Estrutura Discreta

Dizando Norton
(dizando.norton@gmail.com)

DEI - Ciência da Computação

Faculdade de Ciências - Universidade Agostinho Neto

Programa da disciplina

Descrição

Esta displicina é uma introdução à conceitos de matemática discreta e estruturas discretas tal como são utilizadas em Ciência da Computação. As técnicas apresentadas no curso permitem aos estudantes aplicar o pensamento lógico e matemático na resolução de problemas. Os tópicos incluem: lógica proposicional e de predicados, funções, relações, conjuntos e técnicas de demonstração. De acordo a disponibilidade de tempo, os seguintes tópicos também serão apresentados: grafos, árvores, computabilidade, etc.

Objectivos

Ao completar a disciplina, os estudantes serão capazes de:

- Aplicar métodos formais de lógica de proposicional e de predicados
- Descrever a importância e limitações da lógica de predicados
- Utilizar demonstrações lógicas para resolver problemas
- Desenvolver algoritmos recursivos baseados em indução matemática
- Explicar a terminologia básica das funções, relações e conjuntos
- Descrever como métodos formais de lógica simbólica são utilizados para modelar algoritmos reais
- Perceber os conceitos básicos sobre a teoria dos grafos e algoritmos relacionados

No geral, espera-se que os estudantes sejão capazes de aplicar estes métodos em outros tópicos do curso de Ciência da Computação tais como desenho e análise de algoritmos e engenharia de *software*.

Tópicos

1. Lógica formal
2. Demonstrações, recorrência e análise de algoritmos
3. Conjuntos e combinatória

4. Relações, funções e matrizes

5. Gráfos e árvores

6. Álgebra de Boole e lógica computacional

Avaliação

- Exercícios: 10%

- Primeira prova: 20%

- Segunda prova: 30%

- Exame final: 40%

Os exercícios serão fornecidos nas aulas ou publicados no *website* da cadeira. Os estudantes são fortemente encorajados a resolve-los pois os mesmos irão ajudar a entender melhor os tópicos tratados nas aulas.

Pré-requisitos

Conhecimentos básicos de lógica e de simbolização matemática.

Regras

- Requere-se que os estudantes leiam os acetatos/fascículos antes das aulas

- A participação nas aulas é essencial para a compreensão da matéria. A assistência às aulas é de sua inteira responsabilidade

- Todas as provas e exames são obrigatórios, excepto por razões devidamente justificadas. Uma ausência não justificada, equivale a nota zero na referida avaliação.

Agenda (sujeita à alterações)

Semana	Tópicos
1	Lógica formal
2	Demonstrações
3	Conjuntos
4	Funções
5	Relações
6	Algoritmos
7	Indução
8	Contagem
9	Combinatória
10	Recursão
11	Grafos
12	Algoritmos para grafos
13	Árvores
14	Álgebra de Boole

Feriados e interrupções

- 17 de Setembro: Dia do Herói Nacional

Bibliografia

Título	Fundamentos matemáticos para a Ciência da Computação, 6a. Edição
Autor	Judith L. Gersting

Docente

Nome	Dizando Norton
Sala	CS119, Campus Universitário
Atendimento	Por agendamento
Telefone	919075391
E-mail	`dizando.norton@gmail.com`
Website	`http://dizan.do`
Aulas	Consultem o horário para a vossa turma

Página da cadeira

O *link* para página da disciplina é `http://www.dizan.do/t/ed2014`. A mesma contém anúncios, os acetatos e a sebenta utilizados no decorrer das aulas. Os estudantes são recomendados a consultar a página regularmente.

Capítulo 1

Lógica formal

1.1 Lógica proposicional

O que é uma prova? Começaremos por tratar de um elemento fundamental para o entendimento da lógica - as proposições. Uma proposição é uam sequência declarativa

1.2 Lógica de predicados

1.3 Exercícios

1. Quais das seguintes frases são proposições?

   (a) A lua é feita de queijo verde.

   (b) Ele é certamente, um homem alto.

   (c) Dois é um número primo.

   (d) O jovo vai acabar logo?

   (e) Os juros vão subir ano que vem.

   (f) Os juro vão descer ano que vem.

   (g) $x^2 - 4 = 0$.

Exercícios - Lógica formal

Proposições

1. Qual das seguintes sentenças é uma proposição? Quais são os valores de verdade para as que são proposições?

   (a) Lisboa é a capital do Brasil.

   (b) $2 + 3 = 5$

   (c) Que horas são?

   (d) $2^n \geq 100$

   (e) A lua é feita de queijo.

2. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições?

   (a) A Joana tem um leitor de MP3.

   (b) Não existe poluição em Luanda.

   (c) $2 + 2 = 4$

   (d) O Paulo e o Tomás são amigos.

   (e) A Maria envia mais de 100 SMS por dia.

