

1. Repaso:

a. Conjuntos:  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$



b. n-Tuplas:  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

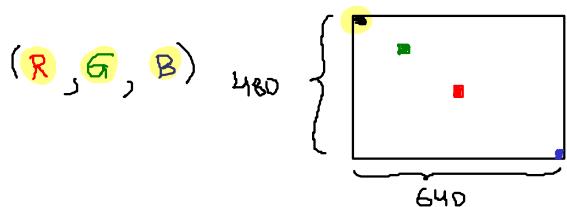


Imagen:  $480 \times 640 = 307200$

$$I = \{(R, G, B) | R, G, B \in \{0, 1, 2, \dots, 255\}\}$$

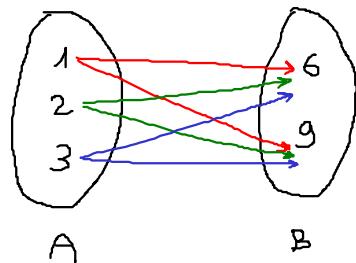
c. Producto cartesiano:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

$$\text{Sea: } A = \{1, 2, 3\} \rightarrow |A| = n(A) = 3$$

$$B = \{6, 9\} \rightarrow |B| = n(B) = 2$$

$$A \times B = \{(1, 6), (1, 9), (2, 6), (2, 9), (3, 6), (3, 9)\}$$

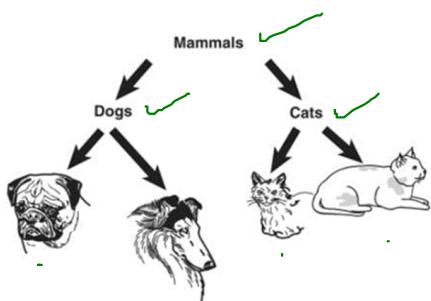


$$|A \times B| = n(A \times B) = |A||B| = 3 \cdot 2 = 6$$

$$|A \times B| = 6$$

2. Contextualización.

"El mundo está lleno de relaciones"



Estudiantes y cursos que tomaron



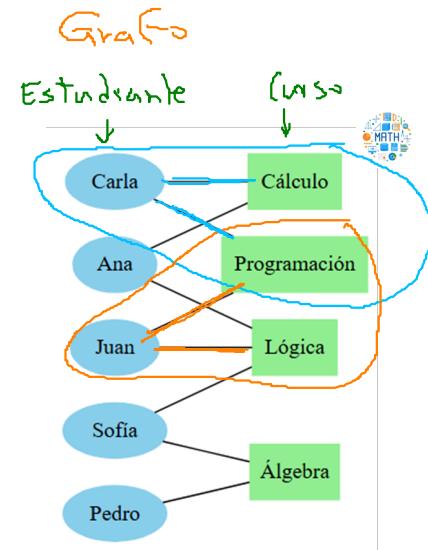
Gemelos Fantásticos

Estudiante	Curso
Ana	Cálculo
Ana	Lógica
Juan	Lógica
Juan	Programación
Carla	Cálculo
Carla	Programación
Pedro	Álgebra
Sofía	Lógica
Sofía	Álgebra

Como represento las relaciones.

