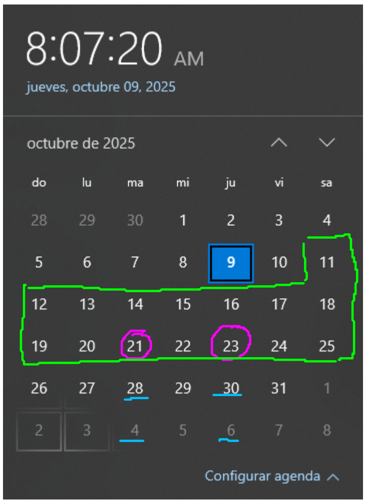
09/10/2025 – Matematicas Discretas 1 (UdeA)

1. Avisos



- Posible fin tema 2
- Segunda tanda de Parciales
- Segundo parcial: 30/10/2025 (13/17)
  Virtual y en horas de clase.

2. Conceptos abordados

En lógica de predicados es importante tener claros los siguientes conceptos:

- Universo o dominio
- Objetos o individuos
- Predicados
- Variables
- Conjunto de verdad
- Cuantificadores.
- Funciones proposicionales

(A) Conceptos en logica de predicados.

- Dominio $U = \{x \mid x$ es 웃 o 웃$\}$
- Variable x: 웃 ó 웃
- Constantes o instancias $x =$ 웃 ← Bart
- Predicados
  → Funcion proposicional $P(x)$
  $P(x)$: x es un personaje de los simpsons

- Operadores:
  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(B) Cuantificadores: (cantidad)

✓ (1) Universal • ($\forall$ – Para todo, ...)

$\forall x P(x)$: Para todo x existe un x tal que $P(x)$

✓ (2) Existencial • ($\exists$ – Existe, ...)

$\exists x P(x)$: Existe algun x tal que $P(x)$

$\exists! = f(\forall, \exists)$ (3) Unicidad ($\exists!$ – Solo uno, ...)

$\exists! x P(x)$: Existe solo un x que cumple $P(x)$

Mediante el uso de (A) y B es posible construir expresiones usando lógica cuantificacional

(C) Lenguaje Natural vs. Lenguaje Formal

Lenguaje Natural

$\overbrace{\text{Adri estudia en la UdeA}}^{P}$

$\overset{x}{\underbrace{\text{Adri}}_{S}}$ $\underbrace{\text{estudia en la UdeA}}_{P}$

Funcion propos: estudiaUdeA(x)

Lenguaje Formal

(1) Lógica proposicional:

P: Adri estudia en la UdeA

Parcial 1

(2) Lógica cuantificacional:

- Dominio: $U = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$
- Variable: $x \in U$; x es cualquier persona
- Predicados:
  - estudiaUdeA(x): x estudia en la Udea
- Objeto: $x =$ Adri.

estudiaUdeA(Adri)

Parcial 2

Herramienta importante – Formas Aristotélicas

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo**: Todos los hombres son mortales. **Expresión**: $\forall x(hombre(x) \rightarrow mortal(x))$
Forma E: Universal negativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo**: Ningún cuadrado es circulo. **Expresión**: $\forall x(cuadrado(x) \rightarrow \neg circulo(x))$
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo**: Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión**: $\exists x(estudiante(x) \wedge ingeniero(x))$
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo**: Algún pájaro no vuela. **Expresión**: $\exists x(pajaro(x) \wedge \neg vuela(x))$

Ejemplo 1: Retomemos el ejemplo del zoologico previamente visto en clase

1. Un zoológico tiene siete perros de color café, dos perros de color negro, seis gatos grises, diez gatos negros, cinco pájaros azules, seis pájaros amarillos y un pájaro negro. ~~Determine cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.~~ → Enunciado (contexto)
   a. Hay un animal en el zoológico que es rojo.
   b. Todo animal en el zoológico o es un ave o es un mamífero.
   c. Todo animal en el zoológico es de color café, gris o negro.
   d. Hay un animal en el zoológico que no es ni un gato ni perro.
   e. Ningún animal en el zoológico es de color azul.
   f. Hay en el zoológico un perro, un gato y un pájaro que todos tienen el mismo color.

1. Dominio: Finito: 37 animales

$U = \{x \mid x \text{ es un animal del zoologico}\}$

$U = \{\underbrace{x_1, x_2, \dots x_9}_{\text{Perros (9)}}, \underbrace{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{25}}_{\text{Gatos (16)}}, \underbrace{x_{26}, x_{27}, \dots, x_{37}}_{\text{Pajaros (12)}}\}$

2. Variables: $x \in U \to x$ es cualquier animal del zoologico:

3. Constantes: — (No se menciona animal especifico)

4. Predicados: Lo que se dice de x (Animal del zoo) → Tipo de animal, Color del animal, Especie del animal

[]

perro(x): x es un perro

gato(x): x es un gato

pajaro(x): x es un ave

[cafe, negro, gris, azul, amarillo, rojo]

cafe(x): x es cafe

negro(x): x es negro

azul(x): x es azul

amarillo(x): x es amarillo

rojo(x): x es rojo

[ave, mamifero]

ave(x): x es un ave

mamifero(x): x es mamifero

Traducción del lenguaje natural a Lenguaje Formal.

