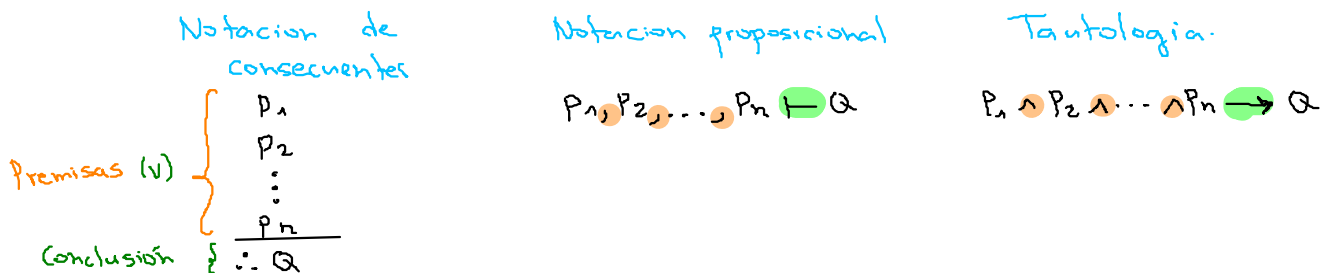
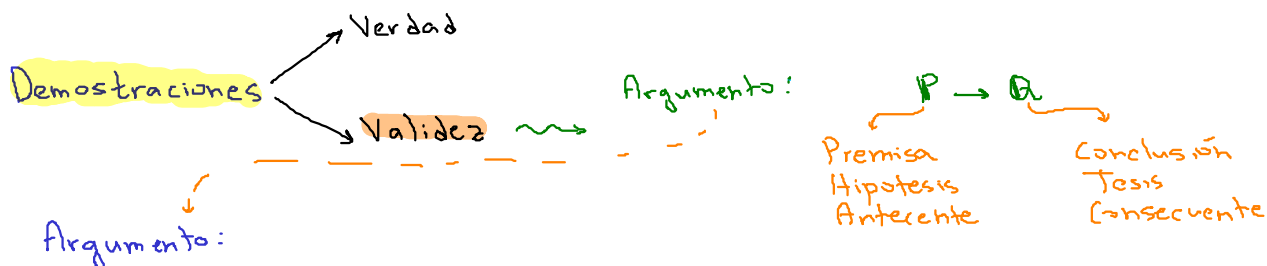
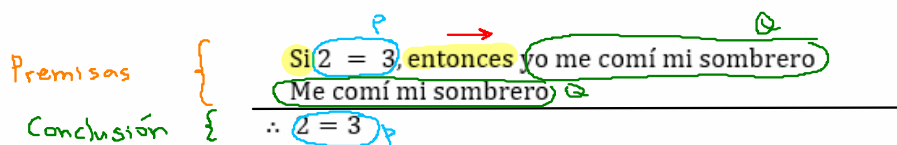


## 1. Repaso clase anterior



Demostración	Enfoque basado en Modelos	Enfoque axiomático
Verdad	Tabla de verdad: ✓ $A \leftrightarrow B$ es tautología	✓ $A \equiv B$ $A \equiv A_1$ $A_2$ $\vdots$ $B$ } Identidades lógicas
Validez	✓ Tabla de verdad $A \rightarrow B$ ↳ <b>Regiones críticas deben ser verdaderas</b>	* Lo veremos hoy...

**Ejemplo:** Represente el siguiente argumento simbólicamente y determine si es válido



## 1. Proposiciones simples

- P:  $2 = 3$
- Q: Yo me comí mi sombrero

## 2. Expresión lógica del Argumento.

Notación de consecuentes

$$\frac{P \rightarrow Q}{Q}$$

$$\therefore P$$

Notación Proposicional

$$P \rightarrow Q, Q \vdash P$$

Tautología

$$(P \rightarrow Q) \wedge Q \rightarrow P$$

### 3. Demostración de Validez (Tabla de Verdad)

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ Q \\ \hline \therefore P \end{array} \quad \begin{array}{l} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark \end{array}$$

i. Variables: P, Q

ii. filas:  $n=2 \rightarrow \text{filas} = 2^n = 2^2 = 4$

iii. Tabla de verdad

Premisas			conclusión	
P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	P
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0 x
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1 ✓

Renglon crítico

Por lo tanto el argumento es invalido

2. Enfoque axiomático: Usar:

1. Identidades lógicas (Tabla de axiomas)
2. Silogismos (Tabla de inferencias)

#### Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge V \equiv P$	$P \vee F \equiv P$
Dominación	$P \wedge F \equiv F$	$P \vee V \equiv V$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv F$	$P \vee \neg P \equiv V$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

#### Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$\frac{p \rightarrow q}{p} \therefore q$	Simplificación	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$
Modus Tollens	$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \therefore \neg p$	Conjunción	$\frac{p}{q} \therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	Prueba de división por casos	$\frac{p \vee q}{p \rightarrow r} \therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$		
Adición	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	Resolución	$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \therefore q \vee r$

## Ejemplo 1

**Ejemplo:** Demuestre que el siguiente argumento lógico es válido:

$$[p \wedge (p \rightarrow q) \wedge (s \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg q)] \rightarrow (s \vee t)$$