### \* Estudiantes y materias

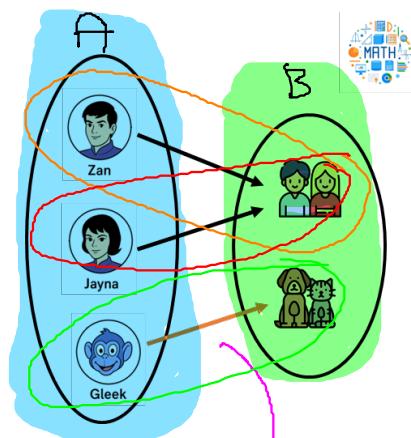
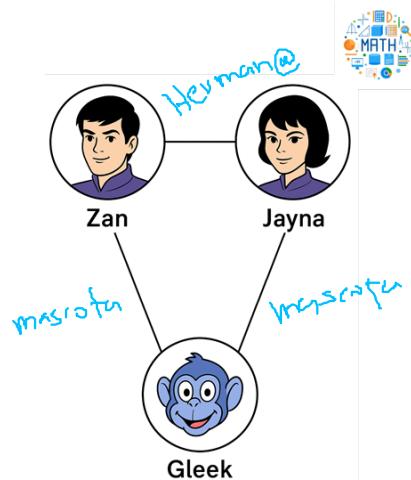
Estudiante	Curso
Ana	Cálculo
Ana	Lógica
Juan	Lógica
Juan	Programación
Carla	Cálculo
Carla	Programación
Pedro	Álgebra
Sofía	Lógica
Sofía	Álgebra



$\hookrightarrow \text{cursos} = \{\text{Cálculo}, \text{Lógica}, \text{Programación}, \text{Álgebra}\}$   
 $\hookrightarrow \text{estudiantes} = \{\text{Ana}, \text{Juan}, \text{Carla}, \text{Pedro}, \text{Sofía}\}$

$$\{ \text{estudiantes} \times \text{cursos} \} = |\text{cursos}| \cdot |\text{estudiantes}| = 4 \times 5 = 20$$

### \* gemelos Fantásticos



Personeje	Parentezco
Jayna	Herman@
Zan	Herman@
Gleek	Mascota

$$B = \{ \text{Herman@, Mascota} \}$$

$$A = \{ \text{Jayna, Zan, Gleek} \}$$

$$R = \{ (a, b) | a \in A, b \in B, P(a, b) \}$$

$$R = \{ (\text{Zan}, \text{Herman@}), (\text{Jayna}, \text{Herman@}), (\text{Gleek}, \text{Mascota}) \}$$

### 3. Relaciones

#### a. Definición:

Una relación  $R$  de  $A$  en  $B$ , representada también como  $R(x, y)$ , es un conjunto de pares ordenados  $(x, y)$ , donde  $x \in A$  y  $y \in B$ , que satisfacen una propiedad determinada  $P(x, y)$ . Formalmente, se define como:

$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge P(x, y)\}$$

Como no todos los elementos de  $A$  tienen que estar relacionados con los elementos de  $B$  mediante la condición  $P$ ; el conjunto  $R$  es un subconjunto  $A \times B$ , es decir:

$$R \subseteq A \times B$$

A este tipo de relaciones se les denomina **relaciones binarias**.

#### b. Número de relaciones existentes

El número total de relaciones que se pueden definir de un conjunto de un conjunto  $A$  a un conjunto  $B$  es simplemente el número de subconjuntos de  $A \times B$  es decir  $|\mathcal{P}(A \times B)|$ . Para el caso, sea  $|A| = m$  y  $|B| = n$  entonces:

$$|A \times B| = |\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = 2^{m \cdot n}$$

Ejemplo:

1. Liste los pares ordenados en la relación  $R$  de  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  a  $B = \{0, 1, 2, 3\}$ , donde  $(a, b) \in R$  si y solo si:

- a.  $a = b \rightsquigarrow R_1$
- b.  $a + b = 4 \rightsquigarrow R_2$
- c.  $a > b \rightsquigarrow R_3$
- ✓ d.  $a|b \rightsquigarrow R_4$

(Nota: En la explicación están bien)

En la explicación de zoom les explique mal el concepto

Adicionalmente, realice la representación de las relaciones como:

1. Tabla
2. Diagrama de flechas
3. Tabla matricial
4. Matriz binaria

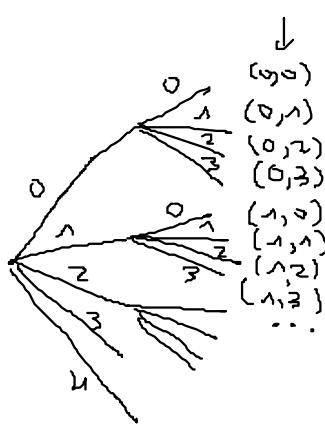
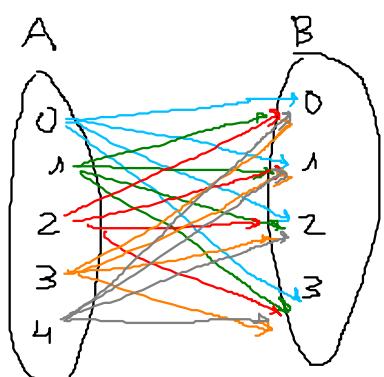
Solución:

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A \times B = ? \quad |A \times B| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 = 20$$

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

R



$x$	$y$	$(x, y)$
0	0	{0, 0}
0	1	{0, 1}
0	2	{0, 2}
0	3	{0, 3}
1	0	{1, 0}
1	1	{1, 1}
1	2	{1, 2}
1	3	{1, 3}
2	.	.
3	.	.
4	.	.

Relaciones:

a.  $R_1 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a = b\}$

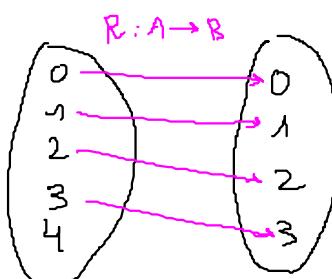
$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

$$R_1 \subseteq A \times B$$

$$R_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \rightarrow \text{Pares de puntos}$$

$$R_1 : \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Tabla}$$



$\rightarrow$  Diagrama de Flechas

$$R_1 \rightarrow \begin{array}{c|ccccc} & & & & \\ & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & x & & & & \\ 1 & & x & & & \\ 2 & & & x & & \\ 3 & & & & x & \\ 4 & & & & & x \end{array} \rightarrow \text{Tabla Matricial}$$

$M_{R_1} \rightarrow \text{Matriz Binaria}$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ojo: Aquí se hizo la solución de  $b$  divide a  $a$  ( $b|a$ ) y no  $a$  divide  $b$  ( $a$  divide  $b$ ) que es lo que se pedía arriba

Ojo que no es el punto d del ejercicio original

d.  $R_4 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, b|a\}$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

Pares de puntos:

$$R_4 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2)\}$$

$$R_4 \subseteq A \times B$$

$b|a$ :  $b$  divide a  $a$   
 $a \not| b$   
 $\begin{array}{r} a \\ b \\ \hline 0 \end{array}$   
 residuo

$$(a^0 \cdot b = 0)$$

$$3 \not| 2 = \text{Falso} \quad \begin{array}{r} 3 \not| 2 \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

$$4 \not| 2 = \text{Verdadero} \quad \begin{array}{r} 4 \not| 2 \\ 0 \quad 2 \end{array}$$

Tabla

$a$	$b$
0	1
0	2
0	3
1	1
2	1
2	2
3	1
3	3
4	1
4	2

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

Diagrama de flechas

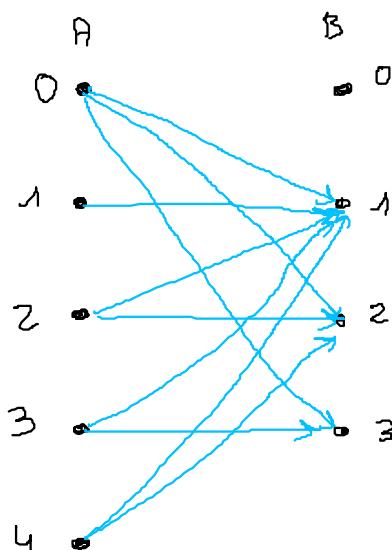


Tabla matricial

		$B$			
		0	1	2	3
$A$	0	x	x	x	x
	1		x		
2		x	x		
3		x		x	
4		x	x		

Matriz binaria

$$M_{R,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Corrección del punto anterior (donde se me trocaron los cables)

$$d. R_4 = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B, a \mid b\}$$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad B = \{0, 1, 2, 3\}$$

