

10/11/2025 - Matemáticas Discretas 1 (Ude@)

1. Repaso:

a. Conjuntos: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$



b. n-Tuplas: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

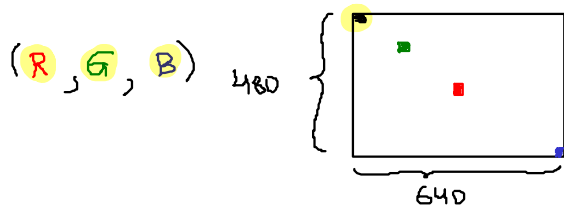


Imagen: $480 \times 640 = 307200$

$$I = \{(0,0,0), (255,255,255), \dots, (0,0,255)\}$$

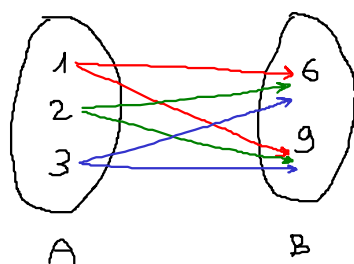
c. Producto cartesiano:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

$$\text{Sea: } A = \{1, 2, 3\} \longrightarrow |A| = n(A) = 3$$

$$B = \{6, 9\} \longrightarrow |B| = n(B) = 2$$

$$A \times B = \{(1,6), (1,9), (2,6), (2,9), (3,6), (3,9)\}$$



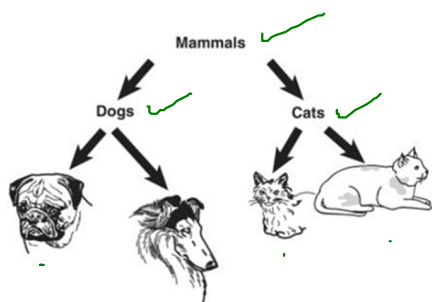
$$|A \times B| = n(A \times B) = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3$$

$$|A \times B| = 6$$

2. Contextualización.

"El mundo está lleno de relaciones"

Estudiantes y cursos que tomaron



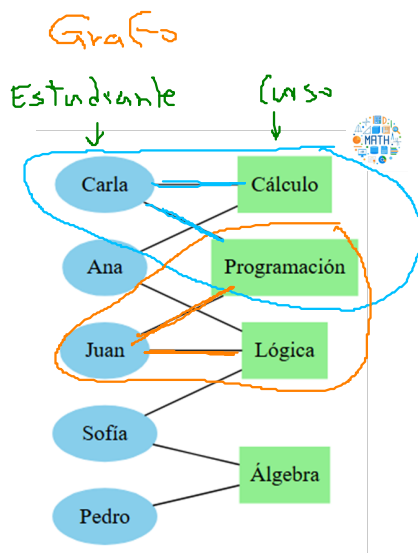
Gemelos Fantásticos

| Estudiante | Curso |
|------------|--------------|
| Ana | Cálculo |
| Ana | Lógica |
| Juan | Lógica |
| Juan | Programación |
| Carla | Cálculo |
| Carla | Programación |
| Pedro | Álgebra |
| Sofía | Lógica |
| Sofía | Álgebra |

Como represento las relaciones.

* Estudiantes y materias

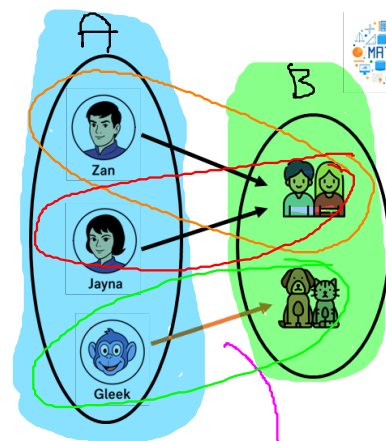
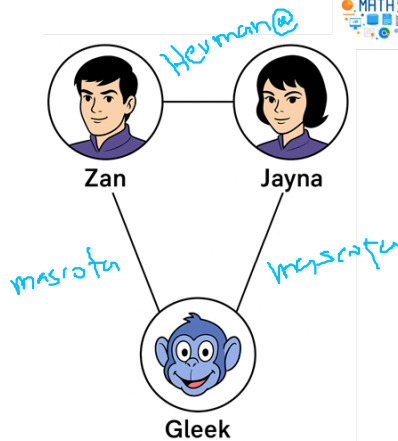
| Estudiante | Curso |
|------------|--------------|
| Ana | Cálculo |
| Ana | Lógica |
| Juan | Lógica |
| Juan | Programación |
| Carla | Cálculo |
| Carla | Programación |
| Pedro | Álgebra |
| Sofía | Lógica |
| Sofía | Álgebra |



