

Curso —————
Matemáticas Discretas I

**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

Clase 1 – Lógica proposicional

Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas
- Conectores lógicos – Parte I
- Conectores lógicos – Parte II
- Traducción de enunciados
- Reglas de prioridad

■ Agenda

- **¿Qué es la lógica?**
- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas
- Conectores lógicos – Parte I
- Conectores lógicos – Parte II
- Traducción de enunciados
- Reglas de prioridad

¿Qué es la lógica?

- La lógica es el estudio del razonamiento.
 - El bloque fundamental de cualquier argumento lógico es una **proposición lógica**, o simplemente una **proposición**.
 - Una proposición lógica tiene la forma de una **oración completa** y debe hacer una afirmación que pueda identificarse como verdadera o falsa.



El rascabuches es enemigo del chapulín colorado



- Al formular argumentos, a veces las personas hacen afirmaciones falsas. Al evaluar la solidez o validez de un argumento lógico se debe considerar los **valores de verdad**, es decir, la identificación de verdadero o falso, de todas las proposiciones utilizadas para respaldar el argumento.

■ Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- **Lógica proposicional**
- Proposiciones compuestas
- Conectores lógicos – Parte I
- Conectores lógicos – Parte II
- Traducción de enunciado
- Reglas de prioridad

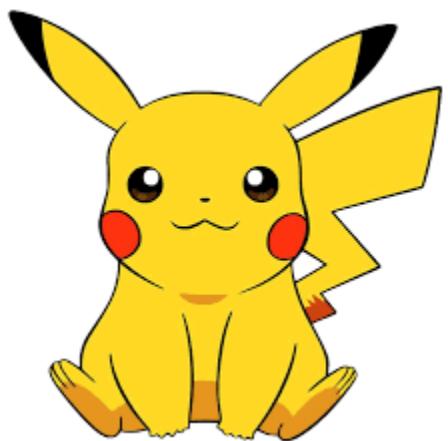
Proposición

Una **proposición** (o **declaración**) es una afirmación declarativa que puede ser **Falsa** o **Verdadera** pero no ambas.

Ejemplos: Dados los siguientes enunciados, identifique cuales son proposiciones.



1. La identidad secreta de Batman es el Chompiras.
2. Caterine Ibargüen es un medallista Olimpica.
3. Pikachu no es un Pokémon.
4. Beatriz Pinzón Solano la fea es la mujer mas hermosa del mundo.
5. ¿Qué hora es?
6. $x + y = z$
7. La universidad de Antioquia queda en Medellín.
8. $1 + 0 = 1$



Proposición

Una **proposición** (o **declaración**) es una afirmación declarativa que puede ser **Falsa** o **Verdadera** pero no ambas.

Ejemplo:

Dados los siguientes enunciados, identifique cuales son proposiciones.



1. La identidad secreta de Batman es el Chompiras.
2. Caterine Ibargüen es un medallista Olímpica.
3. Pikachu no es un Pokémon.
4. Beatriz Pinzón Solano la fea es la mujer mas hermosa del mundo.
5. ¿Qué hora es?
6. $x + y = z$
7. La universidad de Antioquia queda en Medellín.
8. $1 + 0 = 1$

Proposición	No es proposición



Lógica proposicional

Solución:

1. La identidad secreta de Batman es el Chompiras.
2. Caterine Ibargüen es un medallista Olímpica.
3. Pikachu no es un Pokémon.
4. Beatriz Pinzón Solano la fea es la mujer más hermosa del mundo.
5. ¿Qué hora es?
6. $x + y = z$
7. La universidad de Antioquia queda en Medellín.
8. $1 + 0 = 1$

Proposición	No es proposición
1 (F)	
2 (V)	
3 (F)	
4 (Depende)	
	5
	6
7 (F)	
8 (V)	

Ejercicio:

Invéntese 5 enunciados de los cuales tres sean proposiciones y 2 no lo sean. Sea creativo.



Tipos de proposiciones

Las proposiciones se pueden clasificar en dos grandes grupos.

Proposición simple: Es una proposición que expresa un único hecho o idea.



Ejemplos:

- Gabriel Garcia Marquez escribió Cien años de soledad.
- Los colores de la bandera de Colombia son amarillo, azul y rojo.
- Mammy Two Shoes es la dueña de Tom el gato.

Posición compuesta: Es una proposición compuesta de varias proposiciones simples unidas mediante conectores lógicos (y, o, si...entonces).



Ejemplos:

- Las rosas son rojas **y** las violetas son azules.
- **Si** no comes **entonces** no podrás salir a jugar.
- Lisa es inteligente **o** estudia cada noche.
- Ash es amigo **y** entregador de Pikachu.



Representación simbólica

- Se emplea para representar proposiciones (simples o compuestas) con el fin de reducir la cantidad de escritura involucrada.
- Ayuda a visualizar la relación entre las afirmaciones de una manera más concisa para determinar la fuerza o validez de un argumento.
- Cada sentencia lógica es representada simbólicamente como una letra minúscula: **p, q, r**.
- A continuación se muestran los operadores lógicos para la construcción de proposiciones:

Operador	Símbolo	Conectivo
Negación	¬	no
Conjunción	∧	y / pero
Disyunción, o inclusivo	∨	o
Implicación, condicional	→	Si ... Entonces ...
Equivalencia, bicondicional	↔	... si, y solo si ...