3. Suponha que o telemóvel A tenha 256 MB de RAM e 32 GB de ROM e que a sua resolução gráfica seja de 8 MP; o telemóvel B possui 288 MB de RAM, 64 GB de ROM e 4 MP de resolução gráfica; e por fim o telemóvel C possui 128 MB de RAM, 32 GB de ROM e 5 MP de resolução gráfica. Determine o valor de verdade para cada uma das seguintes proposições.

   (a) O telemóvel B possui a maior capacidade de RAM.

   (b) O telemóvel C possui a maior capacidade de ROM ou maior resolução gráfica do que o telemóvel B.

   (c) O telemóvel B possui mais RAM, mais ROM e mais MP do que o telemóvel A.

   (d) Se o telemóvel B possui mais RAM e mais ROM que o telemóvel C, então também possui a maior resolução gráfica.

   (e) O telemóvel A possui mais RAM do que o telemóvel B se e somente se o telemóvel B possui mais RAM do que o telemóvel A.

4. Sejam p e q as proposições

   p: Eu comprei um bilhete para o teatro esta semana

   q: Eu ganhei um milhão de kwanzas na loteria

   Expresse cada uma das seguintes proposições como sentenças em Português.

   (a) $\neg p$
   (b) $p \vee q$
   (c) $p \to q$
   (d) $p \wedge q$
   (e) $p \leftrightarrow q$
   (f) $\neg p \to \neg q$
   (g) $\neg p \wedge \neg q$
   (h) $\neg p \vee (p \vee q)$

5. Determine se os seguintes bicondicionais são verdadeiros ou falsos.

   (a) $2 + 2 = 4$ se e somente se $1 + 1 = 2$.
   (b) $1 + 1 = 2$ se e somente se $2 + 3 = 4$.
   (c) $1 + 1 = 3$ se e somente se macacos conseguem voar.
   (d) $0 > 1$ se e somente se $2 > 1$.

6. Escreva cada uma das sentenças abaixo na forma "Se p então q".

   (a) É necessário lavar o carro do chefe para ser promovido.
   (b) Quando o vento vem do sul significa que a primaveira aproxima-se.
   (c) Uma condição suficiente para que a garantia seja válida é a de que o computador foi comprado a menos de um ano.
   (d) O Pedro é apanhado toda vez que cabula.
   (e) Obterás acesso ao *website* se pagares a taxa de subscrição.
   (f) Para ser eleito deves conhecer as pessoas certas.

7. Construa a tabela de verdade para as seguintes proposições

   (a) $p \oplus p$
   (b) $p \oplus \neg p$
   (c) $p \oplus \neg q$
   (d) $\neg p \oplus \neg q$
   (e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$
   (f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$
   (g) $((p \to q) \to r) \to s$.

8. Explique, sem utilizar uma tabela de verdade, porquê $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é verdade quando p, q e r possuem os mesmos valores de verdade e falso em caso contrário.

9. O soba de uma vila diz que existe um barbeiro numa outra vila muito distante, que apenas faz a barba à pessoas e somente à pessoas que não fazem a barba por sí próprias. Será que este barbeiro existe?

Lógica proposicional

1. Utiliza a lei de DeMorgan para encontrar a negação para cada uma das seguintes sentenças.
   (a) O Ndongala vai procurar um emprego ou terminar a licenciatura.
   (b) A Luísa percebe Java e Estrutura Discreta.
   (c) O Nadilson é jovem e forte.
   (d) A Rebecca vai viajar para o Brasil ou para a Espanha.

2. Utilize tabelas de verdade para verificar as seguintes leis da absorção
   (a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
   (b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

3. Mostre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia

4. Encontre uma proposição composta involvendo as variáveis p, q e r que seja verdadeira quando p e q são verdadeiros e r é falso, mas que seja falso em caso contrário.

5. Encontre uma proposição composta logicamente equivalente a $p \to q$ utilizando apenas o operador $\downarrow$

Predicados e quantificadores

1. Seja $P(x)$ a expressão "a palavra x contém a letra a". Quais são os valores de verdade para?
   (a) $P(laranja)$
   (b) $P(limo)$
   (c) $P(verdade)$
   (d) $P(dificil)$
   (e) $P(falso)$

2. Seja $P(x)$ a expressão "x perde mais do que cinco horas por dia no Facebook", onde o domínio para x consiste em todos os estudantes. Descreve cada uma das expressões a seguir em Português.
   (a) $\exists x P(x)$
   (b) $\forall x P(x)$
   (c) $\exists x \neg P(x)$
   (d) $\forall x \neg P(x)$

3. Traduza as seguintes expressões para Português, onde $C(x)$ é "x é um comediante" e $E(x)$ é "x é muito engraçado" e o domínio que consiste em todas as pessoas.
   (a) $\forall x (C(x) \to E(x))$

(b) $\forall x(C(x) \wedge E(x))$

(c) $\exists x(C(x) \to E(x))$

(d) $\exists x(C(x) \wedge E(x))$

4. Seja $Q(x)$ a expressão "$x + 1 > 2$". Se o domínio consiste em todos os números inteiros, quais são os valores de verdade para

    (a) $Q(0)$

    (b) $Q(-1)$

    (c) $Q(1)$

    (d) $\exists x Q(x)$

    (e) $\forall x Q(x)$

    (f) $\exists x \neg Q(x)$

    (g) $\forall x \neg Q(x)$

5. Determine os valores de verdade para cada uma das seguintes afirmações se o domínio de todas as variáveis consiste no conjunto dos números inteiros.