Ojo:

$a \mid b$  = a divide a b  
 $b \% a = 0$

$$R_4 \subseteq A \times B$$

Pares de puntos

$$R_4 = \{(1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (3, 3)\}$$

$$A \times B = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$$

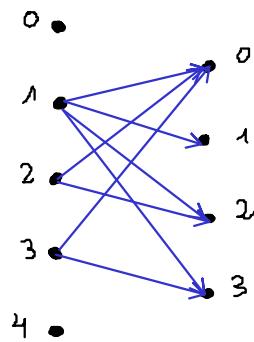
Tabla

Diagrama  
de flechas

Tabla  
matricial

Matriz  
binaria

$a$	$b$
1	0
1	1
1	2
1	3
2	0
2	2
3	0
3	3



A

B

	B			
R4	0	1	2	3
A	0	x	x	x
1	x	x	x	x
2	x	x	x	x
3	x	x	x	x
4	x	x	x	x

$$M_{R,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## c. Relación binaria sobre un solo conjunto

Una relación binaria sobre un conjunto  $A$  es una regla que conecta elementos del conjunto **consigo mismos**, es decir, relaciona pares de elementos del mismo conjunto. A diferencia de las relaciones entre dos conjuntos distintos (como entre  $A$  y  $B$ ), este tipo de relación es interna a  $A$ . Formalmente, una relación binaria se define como un subconjunto de  $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

$$A \times A = A^2$$

$$A \times A \times A = A^3$$

O bien:

$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in A) \wedge P(x, y)\}$$

Donde  $P(x, y)$  representa la propiedad o condición que deben cumplir los elementos para estar relacionados

## Número de relaciones existentes en un conjunto con $n$ elementos

- Una relación sobre un conjunto  $A$  es un subconjunto del producto cartesiano  $A \times A$ .
- Si el conjunto  $A$  tiene  $n$  elementos, luego  $A \times A$ , tiene  $|A \times A| = |A||A| = n^2$
- Un conjunto con  $m$  elementos tiene  $2^m$  subconjuntos, de modo que, el conjunto  $A \times A$  tendrá  $2^{n^2}$  subconjuntos.
- **Conclusión:** en un conjunto de  $n$  elementos hay  $2^{n^2}$  relaciones posibles.

$$|A \times A| = n^2 \rightarrow |\mathcal{P}(A \times A)| = 2^{|A \times A|} = 2^{n^2}$$

Ejemplos:

Considere el conjunto  $A = \{1, 2, 3\}$  Obtenga las diferentes representaciones para:  
a.  $A \times A$

b.  $R = \{(x, y) | x+y > 3\}$

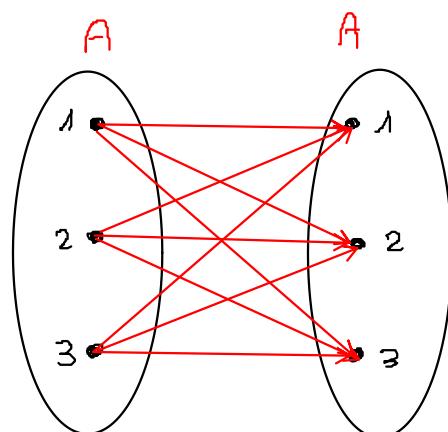
Solución

Producto cartesiano

Pares de puntos

$$A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Diagrama de flechas



Relación:  $R = \{(x, y) \mid x+y > 3\}$

Pares de puntos

$$R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

Tabla

x	y
1	3
2	2
2	3
3	1
3	2
3	3

Diagrama de Flechas

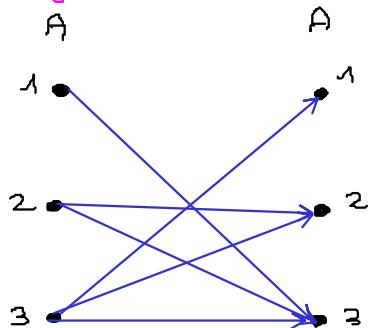


Tabla matricial

R	1	2	3
1			x
2		x	x
3	x	x	x

Matriz binaria

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dominio:  $\text{Dom}(R) = S(R) = \{1, 2, 3\}$

