

0. Sobre las evaluaciones

Semana Clase	13	14	15	16	17		Parciales	S (Último tema)
	M	J	M	J	M	J		
	M6	M11 M13 M18 M20	M7 M12 M25 M27	M	D2	D4	P1 P2 P3	P4

1. Conjuntos (Tema anterior)

Conjunto: Agrupación de elementos

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

- El orden no importa
- No hay elementos repetidos

$$A = \{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

$$A = \{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

Ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$

Seguimiento

$$B = \{3, 3, 2, 2, 1\} = \{3, 2, 1\}$$

$$A = B? : \text{Verdadero} \checkmark$$

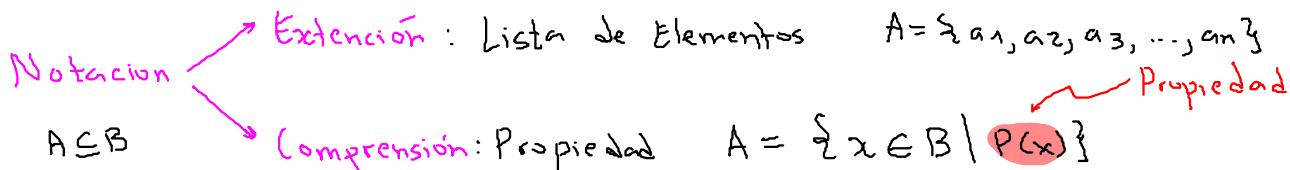
$$C = \{1, 2, 4\}$$

$$A = C? : \text{Falso} \checkmark \quad (A \neq C)$$

Ejemplos:

- Los números enteros
- Los 10 primeros números positivos
- Los íconos de Nacional

Representaciones



Ejemplo

- Los números enteros: $U = \mathbb{Z}$

$$U = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

- Enteros positivos entre 1 y 10 incluidos

* R. extensión: $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

* R. comprensión: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\}$

- Clasificación de los conjuntos:

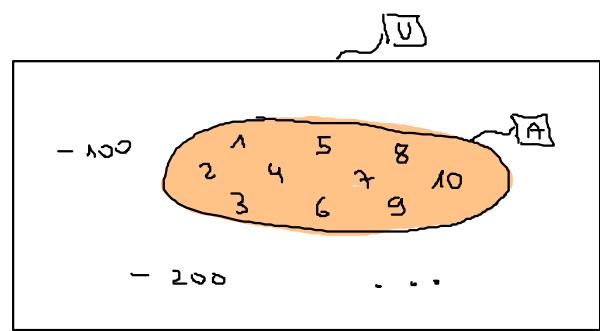
1. Vacío
2. Unitario

3. Finito
4. Infinito

5. Universal (contexto)
6. Homogéneo

7. Heterogéneo

Representación gráfica:
Diagrama de Venn



- **Cardinalidad:** Número de elementos de un conjunto

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \longrightarrow |A| = n(A) = n$$

Para el ejemplo que estabas viendo:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 10\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\} \longrightarrow |A| = n(A) = 10$$

- **Conjunto potencia:**

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$

$$\text{Para el ejemplo: } |A| = 10 \longrightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^{10} = 1024$$

$$\mathcal{P}(A) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{10\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{9, 10\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \right\}$$

1024 subconjuntos

- **Relaciones entre conjuntos:** $=, \neq, \subseteq, \subset, \supset, \supseteq$

- **Operaciones entre conjuntos:** $\cup, \cap, -, \oplus, \circ$

- **Identidades**

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Comutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

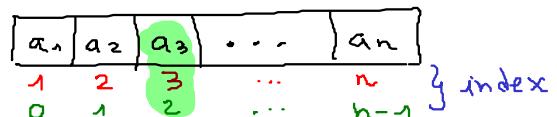
Nombre	Equivalencia
1	$ \emptyset = 0$
2	$A \cdot B = 0 \rightarrow A + B = A + B $
3	$ A + B = A + B - A \cdot B $
4	$ A - B = A - A \cdot B $
5	$ A \cdot B \leq A $
6	$ A \leq A + B $
7	$ A' = U - A $
8	$a \leq A \leq b \leftrightarrow U - a \leq A' \leq U - b$
9	$\text{Max}(A , B) \leq A + B \leq \text{Min}(A + B , U)$
10	$\text{Max}(0, A + B - U) \leq A \cdot B \leq \text{Min}(A + B)$

