

06/11/2025 - Matemáticas Discretas 1 (Ude@)

0. Sobre las evaluaciones

Semana	13	14	15	16	17
Clase	M	M	M	M	M
	M6	M11 M13 M18 M20 M25 M27	M	M	M
		P3			P4

← Finales

Parciales	1	2	3	4
	P1	P2	P3	P4
	✓	?		

Seguimiento S (último tema)

1. Conjuntos (Tema anterior)

Conjunto: Agrupación de elementos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

- El orden no importa
- No hay elementos repetidos

$$A = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

$$A = \{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$

$$B = \{3, 3, 2, 1, 1\} = \{3, 2, 1\}$$

$$C = \{1, 2, 4\}$$

Preguntas

$A = B?$: Verdadero ✓

$A = C?$ Falso ✓ ($A \neq C$)

Ejemplos:

- Los números enteros
- Los 10 primeros números positivos
- Los inches de Nacional

Representaciones

Notación $A \subseteq B$

- Extensión: Lista de Elementos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$
- Comprensión: Propiedad $A = \{x \in B \mid P(x)\}$

Ejemplo

- Los números enteros: \mathbb{Z}

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

- Enteros positivos entre 1 y 10 incluidos

* R. extensión: $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

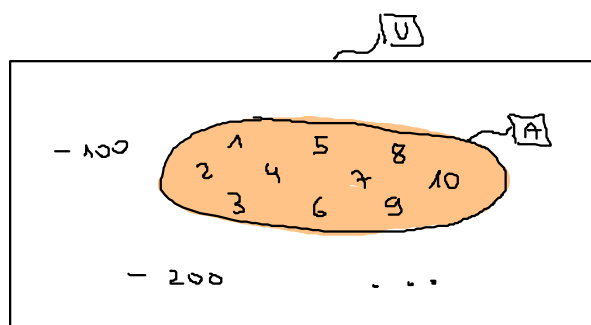
* R. comprensión: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}$

$P(x)$: Enteros positivos entre 1 y 10 incluidos

- Clasificación de los conjuntos:

- | | | | |
|-------------|-------------|-------------------------|----------------|
| 1. Vacío | 3. Finito | 5. Universal (contexto) | 7. Heterogéneo |
| 2. Unitario | 4. Infinito | 6. Homogéneo | |

Representación gráfica:
Diagrama de Venn



- **Cardinalidad:** Numero de elementos de un conjunto

$$A = \underbrace{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}_n \longrightarrow |A| = n(A) = n$$

Para el ejemplo que estamos viendo:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \longrightarrow |A| = n(A) = 10$$

- **Conjunto potencia:**

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

Para el ejemplo: $|A| = 10 \longrightarrow |P(A)| = 2^{|A|} = 2^{10} = 1024$

$$P(A) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \dots, \{10\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{9, 10\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \}$$

1024 Subconjuntos

- **Relaciones entre conjuntos:** $=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$

- **Operaciones entre conjuntos:** $\cup, \cap, -, \oplus, ' ,$

- **Identidades**

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Nombre	Equivalencia
1	$ \emptyset = 0$
2	$A \cdot B = 0 \rightarrow A + B = A + B $
3	$ A + B = A + B - A \cdot B $
4	$ A - B = A - A \cdot B $
5	$ A \cdot B \leq A $
6	$ A \leq A + B $
7	$ A' = U - A $
8	$a \leq A \leq b \leftrightarrow U - a \leq A' \leq U - b$
9	$\text{Max}(A , B) \leq A + B \leq \text{Min}(A + B , U)$
10	$\text{Max}(0, A + B - U) \leq A \cdot B \leq \text{Min}(A , B)$

2. N-Tupla ordenada

Se cuencia de elementos:

1. ordenada (index) ✓ : $A = (1, 2, 3, 4)$
2. Finita ✓ : $A = (1, 2, 3, 4)$
3. Permite repeticiones : $A = (1, 1, 2, 3)$
4. Los elementos pueden ser del mismo o diferente tipo: $A = (1, 2, 3, 4)$

$$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

a_1	a_2	a_3	\dots	a_n
1	2	3	\dots	n
0	1	2	\dots	n-1

index

python \rightarrow Podemos representar lo que queramos

Importante:

No me simpatizas



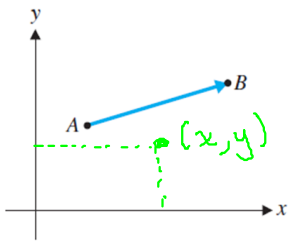
$$B = ("kiko", 10)$$

$$J = (\text{bala}, \text{bala}, \text{pateleta}, \text{carrito})$$

$$J = ("bala", "bala", "pateleta", "carrito")$$

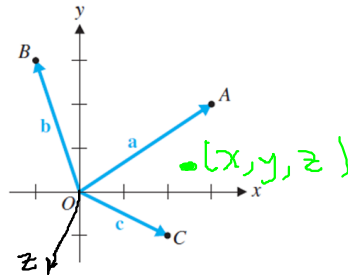
Ejemplos:

2-Tupla



Par: (x, y)

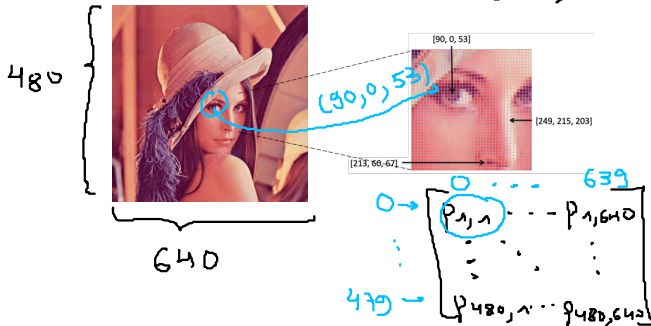
3-tupla



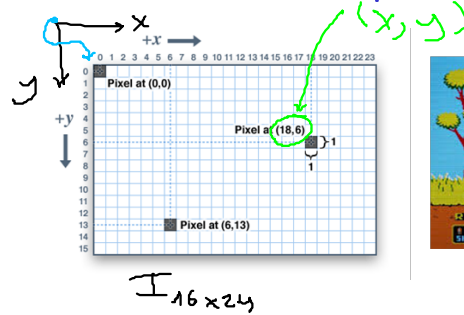
Terna: (x, y, z)

Casos de aplicación

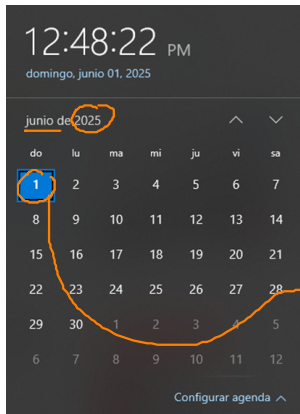
Imagen RGB (R, G, B)



Posición de un pixel en una imagen

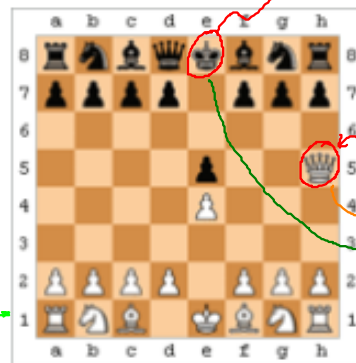


Representación de una fecha $\{1, 2, \dots, 12\}$



mes = $\{1, 2, \dots, 12\}$
 nacimiento
 (d, m, aaaa)
 3-Tupla
 (1, 6, 2025)
 días = $\{1, \dots, 31\}$

Posición de una pieza



B = Blanca
 N = Negra

Filas = $\{1, 2, \dots, 8\}$
 Columnas = $\{a, b, \dots, h\}$

pieza = $\{P, J, A, T, Q, K\}$
 color = $\{B, N\}$

Registro de Una tabla

Estudiantes

A	B	C	D
ID	Nombre	Apellido	Semestre
205	Sofia	Garcia	3
113	Mateo	Rojas	4
451	Sofia	Torres	3

(205, "Sofia", "Garcia", 3)
 4-Tupla (a, b, c, d)
 $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$