Rango:  $\text{Ran}(R) = T(R) = \{1, 2, 3\}$

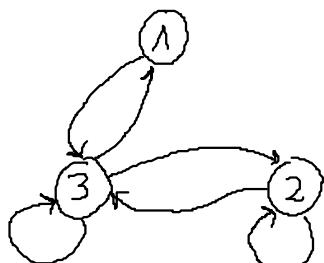
→ Nueva representación: Grafo dirigido

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(x, y) \mid x+y > 3\}$$

$$R = \{(1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$$

R	1	2	3
1			(1, 3)
2		(2, 2)	(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)



## d. Dominio y rango de una relación

### Dominio y rango de una relación

El dominio y el rango de una relación permite describir con precisión qué elementos están realmente involucrados en la relación.

#### Dominio:

- Es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados en la relación.
- Dominio ( $\text{dom}(R)$ ) de la relación  $R \subseteq A \times B$ , es un subconjunto de  $A$  ( $\text{dom}(R) \subseteq A$ ), tal que:

$$\text{dom}(R) = \delta(R) = \{x \mid (x \in A) \wedge \exists y (y \in B \wedge ((x, y) \in R))\}$$

#### Rango:

- Es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados en la relación.
- Rango ( $\text{ran}(R)$ ) de la relación  $R \subseteq A \times B$ , es un subconjunto de  $B$  ( $\text{ran}(R) \subseteq B$ ), tal que:

$$\text{ran}(R) = \gamma(R) = \{y \mid (y \in B) \wedge \exists x (x \in A \wedge ((x, y) \in R))\}$$

### Ejemplo

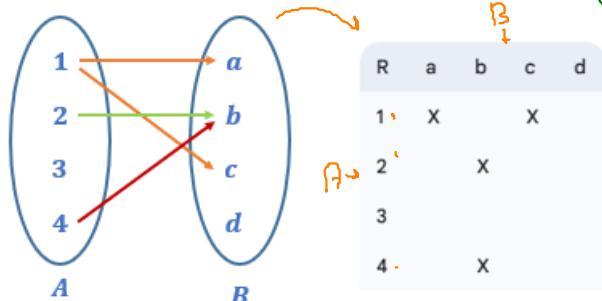
Suponga que tiene los siguientes conjuntos y la relación  $R$  dada por:

- **Conjunto de llegada:**  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
- **Conjunto de partida:**  $B = \{a, b, c, d\}$
- **Relación:**  $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (4, b)\}$

Determine el dominio y el rango de la relación.

$$\text{dom}(R) = \{x \mid (x \in A) \wedge \exists y (y \in B \wedge ((x, y) \in R))\}$$

$$\text{ran}(R) = \{y \mid (y \in B) \wedge \exists x (x \in A \wedge ((x, y) \in R))\}$$



#### Dominio:

$$\text{dom}(R) = \{1, 2, 4\} \quad \{1, 2, 4\}$$

#### Rango:

$$\text{ran}(R) = \{a, b, c\}$$

e. Inversa de una relación

## Inversa de una relación

La inversión de una función, consiste esencialmente en "dar la vuelta" o "revertir" la dirección de todas las conexiones de la relación original.