$x \in U$ → Los animales del zoologico: $U = \{x_1, x_2, \dots x_{37}\}$

$U = \{x \mid x \text{ es un animal del zoologico}\}$

x → Uno de los animales del zoologico

Lenguaje Natural	Lenguaje Formal (Logica cuantificacional)
a. Hay un animal en el zoologico que es rojo ($\exists x$: Hay un; x: animal en el zoologico)	$\exists x(\text{rojo}(x))$ — x: animal en el zoologico.
b. Todo animal en el zoologico o es un ave o es un mamifero ($\forall x$: Todo; x: animal en el zoologico; o → $\vee$)	$\forall x(\text{ave}(x) \vee \text{mamifero}(x))$ — x: animal del zoologico
c. Todo animal en el zoologico es de color cafe, gris o negro ($\forall x$: Todo; x: animal en el zoologico; o → $\vee$)	$\forall x(\text{cafe}(x) \vee \text{gris}(x) \vee \text{negro}(x))$
d. Hay un animal en el zoologico que no es ni gato ni perro ($\exists x$: Hay; x: animal en el zoologico; ni → $\neg$) Que no es gato y que no es perro ($\neg$, $\wedge$, $\neg$)	$\exists x(\neg\text{gato}(x) \wedge \neg\text{perro}(x))$
e. Ningun animal en el zoologico es de color azul ($\neg\exists x$: Ningun; x: animal en el zoologico) Todos los animales del zoologico no son azules ($\forall x$: Todos; x: los animales del zoologico; no → $\neg$)	$\neg\exists x(\text{azul}(x))$ ✓ /// $\forall x(\neg\text{azul}(x))$
f. Hay en el zoologico un perro, un gato y un pajaro que todos tienen el mismo color.	Necesitamos mas cosas que no se han dado

x: Animal del zoologico → $x \in$ Animales del zoologico

y: color → $\{$azul, rojo, amarillo, gris, negro, cafe$\}$ → $y \in$ Colores

Necesitamos saber como Anidar

Importante: El universo de discurso delimita de que se habla, da sentido a los cuantificadores y asegura que la traducción de lenguaje natural a logica de predicados sea precisa, coherente y evaluable

Ejemplo 2: Cambiemos el dominio de discurso a todos los animales del planeta y veamos como cambia la expresión resultante de realizar la traducción

1. Dominio: Finito: Muchos animales (Desconocido) billones

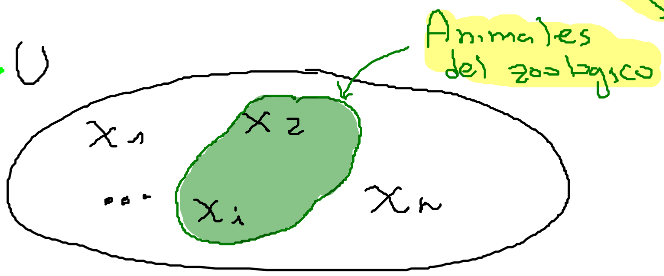
$U = \{x \mid x$ es un animal de la tierra$\}$

2. Variables: $x \in U \rightarrow x$ es cualquier animal terrestre

3. Constantes: — (No se menciona animal específico)

4. Predicados: Lo que se dice de x

- Animal → Tipo de animal ✓
- Color del animal ✓
- Especie del animal ✓
- Animal del zoologico



$Zoo(x)$: x es un animal del zoologico

Forma	Nombre	Proposición	Forma
$A(S,P)$	Universal afirmativa	Todos los S son P	$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$
$E(S,P)$	Universal negativa	Ningún S es P / Todos los S no son P	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$
$I(S,P)$	Particular afirmativa	Algún S es P	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$
$O(S,P)$	Particular negativa	Algún S no es P	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$

Lenguaje Natural	Lenguaje Formal (Logica cuantificacional)
a. Hay un animal en el zoologico que es rojo ($\exists x$, x, $zoo(x)$, $rojo(x)$)	$\exists x\,(Zoo(x) \wedge rojo(x))$ [I(S,P)]
b. Todo animal en el zoologico o es un ave o es un mamifero ($\forall x$, x, P, Q, $P \rightarrow Q$)	$\forall x\,(Zoo(x) \rightarrow ave(x) \vee mamifero(x))$ [A(S,P)]
e. Ningun animal en el zoologico es de color azul	$\exists x\,(zoo(x) \wedge \neg azul(x))$ [O(S,P)]

3. Precedencia de los cuantificadores

- Es el orden en que se interpretan los cuantificadores (como ∀ y ∃) cuando aparecen anidados o en combinaciones.
- Aunque los cuantificadores no tienen una "precedencia rígida" como los operadores aritméticos, su **orden importa** muchísimo porque cambia completamente el significado de una expresión.
- Los cuantificadores ∀ y ∃ tienen mayor precedencia que todos los operadores lógicos.

Prioridad	Operador	Símbolo	Significado
1 (más alta)	Paréntesis	( )	Agrupación
2	Cuantificadores	∀, ∃	Universal / Existencial
3	Negación	¬	No
4	Conjunción	∧	Y
5	Disyunción	∨	O
6	Implicación	→	Si ... entonces ...
7 (más baja)	Equivalencia	↔	Si y solo si ...