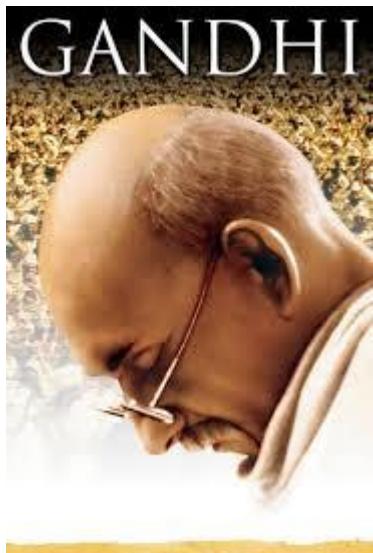
Lógica proposicional

Representación simbólica

Ejemplo:

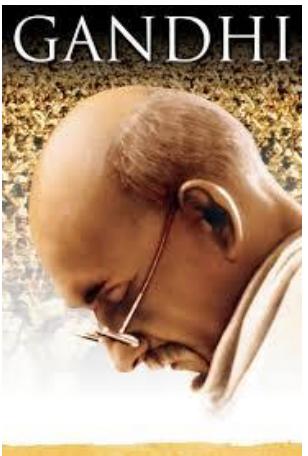
Escriba cada una de las siguientes afirmaciones lógicas en forma simbólica:

1. La película Gandhi ganó el premio Oscar a la mejor película en 1982.
2. El fútbol es el deporte más popular del mundo
3. Todas las naranjas son frutas cítricas.



Lógica proposicional

Representación simbólica



Solución:

1. p : La película Gandhi ganó el premio Oscar a la mejor película en 1982.
2. q : El fútbol es el deporte más popular del mundo
3. r : Todas las naranjas son frutas cítricas.

Pregunta: ¿Qué pasa en aquellos casos donde las afirmaciones son mas complejas (proposiciones compuestas)?

■ Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- Lógica proposicional
- **Proposiciones compuestas**
- Conectores lógicos – Parte I
- Conectores lógicos – Parte II
- Traducción de enunciado
- Reglas de prioridad

■ Proposiciones compuestas

Pregunta: ¿Qué pasa en aquellos casos donde las afirmaciones son mas complejas (proposiciones compuestas)?

Ejemplo:

Escriba cada una de las siguientes afirmaciones lógicas en forma simbólica:

1. Ash entreno a pikachu para convertirse en el mejor maestro Pokémon.
2. Marie Curie ganó dos premios nobel, el de física y el de química.
3. Que orgulloso me siento de ser un buen colombiano.



■ Proposiciones compuestas

Pregunta: ¿Qué pasa en aquellos casos donde las afirmaciones son mas complejas (proposiciones compuestas)?

Ash entrena a pikachu **para** convertirse en el mejor maestro Pokémon

p q



Proposiciones simples:

- p : Ash entrena a Pikachu.
- q : Ash se convierte en el mejor maestro Pokémon

$$p \rightarrow q$$

Si Ash entrena a pikachu **entonces** se convertirá en el mejor maestro Pokémon

■ Proposiciones compuestas

Pregunta: ¿Qué pasa en aquellos casos donde las afirmaciones son mas complejas (proposiciones compuestas)?

Marie Curie ganó dos premios Nobel, el de Física **y** el de Química



Proposiciones simples:

- r : Marie Curie ganó el premio Nobel Física
- s : Marie Curie ganó el premio Nobel Química

$$r \wedge s$$

Marie Curie ganó el premio Nobel de física **y** el premio Nobel de química,

r

s

Proposiciones compuestas

Pregunta: ¿Qué pasa en aquellos casos donde las afirmaciones son mas complejas (proposiciones compuestas)?

Que orgulloso me siento de ser un buen colombiano.



Proposiciones simples:

- p : Me siento orgulloso.
 - q : Soy un buen colombiano.

$$q \rightarrow p$$

Si soy buen colombiano entonces me siento orgulloso

$p \wedge q$

Me siento orgulloso, **y** soy un buen colombiano.



■ Proposiciones compuestas



■ Proposiciones compuestas

Conectores lógicos



Operador	Símbolo	Conectivo
Negación	¬	No
Conjunción	∧	y / pero
Disyunción, o inclusivo	∨	o
Exclusión, o exclusivo	⊕	o
Implicación, condicional	→	Si ... entonces ...
Equivalencia, bicondicional	↔	... si, y solo si ...

■ Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas
- **Conectores lógicos – Parte I**
- Conectores lógicos – Parte II
- Traducción de enunciado
- Reglas de prioridad

■ Conectores lógicos – Parte I



Operador	Símbolo	Conectivo
Negación	¬	No
Conjunción	∧	y / pero
Disyunción, o inclusivo	∨	o
Exclusión, o exclusivo	⊕	o
Implicación, condicional	→	Si ... entonces ...
Equivalencia, bicondicional	↔	... si, y solo si ...

Negación (No = Not)

- La negación ($\neg p$) de un enunciado lógico (proposición p) tiene el valor de verdad opuesto al del enunciado original. Si el enunciado original es falso (**F**), su negación es verdadera (**V**), y si el enunciado original es verdadero (**V**), su negación es falsa (**F**)

p	$\neg p$
<i>F</i>	<i>V</i>
<i>V</i>	<i>F</i>

- **Símbolos de la negación:** \sim , \neg , $'$, $\bar{ }$
- Negar una negación es lo mismo que afirmar: $\neg(\neg p) = p$



Ejemplo: Sea r : Woody y Buzz Lightyear son los mejores amigos.