**Definición formal:** Sea  $R \subseteq A \times B$  una relación entre los conjuntos  $A$  y  $B$ . La relación inversa de  $R$ , denotada como  $R^{-1}$  invierte el orden de todos los pares ordenados de  $R$ , esto es:

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

## Propiedades útiles

1. Doble inversa:  $(R^{-1})^{-1} = R$
  2. Intercambio del dominio y rango:

$$\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R), \quad \text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R),$$

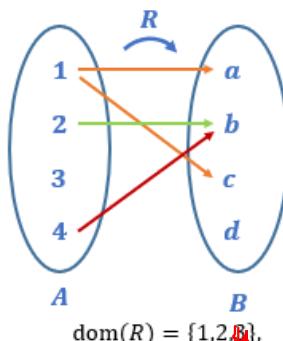
3. Si  $R$  es una relación sobre un mismo conjunto  $A$ , entonces  $R^{-1} \subseteq A \times A$ , también es una relación sobre  $A$

## Ejemplo 7

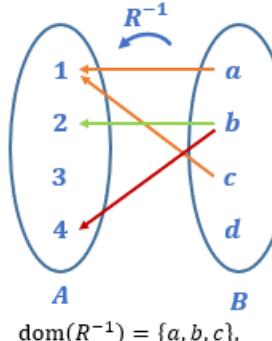
Suponga que tiene los siguientes conjuntos y la relación  $R$  dada por:

- **Conjunto de ~~llegadas~~**:  $A = \{1, 2, 3, 4\}$
  - **Conjunto de ~~partidas~~**:  $B = \{a, b, c, d\}$
  - **Relación**:  $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (4, b)\}$

Determine la relación inversa y obtenga el dominio y rango de esta:



R	a	b	c	d
1	X		X	
2			X	
3				
4			X	



R <sup>-1</sup>	1	2	3	4
a	X			
b		X		X
c	X			
d				

### Ejemplo 8

Sea  $A = \{2,3,4\}$  y  $B = \{2,6,8\}$  y sea  $R$  la relación "divide" de  $A$  a  $B$ . Para toda  $(x,y) \in A \times B$ ,

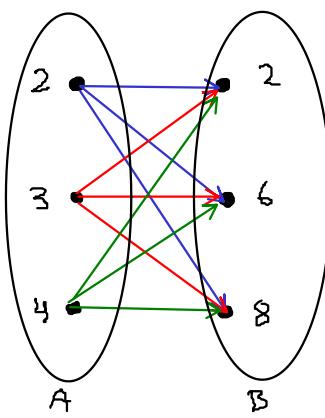
$$x R y \Leftrightarrow x|y \quad x \text{ divide } y$$

$y \geq x$

- Establezca explícitamente que pares ordenados están en  $R$  y  $R^{-1}$  y dibuje los diagramas de flechas para  $R$  y  $R^{-1}$ .
  - Describa  $R^{-1}$  en palabras.

a.  $R = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, x \mid y\}$

$$A \times B = \{(2,2), (2,6), (2,8), (3,2), (3,6), (3,8), (4,2), (4,6), (4,8)\}$$