    (a) $\forall n(n^2 \geq 0)$

    (b) $\exists n(n^2 = n)$

    (c) $\forall n(n^2 \geq n)$

    (d) $\exists n(n^2 < 0)$

6. Suponha que o domínio das funções proposicionais $P(x)$ consiste nos inteiros $0, 1, 2, 3$ e 4. Reescreva cada uma das proposições utilizando disjunções, conjunnções e negações.

    (a) $\exists x P(x)$

    (b) $\forall x P(x)$

    (c) $\exists x \neg P(x)$

    (d) $\forall x \neg P(x)$

    (e) $\neg \exists x P(x)$

    (f) $\neg \forall x P(x)$

7. Para as seguintes afirmações, encontre um domínio de tal forma que a afirmação seja verdadeira e um domínio de tal forma que a afirmação seja falsa.

    (a) Todo o mundo está a estudar Estruturas Discretas.

    (b) Todos têm mais de 21 anos.

    (c) Duas pessoas diferentes não possuem a mesma avó.

    (d) Todo mundo fala Japonês.

    (e) Alguém conhece mais do que duas pessoas.

8. Traduza as seguintes afirmações em expressões lógicas utilizando predicados, quantificadores e conectores lógicos.

(a) Ninguém é perfeito.
(b) Nem todo o mundo é perfeito.
(c) Todos os teus amigos são perfeitos.
(d) Pelo menos, um dos teus amigos é perfeito.
(e) Alguém na tua sala foi nascido no século 21.
(f) Tudo está no sítio certo e em perfeitas condições.

9. Determine se $\forall x(P(x) \to Q(x))$ e $\forall x P(x) \to \forall x Q(x)$ são lógicamente equivalentes. Justifique a sua resposta.

Continua!!! (Lógica de predicados e Demonstrações)

Capítulo 2

Demonstrações, recorrência e análise de algoritmos

Exercícios - Conjuntos e funções

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $A - B$
   (d) $B - A$
2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 25\}$
   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$
   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$
   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$
3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?
   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$
   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$
   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.
   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação
   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação
   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

(d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$

   (b) $A \cap B \cap C$

   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

   (d) $A \cap (B - C)$

   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$

   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$

   (c) $\frac{1}{(n^2 - 4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$

   (b) $f(n) = n^2 + 1$

   (c) $f(n) = n^3$

   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel

   (b) Número de estudante

   (c) Nota final

   (d) Local de Nascimento

Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$

   (b) $f(x) = -3x^2 + 7$

   (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

   (d) $f(x) = x^5 + 1$

   (e) $f(x) = 2x + 1$

   (f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t|\exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s)|s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$

   (b) $f(x) = 2x + 1$

   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$

   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$

   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$

   (b) $(f \circ g)(5)$

   (c) $(g \circ f)(x)$

   (d) $(f \circ g)(x)$

(e) $(f \circ f)(x)$

(f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Continua!!! (Mais exercícios)

Capítulo 3

Conjuntos e combinatória

3.1 Conjuntos

Definição 1 (Notação de conjuntos)

3.1.1 Propriedades dos conjuntos

Teorema 1 (Regras algebraicas dos conjuntos)

Exemplo 1 (Diagramas de Venn e demostrações de equações de conjuntos)

Exemplo 2 (Métodos elementares de demonstração de equações de conjuntos)

Exemplo 3 (O método tabular para demostrações de equações de conjuntos)

Exemplo 4 (Demonstração algebraica)

3.1.2 Ordenação de conjuntos

Exemplo 5 (Ordem lexicográfica)

Exemplo 6 (Ordenação por dicionário em palavras ou cadeia de caracteres)

3.1.3 Subconjuntos

Teorema 2 (Fórmula do binómio coeficiente)

Teorema 3 (Número de listas ordenadas)

Exemplo 7 (Recursão binomial)

Definição 2 (Função característica)

Exemplo 8 (Subconjuntos como vectores (0,1))

Exemplo 9 (Vectores com elementos vectores)

3.1.4 Exercícios

3.2 Combinatória

Exercícios - Conjuntos e funções

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $A - B$
   (d) $B - A$
2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 25\}$
   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$
   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$
   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$
3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?
   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$
   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$
   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.
   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação
   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação
   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