La negación de la proposición anterior es $\neg r$ y denota

$\neg r$: Woody y Buzz Lightyear **no** son los mejores amigos



Negación (No = Not)

Ejemplo 1: Escriba la negación de cada una de los siguientes enunciados:

Declaración	Negación
Michael Pelps fue un nadador olímpico	
Tom es un gato	
Jerry no es un ratón	

Ejemplo 2: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Elmo es un Muppet rojo.
- p : La salsa de tomate no es una verdura.

1. Escriba la forma simbólica de: Elmo no es un Muppet rojo
2. Escriba en palabras la proposición $\neg p$



■ Conectores lógicos – Parte I

Negación (No = Not)

Ejemplo 1: Escriba la negación de cada una de los siguientes enunciados:

Declaración	Negación
Michael Pelps fue un nadador olímpico	Michael Pelps no fue un nadador olímpico
Tom es un gato	Tom no es un gato
Jerry no es un ratón	Jerry es un ratón



■ Conectores lógicos – Parte I

Negación (No = Not)

Ejemplo 2: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Elmo es un Muppet rojo.
- p : La salsa de tomate no es una verdura.

1. Escriba la forma simbólica de: Elmo no es un Muppet rojo



$\neg r$: Elmo **no** es un Muppet rojo

2. Escriba en palabras la proposición $\neg p$



$\neg p$: La salsa de tomate es una verdura



■ Conectores lógicos – Parte I

Conjunción (Y = And)

La unión de dos enunciados lógicos con la palabra **y** o **pero** forma una proposición compuesta llamado conjunción.

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

- **Símbolos de la conjunción:** \wedge , ·
- En lógica, para que una conjunción sea verdadera (**V**), todos los enunciados lógicos independientes que la componen deben ser verdaderos (**V**).

Ejemplo: Sea

p : Piolín es un canario

q : Silvestre es un gato

La conjunción de las dos proposiciones es $p \wedge q$ y denota:

$p \wedge q$: Piolín es un canario y Silvestre es un gato



Conjunción - Diciéndolo de otro modo

Existen muchas maneras de expresar la conjunción $p \wedge q$. A continuación se listan algunas expresiones.

- p y q
- p , pero q
- p aún q
- p también q
- p todavía q
- p , aunque q
- p sin embargo q
- p además q
- p no obstante q



Conjunción (Y = And)

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- m : Alan Turing era un Matemático.
- c : Alan Turing era gringo.

Escriba la expresión asociada a la proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:

Amaranto Perea fue jugador de futbol y vendió helados.

1. Determine las proposiciones simples
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.



Conjunción (Y = And)

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- m : Alan Turing era un Matemático.
- c : Alan Turing era gringo.

Escriba la expresión asociada a la proposición compuesta:

Alan Turing era un Matemático pero no era gringo

Solución:



Alan Turing era un Matemático **pero no** era gringo: $m \wedge \neg c$

Conjunción (Y = And)

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:



Amaranto Perea fue jugador de futbol **y** vendió paletas
f *h*

1. Determine las proposiciones simples:
 - *f*: Amaranto Perea fue jugador de futbol
 - *h*: Amaranto Perea vendió paletas.
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.

Amaranto Perea fue jugador de futbol **y** vendió paletas: *f* **^** *h*

■ Conectores lógicos – Parte I

Disyunción – Or inclusivo ($O = Or$)

Cuando la unión de dos enunciados lógicos se hace con el conector **o** la proposición compuesta formada se conoce como **disyunción**.

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

- **Símbolos de la disyunción:** \vee , +
- A menos que se especifique lo contrario, una disyunción es una declaración o inclusiva, lo que significa que la declaración compuesta formada al unir dos cláusulas independientes con la palabra o será verdadera si al menos una de las cláusulas es verdadera.

Ejemplo: Sea

p : Estoy en casa

q : Esta lloviendo

La disyunción de las dos proposiciones es $p \vee q$ y denota:

$p \vee q$: Estoy en casa o esta lloviendo



Disyunción ($O = Or$)

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Layla viajará a París, Francia.
- s : Layla y Marcus viajarán juntos a las Cataratas del Niágara, Ontario

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Layla y Marcus viajarán juntos a las Cataratas del Niágara, Ontario, o Layla viajará a París, Francia.

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:

Spock era Vulcano o fue varias veces capitán del USS Enterprise.

1. Determine las proposiciones simples
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.



Disyunción ($\text{O} = \text{Or}$)

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Layla viajará a París, Francia.
- s : Layla y Marcus viajarán juntos a las Cataratas del Niágara, Ontario

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Layla y Marcus viajarán juntos a las Cataratas del Niágara, Ontario, o Layla viajará a París, Francia.

Solución:

Layla y Marcus viajarán juntos a las Cataratas del Niágara, Ontario, **O** Layla viajará a París, Francia

$s \vee r$



■ Conectores lógicos – Parte I

Disyunción ($O = Or$)

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:



Spock era Vulcano **o** fue varias veces capitán del USS Enterprise

p

q

1. Determine las proposiciones simples
 - *p*: Spock era Vulcano
 - *q*: Spock fue varias veces capitán del USS Enterprise.
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.