$\rightarrow \text{cursos} = \{\text{Cálculo, Lógica, Programación, Álgebra}\}$
 $\rightarrow \text{estudiantes} = \{\text{Ana, Juan, Carla, Pedro, Sofia}\}$

$$|\text{estudiantes} \times \text{cursos}| = |\text{cursos}| \cdot |\text{estudiantes}| = 4 \times 5 = 20$$

* gemelos fantásticos



| Personaje | Parentesco |
|-----------|------------|
| Jayna | Herman@ |
| Zan | Herman@ |
| Gleek | Mascota |

$$B = \{\text{Herman@, mascota}\}$$

$$A = \{\text{Jayna, Zan, Gleek}\}$$

$$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, P(a, b)\}$$

$$R = \{(\text{Zan, herman@}), (\text{Jayna, herman@}), (\text{Gleek, mascota})\}$$

3. Relaciones

a. Definición:

Una relación R de A en B , representada también como $R(x, y)$, es un conjunto de pares ordenados (x, y) , donde $x \in A$ y $y \in B$, que satisfacen una propiedad determinada $P(x, y)$. Formalmente, se define como:

$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge P(x, y)\}$$

Como no todos los elementos de A tienen que estar relacionados con los elementos de B mediante la condición P ; el conjunto R es un **subconjunto** $A \times B$, es decir:

$$R \subseteq A \times B$$

A este tipo de relaciones se les denomina **relaciones binarias**.

b. Numero de relaciones existentes

El número total de relaciones que se pueden definir de un conjunto A a un conjunto B es simplemente el número de subconjuntos de $A \times B$ es decir $|\mathcal{P}(A \times B)|$. Para el caso, sea $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces:

$$|A \times B| = |\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = 2^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

1. Liste los pares ordenados en la relación R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{0, 1, 2, 3\}$, donde $(a, b) \in R$ si y solo si:

✓ a. $a = b \rightsquigarrow R_1$

→ b. $a + b = 4 \rightsquigarrow R_2$

→ c. $a > b \rightsquigarrow R_3$

✓ d. $a|b \rightsquigarrow R_4$

(Ojo: En la explicación estar bla)

En la explicación de zoom les explique mal el concepto

Adicionalmente, realice la representación de las relaciones como:

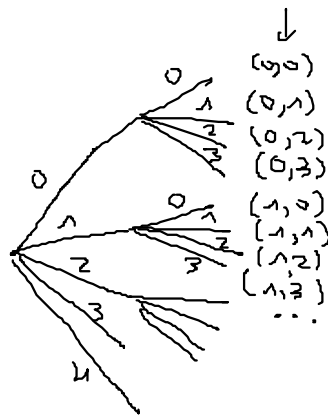
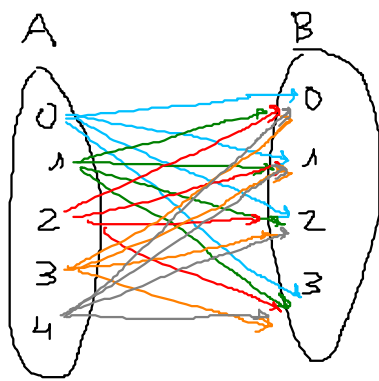
1. Tabla
2. Diagrama de flechas
3. Tabla matricial
4. Matriz binaria