2. N-Tupla ordenada

Se cuencia de elementos:

1. Ordenadas (index) ✓ : $A = (1, 2, 3, 4)$
2. Finita ✓ : $A = (1, 2, 3, 4)$
3. Permite repeticiones : $A = (1, 1, 2, 3)$
4. Los elementos pueden ser del mismo o diferente tipo: $A = (1, 2, 3, 4)$

$$A = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$



python →

Importante: Podemos representar lo que queramos

No me
sintomas



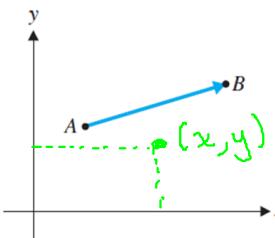
$$J = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \text{camión})$$

$$J = ("bebé", "bola", "pateta", "carrito")$$

$$B = ("kikó", 10)$$

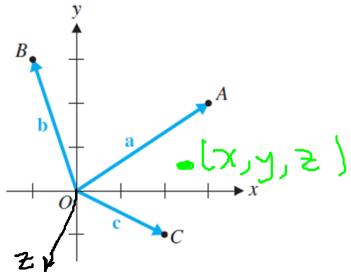
Ejemplos:

2-Tuples



For : (x, y)

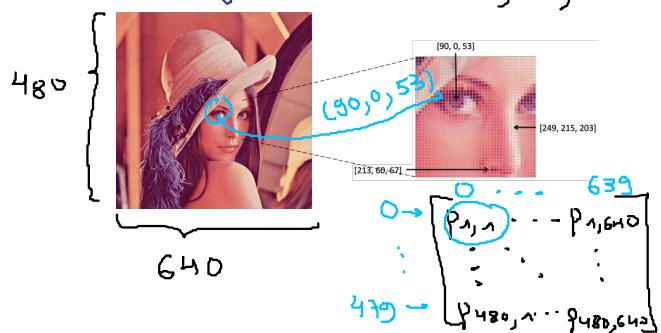
3-tupls



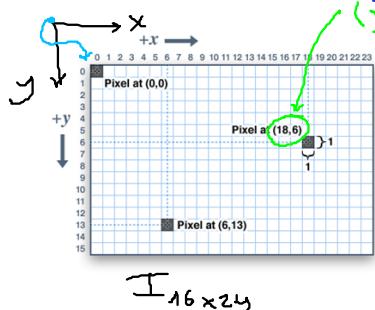
Ternär: (x, y, z)

Casos de aplicación

Imagen RGB (R, G, B)



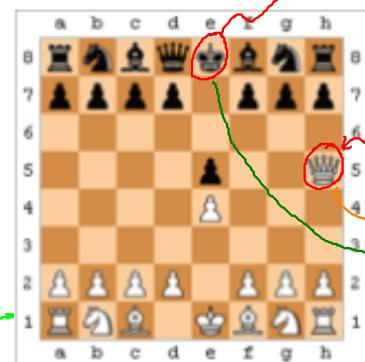
Posición de un pixel en una imagen



Representación de una fecha $\stackrel{z \rightarrow 2}{\sim}$ Posición

The diagram shows a box labeled "Fact" containing the text "Fact elements". A red arrow labeled "mess = " points from the box to a green circle labeled "(dim) fact". From this circle, two blue arrows point down to the text "3-Tupl" and "1, 6, 2025". Below these, another blue arrow points to a set labeled "diags = { 1, ..., 3, ... }".

