03/06/2024 - Matematicas Discretas 1 (Ude@l MJ 10-12)

1. Avisos:

Como acabar:

✓ 1. Parcial 1 (20%)

~ 2. Prolog (20%) : Hasta el 16 de Junio

- 3. Parcial 2 (20%) (Junio 10)

✓ 4. Parcial 3 → Despues de vacaciones Julio 10

✓ 5. Parcial 4 → Taller

Junio

M	J
3	5
10	12
17	19 ← Charla

Julio

8	10 ← Parcial 3
15	17

19 de Julio

Clases

M	W	J	V
24	25	26	27

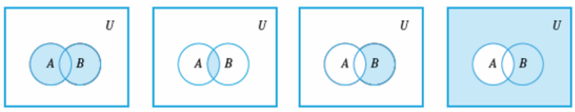
10 - 12

↓ Taller (Semana finales) (19 de Julio)

2. Operaciones con conjuntos

Resumen

Operación		Definición	Ejemplo
Unión	$A \cup B = A + B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Conjunto de elementos que están en A o en B (o en ambos)	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \cup B = \{1,2,3\}$
Intersección	$A \cap B = A \cdot B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Conjunto de elementos que están tanto en A como en B	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \cap B = \{2\}$
Diferencia	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Conjunto de elementos que están en A pero no en B	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{2\}$ $A - B = \{1,3\}$ $B - A = \{\square\} = \emptyset$
Diferencia simétrica	$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$	Conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \oplus B = \{1,3\}$
Complemento	$A' = A^C = U - A$	Conjunto de elementos que están en el universo pero no en A	$U = \{1,2,3\}$ $A = \{1,2\}$ $A' = A^C = \{3\}$



La región sombreada representa $A \cup B$. La región sombreada representa $A \cap B$. La región sombreada representa $B - A$. La región sombreada representa A^c.

Sobre la notacion

Negación → Complemento

$\neg A$ → $A' = \bar{A} = A^c$

Conjunto Universal

$U = 1$

Union → Unioñ

$A \cup B$ → $A + B$

Conjunto Vacio

$\Phi = 0$

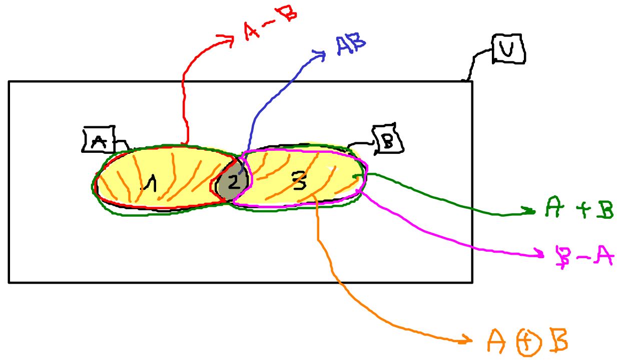
Interseccion → Interseccion

$A \cap B$ → $A \cdot B = AB$

Ejemplo:

$A = \{1, 2\}$
$B = \{2, 3\}$

$U = \{1, 2, 3\}$



i. $A \cap B = A \cdot B = AB = \{2\}$

ii. $A \cup B = A + B = \{1, 2, 3\}$

iii. $A - B = \{1\}$

iv. $B - A = \{3\}$

v. $A \oplus B = \{1, 3\}$

vi. $A' = U - A = \{1,2,3\} - \{1,2\} = \{3\}$

vii. $B' = U - B = \{1,2,3\} - \{2,3\} = \{1\}$

Aun mas:

$(A-B)' = U - (A-B) = \{1,2,3\} - \{1\}$
$= \{2, 3\}$

Identidades básicas de cardinalidad

Nombre	Equivalencia
1	$\lvert\emptyset\rvert = 0$
2	$A \cdot B = 0 \rightarrow \lvert A + B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$
3	$\lvert A + B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cdot B\rvert$
4	$\lvert A - B\rvert = \lvert A\rvert - \lvert A \cdot B\rvert$
5	$\lvert A \cdot B\rvert \leq \lvert A\rvert$
6	$\lvert A\rvert \leq \lvert A + B\rvert$
7	$\lvert A'\rvert = \lvert U\rvert - \lvert A\rvert$
8	$a \leq \lvert A\rvert \leq b \leftrightarrow \lvert U\rvert - a \leq \lvert A'\rvert \leq \lvert U\rvert - b$
9	$Max(\lvert A\rvert, \lvert B\rvert) \leq \lvert A + B\rvert \leq Min(\lvert A\rvert + \lvert B\rvert, \lvert U\rvert)$
10	$Max(0, \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert U\rvert) \leq \lvert A \cdot B\rvert \leq Min(\lvert A\rvert + \lvert B\rvert)$