Spock era Vulcano **o** fue varias veces capitán del USS Enterprise: *p* **v** *q*



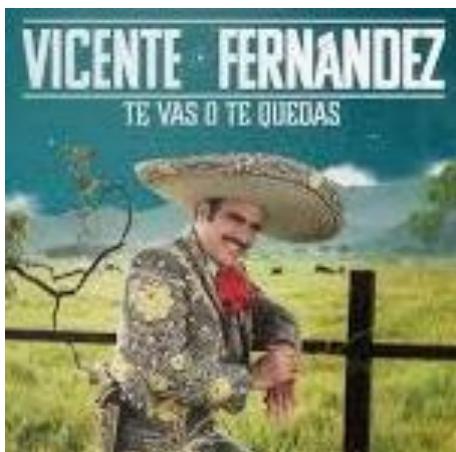
■ Conectores lógicos – Parte I

Exclusión: Or exclusivo (Xor)

El **or exclusivo** opera de manera similar al **or inclusivo**. Mas exactamente en el caso del **or exclusivo**, el resultado de la proposición compuesta es verdadero solo cuando el valor lógico de las proposiciones simples que la componen es contrario

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

- **Símbolos de la exclusión:** \oplus
- En el Or exclusivo una de las dos proposiciones debe ser verdadera, pero no ambas.



Ejemplo: Sea
 p : Te vas
 q : Te quedas

El or exclusivo de las dos proposiciones es $p \oplus q$ y denota:

$p \oplus q$: Te vas **o** te quedas



Exclusión: Or exclusivo (Xor)

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- p_1 : El plato principal se acompaña con sopa.
- p_2 : El plato principal se acompaña con ensalada.

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Este plato principal se acompaña con sopa o ensalada.

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:

Puedes elegir entre un portátil Dell o un HP.

1. Determine las proposiciones simples
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.



Exclusión: Or exclusivo (Xor)

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- p_1 : El plato principal se acompaña con sopa.
- p_2 : El plato principal se acompaña con ensalada.

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Este plato principal se acompaña con sopa o ensalada.

Solución:

Este plato principal se acompaña con sopa **o** ensalada : $p_1 \oplus p_2$



Exclusión: Or exclusivo (Xor)

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:

Puedes elegir entre un portátil Dell o un HP.

1. Determine las proposiciones simples
 - p : Eliges un portátil Dell.
 - q : Eliges un portátil HP.
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.

Eliges un portátil Dell **o** un portátil HP: $p \oplus q$



Exclusión: Or exclusivo (Xor)

Ejemplo 2: Dada la proposición compuesta:

Puedes elegir entre un portátil Dell o un HP.

1. Determine las proposiciones simples
 - p : Eliges un portátil Dell.
 - q : Eliges un portátil HP.
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.

Eliges un portátil Dell **o** un portátil HP: $p \oplus q$



Disyunción - Diciéndolo de otro modo

A continuación, se muestran otras maneras de expresar la disyunción $p \vee q$.

- **p o q (Caso o inclusivo)**
- **p , a menos que q (Caso o exclusivo):** interprétese “a menos que” como “si una proposición no es verdadera, la otra es, o será, verdadera”, en este caso: si Q fuera falsa, le correspondería a P ser cierta)
- **Al menos una entre p y q**



■ Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas
- Conectores lógicos – Parte I
- **Conectores lógicos – Parte II**
- Traducción de enunciado
- Reglas de prioridad

■ Conectores lógicos – Parte II



Operador	Símbolo	Conectivo
Negación	¬	No
Conjunción	∧	y / pero
Disyunción, o inclusivo	∨	o
Exclusión, o exclusivo	⊕	o
Implicación, condicional	→	Si ... entonces ...
Equivalencia, bicondicional	↔	... si, y solo si ...

■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación – Enunciado condicional

Cuando se hace una inferencia lógica o una deducción, se razona partiendo de una hipótesis para llegar a una conclusión. En este caso, el objetivo es ser capaz de decir:

Si primer enunciado lógico, **entonces** segundo enunciado lógico



Si Homero toma cerveza, **entonces** Homero va ser presidente

Conectores lógicos – Parte II

Implicación – Enunciado condicional

Cuando la unión de dos enunciados lógicos (p y q) resulta de la unión mediante la expresión de la forma “Si ... entonces ...” la proposición compuesta formada se conoce como **implicación** o **enunciado condicional**.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

- **Símbolos de la implicación:** \rightarrow
 - En el enunciado condicional $p \rightarrow q$ la proposición p se conoce como **hipótesis (antecedente o premisa)** y la proposición q se conoce como **tesis (consecuente o conclusión)**.

Si 4686 es divisible entre 6, **entonces** 4686 es divisible entre 3

Ejemplo: Si p denota Estoy en casa y q esta lloviendo. La enunciado condicional es $p \rightarrow q$ denota:

$p \rightarrow q$: Si estoy en casa entonces esta lloviendo



Implicación – Comprendiendo las implicaciones

En $p \rightarrow q$ no es necesario que exista ninguna conexión entre el antecedente y el consecuente. El “significado” de $p \rightarrow q$ depende únicamente de los valores de verdad de p y q .

Observe los siguientes enunciados:

- Si la luna esta hecha de queso verde, entonces yo tengo mas dinero que Bill Gates.
- Si nací en abril, entonces puedo volar.
- Si $1 + 1 = 3$, tu abuela usa botas de combate.