Solución:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A \times B = ? \quad |A \times B| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 = 20$$

$$A \times B = \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3) \}$$



| x | y | (x,y) |
|---|---|-------|
| 0 | 0 | (0,0) |
| 0 | 1 | (0,1) |
| 0 | 2 | (0,2) |
| 0 | 3 | (0,3) |
| 1 | 0 | (1,0) |
| 1 | 1 | (1,1) |
| 1 | 2 | (1,2) |
| 1 | 3 | (1,3) |
| 2 | 0 | (2,0) |
| 2 | 1 | (2,1) |
| 2 | 2 | (2,2) |
| 2 | 3 | (2,3) |
| 3 | 0 | (3,0) |
| 3 | 1 | (3,1) |
| 3 | 2 | (3,2) |
| 3 | 3 | (3,3) |

Relaciones:

Propiedad (Predicado)

$$R_1 = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B, a=b \}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3) \}$$

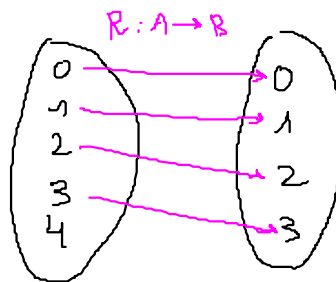
$$R_1 \subseteq A \times B$$

$$R_1 = \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3) \} \rightarrow \text{Pares de puntos}$$

R_1 :

| a | b |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |

→ Tabla



→ Diagrama de Flechas

R_1 :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | x | | | |
| 1 | | x | | |
| 2 | | | x | |
| 3 | | | | x |
| 4 | | | | |

→ Tabla Matricial

M_{R_1} → Matriz Binaria

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ojo: Aquí se hizo la solución de b divide a a ($b|a$) y no $a|b$ (a divide a b) que es lo que se pedía arriba

Ojo que no es el punto d del ejercicio original

$$d. R_4 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, b|a\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

Pares de puntos:

$$R_4 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$R_4 \subseteq A \times B$$

$$3|2 = \text{Falso}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 2} \\ \underline{1} \\ 1 \end{array}$$

$$4|2 = \text{Verdadero}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 2} \\ \underline{0} \\ 2 \end{array}$$

Tabla

| a | b |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 0 | 2 |
| 0 | 3 |
| 1 | 1 |
| 2 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 1 |
| 3 | 3 |
| 4 | 1 |
| 4 | 2 |

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

Diagrama de Flechas

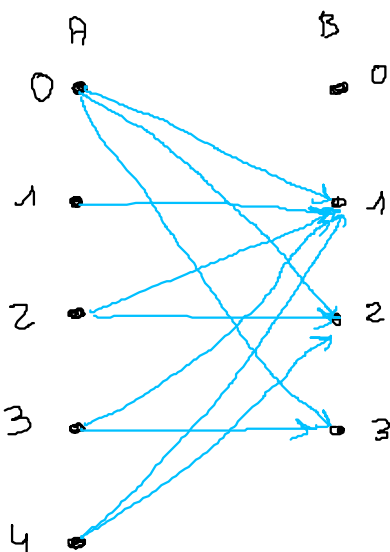


Tabla matricial

| | | B | | | |
|-------|--|---|---|---|---|
| | | ↓ | | | |
| R_4 | | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | | x | x | x | x |
| 1 | | | x | | |
| 2 | | | x | x | |
| 3 | | | x | | x |
| 4 | | | x | x | |

A →

Matriz binaria

$$M_{R_4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Corrección del punto anterior (donde se me trocaban los cables)

d. $R_4 = \{(a,b) | a \in A, b \in B, a|b\}$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ $B = \{0, 1, 2, 3\}$

Ojo:

$a|b = \underline{a}$ divide a \underline{b}

$b \% a = 0$

$R_4 \subseteq A \times B$

Pares de puntos

$R_4 = \{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,2), (3,0), (3,3)\}$

$A \times B = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

Tabla

| a | b |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 1 | 1 |
| 1 | 2 |
| 1 | 3 |
| 2 | 0 |
| 2 | 2 |
| 3 | 0 |
| 3 | 3 |