Ejemplo: $\underbrace{\forall x\, P(x)}_{1} \wedge \underbrace{Q(x)}_{2} \equiv \cancel{\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))}$

$\underbrace{1 \wedge Q(x)}_{1 \wedge 2}$

$$\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \equiv (\forall x\, P(x)) \wedge Q(x)$$

4. Sobre las equivalencias lógicas

- Las afirmaciones que involucran predicados y cuantificadores son lógicamente equivalentes si y solo si tienen el **mismo valor de verdad** en los siguientes casos:
  - Para cada predicado sustituido en estas afirmaciones.
  - Para cada dominio del discurso utilizado para las variables en las expresiones.
- La notación $S \equiv T$ indica que S y T son lógicamente equivalentes.
  - **Ejemplo**: $\forall x\, \neg\neg S(x) = \forall x\, S(x)$
- Las equivalencias son herramientas fundamentales para cosas como:
  - Transformar expresiones sin cambiar su significado lógico.
  - Simplificar pruebas.
  - Aplicar reglas de inferencia o deducción natural.

Doble Negación

$$\begin{cases} \forall x\, \neg\neg S(x) \equiv \forall x\, S(x) \\ \exists x\, \neg\neg S(x) \equiv \exists x\, S(x) \end{cases}$$

5. Cuantificadores y negaciones

- Los cuantificadores existencial (∃) y universal (∀) están profundamente conectados a través de las negaciones.
- Cuando negamos una afirmación cuantificada, el cuantificador cambia:
  - Negar que "para **todo** x se cumple $P(x)$" es lo mismo que decir que "**existe al menos un** x" tal que $P(x)$ **no se cumple**. Formalmente esto es:

$$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$$

$\neg\forall \equiv \exists$

  - Negar que "**existe** x" tal que $P(x)$ se cumple, es lo mismo que decir que "**para todo** x", $P(x)$ **no se cumple**. Lo cual formalmente es:

$$\neg\exists P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$$

$\neg\exists \equiv \forall$

- El cuantificador existencial puede expresarse en términos del universal, y viceversa, mediante las leyes de Morgan para cuantificadores.

$(-1)[(-3)(5)] \equiv (3)(-5)$

Equivalencia lógica	¿Cuando es la negación cierta?	¿Cuándo la negación es falsa?
$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$	Para cada x, $P(x)$ es falsa	Hay un x para el cual $P(x)$ es verdadero
$\neg\exists P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$	Hay un x para el cual $P(x)$ es falsa	$P(x)$ es verdadero para todo x

$\neg\forall \equiv \exists$
$\neg\exists \equiv \forall$

$\neg\forall$ $\neg\exists$

- Realizar la negación se resume en los siguientes pasos:
  1. Cambiar el cuantificador (∀→ ∃ ó ∃→ ∀)
  2. Negar la proposición interna ($P \to \neg P$)

En resumen lo visto en (4) y (5) se puede condensar en la siguiente tabla:

* Identidades ✓

Nombre	Equivalencia lógica
Negación de cuantificadores (De Morgan cuántico)	$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$ $\neg\forall \to \exists$ $\neg\exists \to \forall$
Distributividad del cuantificador universal sobre conjunción	$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
Distributividad del cuantificador existencial sobre disyunción	$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
Distribución de cuantificadores (restricciones)	Si la formula Q no contiene la variable cuantificada x: $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv (\forall x\, P(x)) \vee Q$ $\exists x(P(x) \wedge Q) \equiv (\exists x\, P(x)) \wedge Q$

14/10/2025 – Matematicas Discretas 1 (Vde@)

Ejemplo – Diciendo lo mismo en diferentes formas:

1. A todos les gusta volar ⟶ $\forall x\, V(x)$

$\forall x$

$V(x)$: a x le gusta volar

Recordemos: $\neg\neg P \equiv P$ $\quad \neg\forall \to \exists \quad \neg\exists \to \forall$

$\forall x\, V(x) \equiv \neg\neg(\forall x V(x)) \equiv \neg(\neg(\forall x V(x))) \equiv \neg(\exists x \neg V(x)) \equiv \neg\exists x \neg V(x)$

$\neg\exists x \neg V(x)$: No existe alguien a quien no le guste volar

En resumen: $\forall x V(x) \equiv \neg \exists x \neg V(x)$

A modo de recordevis retomemos la tabla de equivalencias lógicas vista en lógica proposicional

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

2. Recordemos en el ejemplo inicial

«Ningun animal en el zoologico es color azul»

$U = \{x \mid x$ es un animal del zoologico$\}$

$\neg \exists x\,(azul(x))$

Cual seria la expresión equivalente ?

$\neg \exists x\,(azul(x)) \equiv \neg \exists x\,(azul(x))$

$\equiv \forall x\,(\neg azul(x))$

$U = \{x \mid x$ es un animal terrestre$\}$

$\neg \exists x\,(zoo(z) \wedge azul(x))$

Cual seria la expresion equivalente?

