16/09/2025 - Matematicas Discretas I (Ude@)

1. Repaso clase anterior

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$, p, $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$, $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$, $\neg q$, $\therefore \neg p$	Conjunción	p, q, $\therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$p \to q$, $q \to r$, $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$, $p \to r$, $q \to r$, $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$, $\neg p$, $\therefore q$		
Adición	p, $\therefore p \vee q$	Resolución	$p \vee q$, $\neg p \vee r$, $\therefore q \vee r$

Ejemplo: Demuestre que las siguientes premisas. "Si me envias un email, entonces terminare de escribir el programa", "Si no me envias el email, entonces me ire a dormir temprano" y "Si me voy a dormir temprano, entonces me despertaré sintiendome renovado" conducen a la conclusion "Si no termino de escribir el programa, entonces me despertare sintiendome renovado"

Solución:

$$\begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ \hline \therefore Q \end{array}$$

Lenguaje natural

✓ Si me envias un email, entonces terminare de escribir el programa

✓ Si no me envias el email entonces me ire a dormir temprano

✓ Si me voy a dormir temprano, entonces me despertaré sintiendome renovado

---

∴ Si no termino de escribir el programa, entonces me despertare sintiendome renovado

Identificación de proposiciones simples

i. email: me envias un email
ii. program: terminare de escribir un programa
iii. sleep: Me iré a dormir temprano
iv. wake: Me despertaré sintiendome renovado.

Lenguaje proposicional

$$\begin{array}{l} email \to program \\ \neg email \to sleep \\ sleep \to wake \\ \hline \therefore \neg program \to wake \end{array}$$

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ ✓	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

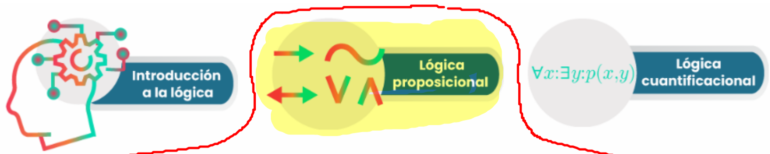
Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \rightarrow q$ p $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$ $\therefore p$
Modus Tollens	$p \rightarrow q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$ $p \rightarrow r$ $q \rightarrow r$ $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$		
Adición	p $\therefore p \vee q$	Resolución	$p \vee q$ $\neg p \vee r$ $\therefore q \vee r$

email → program (i) ✓
¬email → sleep (ii) ✓
sleep → wake (iii) ✓

∴ ¬program → wake

Procedimiento	Justificación
① $\overset{Q}{\text{email}} \rightarrow \overset{R}{\text{program}}$	Premisa (i)
② ¬email → sleep	Premisa (ii)
③ ¬sleep → ¬(¬email)	Contrarecíproco en ②
④ $\overset{P}{\neg\text{sleep}} \rightarrow \overset{Q}{\text{email}}$	Doble negación en ③
⑤ ¬sleep → program	Transitividad entre ① y ④
⑥ $\overset{Q}{\text{sleep}} \rightarrow \overset{R}{\text{wake}}$	Premisa (iii)
⑦ $\overset{P}{\neg\text{program}} \rightarrow \overset{Q}{\text{sleep}}$	Contrarecíproco en ⑤ y Doble negación en ⑤
⑧ ∴ ¬program → wake	Transitividad en ⑥ y ⑦



Material fundamental

- ARCHIVO Calculo Proposicional
- ARCHIVO Enfoque de modelos
- ARCHIVO Enfoque axiomático
- PÁGINA Ejemplo 1 / Ejercicio de enfoque de modelos
- PÁGINA Ejemplo 2 / Ejercicio de enfoque axiomático

Material 2025/1

Actividades

- CUESTIONARIO Actividad 2. Ejercicio de enfoque de modelos
- CUESTIONARIO Actividad 3. Ejercicio de enfoque axiomático
- TAREA Parcial 1. Lógica proposicional
- ARCHIVO Taller de lógica proposicional

Actividad 2025/1

Bonus

Talleres ← Talleres de repaso para el parcial

- ARCHIVO Logica proposicional - Taller 1
- ARCHIVO Logica proposicional - Taller 2
- ARCHIVO Logica proposicional - Taller 3

Parcial 1 ← Parcial semestre anterior.