Diagrama de flechas

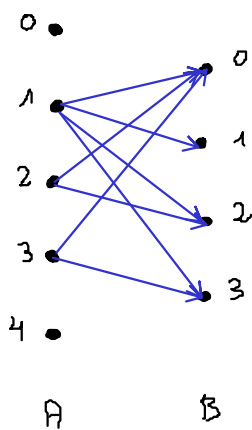


Tabla matricial

| | B | | | |
|-------|---|---|---|---|
| | ↓ | | | |
| R_4 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | | | | |
| 1 | x | x | x | x |
| 2 | x | | x | |
| 3 | | x | | x |
| 4 | | | | |

Matriz binaria

$M_{R_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. Relación binaria sobre un solo conjunto

Una relación binaria sobre un conjunto A es una regla que conecta elementos del conjunto consigo mismos, es decir, relaciona pares de elementos del mismo conjunto. A diferencia de las relaciones entre dos conjuntos distintos (como entre A y B), este tipo de relación es interna a A . Formalmente, una relación binaria se define como un subconjunto de $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

$$A \times A = A^2$$

$$A \times A \times A = A^3$$

O bien:

$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in A) \wedge P(x, y)\}$$

Donde $P(x, y)$ representa la propiedad o condición que deben cumplir los elementos para estar relacionados

Numero de relaciones existentes en un conjunto con n elementos

- Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$.
- Si el conjunto A tiene n elementos, luego $A \times A$, tiene $|A \times A| = |A||A| = n^2$
- Un conjunto con m elementos tiene 2^m subconjuntos, de modo que, el conjunto $A \times A$ tendrá 2^{n^2} subconjuntos.
- Conclusión:** en un conjunto de n elementos hay 2^{n^2} relaciones posibles.

$$|A \times A| = n^2 \rightarrow |\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^{n^2}$$

Ejemplo:

Considere el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ Obtenga las diferentes representaciones para:

a. $A \times A$

b. $R = \{(x, y) | x + y > 3\}$

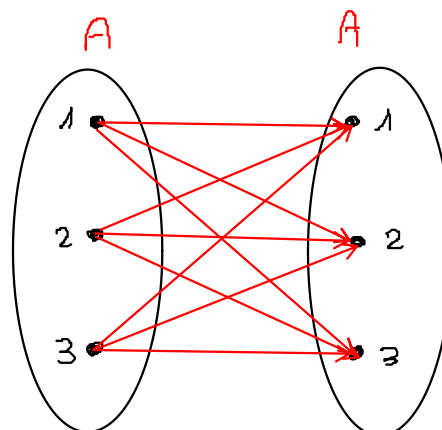
Solución

Producto cartesiano

Pares de puntos

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Diagrama de flechas



Relación: $R = \{ (x, y) \mid x + y > 3 \}$

Pares de puntos

$$R = \{ (1, \underline{3}), (2, \underline{2}), (2, 3), (\underline{3}, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

Tabla

| x | y |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 2 | 2 |
| 2 | 3 |
| 3 | 1 |
| 3 | 2 |
| 3 | 3 |

Diagrama de flechas

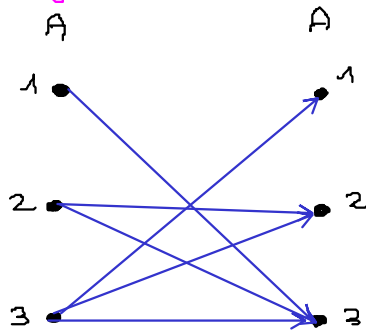


Tabla matricial

| R | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | | | x |
| 2 | | x | x |
| 3 | x | x | x |

Matriz binaria

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dominio: $\text{Dom}(R) = S(R) = \{1, 2, 3\}$

Rango: $\text{Ran}(R) = Y(R) = \{1, 2, 3\}$

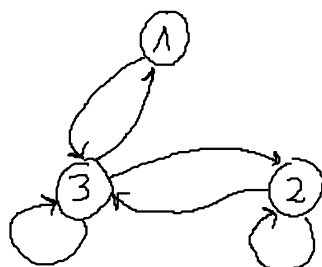
→ Nueva representación: Grafo dirigido

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{ (x, y) \mid x + y > 3 \}$$

$$R = \{ (1, \underline{3}), (2, \underline{2}), (2, 3), (\underline{3}, 1), (3, 2), (3, 3) \}$$

| R | 1 | 2 | 3 |
|---|-------|-------|-------|
| 1 | | | (1,3) |
| 2 | | (2,2) | (2,3) |
| 3 | (3,1) | (3,2) | (3,3) |



d. Dominio y rango de una relación

Dominio y rango de una relación

El dominio y el rango de una relación permite describir con precisión qué elementos están realmente involucrados en la relación.