En el lenguaje diario, las personas esperan que exista una conexión real entre la condición y la conclusión. Decir algo como lo anterior en una conversación normal sonaría absurdo, ya que la premisa y la conclusión no tienen ninguna relación lógica en el sentido común.



■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación – Comprendiendo las implicaciones

- La implicación $p \rightarrow q$ solo es falsa en caso de que p sea verdadera y q sea falsa.
- Una forma de ver el valor de verdad de una implicación es pensar en una **obligación o contrato**.

Si soy elegido, bajaré los impuestos,
 p : Premisa q : Conclusión



Possibilidades:

1. El político no es elegido, los votantes no esperarán que baje los impuestos los impuestos.
2. Si el político no es elegido, los impuestos pueden bajar.
3. **El político es elegido y no baja los impuestos (No cumplió su promesa de campaña).**
4. El político es elegido, los votantes esperarían que el político baje los impuestos.

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V



Implicación – Diciéndolo de otro modo

Existen muchas maneras de expresar $p \rightarrow q$. A continuación se listan algunas expresiones.

- Si p entonces q
- Si p , q
- q si p
- p sólo si q
- Para p , es necesario q
- Es suficiente p para q
- q en caso de que p
- q siempre que p
- Como p , q
- q cuando p
- p implica que q
- Cuando p , q



■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Ana irá.
- s : Llueve

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Ann irá a menos que llueva.

Ejemplo 2: Dada la proposición:

Los Cachorros van a ganar el campeonato sólo si ganan el partido de mañana.

1. Determine las proposiciones simples
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.



■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Ana irá.
- s : Llueve

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Ann irá a menos que llueva.

Solución: La forma r a menos que s significa que mientras s no suceda, entonces r ocurrirá.

Ann irá **a menos** que llueva

$$\neg s \rightarrow r$$



■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación

Ejemplo 2: Dada la proposición:

Los Cachorros van a ganar el campeonato sólo si ganan el partido de mañana.

1. Determine las proposiciones simples
 - r : Los cachorros van a ganar el campeonato.
 - s : Los cachorros ganan el partido de mañana.
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.

Los Cachorros van a ganar el campeonato **sólo si** ganan el partido de mañana

$$r \rightarrow s$$

Pregunta: ¿Qué pasa si se invierte la implicación a la forma $r \rightarrow s$?



Recíproco, contrarrecíproco y contrario

El recíproco, el contrarrecíproco y el contrario (también llamado inverso), son variaciones de la proposición $p \rightarrow q$.

- **Recíproco (converse)**: Se forma al intercambiar la hipótesis (p) y la conclusión (q).

$$q \rightarrow p$$

- **Contrarrecíproco (contrapositive)**: Se forma al intercambiar y negar la hipótesis (p) y la conclusión (q) .

$$\neg q \rightarrow \neg p$$

- **Contrario (inverse)**: Resulta de negar la hipótesis (p) y la conclusión (q).

$$\neg p \rightarrow \neg q$$



■ Conectores lógicos – Parte II

Reciproco, contrarrecíproco y contrario

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- p : Harry Potter es un mago.
- q : Hermione es una bruja.

Escriba las siguientes afirmaciones:

1. **Condicional**: $p \rightarrow q$
2. **Reciproco**: $q \rightarrow p$
3. **Contrarrecíproco**: $\neg q \rightarrow \neg p$
4. **Contrario**: $\neg p \rightarrow \neg q$



Conectores lógicos – Parte II

Reciproco, contrarrecíproco y contrario

Ejemplo 1 - Solución: Sea

- p : Harry Potter es un mago.
- q : Hermione es una bruja.

Tenemos:

1. Condicional: $p \rightarrow q$

Si Harry Potter es un mago entonces Hermione es una bruja

2. Reciproco: $q \rightarrow p$

Si Hermione es una bruja entonces Harry Potter es un mago

3. Contrarrecíproco: $\neg q \rightarrow \neg p$

Si Hermione no es una bruja entonces Harry Potter no es un mago

4. Contrario: $\neg p \rightarrow \neg q$

Si Harry Potter no es un mago entonces Hermione no es una bruja



■ Conectores lógicos – Parte II

Reciproco, contrarrecíproco y contrario

Ejemplo 2: Dado el enunciado: “Si todos los perros ladran, entonces a Lassie le gusta ladrar”.

Se pide:

1. Identifique la hipótesis y la conclusión.
2. Identifique si la siguiente afirmación es el reciproco, el contrarrecíproco o el contrario:
“Si a Lassie le gusta ladrar, entonces todos los perros ladran”
3. Identifique si la siguiente afirmación es el reciproco, el contrarrecíproco o el contrario:
“Si a Lassie no le gusta ladrar, entonces algunos perros ladran no ladran”
4. ¿Cuál sentencia es lógicamente equivalente a la sentencia condicional?



■ Conectores lógicos – Parte II

Recíproco, contrarrecíproco y contrario

Ejemplo 2: Dado el enunciado: “Si todos los perros ladran, entonces a Lassie le gusta ladrar”.

