21/10/2025 - Matematicas Discretas 1 (UdeA)

1. Formulas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$ $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$
Silogismo hipotético (Transitividad)	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$		
Adición	p $\therefore p \vee q$	Resolución	$\neg p \vee r$ $p \vee q$ $\therefore q \vee r$

Nombre	Equivalencia lógica
Negación de cuantificadores (De Morgan cuántico)	$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$
Distributividad del cuantificador universal sobre la conjunción	$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
Distributividad (en un solo sentido) del cuantificador universal sobre la disyunción	$\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \to \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$
Distributividad del cuantificador existencial sobre la disyunción	$\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
Distributividad (en un solo sentido) del cuantificador existencial sobre la conjunción	$\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \to \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$
Distribución de cuantificadores (restricciones)	Si la formula Q no contiene la variable cuantificada x: $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv \big(\forall x\, P(x)\big) \vee Q$ $\exists x(P(x) \wedge Q) \equiv \big(\exists x\, P(x)\big) \wedge Q$
Intercambio del orden de cuantificadores iguales	$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$ $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$
No conmutatividad entre cuantificadores diferentes	$\forall x \exists y P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\, P(x)$

Regla	Nombre	Forma
$\forall I$	Instanciación universal (UI: Universal Instantiation)	$\forall x\, P(x) \Rightarrow P(c)$
$\forall G$	Generalización universal (UG: Universal Generalization)	$P(c) \Rightarrow \forall x\, P(x)$
$\exists I$	Instanciación existencial (EI: Existential Instantiation)	$\exists x\, P(x) \Rightarrow P(c)$
$\exists G$	Generalización existencial (EG: Existential Generalization)	$P(c) \Rightarrow \exists x\, P(x)$

2. Ejemplos

1. Considere el conjunto de premisas dado por:

   a. Todo numero real es positivo o es negativo o es cero
   b. 4 no es un numero negativo
   c. 4 no es cero

   Y la siguiente conclusion: "4 es un numero positivo"

2. El dominio de referencia es $\mathbb{Z}$ y se definen las siguientes premisas

   a. Para cada x, si x es un numero par, entonces $x+4$ es un numero par.
   b. Para cada x, si x es un numero par, entonces x no es un numero impar
   c. Dos es un numero par

   La conclusión que se sigue es: "$2+4$ no es un numero impar"

Para cada uno de los siguientes argumentos, explique qué reglas de inferencia se utilizan en cada paso.

3. "Alguien en esta clase disfruta observar ballenas. Toda persona que disfruta observar ballenas se preocupa por la contaminación del océano.

   Por lo tanto, hay una persona en esta clase que se preocupa por la contaminación del océano."

4. "Toda persona en Nueva Jersey vive a menos de 50 millas del océano. Alguien en Nueva Jersey nunca ha visto el océano.

   Por lo tanto, alguien que vive a menos de 50 millas del océano nunca ha visto el océano."

5. Deduzca los teoremas con base en el sistema de logica cuantificacional.

Premisas	Conclusión
$\forall x\ ((x<4)\land(4<5)\rightarrow x<5)$ $\forall z\ ((-4<z)\leftrightarrow(z<4))$ $4<5$ $-4<-3$	$3<5$

6. Deduzca los teoremas con base en el sistema de logica cuantificacional.

Premisas	Conclusión
$\forall x\,(R(x) \vee Z(x))$ $\forall x\,(\neg T(x) \to \neg R(x))$ $\exists x\,(\neg Z(x) \vee Q(x))$	$\exists x\,(T(x) \vee (Q(x) \vee M(x)))$

3. Solución de ejemplos:

Considere el conjunto de premisas dado por:

a. Todo numero real es positivo o es negativo o es cero
($\forall x$, $P(x)$, $N(x)$, $Z(x)$)

b. 4 no es un numero negativo

c. 4 no es cero

Y la siguiente conclusion: "4 es un numero positivo"

Solución:

Dominio: $U = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ Numeros reales

Predicados:
- $P(x)$: x es un número positivo
- $N(x)$: x es un número negativo
- $Z(x)$: x es cero