3. Producto cartesiano

Conjunto de todas las posibles parejas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$ lo cual se denota formalmente (de diferentes maneras como) como:

generalización a n conjuntos

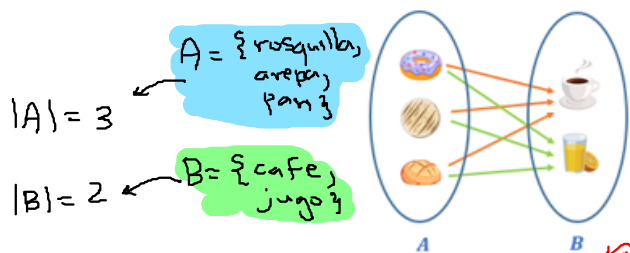
$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

Cardinalidad

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$$



$$A \times B = \text{Combos} = \{(\text{rosquilla, cafe}), (\text{rosquilla, jugo}), (\text{arepa, cafe}), (\text{arepa, jugo}), (\text{pan, cafe}), (\text{pan, jugo})\}$$

$|\text{Combos}| = |A||B| = (3)(2) = 6$

2-tupla (par)
(comida, bebida)

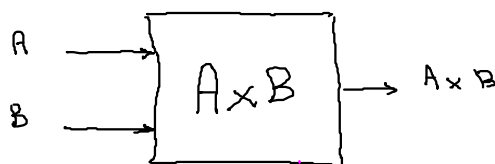


$$\rightarrow \text{Posiciones} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{(a, 1), \dots, (h, 8)\}$$

$$\rightarrow |\text{Posiciones}| = |\{a, b, c, d, e, f, g, h\}| \times |\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}| = (8)(8) = 64$$

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

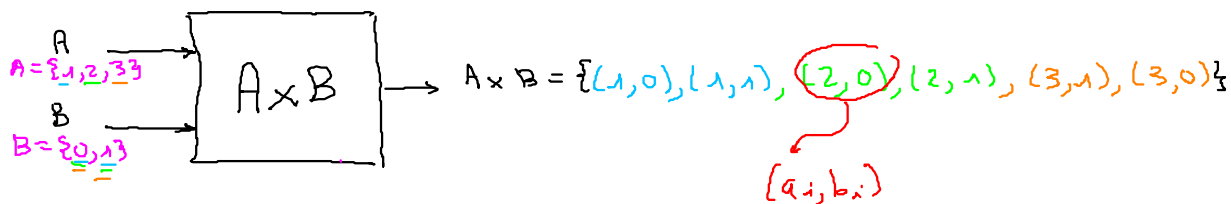
Cardinalidad: $|A \times B| = |A| |B|$



Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$ obtenga:

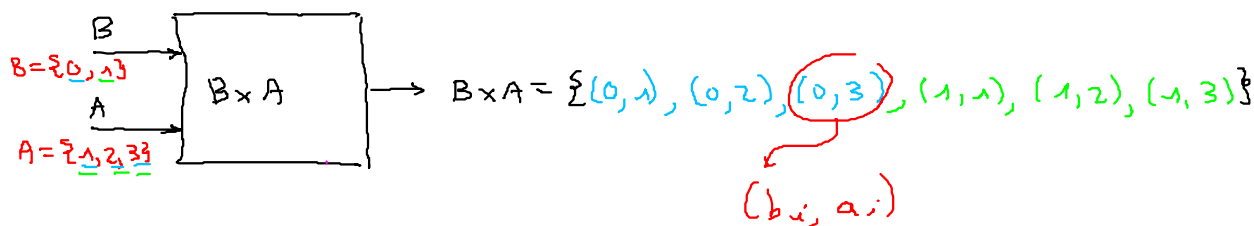
- $A \times B$
- $|A \times B|$
- $B \times A$
- $|B \times A|$

a. $A \times B$



b. $|A \times B| = |A| |B| = (3)(2) = 6$

c. $B \times A =$



d. $|B \times A| = |B| |A| = (2)(3) = 6$

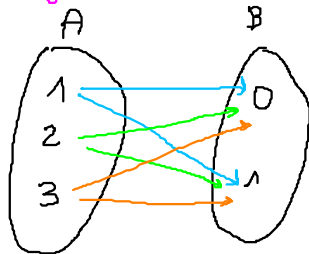
4. Algunas representaciones para los productos Cartesianos