Dominio:

- Es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados en la relación.
- Dominio ($\text{dom}(R)$) de la relación $R \subseteq A \times B$, es un subconjunto de A ($\text{dom}(R) \subseteq A$), tal que:

$$\text{dom}(R) = \delta(R) = \{x \mid (x \in A) \wedge \exists y (y \in B \wedge ((x, y) \in R))\}$$

Rango:

- Es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados en la relación.
- Rango ($\text{ran}(R)$) de la relación $R \subseteq A \times B$, es un subconjunto de B ($\text{ran}(R) \subseteq B$), tal que:

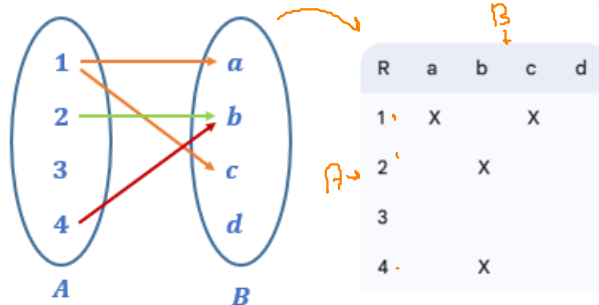
$$\text{ran}(R) = \gamma(R) = \{y \mid (y \in B) \wedge \exists x (x \in A \wedge ((x, y) \in R))\}$$

Ejemplo

Suponga que tiene los siguientes conjuntos y la relación R dada por:

- **Conjunto de llegada:** $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- **Conjunto de partida:** $B = \{a, b, c, d\}$
- **Relación:** $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (4, b)\}$

Determine el dominio y el rango de la relación.



$$\text{dom}(R) = \{x \mid (x \in A) \wedge \exists y (y \in B \wedge ((x, y) \in R))\}$$

$$\text{ran}(R) = \{y \mid (y \in B) \wedge \exists x (x \in A \wedge ((x, y) \in R))\}$$

Dominio:

$$\text{dom}(R) = \{1, 2, 4\}$$

Rango:

$$\text{ran}(R) = \{a, b, c\}$$

e. Inversa de una relación

Inversa de una relación

La inversión de una función, consiste esencialmente en "dar la vuelta" o "revertir" la dirección de todas las conexiones de la relación original.

Definición formal: Sea $R \subseteq A \times B$ una relación entre los conjuntos A y B . La relación inversa de R , denotada como R^{-1} invierte el orden de todos los pares ordenados de R , esto es:

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

Propiedades útiles

1. Doble inversa: $(R^{-1})^{-1} = R$ ✓
2. Intercambio del dominio y rango:

$$\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R), \quad \text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R),$$

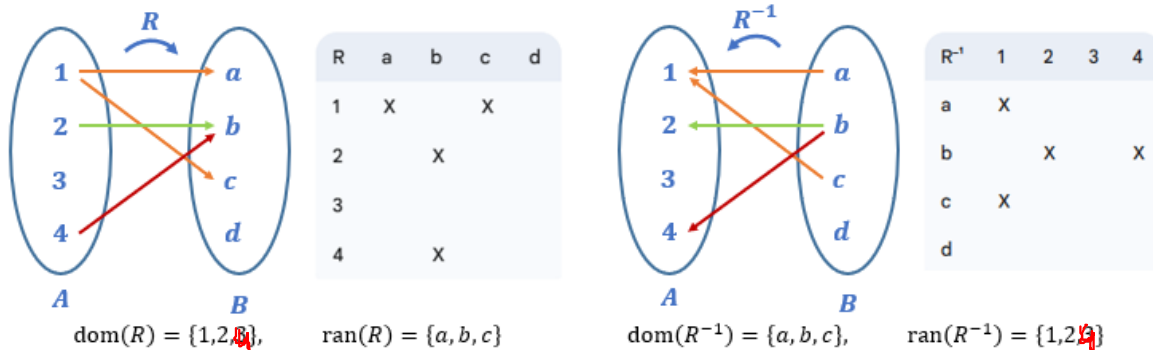
3. Si R es una relación sobre un mismo conjunto A , entonces $R^{-1} \subseteq A \times A$, también es una relación sobre A