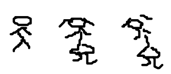
$\neg \exists x\,(zoo(x) \wedge azul(x)) \equiv$

$\forall x\,(\neg\,(zoo(x) \wedge azul(x))) \equiv$

$\forall x\,(\underbrace{\neg zoo(x)}_{\neg P} \vee \underbrace{\neg azul(x)}_{Q}) \equiv$

$\downarrow P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

$\forall x\,(zoo(x) \longrightarrow \neg azul(x))$

3. Sea: $U = \{x \mid x$ es una persona$\} = \{$  $\dots \}$

- $S(x)$: x es un estudiante de esta clase
- $J(x)$: x ha tomado clase de Java?

Si se tiene la expresión: $\forall x\,(S(x) \longrightarrow J(x))$

a. ¿Como se expresa en palabras ?

b. ¿Cual es la negacion de la expresion anterior

c. ¿Como se expresaria la negacion en palabras ?

Solución: $\forall x\,(S(x) \to J(x))$

a. Para toda persona x; si la persona x es estudiante de esta clase, entonces la persona x ha tomado clase de Java

$\forall$ $S(x)$ $J(x)$

Mas informal (natural)

$A(S,P) \equiv \forall x\,(S(x)\to P(x))$

Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java

b. $\neg \forall x\,(S(x) \to J(x)) \equiv ?$

$$\neg\forall x\,[\underbrace{S(x)}_{P} \to \underbrace{J(x)}_{Q}] \equiv \neg\forall x\,(\neg S(x) \vee J(x)) \equiv \exists x\,[\neg(\neg S(x) \vee J(x))]$$

$$\neg\forall x\,(S(x)\to J(x)) \equiv \exists x\,(S(x) \wedge \neg J(x))$$

$O(S,P) \equiv \exists x\,(S(x) \vee \neg P(x))$

c. Existe alguien que es estudiante de esta clase y no ha tomado un curso de Java

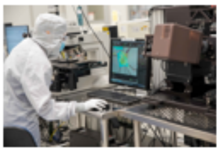
6. Cuantificadores anidados

a. Importancia del contexto

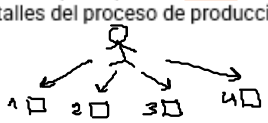
Situación: Suponga que usted está visitando una fábrica que produce microchips y el guía de la fabrica le dice:

Hay una persona que supervisa todos los detalles del proceso de producción.

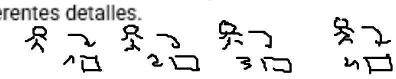
Interpretación: ¿Cuál de las siguientes opciones describe mejor su significado?



Interpretación 1: Hay una sola persona que supervisa todos los detalles del proceso de producción



Interpretación 2: Para cualquier detalle de la producción en particular, hay una persona que supervisa ese detalle, pero podría haber diferentes supervisores de diferentes detalles.



Ambigüedad: falta de claridad en el significado de una expresión debido a que puede tener múltiples interpretaciones válidas. Para aclarar una ambigüedad es necesario dar mas contexto.

Aclarar

b. Alcance

- El alcance (scope) es la porción de una fórmula lógica sobre la cual un cuantificador o variable tiene efecto:

Lenguaje natural

- Todos los estudiantes leen al menos un libro
- Para cada estudiante, existe al menos un libro tal que lo lee.

$U_1 = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$ estudiante

$U_2 = \{y \mid y \text{ es una cosa}\}$ libro

Lenguaje Formal

$$\forall x\,\underbrace{\left(estudiante(x) \to \exists y\,\underbrace{(libro(y) \wedge lee(x,y))}_{\text{Alcance } \exists y}\right)}_{\text{Alcance } \forall x}$$

Análisis

- $\forall x$: para todo x
- $estudiante(x)$: x es un estudiante
- $\exists y$: existe al menos un y
- $libro(y)$: y es un libro
- $lee(x,y)$: el estudiante x lee el libro y

- El alcance es importante porque determina el contexto. A continuación se muestra como:
    - **Evita ambigüedad**: ya que define con precisión qué variables están siendo cuantificadas y dónde. Cambiarlo cambia el significado lógico.
    - **Asegura validez en inferencias**: En pruebas o deducciones, usar variables fuera de su alcance es un error lógico.
    - **Es clave para estructuras anidadas**: La lógica de primer orden permite cuantificadores anidados. El alcance te dice cómo se relacionan entre sí.
- Cambiar el alcance cambia el significado:

Lenguaje natural
Todos aman a alguien

Lenguaje formal
$\forall x \exists y \; ama(x, y)$

Lenguaje natural
Alguien ama a todos

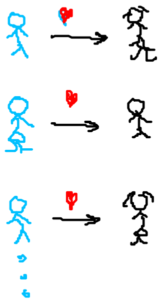
Lenguaje formal
$\exists x \forall y \; ama(x, y)$

i. $U = \{x \mid x \text{ es una Persona}\}$

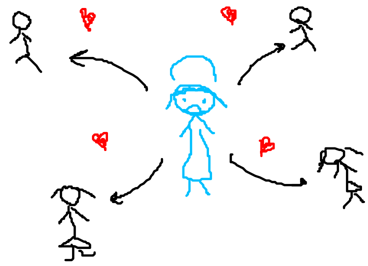
El orden importa

ii. Predicado: $ama(x,y)$: x ama a y

$\forall x [\exists y \; ama(x,y)]$



$\exists x [\forall y \; ama(x,y)]$



Importante: Existen casos en los que en una proposición expresada en lenguaje natural intervienen dos o más variables (por ejemplo, dos objetos) y la relación entre ellas importa.