Posición de una pieza



B = Blanco
N = Negro

$$\begin{aligned} \text{Filas} &= \{1, 2, \dots, q\} \\ \text{Columnas} &= \{a, b, \dots, h\} \end{aligned}$$

$$\text{piece} = \{P, J, A, T, Q, K\}$$

$$\text{color} = \{B, N\}$$

Registro de Una tabla

Estudiantes			
A ID	B Nombre	C Apellido	D Semestre
205	Sofia	Garcia	3
113	Mateo	Rojas	4
451	Sofia	Torres	3

(205, "Sofia", "Garcia", 3)

$\mathbb{P} = (a_1, b_1, c_1, d)$

4-Tupla (ID , nombre, apellido, semestre)
ATA BCB CCC DED

3. Producto cartesiano

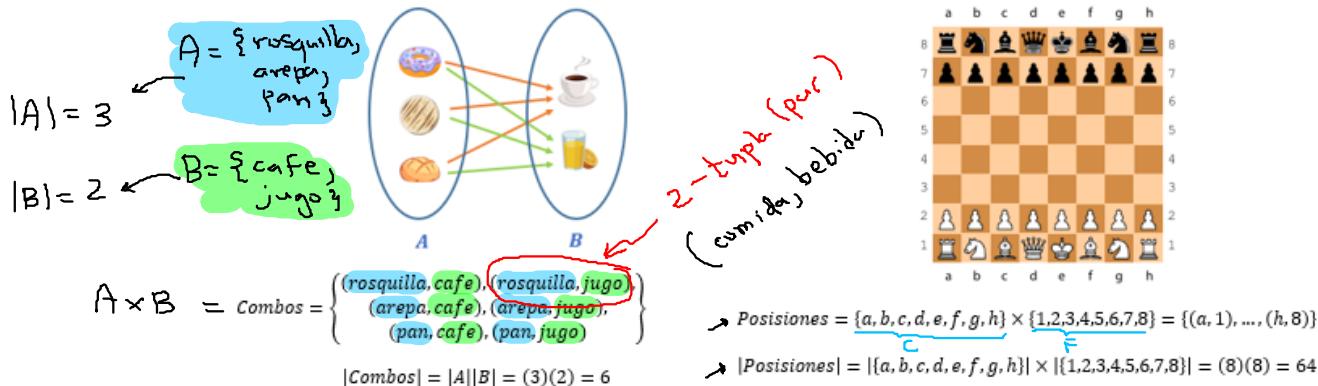
Conjunto de todas las posibles parejas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$ lo cual se denota formalmente (de diferentes maneras como) como:

generalización a n conjuntos
 $A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

Cardinalidad

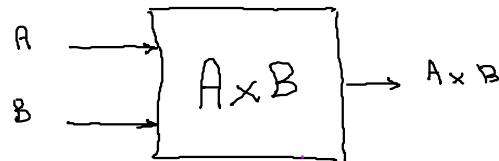
$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, n\} \quad |A_1 \times \dots \times A_n| = |A_1| \times \dots \times |A_n|$$



$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

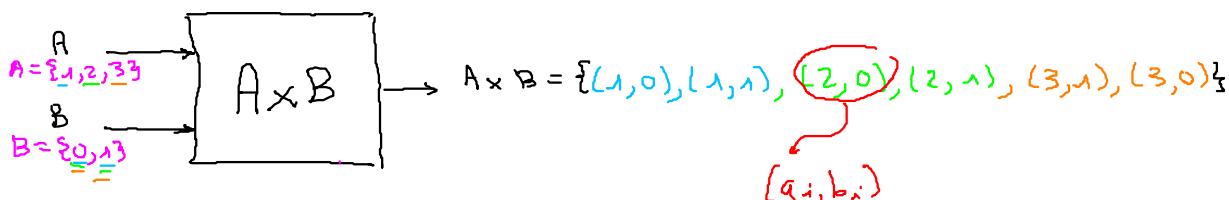
Cardinalidad: $(A \times B) = |A| |B|$



Ejemplo: Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$ obtenga:

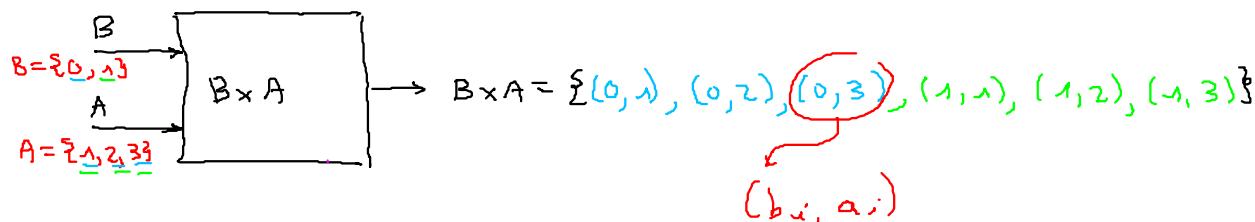
- a. $A \times B$
- b. $|A \times B|$
- c. $B \times A$
- d. $|B \times A|$

a. $A \times B$



$$\text{b. } |A \times B| = |A| |B| = (3)(2) = 6$$

c. $B \times A =$



$$\text{d. } |B \times A| = |B| |A| = (2)(3) = 6$$

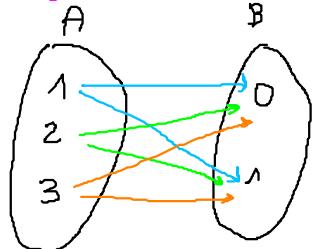
4. Algunas representaciones para los productos cartesianos

Retomemos el ejemplo: $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{0, 1\}$

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$$

lista de elementos

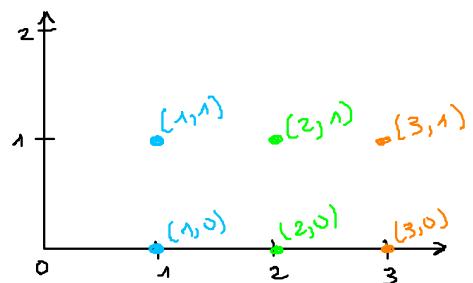
i. Diagrama de flechas



ii. Tabla

(a, b)	
a	b
1	0
1	1
2	0
2	1
3	0
3	1

iii. Plano cartesiano



5. Funciones: Ya se ha visto bastante en calculo pero retomemos un poco.

Definición

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A a B es una **regla** que asigna a **cada** elemento de A **exactamente un** elemento de B . Esto se escribe como:

$$f: A \rightarrow B$$

Una función $f: A \rightarrow B$ también puede definirse como un subconjunto de $A \times B$ (una relación). Este subconjunto está restringido a una relación donde ningún par de elementos de la relación tiene el mismo primer elemento.

$$f = \{(a, b) \in A \times B \mid \text{a cada } a \in A \text{ le corresponde un único } b \in B\}$$



Dirichlet ([link](#))

Esto se denota comúnmente como:

$$f(a) = b$$

Resaltando que b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a de A .

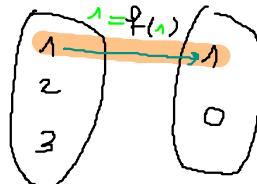


Elija de $A \times B$ solo aquellos elementos donde el primer el elemento son iguales:

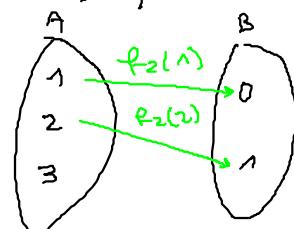
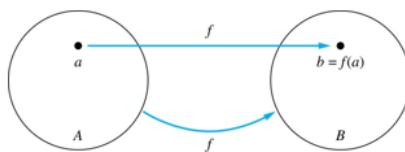
$$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}$$

$$f = \{(1, 1)\}$$

$$f = \{(a, b) \in A \times B \mid a = b\}$$



$$f_2 = \{(a, b) \mid |a - b| = 1\}$$



Dominio y rango

Al dar una función $f: A \rightarrow B$ nosotros estamos diciendo f mapea (asigna) A a B o que f es un mapeo (asignación) de A a B .