Demostrar:

$$\begin{array}{ll} \forall x\,(P(x) \vee N(x) \vee Z(x)) & (a) \\ \neg N(4) & (b) \\ \neg Z(4) & (c) \\ \hline \therefore P(4) & \end{array}$$

#	Procedimiento	Razon
1	$\forall x\,(P(x) \vee N(x) \vee Z(x))$	Premisa (a)
2	$P(4) \vee N(4) \vee Z(x)$	Instanciacion universal ($\forall I$) en 1. Con $x = 4$
3.	$\neg N(4)$	Premisa (b)
4.	$P(4) \vee Z(4)$	Elimación en 2 y 3 $\left(\begin{array}{l} P \vee Q \\ \neg P \\ \hline \therefore Q \end{array}\right)$
5.	$\neg Z(4)$	Premisa (c)
6.	$\therefore P(4)$	Elimacion en 4 y 5

El dominio de referencia es $\mathbb{Z}$ y se definen las siguientes premisas

a. Para cada x, si x es un numero par, entonces $x+4$ es un numero par.

b. Para cada x, si x es un numero par, entonces x no es un numero impar

c. Dos es un numero par

La conclusión que se sigue es: "$2+4$ no es un numero impar"

Solución

Dominio: $U = \{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$; Numeros enteros

Predicados: _$P(x)$: x es un numero par
_$I(x)$: x es un numero impar

Demostrar:

$$
\begin{array}{ll}
\forall x\,(P(x) \longrightarrow P(x+4)) & (a) \\
\forall x\,(P(x) \longrightarrow \neg I(x)) & (b) \\
P(2) & (c) \\
\hline
\therefore \neg I(2+4) &
\end{array}
$$

#	Procedimiento	Razon
1	$\forall x\,(P(x) \longrightarrow P(x+4))$.	Premisa (a)
2	$\forall x\,(P(x) \longrightarrow \neg I(x))$.	Premisa (b)
3.	$P(2)$	Premisa (c)
4.	$P(2) \longrightarrow P(2+4)$	Instanciacion universal en 1 $(x=2)$
5.	$P(2+4)$	Modus ponens en 3 y 4
6.	$P(2+4) \longrightarrow \neg I(2+4)$	Instanciacion universal en 2 $(x=2+4)$
7.	$\therefore \neg I(2+4)$	Modus Ponens en 5 y 6

$\exists x$ $\forall x$

"Alguien en esta clase disfruta observar ballenas. Toda persona que disfruta observar ballenas se preocupa por la contaminación del océano.

$\exists x$

Por lo tanto, hay una persona en esta clase que se preocupa por la contaminación del océano."

Solución:

Dominio: $U = \{x \mid x \text{ es una persona}\}$

Predicados:
- $C(x)$: x esta en esta clase
- $B(x)$: x disfruta observar ballenas
- $O(x)$: x se preocupa por la contaminación del oceano

Demostrar:

$$\begin{array}{ll} \exists x\,(C(x) \wedge B(x)) & (a) \\ \forall x\,(B(x) \rightarrow O(x)) & (b) \\ \hline \therefore \exists x\,(C(x) \wedge O(x)) & \end{array}$$

#	Procedimiento	Razon
1	$\exists x\,(C(x) \wedge B(x))$	Premisa (a)
2	$\forall x\,(B(x) \rightarrow O(x))$	Premisa (b)
3.	$C(P) \wedge B(P)$	Instanciacion Existencial en 1 $(x = P)$
4.	$B(P) \rightarrow O(P)$	Instanciacion universal en 2 $(x = P)$
5	$C(P)$	Simplificación en 3 $\dfrac{P \wedge Q}{\therefore P}$
6	$B(P)$	Simplificacion en 3
7.	$O(P)$	Modus Ponens en 4 y 6
8	$C(P) \wedge O(P)$	Conjuncion en 5 y 7 $\dfrac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{\therefore P \wedge Q}$
9	$\therefore \exists x\,(C(x) \wedge O(x))$	Generalizacion existencial en 8