Anidamiento de cuantificadores:

1. Dos o mas variables relacionadas
2. Una depende de la otra
3. Se quiere expresar una propiedad conjunta entre diferentes individuos del universo.

Según lo anterior volvemos a algo que se había dicho previamente:

- Los cuantificadores ∀ y ∃ tienen mayor precedencia que todos los operadores lógicos.
  - **Ejemplo 1**: $\forall x P(x) \vee Q(x)$ es la disyunción de $\forall x P(x)$ y $Q(x)$, en otras palabra esta expresión es equivalente a $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ y no a $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.
  - **Ejemplo 2**: Aunque las expresiones $\forall x \exists y\, P(x,y)$ y $\exists y \forall x\, P(x,y)$ tienen los mismos símbolos, no significan lo mismo.

Expresión	Significado
$\forall x \exists y\, P(x,y)$	Para **cada** x, existe **un** y **distinto** (posiblemente) que cumple con $P(x,y)$
$\exists y \forall x\, P(x,y)$	Hay **un único** y que sirve para **todos los** x

Ejemplo:

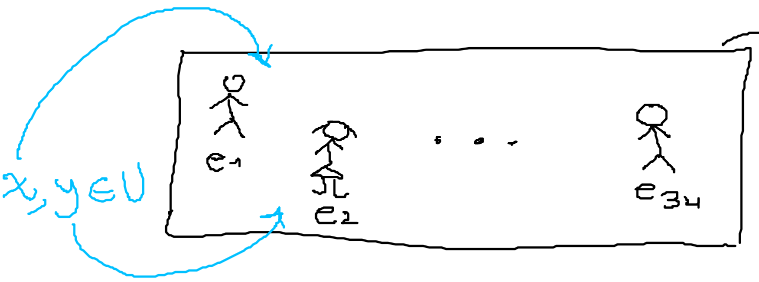
Sea $Q(x,y)$ la afirmación "x ha enviado un correo electrónico a y", donde el dominio tanto para x como para y consiste en todos los estudiantes de tu clase. Exprese cada una de estas cuantificaciones en lenguaje natural.

a. $\exists x \exists y\, Q(x,y)$ ✓
b. $\exists x \forall y\, Q(x,y)$ ✓
c. $\forall x \exists y\, Q(x,y)$ ✓
d. $\forall y \exists x\, Q(x,y)$ ✓
e. $\forall y \forall x\, Q(x,y)$ ✓

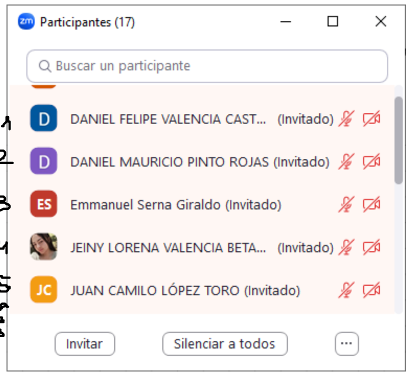
$U = \{x \mid x$ es un estudiante de clase (Discretas 1) $\}$

[34]

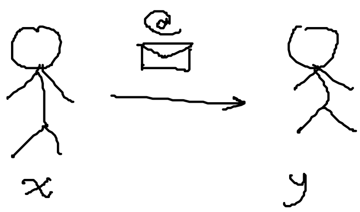
$x, y \in U$



e1
e2
e3
e4
e5
⋮



$Q(x,y)$: x le ha enviado un correo electrónico a y

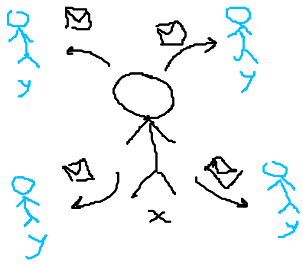


Evaluación:

$Q(e_1, e_2) =$

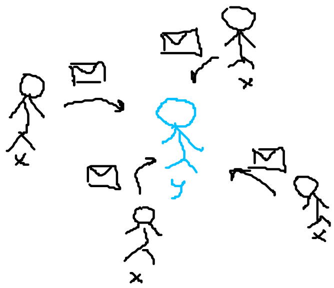
a. $\exists x \exists y\, Q(x,y)$: Hay un estudiante que le envió un correo a otro

b. $\exists x \forall y (Q(x,y))$



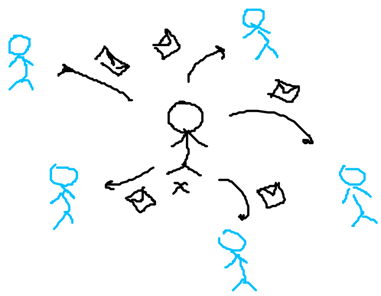
* Existe un estudiante que le envio un correo a todos los demas.