Retomemos el ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$

$$A \times B = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\}$$

← lista de elementos

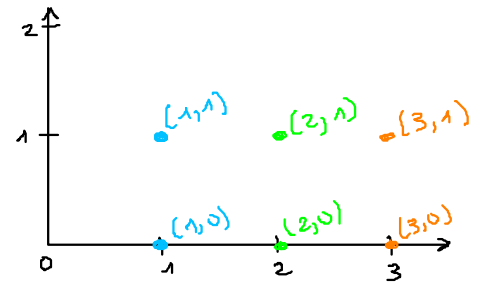
i. Diagrama de flechas



ii. Tabla

(a,b)	
a	b
1	0
1	1
2	0
2	1
3	0
3	1

iii. Plano cartesiano



5. Funciones: Ya se ha visto bastante en cálculo pero retomemos un poco.

Definición

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A a B es una **regla** que asigna a **cada** elemento de A **exactamente un elemento de B** . Esto se escribe como:

$$f: A \rightarrow B$$

Una función $f: A \rightarrow B$ también puede definirse como un subconjunto de $A \times B$ (una relación). Este subconjunto está restringido a una relación donde ningún par de elementos de la relación tiene el mismo primer elemento.

$$f = \{(a,b) \in A \times B \mid \text{a cada } a \in A \text{ le corresponde un único } b \in B\}$$

Esto se denota comúnmente como:

$$f(a) = b$$

Resaltando que b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a de A .



Dirichlet ([link](#))

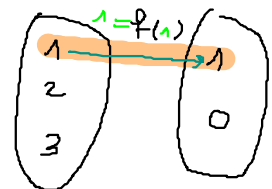


Elige de $A \times B$ solo aquellos elementos donde el primer elemento son iguales:

$$A \times B = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1)\}$$

$$f = \{(1,1)\}$$

$$f = \{(a,b) \in A \times B \mid a=b\}$$



Dominio y rango

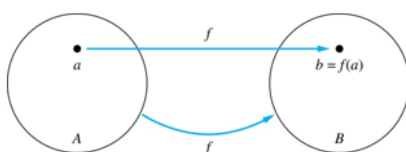
Al dar una función $f: A \rightarrow B$ nosotros estamos diciendo f mapea (asigna) A a B o que f es un mapeo (asignación) de A a B .

Dominio:

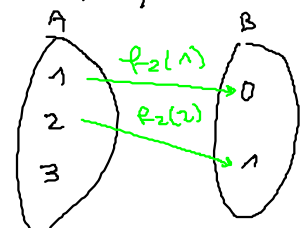
- Conjunto de todos los elementos de entrada
- Dominio de la función:
 - $D(f) = A$
 - $\text{Dominio}(f) = A$

Rango:

- Conjunto de todos los valores de salida o resultados posibles que genera la función
- Rango de la función:
 - $R(f) = A$
 - $\text{Rango}(f) = A$



$$f_2 = \{(a,b) \mid |a-b| = 1\}$$

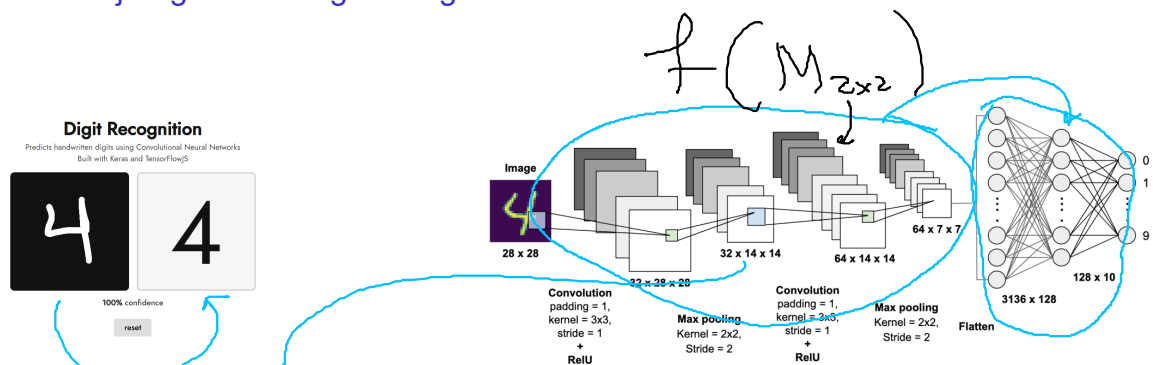


- Dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio, el mismo rango y asignan cada elemento del dominio al mismo elemento del rango.

