Estruturas Discretas

Programa da disciplina

Actualização de: 2017-09-24 07:32:00+01:00

Dizando Norton

DEI - Ciência da Computação

Faculdade de Ciências - Universidade Agostinho Neto

Conteúdo

Programa da disciplina

Descrição

Esta displicina é uma introdução à conceitos de matemática discreta e estruturas discretas tal como são utilizadas em Ciência da Computação. As técnicas apresentadas no curso permitem aos estudantes aplicar o pensamento lógico e matemático na resolução de problemas. Os tópicos incluem: lógica proposicional e de predicados, funções, relações, conjuntos, técnicas de demonstração, grafos e árvores. De acordo a disponibilidade de tempo, serão apresentados outros tópicos mais avançados.

Objectivos

Ao completar a disciplina, os estudantes deverão ser capazes de:

- Aplicar métodos formais da lógica proposicional e de predicados
- Descrever a importância e limitações da lógica de predicados
- Descrever como métodos formais de lógica simbólica são utilizados para modelar algoritmos reais
- Utilizar demonstrações lógicas para resolver problemas
- Desenvolver algoritmos recursivos baseados em indução matemática
- Explicar a terminologia básica das funções, relações e conjuntos
- Perceber os conceitos básicos sobre a teoria dos grafos e algoritmos relacionados

No geral, espera-se que os estudantes sejam capazes de aplicar estes métodos em outros tópicos do curso de Ciência da Computação tais como no desenho e análise de algoritmos e engenharia de *software*.

Tópicos

1. Lógica formal
2. Demonstrações, recorrência e análise de algoritmos
3. Conjuntos e combinatória

4. Funções, relações e matrizes
5. Gráfos e árvores
6. Álgebra de Boole e lógica computacional

Avaliação

- Avaliação contínua (Participação, Presença, Exercícios, Provas parcelares e Projecto): 40%
- Exame final: 60%

Os exercícios serão fornecidos nas aulas ou publicados no *website* da cadeira. Os estudantes são fortemente encorajados a resolvê-los pois os mesmos irão ajudar a entender melhor os tópicos tratados nas aulas.

Pré-requisitos

Conhecimentos básicos de lógica e de simbolização matemática.

Regras

- Requer-se que os estudantes leiam os acetatos/fascículos antes das aulas
- A participação nas aulas é essencial para a compreensão da matéria. A assistência às aulas é de sua inteira responsabilidade
- Todas as provas e exames são obrigatórios, excepto por razões devidamente justificadas. Uma ausência não justificada, equivale a nota zero na referida avaliação.

Agenda (sujeita à alterações)

Semana	Intervalo	Tópicos
1	31 de Julho - 4 de Agosto–	
2	7 - 11 de Agosto	–
3	14 - 18 de Agosto	–
4	28 de Agosto - 1 de Setembro –	
5	4 - 8 de Setembro –	
6	11 - 15 de Setembro	–
7	18 - 22 de Setembro	–
8	25 - 29 de Setembro	–
9	26 - 30 de Setembro	–
10	2 - 6 de Outubro	–
11	9 - 13 de Outubro	–
12	16 - 20 de Outubro	–
13	23 - 27 de Outubro	–
14	30 de Outubro - 3 de Novembro	–
15	6 - 10 de Novembro	–
16	13 - 17 de Novembro	–

Feriados e interrupções

- 21 - 25 de Agosto: pausa para as Eleições Presidênciais 2017
- 2 de Novembro: Dia dos Finados

Bibliografia

Título	Fundamentos matemáticos para a Ciência da Computação, 6a. Edição
Autor	Judith L. Gersting

Docente

Nome	Dizando Norton
Sala	CS119, Campus Universitário
Atendimento	Por agendamento
Telefone	919075381
E-mail	`dizando.norton@gmail.com`
Website	`www.dizando.me/ed2017`
Aulas	Consultem o horário para a vossa turma
Monitor	Nzuzi Solange (`n.solange@outlook.com`)

Capítulo 1

Lógica Formal

As regras da lógica fornecem o significado de expressões matemáticas. Por exemplo, estas regras nos ajudam a entender e a raciocinar sobre sentenças como *"Existe um inteiro que é a soma de dois quadrados"* e *"Para todo o inteiro positivo* n*, a soma dos positivos não maiores que* n *é* $n(n+1)/2$*"*. A lógica é a base do raciocínio matemático, e do raciocínio automatizado. Possui aplicações práticas no desenho de computadores, na especificação de sistemas, na Inteligêngia Artifical, na programação de computadores, nas linguagens de programação e outras áreas da Ciência da Computação bem como também em outras ciências e áreas de estudo.