(d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$

   (b) $A \cap B \cap C$

   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

   (d) $A \cap (B - C)$

   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$

   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$

   (c) $\frac{1}{(n^2-4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$

   (b) $f(n) = n^2 + 1$

   (c) $f(n) = n^3$

   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel

   (b) Número de estudante

   (c) Nota final

   (d) Local de Nascimento

Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$

   (b) $f(x) = -3x^2 + 7$

   (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

   (d) $f(x) = x^5 + 1$

   (e) $f(x) = 2x + 1$

   (f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t | \exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s) | s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$

   (b) $f(x) = 2x + 1$

   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$

   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$

   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$

   (b) $(f \circ g)(5)$

   (c) $(g \circ f)(x)$

   (d) $(f \circ g)(x)$

(e) $(f \circ f)(x)$

(f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Continua!!! (Mais exercícios)

Capítulo 4

Funções

4.1 Funções

Definição X (Função)

Exemplo X (Funções como relações)

Definição X (Notção de uma linha)

Exemplo X (Utilizando a notação)

Exemplo X (Funções de contagem)

Definição X (Tipo de funções)

Exemplo X (Surjecções, injecções e bijecções como listas)

Exemplo X (Encriptação)

Exemplo X (Hashing)

Exemplo X (Notação de duas linhas)

Exemplo X (Composição de funções)

Exemplo X (Composição de permutações)

Teorema X (Permutação de cíclo)

Exemplo X (Utilizando a permutação de cíclo)

Definição X (Co-Imagem)

Teorema X (Estrutura de uma co-imagem)

Exemplo X (Partição de conjuntos)

Exemplo X (Contagem de funções pelo tamanho da imagem)

4.1.1 Exercícios

Exercícios - Conjuntos e funções

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $A \cap B$

   (b) $A \cup B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \land x^2 < 25\}$

   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$

   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \land x^2 = -1\}$

   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \land x^2 - 5x + 6 = 0\}$

3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?

   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$

   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$

   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.

   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação

   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação

   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

(d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$
   (b) $A \cap B$
   (c) $A - B$
   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$
   (b) $A \cap B \cap C$
   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$
   (d) $A \cap (B - C)$
   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$
   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$
   (c) $\frac{1}{(n^2 - 4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$
   (b) $f(n) = n^2 + 1$
   (c) $f(n) = n^3$
   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel
   (b) Número de estudante
   (c) Nota final
   (d) Local de Nascimento

Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$

   (b) $f(x) = -3x^2 + 7$

   (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

   (d) $f(x) = x^5 + 1$

   (e) $f(x) = 2x + 1$

   (f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t|\exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s)|s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$

   (b) $f(x) = 2x + 1$

   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$

   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$

   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$

   (b) $(f \circ g)(5)$

   (c) $(g \circ f)(x)$

   (d) $(f \circ g)(x)$

(e) $(f \circ f)(x)$

(f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Continua!!! (Mais exercícios)

Capítulo 5

Sequências

Exercícios - Conjuntos e funções

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $A \cap B$

   (b) $A \cup B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 25\}$

   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$

   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$

   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$

3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?

   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$

   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$

   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.

   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação

   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação

   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

(d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$

   (b) $A \cap B \cap C$

   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

   (d) $A \cap (B - C)$

   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$

   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$

   (c) $\frac{1}{(n^2-4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$

   (b) $f(n) = n^2 + 1$

   (c) $f(n) = n^3$

   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel

   (b) Número de estudante

   (c) Nota final

   (d) Local de Nascimento

Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$

   (b) $f(x) = -3x^2 + 7$

   (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$

   (d) $f(x) = x^5 + 1$

   (e) $f(x) = 2x + 1$

   (f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t | \exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s) | s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$

   (b) $f(x) = 2x + 1$

   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$

   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$

   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$

   (b) $(f \circ g)(5)$

   (c) $(g \circ f)(x)$

   (d) $(f \circ g)(x)$

(e) $(f \circ f)(x)$

(f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Continua!!! (Mais exercícios)

Capítulo 6

Relações

Relações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos. Todos dias lidamos com relações como por exemplo: uma pessoa e o seu número de telemóvel, um empregado(a) e o seu salário, etc. Em matemática estudamos relações como as que existem entre um número inteiro positivo e um seu divisor, um inteiro e o seu quadrado, um valor real x e o valor $f(x)$ onde f é uma função, etc.

As relações são representadas utilizando uma estrutura chamada de *relação*, que é simplesmente um subconjunto do produto cartesiano de conjuntos. As relações podem ser utilizadas para resolver problemas tais como: determinar quais pares de cidade estão ligadas pela mesma companhia área numa rede, armazenamento de informações em bases de dados, etc.