- TAREA Parcial 1 - Logica proposicional
- ARCHIVO ParcialI - Logica proposicional - Solucion

2. Logica Cuantificacional:

Otros nombres: Logica cuantificacional = Logica de predicados = logica de primer orden

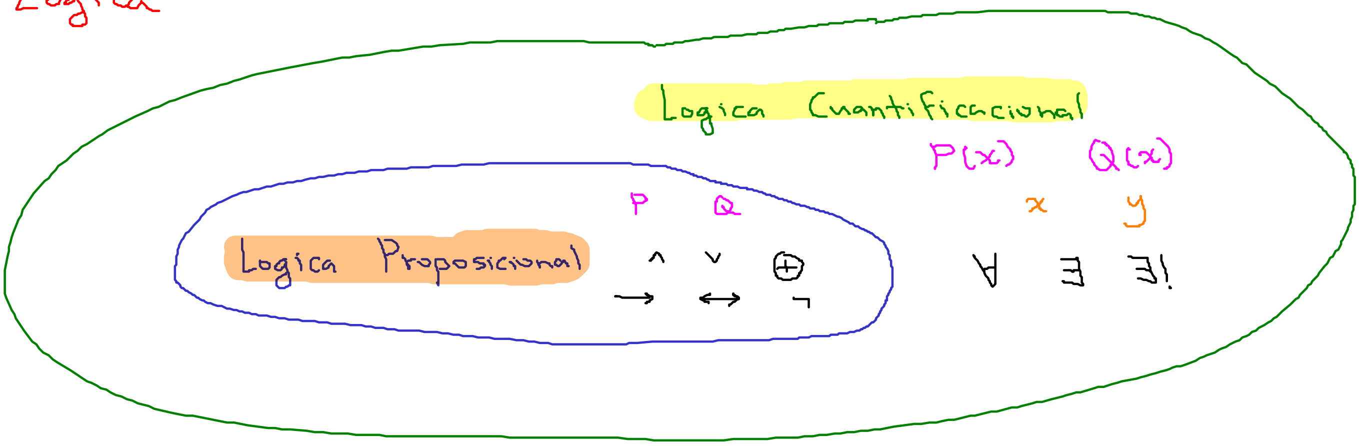
a. Limitaciones de la logica proposicional:

- Solo sirve para expresar verdades globales y simples
- No tiene en cuenta el "CONTEXTO"

Solucion

Logica Nueva: Logica cuantificacional

Logica



b. Contexto

Oración → Proposicion (F/V) → Logica proposicional

p: Hoy esta lloviendo

p

Hoy esta lloviendo

$\underbrace{\text{Hoy}}_{S}$ $\underbrace{\text{esta lloviendo}}_{P}$

generalización

x esta lloviendo →

Contexto

Hoy
mañana
...
cualquier dia

Contexto:

- Variable: x cualquier dia
- Predicado: $P(x)$: x esta lloviendo
- Dominio (Universo de discurso): Dias

Oración ⟶ Proposicion (F/V)

$\underbrace{\text{Hoy}}_{S}$ $\underbrace{\text{esta lloviendo}}_{P}$

generalización

x esta lloviendo ⟶ Logica de predicados

Predicado - $P(x)$: x esta lloviendo

$P(x)$

Variable - x: x cualquier dia

Dominio $U = \{L, M, \ldots, Hoy, \ldots\}$

$U = \{\text{Cualquier dia}\}$

Individuo: $x = Hoy$

Hoy esta lloviendo = $P(Hoy)$

$x = hoy$

x esta lloviendo

Otro ejemplo: Dado el enunciado "Java es un hermoso poema" como lo expresaria usando:

a. Logica proposicional

b. Lógica de predicados.