Ejemplo de Aplicación: Sistema OCR

<https://github.com/balkarjun/digit-recognition/tree/master/model>

<https://balkarjun.github.io/digit-recognition/>



$$f: \boxed{2} \xrightarrow{\text{Red Neuron}} \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Imagen $M_{2 \times 2} \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$

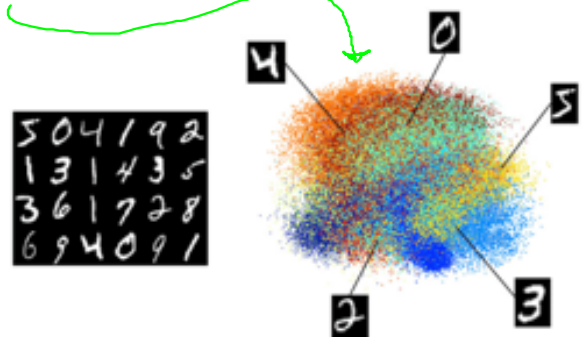
$$T: V \rightarrow W$$

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

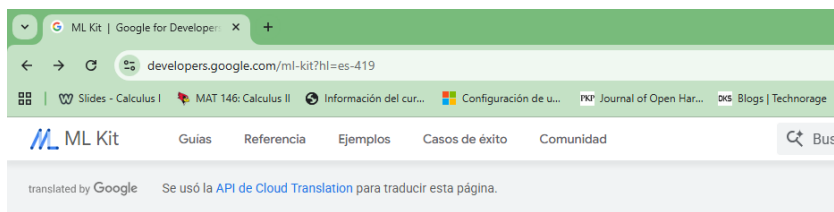
$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Original \mathbb{R}^D $x \xrightarrow{B^T} \text{Code } \mathbb{R}^M \xrightarrow{B} \hat{x} \mathbb{R}^D$
Encoder Decoder



<https://developers.google.com/ml-kit?hl=es-419>



Aprendizaje automático destinado a apps para dispositivos móviles

ML Kit ofrece la experiencia de aprendizaje automático de Google móviles en un paquete potente y fácil de usar. Haz que tus apps sean útiles con soluciones optimizadas para ejecutarse en dispositivos.

Comenzar

Representación de funciones

Las funciones pueden ser representadas de diferentes maneras:

1. **Descripción Verbal:** Una declaración explícita de la tarea.
2. **Tabla de valores:** Se crea una tabla con dos columnas. Una columna para los valores de entrada (dominio) y otra para los correspondientes valores de salida (rango).
3. **Representación Algebraica (Formula):** Usa una ecuación algebraica para definir la relación precisa entre la entrada (x) y la salida ($f(x)$ o y).
4. **Diagrama de flechas (mapeo):** Se dibujan dos conjuntos (generalmente óvalos), uno para el dominio y otro para el rango, y se usan flechas para conectar cada entrada con su única salida.
5. **Plano cartesiano:** Se representan los pares ordenados $(x, f(x))$ como puntos en un plano con un eje horizontal (eje x) para el dominio y un eje vertical (eje y) para el rango.
6. **Conjunto de Pares Ordenados:** Es una lista explícita de los valores de entrada y su correspondiente salida
7. **Programa de computador:** Se define una subrutina que toma unas entradas, aplica un procedimiento y devuelve una salida como resultado de dicho procedimiento.

Clasificación

Los siguientes ejemplos ilustran algo de la amplia variedad de diferentes tipos de funciones.

- Función floor y ceiling.
- Función factorial
- Función identidad sobre un conjunto
- Sucesiones.
- Una función definida sobre un conjunto potencia.
- Funciones definidas sobre un producto cartesiano
- Funciones de codificación y decodificación.
- La función de distancia de Hamming.
- Funciones booleanas.