↖ Tautología

Notación de Consecuentes

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ s \vee r \\ \hline r \rightarrow \neg q \\ \therefore s \vee t \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Premisas} \\ \text{Conclusión} \end{array} \right\}$$

Notación Proposicional

$$p, p \rightarrow q, s \vee r, r \rightarrow \neg q \vdash s \vee t$$

## Demostración

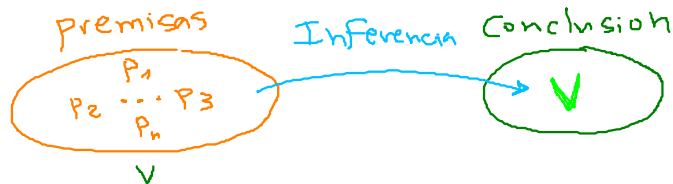
### Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge V \equiv P$	$P \vee F \equiv P$
Dominación	$P \wedge F \equiv F$	$P \vee V \equiv V$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv F$	$P \vee \neg P \equiv V$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarreciproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

### Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$\frac{p \rightarrow q}{p} \therefore q$	Simplificación	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$
Modus Tollens	$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \therefore \neg p$	Conjunción	$\frac{p}{\therefore p \wedge q}$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	Prueba de división por casos	$\frac{p \vee q}{p \rightarrow r} \therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$		$\frac{p \vee q}{q \rightarrow r} \therefore r$
Adición	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	Resolución	$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \therefore q \vee r$

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ s \vee r \\ \hline r \rightarrow \neg q \\ \therefore s \vee t \end{array} \quad \begin{array}{l} (a) \checkmark \\ (b) \checkmark \\ (c) \checkmark \\ (d) \checkmark \end{array}$$



### Procedimiento

### Justificación

- |   |                          |                        |
|---|--------------------------|------------------------|
| ① | $p$                      | Premisa (a)            |
| ② | $p \rightarrow q$        | Premisa (b)            |
| ③ | $q$ ✓                    | Modus ponens en ① y ②  |
| ④ | $r \rightarrow \neg q$ ✓ | Premisa (d)            |
| ⑤ | $\neg r$                 | Modus Tollens en ③ y ④ |
| ⑥ | $s \vee r$               | Premisa (c)            |
| ⑦ | $s$                      | Eliminación en ⑤ y ⑥   |
| ⑧ | $\therefore s \vee t$    | Adición en ⑦           |

$$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \therefore \neg p$$

$$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$$

Ejemplo 2: Demuestre que el siguiente argumento lógico es válido.

$$\frac{(P \rightarrow Q) \rightarrow R}{P} \therefore Q \rightarrow R$$

#### Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Commutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge V \equiv P$	$P \vee F \equiv P$
Dominación	$P \wedge F \equiv F$	$P \vee V \equiv V$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv F$	$P \vee \neg P \equiv V$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

#### Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$\frac{p \rightarrow q}{p} \therefore q$	Simplificación	$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$
Modus Tollens	$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \therefore \neg p$	Conjunción	$\frac{p}{\therefore p \wedge q}$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	Prueba de división por casos	$\frac{p \vee q}{p \rightarrow r} \therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$		
Adición	$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	Resolución	$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \therefore q \vee r$

$$\frac{(P \rightarrow Q) \rightarrow R}{P} \therefore Q \rightarrow R$$

#### Procedimiento

- $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
- $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$
- $\neg(\neg P \vee Q) \vee R$
- $(P \wedge \neg Q) \vee R$
- $R \vee (P \wedge \neg Q)$
- $(R \vee P) \wedge (R \vee \neg Q)$
- $R \vee \neg Q$
- $\neg Q \vee R$
- $\therefore Q \rightarrow R$

#### Justificación

- Premisa (a)
- Implicación en (1)  $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
- Implicación en (2)
- Ley de Morgan en (3) para la disyunción ( $\vee$ )
- Commutatividad en (4) para la disyunción ( $\vee$ )
- Distributividad en (5) para la disyunción ( $\vee$ )
- Simplificación en (6)  $\frac{p \wedge q}{\therefore p}$
- Commutatividad en (7) para la disyunción
- Implicación en (8) ( $\Leftarrow$ )

Equivalencias lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge V \equiv P$	$P \vee F \equiv P$
Dominación	$P \wedge F \equiv F$	$P \vee V \equiv V$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv F$	$P \vee \neg P \equiv V$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Principales reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$\frac{p \rightarrow q}{p} \therefore q$	Simplificación	$\frac{p \wedge q}{p} \therefore p$
Modus Tollens	$\frac{p \rightarrow q}{\neg q} \therefore \neg p$	Conjunción	$\frac{p}{q} \therefore p \wedge q$
Silogismo Hipotético (Transitividad)	$\frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} \therefore p \rightarrow r$	Prueba de división por casos	$\frac{p \vee q}{p \rightarrow r} \therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$\frac{p \vee q}{\neg p} \therefore q$		
Adición	$\frac{p}{p \vee q} \therefore p \vee q$	Resolución	$\frac{p \vee q}{\neg p \vee r} \therefore q \vee r$