20/05/2025 - Matemáticas Discretas 1 (UdeA | MJ 10-12)

1. Repaso clase anterior

(1) Prioridades:
1. $\exists \ \forall$
2. $\neg$
3. $\wedge$
4. $\vee$
5. $\rightarrow$
6. $\leftrightarrow$

$$\forall x\, P(x) \wedge Q(x) \equiv \forall x\, (P(x)) \wedge Q(x)$$

(2) Algunas equivalencias:

1. $\forall x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg\neg P(x)$
2. $\exists x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg\neg P(x)$
3. $\neg \forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ $\quad (\neg\forall \equiv \exists)$
4. $\neg \exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$ $\quad (\neg\exists \equiv \forall)$

(3) Anidamiento:

1. $\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$
2. $\exists x \exists y\, P(x,y) = \exists y \exists x\, P(x,y)$
3. $\forall x \exists y\, P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\, P(x,y)$

(4) Lenguaje Natural $\longrightarrow$ Lógica de predicados

Formas aristotélicas

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo**: Todos los hombres son mortales. **Expresión**: $\forall x(hombre(x) \rightarrow mortal(x))$
Forma E: Universal afirmativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo**: Ningún cuadrado es circulo. **Expresión**: $\forall x(cuadrado(x) \rightarrow \neg circulo(x))$
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo**: Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión**: $\exists x(estudiante(x) \wedge ingeniero(x))$
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(\cancel{S(x) \wedge P(x)})$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo**: Algún pájaro no vuela. **Expresión**: $\exists x(pajaro(x) \wedge \neg vuela(x))$

$\exists x\,(S(x) \wedge \neg P(x))$

2. Cuantificadores anidados.

Alcance : $\forall x\, (E(x) \rightarrow \underbrace{\exists y\, (\overbrace{L(y) \wedge Lee(x,y)}^{y,\,x})}_{x})$

$\Updownarrow$

Contexto

$$-\underbrace{(x + y - \overbrace{(2+3)}^{2})}_{1}$$

Ejemplo 1:

Usando los predicados

- $Persona(p)$: p es una persona
- $Ama(x, y)$: que indica que x ama a y,

$\forall$, $\exists$, $\exists!$

Escriba una oración en lógica de primer orden que signifique:

"Cada persona ama a alguien".

$\forall x$ $\neq$

U: cualquier cosa (...)

variables: $x, p, y, \dots$

Predicados: - Persona(x)
- Ama (x,y)

$\forall x$

① Cada persona ama a alguien

② Todas las personas aman a alguien

$\exists$

$\forall x \; (Persona(x) \rightarrow \text{Ama a alguien})$

③ Existe alguno amado por alguna persona

y x

$\exists y \; (Persona(y) \wedge ama(x,y) \wedge x \neq y)$

Expresión Final: $\forall x \; (Persona(x) \longrightarrow \exists y \; (Persona(y) \wedge ama(x,y) \wedge x \neq y))$

Ejemplo 2: Usando los predicados

- $Persona(p)$: p es una persona
- $Ama(x, y)$: que indica que x ama a y,

Escriba una oración en lógica de primer orden que signifique:

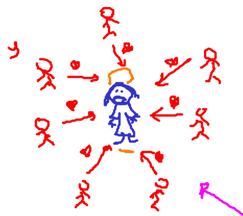
"hay una persona a la que todos los demás aman".

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x \; (S(x) \rightarrow P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo**: Todos los hombres son mortales. **Expresión**: $\forall x(hombre(x) \rightarrow mortal(x))$
Forma E: Universal afirmativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x \; (S(x) \rightarrow \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo**: Ningún cuadrado es circulo. **Expresión**: $\forall x(cuadrado(x) \rightarrow \neg circulo(x))$
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo**: Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión**: $\exists x(estudiante(x) \wedge ingeniero(x))$
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo**: Algún pájaro no vuela. **Expresión**: $\exists x(pajaro(x) \wedge \neg vuela(x))$

$\exists x$ $\forall y$ $ama(y, x)$? ?

Hay una persona a la que todos los demas aman

Persona(x) y



$\exists x \; (Persona(x) \wedge$ Esa persona es amada por todos los demas)

Todos aman a esa persona

Si es esa persona entonces todos la aman

$Persona(x) \wedge x \neq y \longrightarrow ama(y, x)$

$\exists x \; (Persona(x) \wedge \forall y \; (Persona(y) \wedge x \neq y \longrightarrow ama(y, x)))$

Ejemplo: Cual sería la expresión en lenguaje formal para: “Cada numero real tiene un inverso”.

- Dominio: $U = \mathbb{R}$
- Variables: $x \in \mathbb{R}$
  $y \in \mathbb{R}$
- Predicado: $P(x,y)$: x tiene un inverso

$P(x,y): x+y=0$

Cada numero real tiene un inverso

Para todo x, existe un y que es su inverso:

$$\forall x \exists y \, (P(x,y))$$

$$\forall x \exists y \, (x+y=0) = \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid (x+y=0)$$

Sobre cuantificadores anidados:

$$\forall x \forall y \, P(x,y) \equiv \forall y \forall x \, P(x,y)$$

$$\exists x \exists y \, P(x,y) \equiv \exists y \exists x \, P(x,y)$$

$$\forall x \exists y \, P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x \, P(x,y)$$