Se pide:

1. Identifique la hipótesis y la conclusión.

- p : Si a Lassie le gusta ladlar
- q : Todos los perros ladran”

2. Identifique si la siguiente afirmación es el recíproco, el contrarrecíproco o el contrario:

“Si a Lassie le gusta ladlar, entonces todos los perros ladran”
 $q \quad \quad \quad p$

Recíproco: $q \rightarrow p$

3. Identifique si la siguiente afirmación es el recíproco, el contrarrecíproco o el contrario:

“Si a Lassie no le gusta ladlar, entonces algunos los perros ladran”
 $\neg q \quad \quad \quad \neg p$

Contrarrecíproco: $\neg q \rightarrow \neg p$

4. ¿Cuál sentencia es lógicamente equivalente a la sentencia condicional?

El contrarrecíproco (Luego veremos como verificarlo, cuando veamos tablas de verdad).



■ Conectores lógicos – Parte II

Condiciones necesarias y suficientes

Los condicionales se pueden clasificar en tres categorías $p \rightarrow q$:

- **Condición necesaria:** Si p es condición necesaria para q , significa que para que q sea cierta, p debe ser cierta.

Si quieras ser su esposo **tienes** que decirle.

Necesaria	Suficiente
Si	No

¿Con que le diga hay?

- **Condición suficiente:** Si p es condición suficiente para q , significa que cuando p ocurre, q también ocurre.

Si haces la fila, serás atendido.

Necesaria	Suficiente
No	Si

¿Existen otras formas de ser atendido?

- **Condición necesaria y suficiente:** Si p es necesaria y suficiente para q , significa que p ocurre si y solo si q ocurre (**doble implicación**)

Para ser atendido, **solo tienes** que hacer la fila

Necesaria	Suficiente
Si	Si

¿Con el mero hecho que haga la fila voy a la fija?



■ Conectores lógicos – Parte II

Condiciones necesarias y suficientes

Los condicionales se pueden clasificar en tres categorías $p \rightarrow q$:

- **Condición necesaria:** Si p es condición necesaria para q , significa que para que q sea cierta, p debe ser cierta.

Si quieras ser su esposo **tienes** que decirle.

Necesaria	Suficiente
Si	No

¿Con que le diga hay?

- **Condición suficiente:** Si p es condición suficiente para q , significa que cuando p ocurre, q también ocurre.

Si haces la fila, serás atendido.

Necesaria	Suficiente
No	Si

¿Existen otras formas de ser atendido?

- **Condición necesaria y suficiente:** Si p es necesaria y suficiente para q , significa que p ocurre si y solo si q ocurre (**doble implicación**)

Para ser atendido, **solo tienes** que hacer la fila

Necesaria	Suficiente
Si	Si

¿Con el mero hecho que haga la fila voy a la fija?



■ Conectores lógicos – Parte II

Condiciones necesarias y suficientes

La siguiente tabla hace un resumen de las condiciones de necesidad y suficiencia:

	Condición necesaria	Condición suficiente	Condición necesaria y suficiente
Definición	Para que ocurra q , p debe ser verdadero	Si p ocurre, entonces q ocurre	p es necesario y suficiente para q
Forma Lógica	$q \rightarrow p$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
Explicación	Sin p , q no puede ocurrir, pero p por sí solo no garantiza q .	Si p ocurre, q siempre ocurre, pero q podría ocurrir por otras razones.	p garantiza q y q solo ocurre si p es verdadero.



■ Conectores lógicos – Parte II

Condiciones necesarias y suficientes

En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos aclaratorios:

Enunciado	Necesaria	Suficiente
Para que puedas ser ingeniero, es necesario que hayas hecho un pregrado en ingeniería.	X	
Si ganas la primera evaluación, entonces pasaras Matemáticas Discretas.		X
Un numero es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es múltiplo de 3.	X	X
Si te sumerges en agua sin equipo, te ahogarás.		X
Para conducir legalmente, necesitas una licencia de conducir.	X	
Para respirar, necesitas oxígeno.	X	
Si una figura es un cuadrado, entonces tiene cuatro lados.		X
Una figura es un cuadrado si y solo si tiene cuatro lados iguales y ángulos rectos.	X	X
Para aprobar el curso, es necesario presentar el examen.	X	

■ Conectores lógicos – Parte II

Equivalencia o bicondicional

La unión de dos sentencias lógicas con la frase conectiva **si y solo si** (**sii**) se conoce como **bicondicional** o **equivalencia lógica**, $p \leftrightarrow q$. $p \leftrightarrow q$ es una expresión equivalente a la afirmación $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. La expresión $p \leftrightarrow q$, es verdadera siempre que el valor de verdad de la hipótesis (p) coincide con el valor de verdad de la conclusión (q); de lo contrario, es falsa.

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

- **Símbolo equivalencia :** \leftrightarrow

Puedes tomar el vuelo, **si y solo**, compras el boleto

p : Hipótesis q : Tesis

Ejemplo: Si p denota $1 < 5$ y q es $2 < 8$. La enunciado condicional es $p \leftrightarrow q$ denota:

$p \leftrightarrow q$: $1 < 5$ **si y solo si** $2 < 8$



Implicación – Diciéndolo de otro modo

Existen muchas maneras de expresar $p \leftrightarrow q$. A continuación se listan algunas expresiones.

- p si, y solo si, q
- p es suficiente y necesario para q
- p es equivalente a q
- p y q son equivalentes
- Si p entonces q , y viceversa

Conectores lógicos – Parte II

Implicación

Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Una recta es paralela con otra.
- s : Las pendientes de las rectas son iguales.

