09/09/2025 – Matematicas Discretas 1 (UdeA)

1. Repaso

Logica proposicional

① Proposiciones → Simples
→ Compuestas

② Expresiones Logicas → Operadores logicos
$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

→ Tablas de verdad

→ Reglas de prioridad y asociatividad

③ Condicional:

Condicional
$P \rightarrow Q$

→ Reciproco
$Q \rightarrow P$

→ Contrareciproco
$\neg Q \rightarrow \neg P$

→ Contrario
$\neg P \rightarrow \neg Q$

④ Tipos de Proposiciones → Tautologia (V)
→ Contingencia (V / F)
→ Contradiccion (F)

⑤ Demostraciones → Proposicion (Valor de Verdad)

Equivalencias

$P \equiv Q$ $\quad$ $P \leftrightarrow Q$

Enfoques

Basado en Modelos

$P \leftrightarrow Q$ es una Tautologia

Tablas de verdad

exp	V
...	V

Axiomatico

Uso de Axiomas (Identidades)

$P \leftrightarrow Q$

$P \leftrightarrow P_1$
P_2 Transf
$\vdots$
$\leftrightarrow Q$

2. Formulas importantes

Operadores lógicos

Operador	Símbolo	Nombre	Descripción
Negación	$\neg p$	No (NOT)	Niega el valor de verdad de una proposición. Si p es verdadera, $\neg p$ es falsa.
Conjunción	$p \wedge q$	Y (AND)	Es verdadera solo si ambas proposiciones lo son. $p \wedge q$ es verdadera solo si p y q lo son.
Disyunción	$p \vee q$	O (OR)	Es verdadera si al menos una de las proposiciones lo es.
Disyunción exclusiva	$p \oplus q$	O exclusiva (XOR)	Es verdadera si una, y solo una, de las proposiciones es verdadera.
Condicional	$p \to q$	Si ... entonces ... (Implica)	Solo es falsa cuando p es verdadera y q es falsa.
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	... si y solo si ... (Equivale)	Es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Tablas de verdad para los operadores lógicos

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Disyunción inclusiva

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Disyunción exclusiva

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \to q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Reglas de precedencia y asociatividad

Prioridad	Símbolo	Asociatividad	Ejemplo con paréntesis
1 (más alta)	$\neg$	No aplica (unitario)	$\neg p \wedge q \mapsto ((\neg p) \wedge q)$
2	$\wedge$	Izquierda ($I \to D$)	$p \wedge q \wedge r \mapsto ((p \wedge q) \wedge r)$
3	$\vee$	Izquierda ($I \to D$)	$p \vee q \vee r \mapsto ((p \vee q) \vee r)$
4	$\oplus$	Izquierda ($I \to D$)	$p \oplus q \oplus r \mapsto ((p \oplus q) \oplus r)$
5	$\to$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \to q \to r \mapsto (p \to (q \to r))$
6 (más baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \mapsto (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \mathbf{V} \equiv P$	$P \vee \mathbf{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F}$	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

3. Ejemplo Tarea

Demostrar: $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

* Enfoque de modelos (Tablas de verdad)

$$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$$

i. Variables: p, q, r

ii. Filas: $n = 3 \to$ filas $= 2^n = 2^3 = 8$

iii. Tabla de verdad

$$\underbrace{p \to \underbrace{(q \to r)}_{①}}_{②} \equiv \underbrace{\underbrace{(p \wedge q)}_{③} \to r}_{④}$$

p	q	r	① $q \to r$	②: $p \to ①$ $p \to (q \to r)$	③ $p \wedge q$	④: ③ $\to r$ $(p \wedge q) \to r$	② ≡ ④ $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$
0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$\therefore$ $p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$ es Verdadero (Tautología)

Por lo tanto:

* Enfoque Axiomático

Lado izq. — Lado derecho

$$p \to (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$$

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

	Procedimiento	Justificación
①	$p \to (q \to r)$	Lado izquierdo (Punto de partida)
②	$\neg p \vee (q \to r)$	Implicación en ①
③	$\neg p \vee (\neg q \vee r)$	Implicación en ②
④	$(\neg p \vee \neg q) \vee r$	Asociatividad para $\vee$ ($\vee$) en ③

Procedimiento	Justificación
(5) $\neg(p \wedge q) \vee r$	Ley de Morgan para el $\emptyset(\vee)$ en (4) (I ← D: Factor común)
(6) $(p \wedge q) \longrightarrow r$	Implicación en (5) (Lado derecho)

$$\therefore \quad p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

4. Argumentación

⤳ Cuando una argumentación es válida o no?

Expresión condicional

$$\underline{P} \xrightarrow{\text{Inferencia}} \underline{Q}$$

Premisa
Hipotesis
Antecedente
↓
Verdad

Conclusión
Tesis
consecuente
↓
Verdad

Tabla de verdad

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Premisas (V)

$$\left.\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{matrix}\right\} P$$

Conclusión $\{ \therefore Q \qquad \therefore Q$

Representación

1. Notación de consecuentes

$$\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ \underline{P_n} \\ \therefore Q \end{matrix}$$

2. Tautología.

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n \longrightarrow Q$$

3. Forma simbolica $\qquad \wedge \equiv ,$

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q \qquad \rightarrow \equiv \vdash$$

Como demostrar validez?

1. Modelos (Tablas de verdad) ←
2. Enfoque axiomatico (Reglas)

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Validación de argumentos mediante tabla de verdad

Ejemplo: Dado el siguiente argumento:

$$p \to q \vee \neg r$$
$$q \to p \wedge r$$
$$\therefore p \to r$$

Determine su validez mediante una tabla de verdad, indicando qué columnas representan las premisas y cuáles representan la conclusión y anotando en la tabla una frase de la explicación.

Solución:

Notación de consecuentes

$$\left.\begin{array}{l} p \to q \vee \neg r \\ q \to p \wedge r \end{array}\right\} \text{Premisas}$$
$$\left.\therefore p \to r\right\} \text{Conclusión}$$

Tautología

$$\underbrace{(p \to q \vee \neg r) \wedge (q \to p \wedge r)}_{\text{Premisas}} \to \underbrace{p \to r}_{\text{Conclusión}}$$

Forma simbolica

$$\underbrace{(p \to q \vee \neg r), (q \to p \wedge r)}_{\text{Premisas}} \vdash \underbrace{p \to r}_{\text{Conclusión}}$$

Representacion en tabla de verdad

Notacion de consecuentes

$$\begin{array}{l} p \to q \vee \neg r \\ q \to p \wedge r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

Tautologia

$$(p \to q \vee \neg r) \wedge (q \to p \wedge r) \to p \to r$$

i. Variables: p, q, r

ii. Filas: $n = 3 \to \text{filas} = 2^n = 2^3 = 8$

iii. Tabla de verdad

Premisas — Conclusion

$$\underbrace{(p \to \underbrace{q \vee \neg r}_{2}) \wedge (q \to \underbrace{p \wedge r}_{4})}_{\text{Premisas}} \to \underbrace{p \to r}_{6}$$

$p \to$ ② ③ $q \to$ ④ ⑤

p	q	r	¬r	② q∨¬r	③ premisa 1: p → q∨¬r	④ p∧r	⑤ premisa 2: q → p∧r	conclusion: p → r
0	0	0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1	1

Premisas — Conclusion

p → q∨¬r	q → p∧r	p → r
1	1	1
1	1	1
1	0	1
1	0	1
1	1	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Renglones Criticos

Falsa

∴

$$\begin{array}{l} p \to q \vee \neg r \\ q \to p \wedge r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array}$$

No es un argumento valido.