Ejemplo 7

Suponga que tiene los siguientes conjuntos y la relación R dada por:

- Conjunto de ~~llegada~~ ^{partida}: $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- Conjunto de ~~partida~~ ^{llegada}: $B = \{a, b, c, d\}$
- Relación: $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (4, b)\}$

Determine la relación inversa y obtenga el dominio y rango de esta:



Ejemplo 8

Sea $A = \{2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 6, 8\}$ y sea R la relación "divide" de A a B . Para toda $(x, y) \in A \times B$,

$$x R y \Leftrightarrow x | y \quad \begin{array}{l} x \text{ divide } y \\ y \geq x \end{array} \quad y \% x = 0$$

- Establezca explícitamente que pares ordenados están en R y R^{-1} y dibuje los diagramas de flechas para R y R^{-1} .
- Describa R^{-1} en palabras.

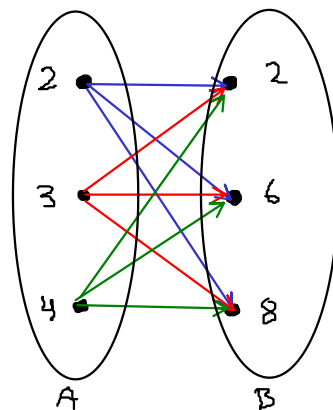
a. $R = \{(x, y) | x \in A, y \in B, x | y\}$ Ojo: x divide a y

$A = \{2, 3, 4\}$

$B = \{2, 6, 8\}$

$y \% x = 0$
 \downarrow
 $x | y$

$$A \times B = \{(2,2), (2,6), (2,8), (3,2), (3,6), (3,8), (4,2), (4,6), (4,8)\}$$

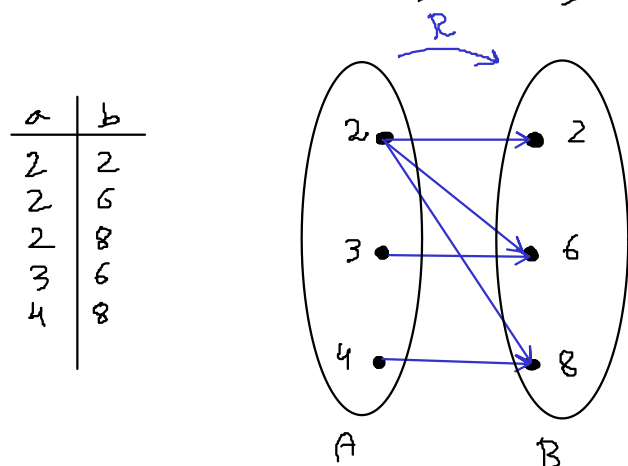


$$A = \{2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 6, 8\}$$

$$R = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \mid b\}$$

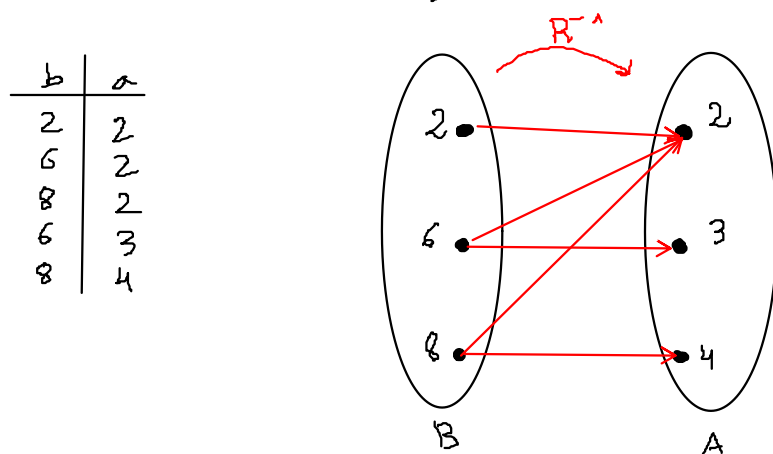
$$R = \{(2,2), (2,6), (2,8), (3,6), (4,8)\}$$