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Una recta es paralela con otra si y solo si sus pendientes son iguales.

Ejemplo 2: Dada la proposición:

Ser mayor de edad, es suficiente y necesario para poder votar.

1. Determine las proposiciones simples
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.



■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación

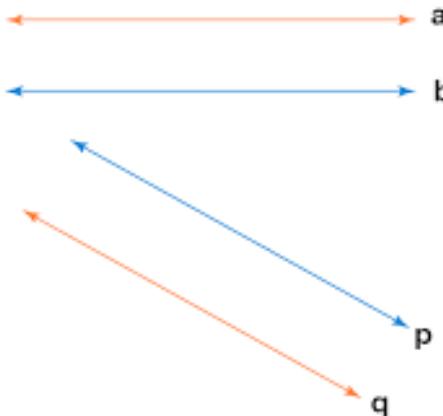
Ejemplo 1: Dadas las siguientes proposiciones:

- r : Una recta es paralela con otra.
- s : Las pendientes de las rectas son iguales.

Escriba la expresión asociada a la siguiente proposición compuesta teniendo en cuenta las proposiciones simples anteriormente mencionadas.

Una recta es paralela con otra si y solo si sus pendientes son iguales.

Solución:



Una recta es paralela con otra **si y solo si** sus pendientes son iguales: $r \leftrightarrow s$

■ Conectores lógicos – Parte II

Implicación

Ejemplo 2: Dada la proposición:

Ser mayor de edad, es suficiente y necesario para poder votar.

1. Determine las proposiciones simples
 - p : Ser mayor de edad.
 - q : Poder votar.
2. Escriba la proposición compuesta con base en las proposiciones simples previamente definidas.

Ser mayor de edad, **es suficiente y necesario** para poder votar

$$p \leftrightarrow q$$



■ Conectores lógicos – Parte II

Resumen conectores lógicos

Conector	Símbolo	Nombre	Explicación
Negación	$\neg p$	No	Cambia el valor de verdad de la proposición.
Conjunción	$p \wedge q$	Y (AND)	Es verdadera solo si ambas proposiciones son verdaderas
Disyunción inclusiva	$p \vee q$	O (OR)	Es verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera.
Disyunción exclusiva	$p \oplus q$	O exclusiva (XOR)	Es verdadera solo si una de las dos proposiciones es verdadera, pero no ambas.
Implicación	$p \rightarrow q$	Si... entonces (Implica)	Si p es verdadero, entonces q también lo es.
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	Si y solo si (doble implicación)	Ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.



Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas
- Conectores lógicos – Parte I
- Conectores lógicos – Parte II
- **Traducción de enunciados**
- Reglas de prioridad

Traducción de enunciados compuestos a lógica simbólica

Para traducir un enunciado compuesto a forma simbólica, seguimos los siguientes pasos:

1. Identificar y etiquetar todos los enunciados lógicos afirmativos independientes.
2. Identificar y etiquetar todos los enunciados lógicos negativos.
3. Reemplazar las palabras conectivas por los símbolos que las representan, como \wedge , \vee , \rightarrow , \neg .
4. Construir la expresión lógica.



Ejemplos

Obtenga la expresión lógica equivalente a los siguientes enunciados:

1. El automóvil arranca si y solo si el tanque tiene gasolina y la batería tiene corriente.
2. Puedes acceder a internet desde el campus solo si estudias ciencias de la computación o no eres estudiante de primer año.
3. No puedes subir a la montaña rusa si mides menos de 1.2 metros, a menos que tengas más de 16 años.
4. Si no estudio matemáticas para computación y no hago la tarea de fundamentos de programación entonces reprobaré el semestre o no podre ir de vacaciones a Cancún.



■ Traducción de enunciados

Solución punto 1

Enunciado:

El automóvil arranca **si y solo si** el tanque tiene gasolina **y** la batería tiene corriente.

↔

∧

Proposiciones simples:

- p : El automóvil arranca.
- q : El tanque tiene gasolina.
- r : La batería tiene corriente.

Expresión lógica del enunciado:

$$p \leftrightarrow (q \wedge r)$$



■ Traducción de enunciados

Solución punto 2

Enunciado:

Puedes acceder a internet desde el campus **solo si** estudias ciencias de la computación **o no** eres estudiante de primer año.



V \neg

Proposiciones simples:

- a : Puedes acceder desde el campus.
- c : Estudias ciencias de la computación.
- r : Eres estudiante de primer año.

Expresión lógica del enunciado:

$$a \rightarrow (c \vee \neg r)$$

■ Traducción de enunciados

Solución punto 3

Enunciado:

¬

→

∧

¬

No puedes subir a la montaña rusa si mides menos de 1.2 metros, a menos que tengas más de 16 años.

Proposiciones simples:

- m : Puedes subir a la montaña rusa.
- n : Mides menos de 1.2 metros
- o : Tienes mas de 16 años.

Expresión lógica del enunciado:

$$(n \wedge \neg o) \rightarrow \neg m$$

■ Traducción de enunciados

Solución punto 4

Enunciado:

Si **no** estudio matemáticas para computación **y no** hago la tarea de fundamentos de programación **entonces** reprobaré el semestre **o no** podre ir de vacaciones a Cancún.

