

1. Repaso

Relaciones entre conjuntos

Relación	Expresión en términos de subconjuntos
Igualdad	$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
Diferencia	$A \neq B \Leftrightarrow (A \not\subseteq B) \vee (B \not\subseteq A)$
Subconjunto propio	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$

Identidades básicas de conjuntos

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Comutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación		$A'' = A$
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Identidades básicas de cardinalidad

Nombre	Equivalencia
1	$ \emptyset = 0$
2	$A \cdot B = 0 \rightarrow A + B = A + B $
3	$ A + B = A + B - A \cdot B $
4	$ A - B = A - A \cdot B $
5	$ A \cdot B \leq A $
6	$ A \leq A + B $
7	$ A' = U - A $
8	$a \leq A \leq b \Leftrightarrow U - a \leq A' \leq U - b$
9	$\text{Max}(A , B) \leq A + B \leq \text{Min}(A + B , U)$
10	$\text{Max}(0, A + B - U) \leq A \cdot B \leq \text{Min}(A + B)$

Operaciones entre conjuntos

Representación por comprensión.

Operación	Definición
Unión	$A \cup B = A + B = \{x x \in A \vee x \in B\}$
Intersección	$A \cap B = A \cdot B = \{x x \in A \wedge x \in B\}$
Diferencia	$A - B = \{x x \in A \wedge x \notin B\}$
Diferencia simétrica	$A \oplus B = \{x (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
Complemento	$A' = A^C = \bar{A} = \{x x \notin A\}$

2. Demostración de identidades entre conjuntos

i. Demostración por doble inclusión

$$\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \overbrace{\quad\quad\quad}^{\textcircled{2}} \\ A = B \\ \textcircled{1} \quad A \subseteq B \quad \checkmark \\ \textcircled{2} \quad B \subseteq A \quad \checkmark \\ \hline \therefore A = B \end{array}$$

Operación	Definición
Unión	$A \cup B = A + B = \{x x \in A \vee x \in B\}$
Intersección	$A \cap B = A \cdot B = \{x x \in A \wedge x \in B\}$
Diferencia	$A - B = \{x x \in A \wedge x \notin B\}$
Diferencia simétrica	$A \oplus B = \{x (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
Complemento	$A' = A^C = \bar{A} = \{x x \notin A\}$

No vamos a profundizar en este método.

ii. Métodos de reescritura Algebraica

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Commutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Ejemplos:

1. Demostrar que $A \cdot A = A$ (Idempotencia para la \cdot)

$$\textcircled{1} \quad \underline{\underline{A \cdot A = A}}$$

Operación Justificación
1 A Premisa

2 $A \cdot 1$ Identidad para \cdot en (1)

3 $A \cdot (A + A')$ Complemento para \cdot en (2)

4 $A \cdot A + A \cdot A'$ Distributiva para \cdot en (3)

5 $A \cdot A + 0$ Complemento para \cdot en (4)

6. $\therefore A \cdot A$ Identidad para \cdot en (5)

Nombre	\wedge	Equivalencia	\vee
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$	
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$	
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$	
Commutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$	
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$	
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$	
Doble negación	$A'' = A$		
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$	
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$	

2. Demostrar que $(A \rightarrow B) \cdot A = A$

$$\underline{(A \rightarrow B) \cdot A = A}$$

#	Operación	Justificación
1.	$(A \rightarrow B) \cdot A$	Premisa
2.	$A \cdot A + B \cdot A$	Distributiva para \wedge en (1)
3.	$A + B \cdot A$	Idempotencia para \wedge en (2)
4.	$A \cdot (A + B)$	Factor común en (3) (Distributiva de \rightarrow para \wedge en (3))
5.	$A \cdot 1$	Dominación para \vee en (4)
6.	$\therefore A$	Identidad para \wedge en 5

Nombre	\cap	Equivalencia	\cup
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$	
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$	
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$	
Commutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$	
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$	
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$	
Doble negación		$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$	
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$	

iii. Tablas de pertenencia.

$$\underline{\underline{(A \rightarrow B) \cdot A = A}}$$

1. $n = 2$ (Variables: A, B)

2. Filas: $f = 2^n = 2^2 = 4$

3. Tabla

$$(A \rightarrow B) \cdot A = A$$

A	B	$A \rightarrow B$	\cap	$(A \rightarrow B) \cdot A$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Iguales: Por lo tanto

$$(A \rightarrow B) \cdot A = A \checkmark$$