6.1 Relações e suas propriedades

A forma mais directa de expressar uma relação entre elemento de dois conjuntos é por utilizar pares ordenados (dois elementos). Por esta razão, os conjuntos de pares ordenados são chamados de *relações binárias.* Nesta secção apresentamos a terminologia básica utilizada para descrever as relações binárias.

Definição 1 Sejam A e B conjuntos, uma relação binária de A para B é um subconjunto de $A \times B$

Por outras palavras uma relação binária de A para B é um conjunto R de pares ordenados onde o primeiro elemento de cada par ordenado provem de A e o segundo elemento provem de B. Utilizamos a notação aRb para denotar que $(a, b) \in R$ e $a \not R b$ para denotar que $(a, b) \notin R$. Além disso, quando (a, b) pertecem a R, dizemos que *a está relacionado* a b por intermédio de R.

As relações binárias representam relacionamentos entre elementos de dois conjuntos. Apresentaremos mais adiante as relações n-árias que expressam relacionamentos entre elementos de mais de dois conjuntos. Iremos omitir a palavra *binária* sempre que não houver perigo de má interpretação. Os exemplos a seguir ilustram o conceito de *relação*.

Exemplo 1 Sejam A o conjunto dos estudantes da tua escola, e B o conjunto das disciplinas. Seja R a a relação que consite nos pares (a, b), onde a

é um estudante inscrito na disciplina b. Por exemplo, se João e David estão inscritos na disciplina de Estruturas Discretas (ED), os pares (João, ED) e (David, ED) pertecem a R. Note que se David não está inscrito na disciplina de ED, então o par (David, ED) não pertence a R. Se um estudante não está inscrito em nenhuma disciplina, não existirá nenhum par em R com este estudante como primeiro elemento. Da mesma forma se uma disciplina não existe não existirá nenhum par em R com esta discplina como segundo elemento.

Exemplo 2 Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$, então $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ é uma relação de A para B. Isto significa que, por exemplo, $0Ra$, mas $1 \not R b$.. Continua

6.2 Relações n-árias

6.3 Representação de relações

6.3.1 Introdução

Nota: Nesta secção, utilizaremos sómente as relações binárias. Por esta razão a palavra relação irá apenas referir-se a relações bináris.

Existem muitas formas de representar uma relação entre conjuntos finitos. Uma forma é por listar os pares ordenados. Outra forma de representar uma relação é por meio de tabelas como vimos na secção anterior. Nesta secção vamos apresentar dois métodos de representação alternativos: matrizes zero-um e gráfos direccionados. No geral, as matrizes são apropriadas para a representação de relações em programas de computador. Por outro lado, algumas pessoas acham a representação de relações utilizando grafos direcconados mais útil ao entendimento das propriedades dessas relações.

6.3.2 Representação de relações por meio de matrizes

A relação entre conjuntos finitos pode ser representada utilizando matrizes zero-um. Suponha que R é uma relação de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ para $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. (Aqui os elementos dos conjuntos A e B são listados duma forma particular, embora arbitrária. Além dos maais, quando $A = B$ utilizamos a mesma ordenação para A e B.) A relação R pode ser representada pela matriz $M_R = [m_{ij}]$,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (a_i, b_j) & \in R, \\ 0 \text{ se } (a_i, b_j) & \notin R. \end{cases}$$

Por outras palavras, a matriz zero-um que representa R tem o valor 1 em (i, j) quando a_i está relacionado a b_j, e o valor 0 nesta posição se a_i não está relacionado a b_j. Esta representação depende da ordem utilizada para A e B. A utilização de matrizes para representar relações é ilustrados no exemplos a seguir.

Exemplo 1 Suponha que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B contendo os pares (a, b) se $a \in A$, $b \in B$ e $a > b$. Qual é matriz que representa R se $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $b_1 = 1$ e $b_2 = 2$?

Solução: Como $R = \{(2,1),(3,1),(3,2)\}$, a matriz para R é:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os 1s em M_R mostram que os pares $(2,1),(3,1)$ e $(3,2)$ pertencem a R. Os 0s mostram que os outros pares não pertencem a R.

Exemplo 2 Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, quais pares ordenados estão na relação R representada pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Solução Como R consiste nos pares ordenados (a_i, b_j) com $m_{ij} = 1$ daí resulta que $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a2, b3), (a2, b4), (a3, b1), (a3, b3), (a3, b5)\}$

A matriz de uma relação em um conjunto, que é uma matriz quadrada, pode ser utilizada para determinar se a relação possui certas propriedades. Sabemos que uma relação R num conjunto A é reflexiva se $(a,a) \in R$ sempre que $a \in A$, então, R é reflexiva se e somente se $(a_i, a_i) \in R$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, R é reflexiva se e somente se $m_{ii} = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por outras palavras, R é reflexiva se todos os elementos da diagonal principal de M_R são iguais a 1, como ilustrado na Figura 6.1. Note que os elementos fora da diagonal podem ser $0s$ ou $1s$.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 6.1: A matriz zero-um para uma relação reflexiva. (Os elementos fora da diagonal podem ser 0 ou 1.)