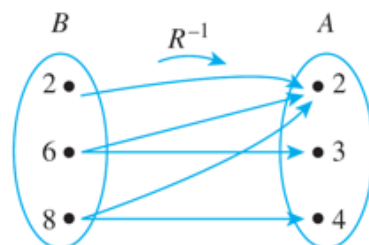
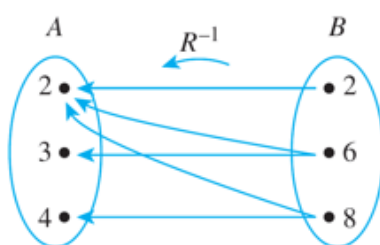
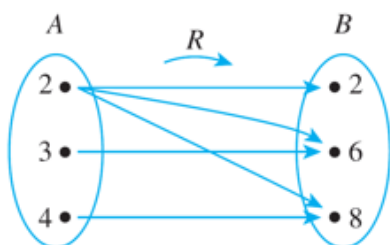
$$M_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 6 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(2,2), (6,2), (8,2), (6,3), (8,4)\}$$



$$M_{R^{-1}} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



Relación identidad

Esta es una relación que solo relaciona cada **elemento consigo mismo**, y con ningún otro.

Definición formal: Dado un conjunto A , la relación identidad A , denotada como I_A , es el conjunto de todos los pares ordenados donde cada elemento está relacionado consigo mismo, esto es:

$$I_A = \{(\overset{x,y}{\cancel{y,x}}) | x \in A \wedge x = y\}$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, obtenga la relación identidad para cada uno:

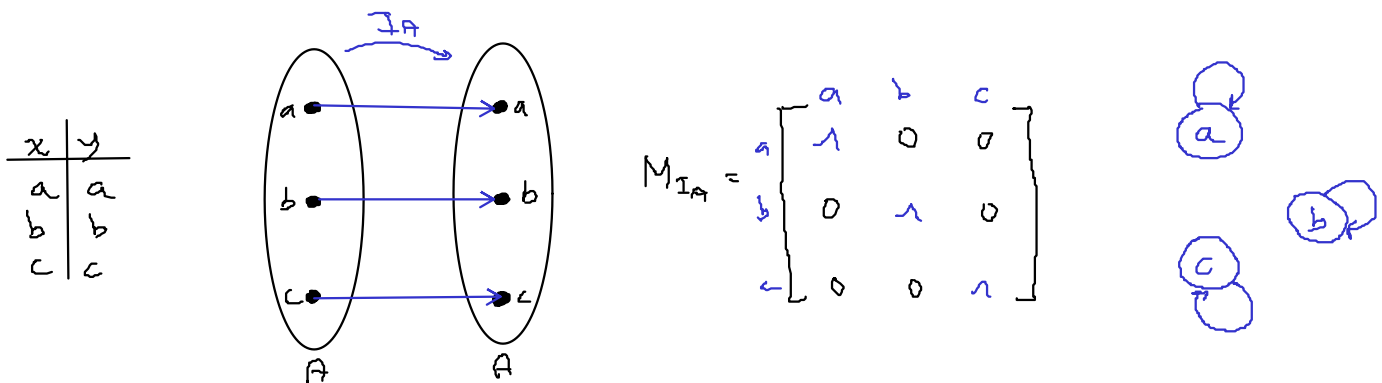
$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$I_B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$\rightarrow R_1 = I_A = \{(x, y) | x \in A, y = x\}$$

$$A = \{a, b, c\}$$

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$



$$\rightarrow R_2 = I_B = \{(x, y) | x \in B, y = x\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$I_B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