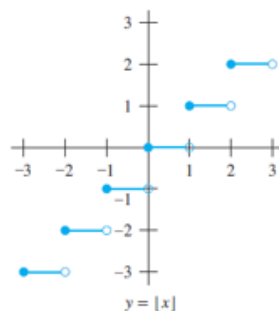
Función piso (Floor)

La función piso de un número real x , denotada como $\lfloor x \rfloor$ (o también **floor**(x)), devuelve el mayor entero que es menor o igual a x . En otras palabras, "redondea" x hacia abajo al entero más cercano. Formalmente esto es:

$$\lfloor x \rfloor = \text{el mayor entero } n \text{ tal que } n \leq x$$

Ejemplos: A continuación la grafica de la función piso así como la evaluación de esta para algunos valores.

x	$\lfloor x \rfloor$
$-\frac{1}{2}$	$\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = \lfloor -0.5 \rfloor = -1$
-0.1	$\lfloor -0.1 \rfloor = -1$
$\frac{1}{2}$	$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$
2.1	$\lfloor 2.1 \rfloor = 2$



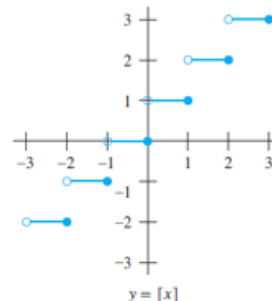
Función techo (ceil)

La función techo de un número real x , denotada como $\lceil x \rceil$ (o también **ceil**(x)), devuelve el mayor entero que es mayor o igual a x . En otras palabras, "redondea" x hacia arriba al entero más cercano. Formalmente esto es:

$$\lceil x \rceil = \text{el mayor entero } n \text{ tal que } n \geq x$$

Ejemplos: A continuación la grafica de la función techo así como la evaluación de esta para algunos valores.

x	$\lceil x \rceil$
$-\frac{1}{2}$	$\lceil -\frac{1}{2} \rceil = \lceil -0.5 \rceil = 0$
-0.1	$\lceil -0.1 \rceil = 0$
$\frac{1}{2}$	$\lceil \frac{1}{2} \rceil = \lceil 0.5 \rceil = 1$
2.1	$\lceil 2.1 \rceil = 3$



Sucesiones

Una sucesión es una lista ordenada de elementos (o términos). A diferencia de los conjuntos, donde el orden no importa y los elementos no se repiten, en una secuencia el orden es crucial y los elementos pueden repetirse.

Notación: Existen de representar sucesiones, algunas son:

1. **Listado de términos:** Empleado para secuencias finitas o para mostrar los primeros términos de una secuencia infinita:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

2. **Fórmula explícita:** Se usa fórmula que define el n -ésimo término a_n en función de n , esto es: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ o $\{a_n\}$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

3. **Relación de recurrencia:** Una fórmula que define un término de la secuencia en función de uno o más términos anteriores. Necesita uno o más condiciones iniciales (**casos base**).

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Sucesión

Ejemplos: La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de sucesiones:

Nombre	Formula general $\{a_n\}$	Primeros términos	Observaciones
Constante	$a_n = c$	3,3,3,3,...	La constante $c = 3$
Aritmética	$a_n = a_0 + nd$	2,5,8,11,14,...	El término $a_0 = 2$ y la constante $d = 3$.
Geométrica	$a_n = a_0 \cdot r^n$	1,2,4,8,16,...	El término $a_0 = 1$ y la razón $r = 2$.
Cuadrática	$a_n = n^2$	0,1,4,9,16,...	Los términos son cuadrados perfectos
Cúbica	$a_n = n^3$	0,1,8,27,64,...	Los términos son cubos perfectos
Pares	$a_n = 2n$	0,2,4,6,8,...	Los términos son números pares
Impares	$a_n = 2n + 1$	1,3,5,7,9,...	Los términos son números impares
Fibonacci	$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	0,1,1,2,3,5,8,...	Cada término es la suma de los dos anteriores
Factorial	$a_n = n!$	1,1,2,3,24,120,720,...	Cada término es el producto de todos los enteros positivos con $\leq n$
Alternante signo	$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ...	Cada término alterna el signo
Binaria	$a_n = n \bmod 2$	0,1,0,1,0,...	Cada término es 0 y 1

Para profundizar mas ver: [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences \(OEIS\)](#) ([link](#))

Sumatoria

Una secuencia consiste en la suma de los términos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n de una secuencia $\{a_n\}$

Notación:

- La notación para una sumatoria se muestra a continuación:

$$\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

- Una representación mas generalizada para un conjunto S esta dada por:

$$\sum_{j \in S} a_j$$

Sumatoria

Ejemplo 1: Cual es el valor de $\sum_{k=4}^8 (-1)^k$

$$\sum_{k=4}^8 (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = \cancel{1} + \cancel{(-1)} + \cancel{1} + \cancel{(-1)} + 1 = 1$$