c. $\forall x (\exists y\, Q(x,y))$



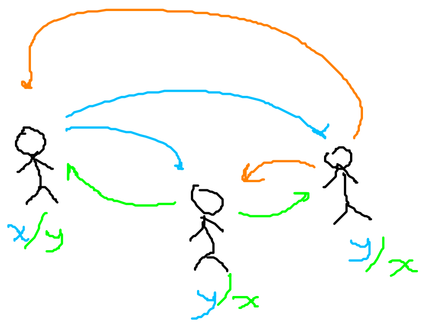
* Todos los estudiantes le enviaron un correo a otro estudiante

d. $\forall y (\exists x\, Q(x,y))$



• Todos los de la clase recibieron un correo del mismo compañero

e. $\forall y \forall x (Q(x,y))$



• Todos los estudiantes se evian correos

Formas Aristotélicas

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \to P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo**: Todos los hombres son mortales. **Expresión**: $\forall x(hombre(x) \to mortal(x))$
Forma E: Universal negativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \to \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo**: Ningún cuadrado es circulo. **Expresión**: $\forall x(cuadrado(x) \to \neg circulo(x))$
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \land P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo**: Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión**: $\exists x(estudiante(x) \land ingeniero(x))$
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \land \neg P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo**: Algún pájaro no vuela. **Expresión**: $\exists x(pajaro(x) \land \neg vuela(x))$

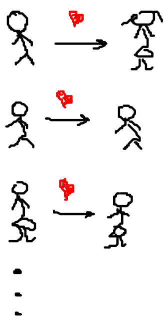
Ejemplo:

$U = \{x \mid x \text{ cualquier persona}\}$

a. $\overbrace{\text{Cada}}^{\forall x}$ $\underbrace{\text{persona}}_{x}$ $\underbrace{\text{ama a}}_{ama(x,y)}$ $\underbrace{\text{alguien}}_{y}$ $\exists x$

• $ama(x,y)$: x ama a y

$x, y \in U$



$\forall x\ \exists y\ ama(x,y)$

$U = \{x \mid x \text{ es cualquier ser vivo}\}$

persona

animal

planta

cualquier ser vivo

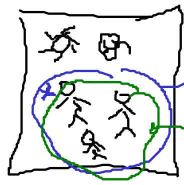
a. $\overbrace{\boxed{\text{Cada}}}^{\forall x}$ persona ama a alguien $\exists x$

• $persona(x)$: x es una persona

• $ama(x,y)$: x ama a y

$\forall x\ [persona(x) \to \ldots]$

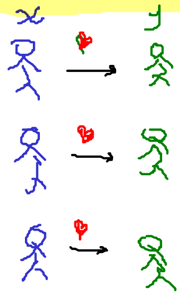
$A(S,P) = \forall x[S(x) \to P(x)]$



y

$\forall x\ [persona(x) \to \exists y\ (persona(x) \land ama(x,y))]$

x y

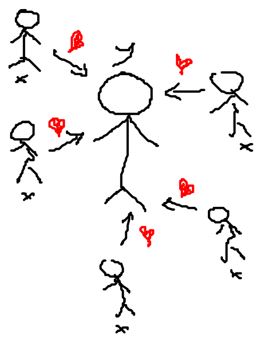


$I(S,P) = \exists x(S(x) \land P(x))$

b. Hay una persona a la que todos aman

Hay → $\exists$, todos → $\forall$

ama(x,y): x ama a y



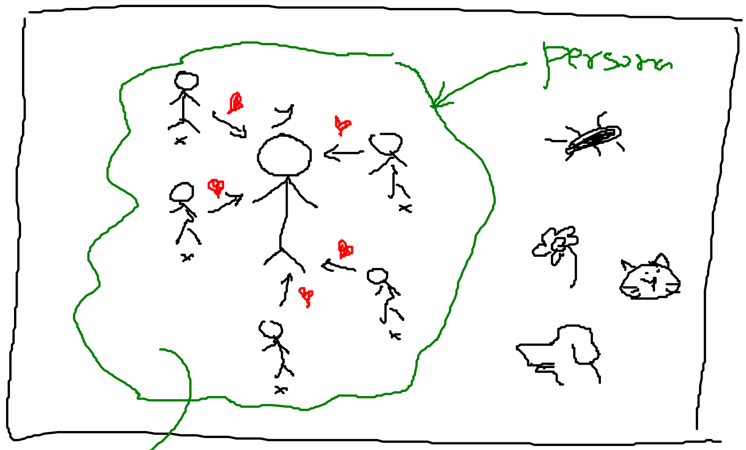
$\exists y \forall x \; ama(x,y)$

b. Hay una persona a la que todos aman.

Hay → $\exists$, todos → $\forall$

ama(x,y): x ama a y

persona(x): x es una persona



Continuará

16/10/2025 – Matemáticas Discretas 1 (UdeA)

$U = \{x \mid x$ es cualquier ser vivo$\}$

vivo → persona, animal, planta

b. Hay una persona a la que todos aman.