Proposiciones simples:

- p : Estudio matemáticas para computación.
- q : Hago la tarea de fundamentos de programación.
- r : Reprobare el semestre.
- s : Podre ir a Cancún.

Expresión lógica del enunciado:

$$(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (r \vee \neg s)$$

Cómo traducir enunciados compuestos en forma simbólica con paréntesis a palabras

- Cuando se emplean paréntesis en un argumento lógico, agrupan una declaración compuesta, tal como sucede cuando se calculan expresiones numéricas o algebraicas.
- Cualquier declaración entre paréntesis debe tratarse como un componente único de la expresión.
- Si hay varios paréntesis, trabaje primero con los paréntesis más internos.
- A veces, puede ser necesario negar como grupo una oración compuesta entre paréntesis. Para lograrlo, agregue la frase “**no es el caso que**” antes de la traducción de la frase entre paréntesis.

Tip: Es aceptable intercambiar nombres propios con pronombres y eliminar frases repetidas para hacer que la declaración escrita sea más legible, siempre y cuando no se cambie el significado de la declaración lógica.



■ Traducción de enunciados

Ejemplos

Sea:

- p : Otto pasó la prueba escrita.
- q : Otto pasó la prueba de conducción.
- r : Otto recibió la licencia de conducción.

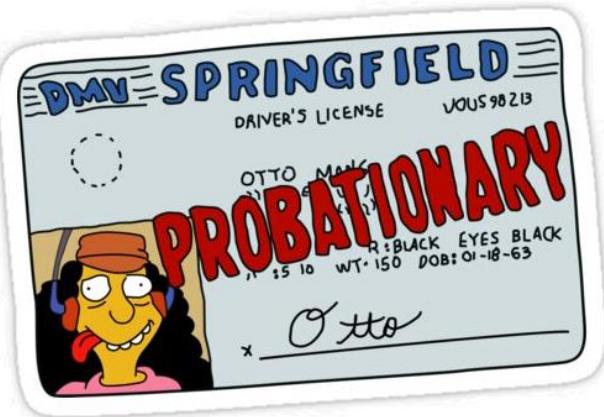
Traduzca cada una de las siguientes expresiones simbólicas a palabras:

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg r$



■ Traducción de enunciados

Ejemplos



Sea:

- p : Otto pasó la prueba escrita.
- q : Otto pasó la prueba de conducción.
- r : Otto recibió la licencia de conducción.

Expresión Simbólica	Traducción
$(p \wedge q) \rightarrow r$	Si Otto pasó la prueba escrita y la prueba de conducción entonces Otto recibió la licencia de conducción.
$\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg r$	Si no se da el caso en que Otto pasó la prueba escrita y la prueba de conducción, entonces Otto no recibió la licencia de conducción.

■ Traducción de enunciados

Ejemplos

Sea p la afirmación “Mi hija terminó su tarea”, sea q la afirmación “Mi hija limpió su habitación”, sea r la afirmación “Mi hija jugó videojuegos” y sea s la afirmación “Mi hija vio una película en línea”.

Traduzca cada una de las siguientes expresiones simbólicas a palabras:

1. $\neg(p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
3. $\neg(r \vee s) \rightarrow \neg(p \wedge q)$

Expresión Simbólica	Traducción
$\neg(p \wedge q)$	
$(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$	
$\neg(r \vee s) \rightarrow \neg(p \wedge q)$	



■ Agenda

- ¿Qué es la lógica?
- Lógica proposicional
- Proposiciones compuestas
- Conectores lógicos – Parte I
- Conectores lógicos – Parte II
- **Traducción de enunciados**
- Reglas de prioridad

■ Reglas de prioridad

La **reglas de prioridad** definen el orden en el que se deben aplicar los conectivos lógicos al evaluar enunciados lógicos compuestos.

Prioridad	Operador
1	()
2	\neg
3	\wedge
4	\vee
5	$\rightarrow / \leftrightarrow$

Asociatividad: Se da en los casos en que la expresión lógica tiene mas de un operador de la misma prioridad.

- Cuando se tienen varios operadores con la misma prioridad, la evaluación se hace de izquierda a derecha.
- Cuando hay paréntesis anidados se evalúan primero los mas internos. Si los paréntesis no están anidados la evaluación de estos se hace de izquierda a derecha.



El uso de paréntesis mejora la claridad haciendo las expresiones lógicas más legibles; sin embargo, estos deben ser usados con cuidado pues demasiados paréntesis pueden hacer el código más difícil de entender en lugar de ayudar.

Ejemplo:

- $p \vee q \rightarrow \neg r$ es equivalente $(p \vee q) \rightarrow \neg r$; sin embargo, el significado cambia, debido a las reglas de prioridad, si se usan paréntesis de la siguiente manera
 $p \vee (p \rightarrow \neg r)$

■ Referencias

- Notas de clase del profesor Carlos Mario Sierra.
- **Matemáticas discretas y sus aplicaciones – 5ed** (Kenneth H. Rosen)
- **Lógica y Teoria de conjuntos** (Diana Patricia Acevedo Vélez, Juan Carlos Arango Parra)
- **Matemáticas para la computación – 2ed** (José Alfredo Jiménez Murillo).
- **Matemáticas discretas con aplicaciones - 4ed** (Susanna S. Epp)
- **Contemporary Mathematics** – Openstax ([link](#))



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1
Clase 1 – Lógica proposicional