Ejemplo 2: Cual es el valor de $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij = \sum_{i=1}^4 (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^4 6i = 6(1) + 6(2) + 6(3) + 6(4) = 6(1+2+3+4) = 6(10) = 60$$

Ejemplo 3: Cual es el valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Otra forma:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij = \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=1}^3 j = (1+2+3+4)(1+2+3) = 10 \cdot 6 = 60$$

Sucesión

Ejemplos: La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de sucesiones:

Expresión	Formula cerrada
$\sum_{i=1}^n c$	nc
$\sum_{i=1}^n i$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=1}^n (a_1 + (i-1)d)$	$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Expresión	Formula cerrada
$\sum_{i=0}^n ar^i$	$a \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
$\sum_{i=0}^n ar^{i-1}$	$a \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$	$\frac{a}{1-r} \quad (r < 1)$
$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})$	$a_1 - a_{n+1}$

Productoria

Una secuencia consiste en el producto de los términos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n de una secuencia $\{a_n\}$

Notación:

- La notación para una sumatoria se muestra a continuación:

$$\prod_{j=m}^n a_j = a_m \times a_{m+1} \times \dots \times a_n$$

- Una representación mas generalizada para un conjunto S esta dada por:

$$\prod_{j \in S} a_j$$

Función identidad

La función identidad es una función que mapea cada elemento del conjunto a sí mismo. Definiendo esto mas formalmente, si A un conjunto no vacío, La función identidad sobre A denotada como id_A (I_A o 1_A), esta definida por:

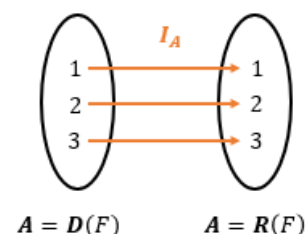
$$I_A: A \rightarrow A, \quad I_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$, entonces

- $I_A(1) = 1$
- $I_A(2) = 2$
- $I_A(3) = 3$

Luego, la representación como pares ordenados de I_A será:

$$I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

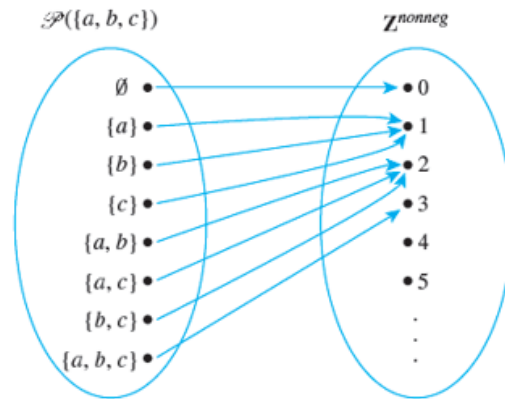


Función definida sobre un conjunto potencia

Previamente se vió que $\mathcal{P}(A)$ denota el potencia de un conjunto A . Suponiendo que se define la función $F: \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue para cada $X \in \mathcal{P}(\{a, b, c\})$,

$$F(X) = \text{numero de elementos en } X$$

Dibuje el diagrama de flechas para F y exprese F como pares de puntos.



$$F = \{(\emptyset, 1), (\{a\}, 1), (\{b\}, 1), (\{c\}, 1), (\{a, b\}, 2), (\{a, c\}, 2), (\{b, c\}, 2), (\{a, b, c\}, 3)\}$$

Función definida sobre un producto cartesiano

Se define funciones $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $R: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como sigue: para todos los pares de números reales (a, b) ,

$$M(a, b) = ab$$

$$R(a, b) = (-a, b)$$

Entonces M es la función multiplicación que envía cada par de números reales al producto de los dos y R es la función de reflexión que envía cada punto en el plano que corresponde a un par de números reales a la imagen espejo del punto a través del eje vertical. Tenemos:

- $M(-1, 1) = ? \rightarrow M(-1, 1) = (-1)(1) = -1$
- $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = ? \rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
- $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = ? \rightarrow M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$
- $R(2, 5) = (-2, 5) = (-2, 5)$
- $R(-2, 5) = -(-2, 5) = (2, 5)$
- $R(3, -4) = -(3, -4) = (-3, -4)$