla

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

$p \vee \neg p$ es una tautología

2. $p \wedge \neg p$

i. variables: p

ii. Filas: $n = 1$

$\downarrow$

$\text{filas} = 2^n = 2^1 = 2$

iii. Tabla

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
0	1	F
1	0	F

$p \wedge \neg p$ es una contradicción

3. $[(\neg q \vee p) \to \neg p] \wedge q$

i. variables: p, q

ii. Filas: $n = 2$

$\downarrow$

$\text{filas} = 2^n = 2^2 = 4$

iii. Tabla

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{[(\neg q \vee p)}_{①} \to \neg p]}_{②} \wedge q}_{③}$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	① $\neg q \vee p$	① $\to \neg p$: $(\neg q \vee p) \to \neg p$	② $\wedge q$: $[(\neg q \vee p) \to \neg p] \wedge q$
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0
		$\uparrow$ Q		$\uparrow$ P	J $P \to Q$	

$[(\neg q \vee p) \to \neg p] \wedge q$ es una contingencia

4. Equivalencia lógica

Dos proposiciones compuestas p y q son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

Notación: Una equivalencia se puede escribir como $p \leftrightarrow q$ o como $p \equiv q$

Ejemplo:
Demuestre que $\neg p \vee q$ y $p \to q$ son equivalentes.

$\underbrace{\neg p \vee q}_{P} \overset{?}{\equiv} \underbrace{p \to q}_{Q}$

$P \overset{?}{\equiv} Q$ es una tautología?

$\neg p \vee q \leftrightarrow p \to q$

i. variables: p, q

ii. Filas: $n = 2 \to \text{filas} = 2^2 = 4$

iii. Tabla

$$\underbrace{\neg p \vee q}_{①} \leftrightarrow \underbrace{p \to q}_{②}$$

① $\leftrightarrow$ ②

p	q	$\neg p$	① $\neg p \vee q$	② $p \to q$	① $\leftrightarrow$ ② $(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

$\neg p \vee q$ es equivalente a $p \to q$

$$\boxed{\neg p \vee q \equiv p \to q}$$

Leyes de Morgan

① $\boxed{\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q}$

② $\boxed{\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q}$

Demostración se hace por tabla de verdad

$\to$ Ley ②: $\neg (p \vee q) \overset{?}{\equiv} \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \vee p$	$\neg(q \vee p)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(q \vee p) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Dada la siguiente tabla de verdad. ¿Cuales expresiones son logicamente equivalentes?

				Condicional	Reciproco	Contrarrecíproco	Inverso
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1

① $\boxed{p \to q \equiv \neg q \to \neg p}$

② $\boxed{q \to p \equiv \neg p \to \neg q}$