24/06/2025 - Matematicas Discretas (P: MJ 8-10 | Vdc@: MJ 10-12, WV 14-16)

1. Conceptos preliminares

a. Conjuntos: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

b. n-Tuplas: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

c. Producto cartesiano: $A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B \}$

d. Funciones: $f = \{ (a,b) \in A \times B \mid$ para cada a en A le corresponde un unico b en $B \}$

e. Relaciones: $R = \{ (a,b) \mid a \in A, b \in B, P(a,b) \}$

Representaciones:

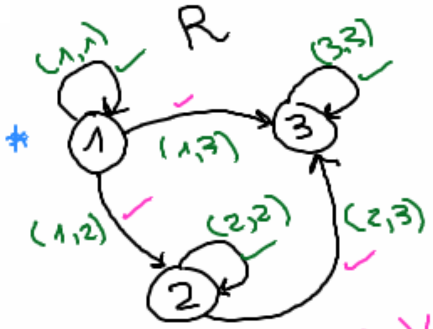
1. Par ordenado (Representacion por extención)
2. Tabla
3. Matriz de adyacencia
4. Grafo dirigido.

Propiedades:

2. Relaciones de Orden

Característica	Relación de Orden Parcial	Relación de Orden Total
Definición	Una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.	Un orden parcial que además cumple la propiedad de totalidad (todo es comparable).
Propiedades	1. Reflexividad ✓ 2. Antisimetría ✓ 3. Transitividad ✓	1. Reflexividad ✓ 2. Antisimetría ✓ 3. Transitividad ✓ 4. Totalidad (o Conexidad) ✓
Comparabilidad	No se exige que todo par de elementos sea comparable entre sí. Pueden existir elementos "incomparables".	Se exige que absolutamente todo par de elementos sea comparable. Para cualquier x, y, o $x \leq y$ o $y \leq x$.
Ejemplo clásico	La relación **"es subconjunto de"** ($\subseteq$) sobre conjuntos.	La relación **"menor o igual que"** ($\leq$) sobre los números reales
Diagrama de Hasse	Puede tener una estructura compleja con múltiples ramas y elementos en el mismo nivel.	Es siempre una **cadena vertical simple**, sin ninguna ramificación.
Analogía	Las dependencias entre tareas de un proyecto (algunas tareas pueden hacerse en paralelo, son incomparables en orden).	Las palabras en un diccionario (siempre se puede decir qué palabra va antes).

$G = (V, E)$



$$*R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\cdot\, G = (V, E)$

$\rightarrow V = \{1, 2, 3\}$

$\rightarrow E = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$

Ejemplo 1: Dados los siguientes vértices y aristas, grafique el dígrafo asociado:

- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $E = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, c), (c, b), (a, d), (a, e), (e, b), (a, b), (b, d), (d, e)\}$

$G = (V, E)$

$E \rightarrow$ Edges (Aristas)

$V \rightarrow$ Vertices (Nodos)

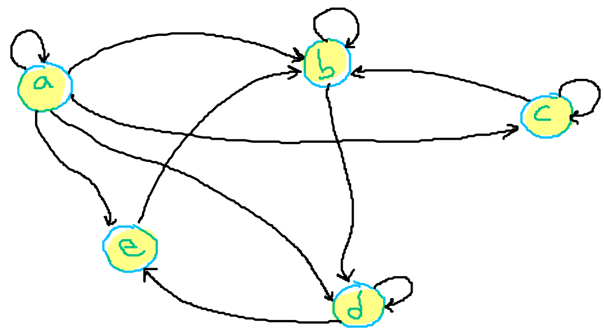
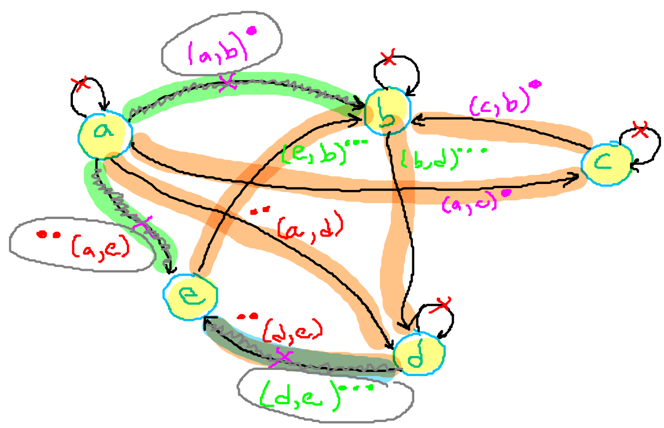
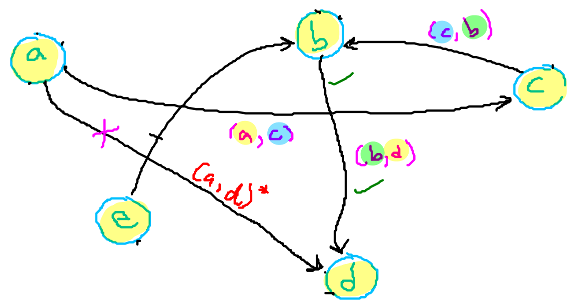


