02/04/2025 - Matemáticas Discretas (UdeA | WV 14-16)

1. Observaciones importantes

- Parcial 01: 11/04/2025 (Pendiente la logística)
- Talleres de repaso:
  - Taller 1 ✓
  - Taller 2 ✓
  - Taller 3 ✗ (En redacción).
- Monitoria: Lunes a las 5:00PM
- Sobre el error en lo que explique (Reglas de prioridad y asociatividad).

Reglas de prioridad

Prioridad	Operador	Asociatividad
1	( )	• Cuando se tienen varios operadores con la misma prioridad, la evaluación se hace de izquierda a derecha. • Cuando hay paréntesis anidados se evalúan primero los mas internos.
2	$\neg$	
3	$\wedge$	
4	$\vee$	
5	$\rightarrow$ / $\leftrightarrow$	

Tablas de precedencia y asociatividad

Prioridad	Símbolo	Asociatividad	Ejemplo con paréntesis
1 (más alta)	$\neg$	No aplica (unitario)	$\neg p \wedge q \mapsto ((\neg p) \wedge q)$
2	$\wedge$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \wedge q \wedge r \mapsto ((p \wedge q) \wedge r)$
3	$\vee$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \vee q \vee r \mapsto ((p \vee q) \vee r)$
4	$\oplus$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \oplus q \oplus r \mapsto ((p \oplus q) \oplus r)$
5	$\rightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \rightarrow q \rightarrow r \mapsto (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
6 (más baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \mapsto (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

¿Que pasa para estos casos?

1. $P \vee \underbrace{Q \wedge R}_{1} = (P \vee (Q \wedge R))$ ✓

   $\underbrace{P \vee 1}_{2}$

2. $\underbrace{P \wedge Q}_{1} \wedge R = ((P \wedge Q) \wedge R)$ Asociatividad: $I \rightarrow D$

   $\underbrace{1 \wedge R}_{2}$

3. $P \rightarrow \underbrace{Q \rightarrow R}_{1} = \cancel{((P \rightarrow Q) \rightarrow R)}$

   $\underbrace{P \rightarrow 1}_{2}$ $= P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ Asociatividad: $I \leftarrow D$

2. Resumen clase anterior:

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica

Dos proposiciones compuestas p y q son equivalentes si $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

Construcción de equivalencias lógicas

$$A \equiv A_1$$
$$\vdots$$
$$A_n \equiv B$$

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

3. Demostracion.

3.1. Valor verdad . vs . Validez

Demostracion (proposic...)

→ Valor de verdad (F / V)
- a. Tablas de verdad (Modelos)
- b. Axiomas: Equivalen. (Axiomatico) $P \leftrightarrow Q$

→ Validez (Valida / Invalida)
- a. Tablas de verdad (Modelos)
- b. Axiomas: Reglas de inferencia (Axiomat.).

3.2. Argumento

$P \longrightarrow Q$

P	Q
Antedente	Concecuente
Hipotesis	Tesis
Premisa	Conclusion

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Premisa: Verdad

V y V y ... y V

$\underbrace{p_1, p_2, \ldots, p_n}_{\wedge} \longrightarrow q$

Por lo tanto ∴

Notación de concecu.

premisas $\begin{cases} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \end{cases}$

conclusión $\{ \therefore \; q$

Tautologia

$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n}_{\text{premisas}} \longrightarrow \underbrace{q}_{\text{conclusión}}$

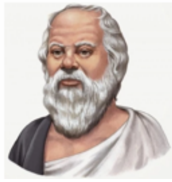
Notacion prop.

$\underbrace{p_1, p_2, \ldots, p_n}_{\text{premisas.}} \vdash \underbrace{q}_{\text{conclusión}}$

Ejemplo:

✓ Si Socrates es un hombre (P), entonces Socrates es un mortal (Q)
✓ Socrates es un hombre (P)

∴ Socrates es un mortal (Q)



Consecuentes	Tautologia	Proposicional
premisas $\left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \end{array} \right.$ conclus. $\{ \therefore Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q, P \vdash Q$

3.3. Demostracion de validez

a. Tablas de verdad (Modelos)

b. Reglas de inferencia (Axiomatico)

3.3.1. Demostracion de validez usando tablas de verdad.

Validación de argumentos mediante tabla de verdad

1. Identifique las premisas y la conclusión de la forma de argumento. ✓
2. Construya una tabla de verdad que muestre los valores de verdad de todas las premisas y la conclusión. ✓
3. Un renglón de la tabla de verdad en el que todas las premisas son verdaderas se llama un **renglón crítico**. Si hay un renglón crítico en el que la conclusión es falsa, entonces es posible que un argumento de la forma dada tenga premisas verdaderas y una conclusión falsa, por lo que la forma del argumento es no válida. Si la conclusión en cada renglón crítico es verdadera, entonces la forma del argumento es válida ✓

Consecuentes

Premis. $\left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow Q \ ✓ \\ P \ ✓ \end{array} \right.$

Conclus $\{ \therefore Q$ ✓

Proposiones: $P, Q \rightsquigarrow n = 2 \rightsquigarrow f = 2^2 = 4$

			Premisas		conclusión
P	Q	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	P	Q
0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

La forma del argumento es Valida

Ejemplo 2:

Ejemplo: Dado el siguiente argumento:

Consecuentes

$p \to q \vee \neg r$

$q \to p \wedge r$

$\therefore p \to r$

Tautología

$((p \to q \vee \neg r) \wedge (q \to p \wedge r)) \to (p \to r)$

Proposicional

$(p \to q \vee \neg r), (q \to p \wedge r) \vdash (p \to r)$

Determine su validez mediante una tabla de verdad, indicando qué columnas representan las premisas y cuáles representan la conclusión y anotando en la tabla una frase de la explicación.

✓ $p \to q \vee \neg r$

✓ $q \to p \wedge r$ } Premisas

✓ $\therefore p \to r$ } Conclusión

Proposiciones: p, q, r

$n = 3 \to f = 2^3 = 8$

Premisas / Conclusión

p	q	r	¬r	① q∨¬r	② p∧r	p → q∨¬r	q → p∧r	p → r
0	0	0						
0	0	1						
0	1	0						
0	1	1						
1	0	0						
1	0	1						
1	1	0						
1	1	1						

3 doritos despues . . .

Premisas / Conclusión

p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	$p \to q \vee \neg r$	$q \to p \wedge r$	$p \to r$
0	0	0	1	1	0	1	1	1 ✓
0	0	1	0	0	0	1	1	1 ✓
0	1	0	1	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	0	1	1	0 ✗
1	0	1	0	0	1	0	1	
1	1	0	1	1	0	1	0	
1	1	1	0	1	1	1	1	1 ✓

$P \to Q$ (V)
V V

Este renglón muestra que un argumento de esta forma puede tener premisas verdaderas y una conclusión falsa. **Por tanto esta forma de argumento es no valida.**