Hay → $\exists y$; una persona → persona(y); todos → $\forall x$, persona(x); aman → ama(x,y)

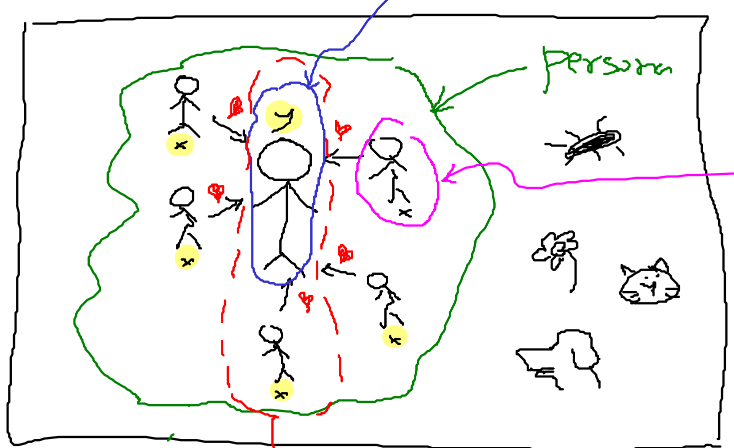
$$\exists y \left(persona(y) \land \forall x \left(persona(x) \longrightarrow ama(x,y) \right) \right)$$

$I(S,P) = \exists x \left(S(x) \land P(x) \right)$

$A(S,P) = \forall x \left(S(x) \rightarrow P(x) \right)$

persona(y)

U (seres vivos)

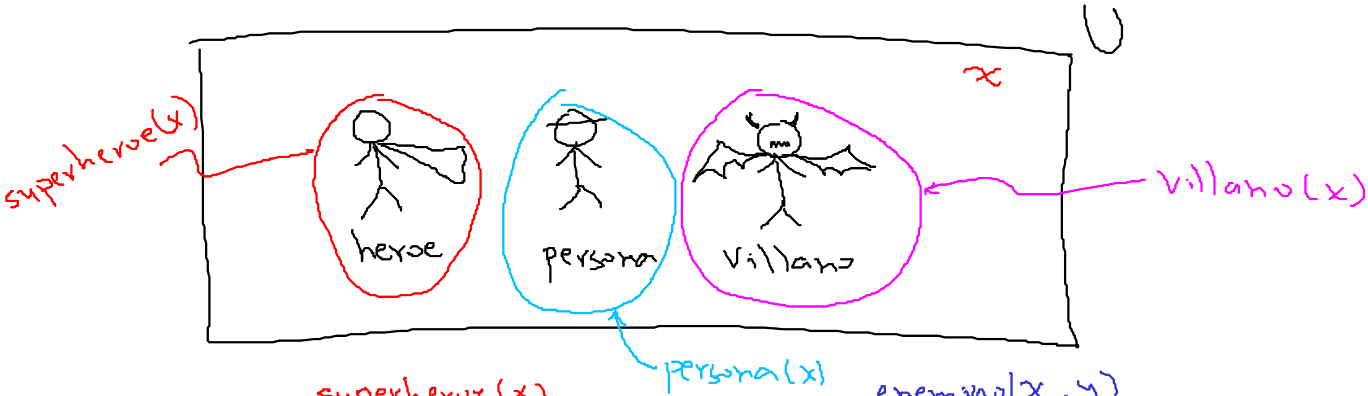


persona(x)

ama(x,y)

Ejemplo: Todo super heroe tiene un enemigo

$U = \{x \mid x \text{ es un superheroe, persona, villano}\}$



superheroe(x) enemigo(x, y)

Todo super heroe tiene un enemigo

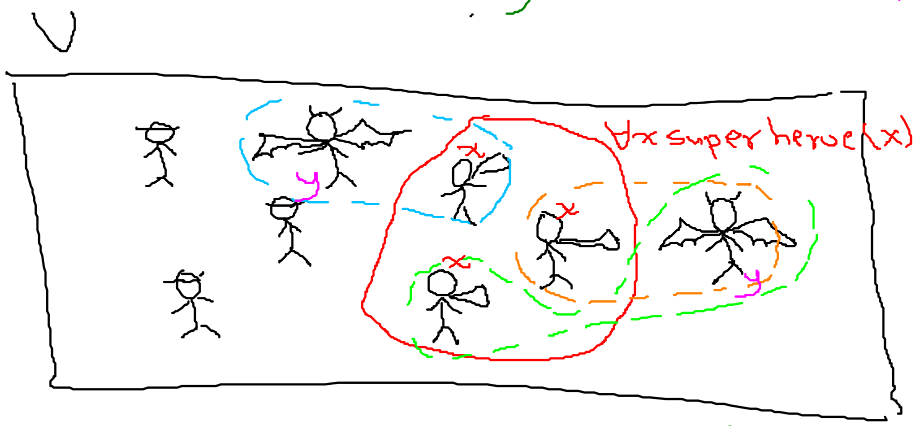
implicito villano(y)

predicados:
- superheroe (x) : x es un superheroe
- enemigo (x, y): x tiene un enemigo y
- villano (y): y es un villano

$\forall x$ superheroe(x) enemigo(x, y)

Todo super heroe tiene un enemigo

$\exists y$ villano(y)



$I(S,P) = \exists x \, (S(x) \wedge \ldots)$

$\underbrace{\forall x \left(\text{superheroe}(x) \longrightarrow \overbrace{\exists y \left(\text{villano}(y) \wedge \text{enemigo}(x,y) \right)} \right)}$