A relação R é simétrica se $(a,b) \in R$ implica que $(b,a) \in R$. Consequentemente, a relação R no conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é simétrica se e somente se $(a_j, a_i) \in R$ sempre que $(a_i, a_j) \in R$. Em termos dos valores de M_R, R é simétrica se e somente se $m_{ji} = 1$ sempre que $m_{ij} = 1$. Isto também significa que $m_{ji} = 0$ sempre que $m_{ij} = 0$. Consequentemente, R é simétrica se e somente se $m_{ij} = m_{ji}$, para todos os pares de inteiros i e j com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. R é simétrica se e somente se $M_R = (M_R)^t$ onde $(M_R)^t$ é matriz transposta de M_R.

A relação R é antissimétrica se e somente se $(a,b) \in R$ e $(b,a) \in R$ implica que $a = b$. Consequentemente, a matrix de uma relação antissimétrica tem a propriedade de que se $m_{ij} = 1$ com $i \neq j$, então $m_{ji} = 0$. Ou, em outras palavras, $m_{ij} = 0$ ou $m_{ji} = 0$ quando $i \neq j$. A forma da matriz para uma relação antissimétrica é ilustrada na Figura 6.2.

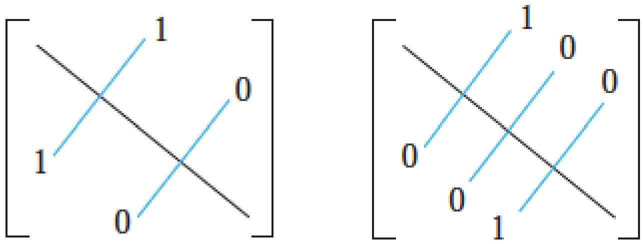

Figura 6.2: A matriz zero-um para uma relação simétrica e antissimétrica.

Suppose that the relation R on a set is represented by the matrix

Exemplo 3 Suponha que a relação R é representada pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

R é reflexiva, simétrica e/ou antisimétrica?

Solução: Como todas os elementos das diagonais nesta matriz são iguais a 1, R é reflexiva. Além do mais, como M_R é simétrica, então R é simétrica. É também fácil notar que R não é antissimétrica.

As operações booleanas estudados anteriormente também podem ser utilizados para encontrar as matrizes que representam a união e a intersecção de duas relações. Suponha que R_1 e R_2 são relações num conjunto A representada pelas matrizes M_{R_1} e M_{R_2}, respectivamente. A matriz que representa a união destas duas relações possui o valor 1 nas posições em que M_{R_1} ou M_{R_2} possuem o valor 1. A matriz que representa a intersecção destas duas relações possui o valor 1 nas posições em que M_{R_1} e M_{R_2} possuem o valor 1. Sendo assim, as matrizes que representam a união e a intersecção destas duas relações são

$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$ e $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$

6.3.3 Representação de relações por meio de grafos direccionados

Vimos anteriormente que uma relação pode ser representada por uma listagem de todos os seus pares ordenados ou por meio de uma matriz zero-um. Existe outra forma importante de representar uma relação utilizando uma representação pictural. Cada elemente do conjunto é representado por um ponto, e cada par ordenado é representado utilizando um arco cuja direcção indicada por uma seta. Utilizamos essa representação sempre que utilizamos uma relação num conjunto finito como um grafo direccionado ou dígrafos.

Definição 1 Um *grafo direccionado*, ou *dígrafo*, consiste num conjunto V de *vértices* (ou *nós*) e um conjunto E pares ordenados dos elementos de V

chamados de *arestas* (ou *arcos*). O vértice a é chamado de *vértice inicial* da aresta (a, b), e o vértice b é chamado de *vértice terminal* desta aresta.

Uma aresta da forma (a, a) é representada utilizando um arco do vértice a de volta à sí mesmo. Tal aresta é chamada de **laço** ou **loop**.

Exemplo 4 O grafo direccionado com os vértices a, b, c e d e as arestas $(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a)(c, b)$ e $(d, b) apresentada na Figura 6.3$

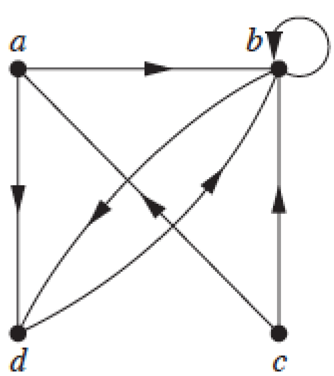

Figura 6.3: Um grafo direccionado.