Dominio:

- Conjunto de todos los elementos de entrada
- Dominio de la función:
 - $D(f) = A$
 - $\text{Dominio}(f) = A$

Rango:

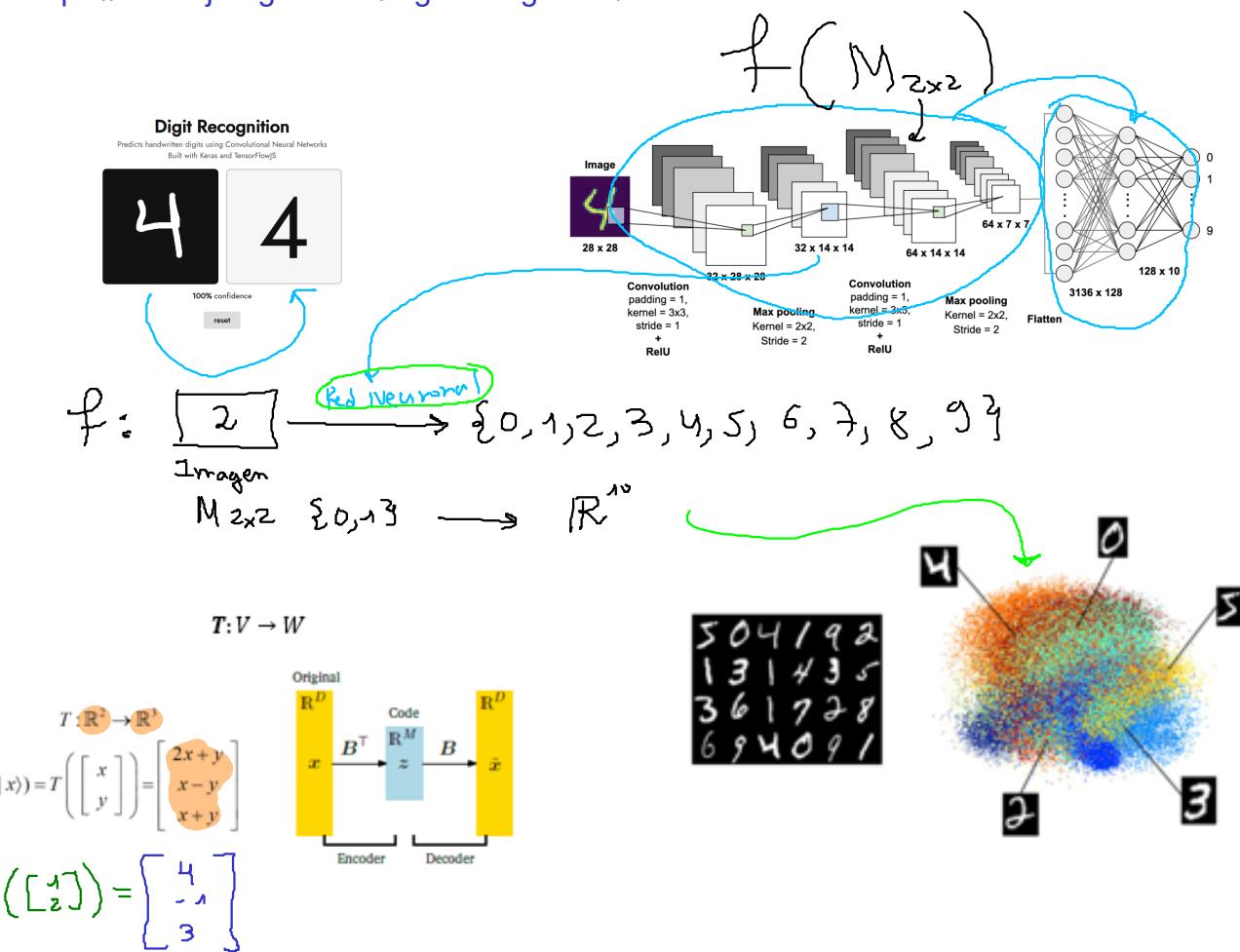
- Conjunto de todos los valores de salida o resultados posibles que genera la función
- Rango de la función:
 - $R(f) = A$
 - $\text{Rango}(f) = A$

- Dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio, el mismo rango y asignan cada elemento del dominio al mismo elemento del rango.