Diagrama de Hasse

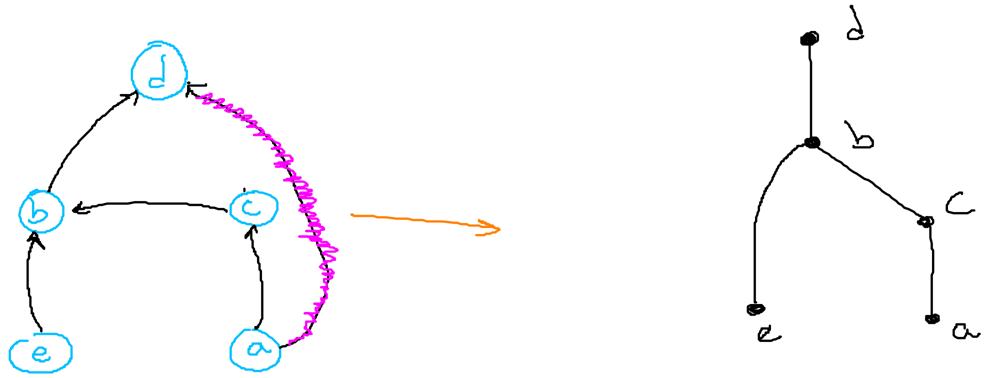
Para construir un diagrama de Hasse a partir de un grafo dirigido, siga estos pasos:

1. **Eliminar los bucles**: Elimine los bucles (x, x) presentes en cada vértice ya que representan la **reflexividad**, que se da por supuesta..
2. **Eliminar las aristas transitivas**: Elimine todas las aristas (x, y) para las que exista un elemento $z \in S$ tal que $x \prec z \prec y$.
3. **Organizar verticalmente**: dibuje cada arista de modo que su vértice inicial quede debajo del vértice terminal. Finalmente, elimine las flechas, ya que en un diagrama de Hasse todas las aristas se entienden como orientadas hacia arriba.





$*(a,d)$ — $(a,c), (c,b), (b,d)$



Ejemplo 4: Sea el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y las relaciones de orden previamente analizadas:

- **Relación de orden parcial**: $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\}$
- **Relación de orden total**: $R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

Obtenga el diagrama de Hasse para cada caso y compare.

Relacion R_1 :

$G_1 = (V_1, E_1)$ $\rightarrow V_1 = A = \{1, 2, 3\}$

$\rightarrow E_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3)\}$

Digrafo:

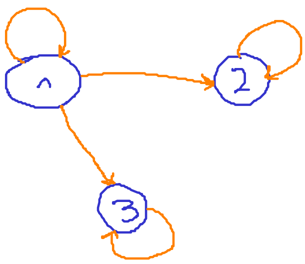
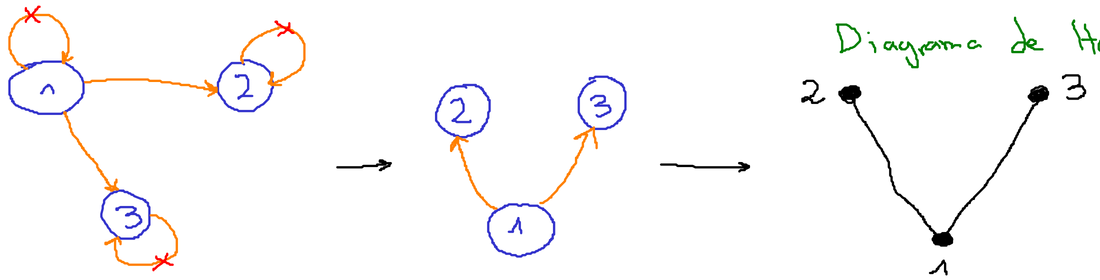


Diagrama de Hasse

Diagrama de Hasse



Relacion R_2 :

$G_2 = (V_2, E_2)$ $\rightarrow V_2 = A = \{1, 2, 3\}$

$\rightarrow E_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3)\}$

Digrafo:

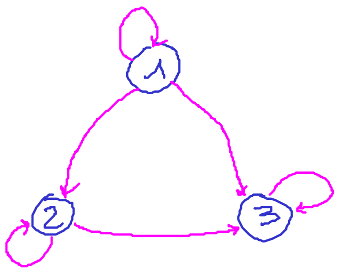


Diagrama de Hasse

Diagrama de Hasse