Para entender a matemática, precisamos perceber o que constitui um argumento matemático correcto, isto é, uma prova ou demonstração. Uma vez que demonstramos que uma sentença matemática é verdadeira, nós a chamamos de teorema. Uma colecção de teoremas sobre um assunto ou tópico constitui o que sabemos sobre tal tópico. Então, para perceber um tópico matemático, é necessário activamente construir argumentos matemáticos sobre tal tópico. As demonstrações são muito comuns em mátematica e também em Ciência da Computação. Elas são utilizadas para verificar se os programas de computadores produzem a saída correcta para todos os valores de entrada possíveis, para verificar se os algoritmos produzem sempre a saída correcta, para determinar a segurança de um sistema e para criar inteligência artificial. Além disso, sistemas de raciocínio automatizados foram criados para permitir que os computadores construam as suas próprias demonstrações.

Neste capítulo, iremos apresentar o que constitui uma sentença matemática correcta e introduzir as ferramentas para a construção destes argumentos. Iremos estudar alguns métodos de demonstração e estratégias para a construção de demonstrações.

1.1 Lógica proposicional

As regras da lógica fornecem significados às sentenças ou argumentos matemáticos. Estas regras são utilizadas para distinguir um argumento matemático válido de um inválido.

Para além da sua importância na compreensão do raciocínio matemático, a lógica possui inúmeras aplicações em Ciência da Computação. Algumas dessas aplicações serão discutidas ao longo desta secção.

Proposições

Começamos a nossa discussão com uma introdução sobre o elemento básico da lógica - as proposições. Uma **proposição** é uma sentença declarativa (isto é, uma sentença que declara um facto) que pode ser verdadeira ou falsa, mas não ambas.

Exemplo 1.1.1. As seguintes sentenças declarativas são exemplos de proposições.

1. Luanda é a capital da República de Angola.
2. Angola possui 24 províncias.
3. $1 + 1 = 2$.
4. $1 + 2 < 1$.

As proposições 1 e 3 são verdadeiras, enquanto que as proposições 2 e 4 são falsas. Algumas sentenças que não são proposições são dadas no Exemplo 2.

Exemplo 1.1.2. Considere as seguintes sentenças.

1. Que horas são?
2. Leia isto atentamente.
3. $x + 1 = 2$.
4. $x + y = z$.

As sentenças 1 e 2 não são proposições porque não são sentenças declarativas. As sentenças 3 e 4 não são proposições porque ambas não são verdadeiras nem falsas. Note que as sentenças 3 e 4 podem ser transformadas em proposições se atribuir-mos valores às variáveis x e y.

Utilizamos letras para denotar as **variáveis proposicionais** (ou **variáveis da expressão**), isto é, variáveis que representam proposições, tal como as letras são utilizadas para denotar valores numéricos. As letras convencionais utilizadas para variáveis proposicionais são $p, q, r, s, \ldots$. O **valor lógico** de uma proposição é verdadeiro, denotado por V, se a proposição for verdadeira. Consequentemente, o valor lógico de uma proposição é falso, denotado por F, se a proposição for falsa.

A área da lógica que trata das proposições é chamada de **cálculo proposicional** ou **lógica proposicional**. *TAREFA: Pesquisar sobre Aristotle e o Cálculo Proposicional.*

Muitas expressões matemáticas são construídas pela combinação de uma ou mais proposições. Novas proposições, chamadas de **proposições compostas**, são formadas a partir de proposições existentes utilizando os operadores lógicos.

Definição 1.1.1. (Negação) Seja p uma proposição. A *negação* de p, denotada por $\neg p$ (também denotada por $\bar{p}$), é a expressão

“Não é verdade que p”.