Ejemplo de Aplicación: Sistema OCR

<https://github.com/balkarjun/digit-recognition/tree/master/model>

<https://balkarjun.github.io/digit-recognition/>



<https://developers.google.com/ml-kit?hl=es-419>

Aprendizaje automático destinado a apps para dispositivos móviles

ML Kit ofrece la experiencia de aprendizaje automático de Google móviles en un paquete potente y fácil de usar. Haz que tus apps sean más útiles con soluciones optimizadas para ejecutarse en dispositivos.

Comenzar

Representación de funciones

Las funciones pueden ser representadas de diferentes maneras:

1. **Descripción Verbal:** Una declaración explícita de la tarea.
2. **Tabla de valores:** Se crea una tabla con dos columnas. Una columna para los valores de entrada (dominio) y otra para los correspondientes valores de salida (rango).
3. **Representación Algebraica (Formula):** Usa una ecuación algebraica para definir la relación precisa entre la entrada (x) y la salida ($f(x)$ o y).
4. **Diagrama de flechas (mapeo):** Se dibujan dos conjuntos (generalmente óvalos), uno para el dominio y otro para el rango, y se usan flechas para conectar cada entrada con su única salida.
5. **Plano cartesiano:** Se representan los pares ordenados $(x, f(x))$ como puntos en un plano con un eje horizontal (eje x) para el dominio y un eje vertical (eje y) para el rango.
6. **Conjunto de Pares Ordenados:** Es una lista explícita de los valores de entrada y su correspondiente salida
7. **Programa de computador:** Se define una subrutina que toma unas entradas, aplica un procedimiento y devuelve una salida como resultado de dicho procedimiento.

Clasificación

Los siguientes ejemplos ilustran algo de la amplia variedad de diferentes tipos de funciones.

- Función floor y ceiling.
- Función factorial
- Función identidad sobre un conjunto
- Sucesiones.
- Una función definida sobre un conjunto potencia.
- Funciones definidas sobre un producto cartesiano
- Funciones de codificación y decodificación.
- La función de distancia de Hamming.
- Funciones booleanas.

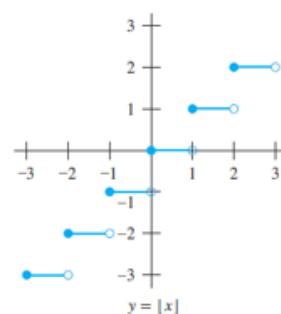
Función piso (Floor)

La función piso de un número real x , denotada como $\lfloor x \rfloor$ (o también `floor(x)`), devuelve el mayor entero que es menor o igual a x . En otras palabras, "redondea" x hacia abajo al entero más cercano. Formalmente esto es:

$$\lfloor x \rfloor = \text{el mayor entero } n \text{ tal que } n \leq x$$

Ejemplos: A continuación la grafica de la función piso así como la evaluación de esta para algunos valores.

x	$\lfloor x \rfloor$
$-\frac{1}{2}$	$\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor -0.5 \rfloor = -1$
-0.1	$\lfloor -0.1 \rfloor = -1$
$\frac{1}{2}$	$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$
2.1	$\lfloor 2.1 \rfloor = 2$



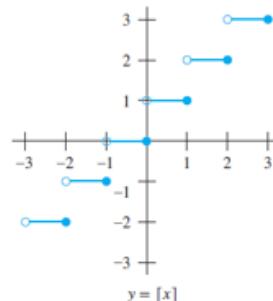
Función techo (ceil)