A relação R no conjunto A é representada pelo grafo ordenado que possui elementos de A como seus vértices e os pares ordenados (a, b), onde $(a, b) \in R$, como arestas. Esta atribuição configura uma correspondência um-para-um entre as relações no conjunto A e os grafos direcionados que possuem A como o seu conjunto de vértices. Assim, cada afirmação sobre relações corresponde a uma afirmação sobre grafos direccionados, e vice-versa. Grafos direccioandos fornecem uma exibição visual das relações e por isso são utilizados no estudo das relações e de suas propriedades. A utilização de grafos direccionados na represetntação de relações num conjunto é ilustrada nos seguintes exemplos.

The directed graph of the relation

on the set 1, 2, 3, 4 is shown in Figure 4.

Exemplo 5 O grafo direccionado da relação
$R = (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$
no conjunto $1, 2, 3, 4$ é ilustrado na Figura 6.4

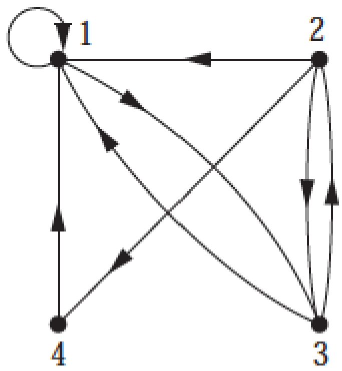

Figura 6.4: Um grafo direccionado.

Exemplo 6 Quais são os pares ordenados na relação R que representada pelo grafo direccionado da Figura 6.5

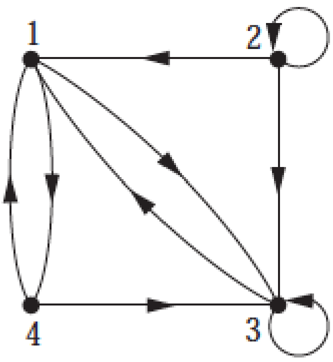

Figura 6.5: Um grafo direccionado da relação R.

Solução: Os pares ordenados (x, y) na relação na relação são
$R = (1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)$

Cada um destes pares corresponde à uma aresta do grafo direccionado sendo $(2,2)$ e $(3,3)$ dois laços.

O grafo direccionado que representa uma relação pode ser utilizado para determinar se a relação possui certas propriedades. Por exemplo, a relação é reflexiva se e somente se existe um laço em cada vértice do grafo direccionado, de tal forma que todos os pares ordenados da forma (x, x) ocorrem na relação. A relação é simétrica se e somente se para cada aresta entre vértices distintos no digrafo existe uma aresta na direcção oposta, tal que (y, x) existe na relação sempre que (x, y) existe na relação. Da mesma forma, uma relação é antissimétrica se e somente se não existem duas arestas em direcções opostas entre vértices distintos. Finalmente, uma relação é transitiva se e somente se semprque que existe uma aresta de um vértice x para um vértice y e uma aresta de um vértice y para um vértice z, existe uma aresta de x para z (completando um triângulo onde cada lado é aresta direccionada correctamente).

Exemplo 7 Determine se os grafos direccionados apresentados nas Figuras 6.6 e 6.7 são reflexivos, simétricos, antissimétricos e/ou transitivos.

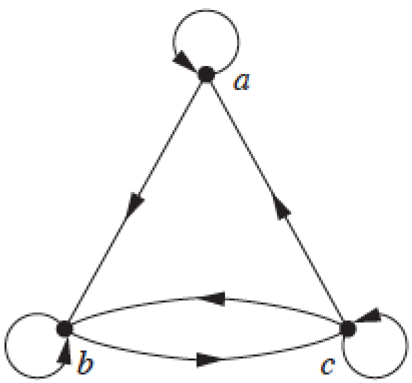

Figura 6.6: Um grafo direccionado da relação R.

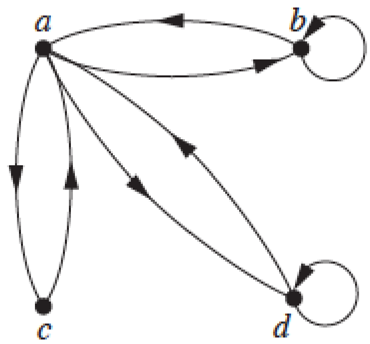

Figura 6.7: Um grafo direccionado da relação S.

Solução: Como existem laços em todos os vértices do grafo direccionado de R, ele é reflexivo. R não é simétrica nem anti-simétrica porque existe uma aresta de a para b mas não de b para a, mas existem arestas em ambas direcções que conectam b e c. Finalmente, R não é transitiva porque existe uma aresta de a para b e uma aresta de b para c, mas não existe uma aresta de a para c. Como não existem laços em todo os vértices do grafo direccionado de S, esta relação não é reflexiva. É simétrica mas não antissimétrica, porque cada aresta entre vértices distintos é acompanhada por uma aresta na direcção oposta. Não é díficil notar também que o grafo direccionado de S não é transitivo, porque (c, a) e (a, b) pertencem a S, mas (c, b) não pertence a S.