$A = \{1, 2\} \longrightarrow |A| = n(A) = 2$
$B = \{2, 3, 4\} \longrightarrow |B| = n(B) = 3$
$C = \{5\} \longrightarrow |C| = n(C) = 1$
$U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

* Diagrama de Venn:

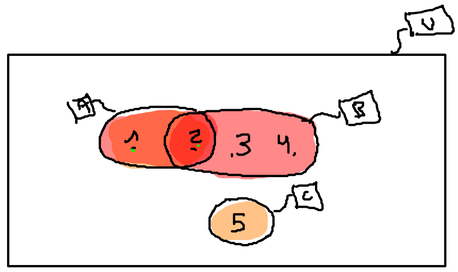


Diagrama de Venn para cardinalidades

$A \cdot B = \emptyset \longrightarrow |A + B| = |A| + |B|$

$|A + C| = |A| + |C| = 2 + 1 = 3$

$AB = \{2\} \rightarrow |AB| = 1$

$|A + B| = |A| + |B| - |AB| = 2 + 3 - 1 = 4$

$|B - A| = |B| - |AB| = 3 - 1 = 2$

$|A - B| = |A| - |AB| = 2 - 1 = 1$

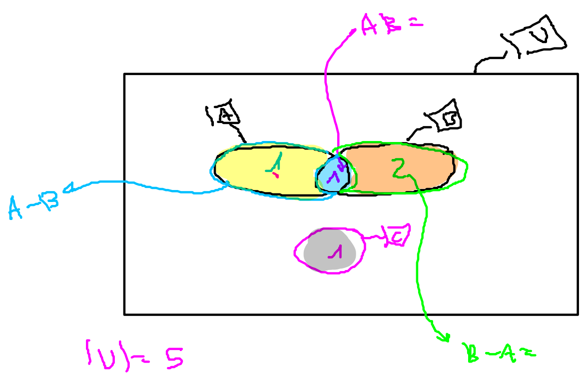
$BC = \emptyset \rightarrow |BC| = 0$

$|B - C| = |B| - |BC| = 3 - 0 = 3$

$|A'| = |U| - |A| = 5 - 2 = 3$

$|B'| = |U| - |B| = 5 - 3 = 2$

$|(A + B)'| = |U| - |A + B| = 5 - 4 = 1$



Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Logica proposicional

$\cap \rightarrow \cdot$

$\cup \rightarrow +$

$\neg \rightarrow A'$

$\cup \rightarrow \wedge$

$\emptyset \rightarrow 0$

⋮

Ejemplo: Aplicando las leyes fundamentales para el Algebra de conjuntos demuestre que

$$(A+B.C)' = (C'+B')A'$$

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

#	Expresión	Razón
1	$(A+B.C)'$	Por hipotesis
2	$A' \cdot (B.C)'$	Ley de Morgan para + en (1)
3	$(B.C)' \cdot A'$	Conmutativa para · en (2)
4	$(B'+C') \cdot A'$	Morgan para · en (3)
5.	$(C'+B')A'$ ✓	Conmutativa para + en 4

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Ejemplo: Aplicando las leyes fundamentales para el álgebra de conjuntos, simplifique:

$$ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'$$

	Pasos	Razón
1	$ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'$	Premisa
2	$(ABC + ABC') + (AB'C + AB'C') + (A'BC + A'BC') + (A'B'C + A'B'C')$	Asociatividad en 1
3	$AB \cdot (C + C') + AB' \cdot (C + C') + A'B \cdot (C + C') + A'B' \cdot (C + C')$	Distributividad en 2
4	$AB \cdot (1) + AB' \cdot (1) + A'B \cdot (1) + A'B' \cdot (1)$	Complemento en 3
5	$AB + AB' + A'B + A'B'$	Identidad en 4
6	$(AB + AB') + (A'B + A'B')$	Asociatividad en 5
7	$A \cdot (B + B') + A' \cdot (B + B')$	Distributividad en 6
8	$A \cdot (1) + A' \cdot (1)$	Complemento en 7
9	$A + A'$	Identidad en 8
10	1	complemento ~~Identidad en~~ 9