Enunciado: "Java es un hermoso poema" (Lenguaje natural)

Logica Proposicional

Java es un hermoso poema ⟶ P

P: Java es un hermoso poema

Logica Cuantificacional (Logica de Predicado)

Java es un hermoso poema

Red:

1. Variable proposicional
2. Universo de discurso
3. Predicado

$\underbrace{\text{Java}}_{S}^{x}$ $\underbrace{\text{es un hermoso poema}}_{P}$

1. Variable proposicional: x: un poema cualquiera

x { Java, El cuervo, Melancolia, ⋮ }

2. Universo de discurso : $U = \{ \text{Java}, \text{El cuervo}, \text{Melancolia}, \dots \}$

↓

Todos los posibles valores de x

$U = \{ x \mid x \text{ es un poema} \}$

$U =$ Todos los poemas.

$$x \in U$$

3. Predicado: $f(x)$: x Es un hermoso poema

$f(x)$: x es un hermoso poema

$x =$ Java

$\underbrace{\text{Java}}_{S}$ $\underbrace{\text{es un hermoso poema}}_{P}$ → $f(x = \text{Java}) = f(\text{Java})$

Ejemplos: Escriba en lenguaje proposicional y cuantificacional los siguientes enunciados

1. Nacional y Medellín son equipos colombianos.
2. Si mañana es miércoles, entonces no hay Discretas 1. ✓

Solución:

→ Enunciado 1:

Logica Proposicional

Nacional $\overset{\wedge}{\text{y}}$ Medellín son equipos Colombianos

N: Nacional es un equipo colombiano

M: Medellín es un equipo Colombiano

$$N \wedge M$$

Logica cuantificacional

$\overset{x}{\text{Nacional}}$ $\overset{\wedge}{\text{y}}$ $\overset{y}{\text{Medellín}}$ son equipos colombianos.

$f(x)$: x es un equipo Colombiano

$\overset{x}{\text{Nacional}}$ es un equipo Colombiano y $\overset{y}{\text{Medellín}}$ es un equipo Colombiano

$f(x = \text{Nacional})$ $f(x \overset{=y}{=} \text{Medellín})$

$$f(\text{Nacional}) \wedge f(\text{Medellín})$$

Nacional y Medellín son equipos Colombianos $\longleftrightarrow$ $f(\text{Nacional}) \wedge f(\text{Medellín})$

→ Enunciado 2:

2\. Si mañana es miercoles, entonces no hay discretas 1

Reescribimos para mas claridad

Si $\underbrace{\text{mañana es miercoles}}_{1}$, entonces $\underbrace{\text{mañana no hay discretas 1}}_{2}$

Universo de discurso

$x \in U$

Sobre x: Cual es el Universo?

U = conjunto de todos los dias:

$U = \{L, M, W, J, V, S, Su,$ mañana, pasado mañana, $\ldots\}$

$W(x)$: x es miercoles

1 $\underbrace{\overset{x}{\text{Mañana}}}_{S}$ $\underbrace{\text{es miercoles}}_{P}$ ⟶ Expresión general: $W(x)$

Para este caso: $x = m$ (mañana) — Cte

$W(m)$

$D(x)$: x hay discretas 1

2 $\underbrace{\overset{x}{\text{Mañana}}}_{S}$ $\underbrace{\text{no hay discretas 1}}_{P}$ ⟶ Expresión general: $\neg D(x)$

Para este caso: $x = m$ (mañana) — Cte

$\neg D(m)$

Luego tenemos que:

Lenguaje Natural

Si $\underbrace{\text{mañana es miercoles}}_{1}$, entonces $\underbrace{\text{mañana no hay discretas 1}}_{2}$

Logica de predicados

$W(m) \longrightarrow \neg D(m)$