Estudaremos os grafos em mais detalhnes no próximo capítulo.

6.4 Fechamento de relações

6.4.1 Introdução

Uma rede de computadores de uma empresa possui centros de dados em Benguela, Bengo, Cabinda, Cunene, Huíla e Luanda. Existem ligações directas de Benguela para o Bengo, de Benguela para o Bengo, de Benguela para Cunene, do Bengo para o Cunene, de Cunene para Cabinda e da Huíla para Luanda. Seja R a relação que contém (a, b) se existe uma ligação do centro de dados em a com o centro de dados em b, como podemos determinar se existe uma ligação (possívelmente indirecta) composta de uma ou mais linhas de um centro para outro? Como nem todas as ligações são directas, tal como a ligação de Benguela para Cabinda que passa por Cunene, R não pode ser utilizada directamente para responder esta questão. Na linguagem das relações, R não é transitiva, portanto não contém todos os pares que podem ser ligado. Tal como iremos mostrar nesta secção, é possível achar todos os pares de centros de dados que possuem um link por construír uma relação transitiva S que contém R tal que S é um subconjunto de todas as relações transitivas que contêm R.

6.5 Relações de equivalência

6.6 Ordens parciais

6.6.1 Exercícios

Relações

Relações e suas propriedades

For each of these relations on the set 1, 2, 3, 4, decide whether it is reflexive, whether it is symmetric, whether it is antisymmetric, and whether it is transitive.

1. Liste os pares ordendados na relação R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ para $B = \{0, 1, 2, 3\}$ onde $(a, b) \in R$ se e somente se

   (a) $a = b$

   (b) $a + b = 4$

   (c) $a > b$

   (d) $a|b$

   (e) $mdc(a, b) = 1$

   (f) $mmc(a, b) = 2$

2. Para cada uma das relações no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ indiqye se são: reflexivas, simétricas, antissimétricas e transitivas

   (a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

   (b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

   (c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$

   (d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

   (e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

   (f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

   a is taller than b. b) a and b were born on the same day. c) a has the same first name as b. d) a and b have a common grandparent.

3. Determine se a relação R conjunto de todas as pessoas é reflexiva, simétrica, antissimétrica, e/ou transitiva, onde $(a, b) \in R$ se e somente se

   (a) a é mais alto que b

   (b) a e b onde

Representação de relações

Continua!!! (Mais exercícios)

Capítulo 7

Grafos

Exercícios - Conjuntos e funções

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $A - B$
   (d) $B - A$

2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 25\}$
   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$
   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$
   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$

3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?
   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$
   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$
   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.
   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação
   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação
   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

(d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$

   (b) $A \cap B \cap C$

   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

   (d) $A \cap (B - C)$

   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$

   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$

   (c) $\frac{1}{(n^2 - 4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$

   (b) $f(n) = n^2 + 1$

   (c) $f(n) = n^3$

   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel

   (b) Número de estudante

   (c) Nota final

   (d) Local de Nascimento

Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$
   (b) $f(x) = -3x^2 + 7$
   (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$
   (d) $f(x) = x^5 + 1$
   (e) $f(x) = 2x + 1$
   (f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t|\exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s)|s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$
   (b) $f(x) = 2x + 1$
   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$
   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$
   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$
   (b) $(f \circ g)(5)$
   (c) $(g \circ f)(x)$
   (d) $(f \circ g)(x)$

(e) $(f \circ f)(x)$

(f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Continua!!! (Mais exercícios)

Capítulo 8

Árvores

Exercícios - Conjuntos e funções

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.
   (a) $A \cap B$
   (b) $A \cup B$
   (c) $A - B$
   (d) $B - A$
2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:
   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 25\}$
   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$
   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$
   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$
3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?
   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$
   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$
   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$
4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.
   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação
   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação
   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

(d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$

   (b) $A \cap B \cap C$

   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

   (d) $A \cap (B - C)$

   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$

   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$

   (c) $\frac{1}{(n^2 - 4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$

   (b) $f(n) = n^2 + 1$

   (c) $f(n) = n^3$

   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel

   (b) Número de estudante

   (c) Nota final

   (d) Local de Nascimento

Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$
   (b) $f(x) = -3x^2 + 7$
   (c) $f(x) = (x + 1)/(x + 2)$
   (d) $f(x) = x^5 + 1$
   (e) $f(x) = 2x + 1$
   (f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t|\exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s)|s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$
   (b) $f(x) = 2x + 1$
   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$
   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$
   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$
   (b) $(f \circ g)(5)$
   (c) $(g \circ f)(x)$
   (d) $(f \circ g)(x)$

(e) $(f \circ f)(x)$

(f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Continua!!! (Mais exercícios)

Consideraçõres finais