La función techo de un número real x , denotada como $\lceil x \rceil$ (o también $\text{ceil}(x)$), devuelve el mayor entero que es mayor o igual a x . En otras palabras, "redondea" x hacia arriba al entero más cercano. Formalmente esto es:

$$\lceil x \rceil = \text{el mayor entero } n \text{ tal que } n \geq x$$

Ejemplos: A continuación la grafica de la función techo así como la evaluación de esta para algunos valores.

x	$\lceil x \rceil$
$-\frac{1}{2}$	$\lceil -\frac{1}{2} \rceil = \lceil -0.5 \rceil = 0$
-0.1	$\lceil -0.1 \rceil = 0$
$\frac{1}{2}$	$\lceil \frac{1}{2} \rceil = \lceil 0.5 \rceil = 1$
2.1	$\lceil 2.1 \rceil = 1$



Sucesiones

Una sucesión es una lista ordenada de elementos (o términos). A diferencia de los conjuntos, donde el orden no importa y los elementos no se repiten, en una secuencia el orden es crucial y los elementos pueden repetirse.

Notación: Existen de representar sucesiones, algunas son:

1. **Listado de términos:** Empleado para secuencias finitas o para mostrar los primeros términos de una secuencia infinita:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

2. **Fórmula explícita:** Se usa fórmula que define el n -ésimo término a_n en función de n , esto es: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ o $\{a_n\}$

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

3. **Relación de recurrencia:** Una fórmula que define un término de la secuencia en función de uno o más términos anteriores. Necesita uno o más condiciones iniciales (**casos base**).

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F_{n-1} - F_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Sucesión

Ejemplos: La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de sucesiones:

Nombre	Formula general $\{a_n\}$	Primeros términos	Observaciones
Constante	$a_n = c$	3, 3, 3, 3, ...	La constante $c = 3$
Aritmética	$a_n = a_0 + nd$	2, 5, 8, 11, 14, ...	El término $a_0 = 2$ y la constante $d = 3$.
Geométrica	$a_n = a_0 \cdot r^n$	1, 2, 4, 8, 16, ...	El término $a_0 = 1$ y la razón $r = 2$.
Cuadrática	$a_n = n^2$	0, 1, 4, 9, 16, ...	Los términos son cuadrados perfectos
Cúbica	$a_n = n^3$	0, 1, 8, 27, 64, ...	Los términos son cubos perfectos
Pares	$a_n = 2n$	0, 2, 4, 6, 8, ...	Los términos son números pares
Impares	$a_n = 2n + 1$	0, 1, 3, 5, 7, ...	Los términos son números impares
Fibonacci	$a_0 = 0, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	Cada término es la suma de los dos anteriores
Factorial	$a_n = n!$	1, 1, 2, 3, 24, 120, 720, ...	Cada término es el producto de todos los enteros positivos con $\leq n$
Alternante signo	$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$	Cada término alterna el signo
Binaria	$a_n = n \bmod 2$	0, 1, 0, 1, 0, ...	Cada término es 0 y 1

Para profundizar mas ver: [The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences \(OEIS\)](#) ([link](#))

Sumatoria

Una secuencia consiste en la suma de los términos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n de una secuencia $\{a_n\}$

Notación:

- La notación para una sumatoria se muestra a continuación:

$$\sum_{j=m}^n a_j = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

- Una representación mas generalizada para un conjunto S esta dada por:

$$\sum_{j \in S} a_j$$

Sumatoria

Ejemplo 1: Cual es el valor de $\sum_{k=4}^8 (-1)^k$

$$\sum_{k=4}^8 (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1$$

Ejemplo 2: Cual es el valor de $\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij = \sum_{i=1}^4 (1+2i+3i) = \sum_{i=1}^4 6i = 6(1) + 6(2) + 6(3) + 6(4) = 6(1+2+3+4) = 6(10) = 60$$

Ejemplo 3: Cual es el valor de $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Otra forma:

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 ij = \sum_{i=1}^4 i \sum_{j=1}^3 j = (1+2+3+4)(1+2+3) = 10 \cdot 6 = 60$$

Sucesión

Ejemplos: La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de sucesiones:

Expresión	Formula cerrada
$\sum_{i=1}^n c$	nc
$\sum_{i=1}^n i$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=1}^n (a_i + (i-1)d)$	$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Expresión	Formula cerrada
$\sum_{i=0}^n ar^i$	$a \frac{r^n - 1}{r - 1}$ ($r \neq 1$)
$\sum_{i=0}^n ar^{i-1}$	$a \frac{r^n - 1}{r - 1}$ ($r \neq 1$)
$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$	$\frac{a}{1-r}$ ($ r < 1$)
$\sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1})$	$a_1 - a_{n+1}$

Productoria

Una secuencia consiste en el producto de los términos a_m, a_{m+1}, \dots, a_n de una secuencia $\{a_n\}$

Notación:

- La notación para una sumatoria se muestra a continuación:

$$\prod_{j=m}^n a_j = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$$

- Una representación mas generalizada para un conjunto S esta dada por:

$$\prod_{j \in S} a_j$$

Función identidad

La función identidad es una función que mapea cada elemento del conjunto a sí mismo. Definiendo esto mas formalmente, si A un conjunto no vacío, La función identidad sobre A denotada como id_A (I_A o 1_A), esta definida por:

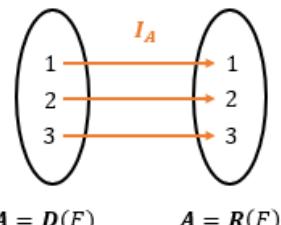
$$I_A: A \rightarrow A, \quad I_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

Ejemplo: Sea $A = \{1,2,3\}$, entonces

- $I_A(1) = 1$
- $I_A(2) = 2$
- $I_A(3) = 3$

Luego, la representación como pares ordenados de I_A será:

$$I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

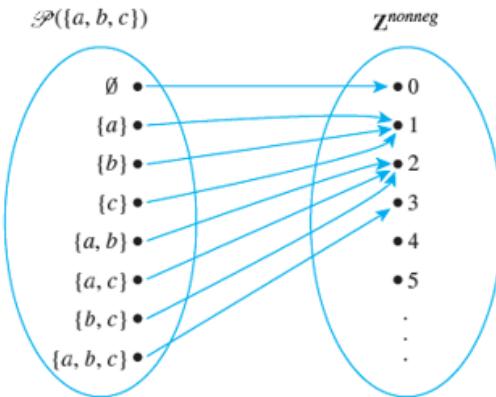


Función definida sobre un conjunto potencia

Previamente se vió que $\mathcal{P}(A)$ denota el potencia de un conjunto A . Suponiendo que se define la función $F: \mathcal{P}(\{a, b, c\}) \rightarrow \mathbb{N}$ como sigue para cada $X \in \mathcal{P}(\{a, b, c\})$,

$$F(X) = \text{numero de elementos en } X$$

Dibuje el diagrama de flechas para F y exprese F como pares de puntos.



$$F = \{(\emptyset, 0), (\{a\}, 1), (\{b\}, 1), (\{c\}, 1), (\{a, b\}, 2), (\{a, c\}, 2), (\{b, c\}, 2), (\{a, b, c\}, 3)\}$$

Función definida sobre un producto cartesiano

Se define funciones $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $R: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como sigue: para todos los pares de números reales (a, b) ,

$$M(a, b) = ab$$

$$R(a, b) = (-a, b)$$

Entonces M es la función multiplicación que envía cada par de números reales al producto de los dos y R es la función de reflexión que envía cada punto en el plano que corresponde a un par de números reales a la imagen espejo del punto a través del eje vertical. Tenemos:

- $M(-1, 1) = ? \rightarrow M(-1, 1) = (-1)(1) = -1$
- $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = ? \rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
- $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = ? \rightarrow M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$
- $R(2, 5) = ? \rightarrow R(2, 5) = (-2, 5) = (-2, 5)$
- $R(-2, 5) = ? \rightarrow R(-2, 5) = (-(-2), 5) = (2, 5)$
- $R(3, -4) = ? \rightarrow R(3, -4) = (-3, -4) = (-3, -4)$