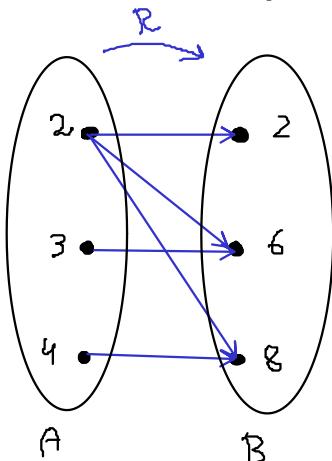


$$A = \{2, 3, 4\}$$

$$B = \{2, 6, 8\}$$

$$R = \{(2,2), (2,6), (2,8), (3,6), (4,8)\}$$

$a$	$b$
2	2
2	6
2	8
3	6
4	8

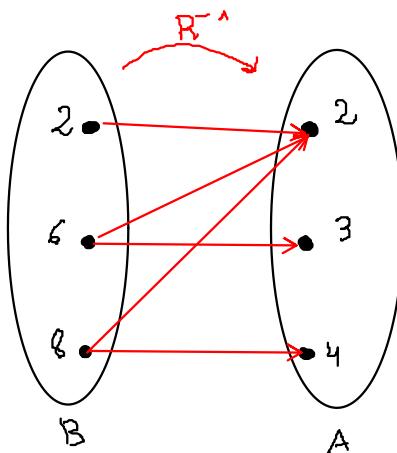


$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

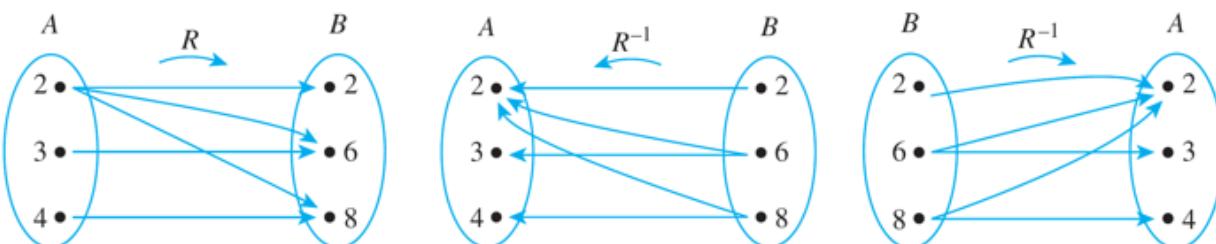
$$R^{-1} = \{(b,a) | (a,b) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(2,2), (6,2), (8,2), (6,3), (8,4)\}$$

$b$	$a$
2	2
6	2
8	2
6	3
8	4



$$M_{R^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



## Relación identidad

Esta es una relación que solo relaciona cada **elemento consigo mismo**, y con ningún otro.

**Definición formal:** Dado un conjunto  $A$ , la relación identidad  $A$ , denotada como  $I_A$ , es el conjunto de todos los pares ordenados donde cada elemento está relacionado consigo mismo, esto es:

$$I_A = \{(x, y) | x \in A \wedge x = y\}$$

### Ejemplo:

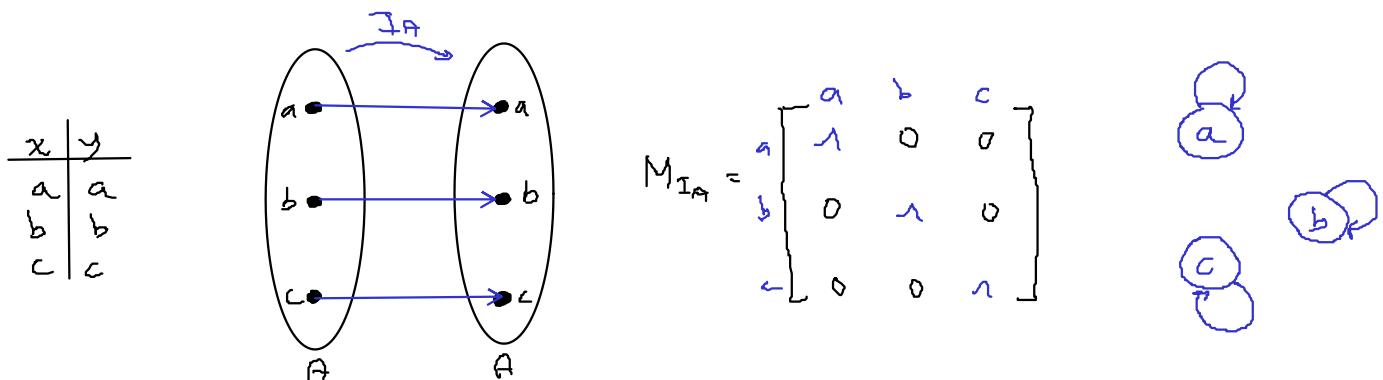
Sean los conjuntos  $A = \{a, b, c\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$ , obtenga la relación identidad para cada uno:

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$I_B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$\rightarrow R_1 = I_A = \{(x, y) | x \in A, y = x\} \quad A = \{a, b, c\}$$

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$



$$\rightarrow R_2 = I_B = \{(x, y) | x \in B, y = x\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$I_B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