$A(S,P) = \forall x \, (S(x) \longrightarrow \ldots)$

Declaraciones con múltiples cuantificadores

- Los cuantificadores anidados, son expresiones en las que un cuantificador ($\exists$ o $\forall$) aparece dentro del alcance de otro.
- Debido a que muchos enunciados técnicamente importantes contienen tanto a $\exists$ como a $\forall$, es importante tener en cuenta los siguientes recomendaciones:
  1. **El orden importa**: Cambiar el orden de los cuantificadores cambia el significado lógico.
  2. **Cada cuantificador tiene su propia variable**: No se deben reutilizar nombres de variables ligadas (su alcance está determinado por el cuantificador que la introduce en la formula lógica) en el mismo contexto.
  3. **El alcance se extiende hasta el final de la subfórmula**: A menos que se usen paréntesis, el cuantificador domina todo lo que sigue.
  4. **Usar paréntesis para aclarar el alcance**: Siempre que haya duda sobre qué parte pertenece a qué cuantificador.
  5. **El dominio debe ser claro o explícito**: Se debe indicar (o asumir correctamente) de qué conjunto provienen las variables cuantificadas.

Ejemplo: Cual sería la expresión formal para "Cada número tiene un inverso"

Inverso: Sean x, y reales si $x+y=0$ entonces x es inverso de y

$x, y \in \mathbb{R}$ ← Universo

$P(x,y): x+y=0$

$\overset{\forall x}{\text{Cada}}$ $\overset{x}{\text{número}}$ $\overset{\exists y}{\text{tiene}}$ $\underbrace{\overset{y}{\text{un inverso}}}_{P(x,y)}$

$$\forall x \exists y P(x,y) \equiv \forall x \exists y (x+y=0)$$

$$\updownarrow$$

tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x+y=0$$

1. Empleando cuantificadores, exprese la ley conmutativa de la adición para los numero reales.

Ley conmutativa: $x+y=y+x$

$x+y=y+x$
$1+2=2+1$
$1+3=3+1$
$2+5=5+2$

Todo Todo

a. Sea $x, y \in \mathbb{R}$

$$\forall x \forall y (x+y=y+x) \equiv \forall x (\forall y (x+y=y+x))$$

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} (x+y=y+x) \equiv$

$$\forall x \in \mathbb{R} (\forall y \in \mathbb{R} (x+y=y+x))$$

2. Empleando cuantificadores, exprese la ley del inverso para la suma.

Inverso: $x + y = 0$

Sea $x, y \in \mathbb{R}$

$\forall x \exists y (x + y = 0)$

$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} (x + y = 0)$

3. Empleando cuantificadores, exprese la propiedad asociativa para la suma.

Asociativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$

Sea $x, y, z \in \mathbb{R}$

$\forall x \forall y \forall x (x + (y + z) = (x + y) + z)$

$\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \forall z \in \mathbb{R} ((x + y) + z = x + (y + z))$

La siguiente tabla comparativa resume la relación de cuantificadores para dos variables:

Caso	#	Expresión lógica	Descripción	Verdadera	Falsa
1	1	$\forall x \forall y\ P(x, y)$	Para todo x y para todo y, P(x, y)	P(x, y) se cumple para **todas** las combinaciones posibles de x e y	Existe al menos un par (x, y) tal que P(x, y) es falsa
2	2	$\exists x \exists y\ P(x, y)$	Existe al menos un x y un y tal que P(x, y)	Existe al menos un par (x, y) tal que P(x, y) es verdadera	Para **todas** las combinaciones (x, y), P(x, y) es falsa
3	3	$\forall x \exists y\ P(x, y)$	Para todo x, existe **algún y** tal que se cumple P(x, y)	Para **cada x**, existe al menos un y tal que P(x, y) es verdadera	Existe algún x para el cual **ningún y** cumple P(x, y)
	4	$\exists x \forall y\ P(x, y)$	Existe un x tal que para **todo y** se cumple P(x, y)	Existe al menos un x tal que para **todos** los y se cumple P(x, y)	Para **cada x** hay al menos un y que no cumple P(x, y)
	5	$\forall y \exists x\ P(x, y)$	Para todo y, existe **algún x** tal que se cumple P(x, y)	Para **cada y**, existe al menos un x tal que P(x, y) es verdadera	Existe algún y para el cual **ningún x** cumple P(x, y)
	6	$\exists y \forall x\ P(x, y)$	Existe un y tal que para **todo x** se cumple P(x, y)	Existe al menos un y tal que para **todos** los x se cumple P(x, y)	Para **cada y** hay al menos un x que no cumple P(x, y)

Ejemplo 1: Sea ***U*** el conjunto de los números reales y el predicado $P(x, y): x \cdot y = 0$. ¿Cual es el valor de la verdad para cada una de las siguientes expresiones lógicas:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$

Todos

1. $\forall x \forall y (x \cdot y = 0)$

Falso

Sea $x = 3$, $y = 8$

$x \cdot y = 3 \cdot 8 = 24 \neq 0\ (xy = 0)$

Al menos hay un y

2. $\forall x \exists y (x \cdot y = 0)$

Todos x

Verdadera

x	y
0	$0 = 0$
1	$0 = 0$
2	$0 = 0$
3	$0 = 0$
-6	$0 = 0$

3. Diapositivas

4. Diapositivas