A proposição $\neg p$ lê-se “não p”. O valor lógico da negação de p, $\neg p$, é o oposto do valor lógico de p.

Exemplo 1.1.3. Encontre a negação da proposição

“O computador do Miguel possui o Sistema Operativo Linux.”

e a expresse em Português simples.

Solução A negação é: *“Não é verdade que o computador do Miguel possui o Sistema Operativo Linux.”*

Esta negação pode ser expressada de forma mais simples como: *“O computador do Miguel não possui o Sistema Operativo Linux.”*

A tabela 1.1.1 apresenta a **tabela de verdade** para a negação de uma proposição p. Esta tabela possui uma linha para cada um dos valores lógicos possíveis para a proposição p. Cada linha apresenta o valor lógico de $\neg p$ correspondente ao valor lógico de p para esta linha.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabela 1.1.1: A tabela de verdade da negação de uma proposição.

A negação de uma proposição pode ser também considerada como o resultado da acção do **operador de negação** numa proposição. O operador de negação constrói uma nova proposição a partir de uma única proposição. Iremos agora apresentar os operadores lógicos que são utilizados para formar novas proposições a partir de duas ou mais proposições existentes. Estes operadores lógicos também são chamados de **conectores**.

Definição 1.1.2. (Conjunção) Sejam as proposições p e q. A *conjunção* de p e q, denotada por $p \wedge q$, é a proposição “p e q”. A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando ambos p e q são verdadeiros e falsa em caso contrário.

A tabela 1.1.2 apresenta a tabela de verdade de $p \wedge q$. Esta tabela possui uma linha para cada um das quatro possíveis combinações dos valores lógicos de p e q. As quatro linhas correspondem aos pares dos valores lógicos VV, VF, FV e FF, onde o primeiro valor lógico no par é o valor lógico de p e o segundo valor lógico é o valor lógico de q.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabela 1.1.2: A tabela de verdade da conjunção de duas proposições.

Exemplo 1.1.4. Encontre a conjunção das proposições p e q onde p é a proposição *"O computador da Rebecca possui mais de 16 GB de espaço livre em disco"* e q é a proposição *"O processador no computador da Rebecca tem uma velocidade maior que 1 GHz."*.

Solução A conjunção destas duas proposições, $p \wedge q$, é a proposição *"O computador da Rebecca possui mais de 16 GB de espaço livre em disco e o seu processador tem uma velocidade maior que 1 GHz."* Para esta conjunção ser verdadeira ambas as condições dadas devem ser verdadeiras. É falsa quando uma ou ambas as condições são falsas.

Definição 1.1.3. (Disjunção) Sejam as proposições p e q. A *disjunção* de p e q, denotada por $p \vee q$, é a proposição "p ou q". A disjunção $p \vee q$ é falsa quando ambos p e q são falsos, e verdadeira em caso contrário.

A tabela 1.1.3 apresenta a tabela de verdade de $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.1.3: A tabela de verdade da disjunção de duas proposições.

A utilização do conector *ou* numa disjunção corresponde a uma das utilizações da palavra *ou* na Língua Portuguesa, nomeadamente, como um **ou inclusivo**. A disjunção é verdadeira quando pelo menos uma das duas proposições é verdadeira. Por exemplo, o "ou inclusivo" é utilizado na expressão:

"Os estudantes aprovados em Análise ou Álgebra podem frequentar esta aula."

Aqui, queremos dizer que os estudantes que aprovaram em Análise e Álgebra podem assistir a esta aula, bem como os estudantes que aprovaram em pelo menos uma delas. Por outro lado, estaremos a utilizar um "ou exclusivo" quando dizemos:

"Os estudantes aprovados em Análise ou Álgebra, mas não em ambas, podem frequentar esta aula."

Aqui, queremos dizer que os estudantes que aprovaram em Análise e Álgebra não podem assisir a esta aula. Apenas estes que aprovaram em exactamente uma das duas disciplinas podem assistir à esta aula.

Exemplo 1.1.5. Qual é a disjunção das proposições p e q onde p e q são as mesmas proposições utilizadas no exemplo 1.1.4?

Solução A disjunção das proposições p e q, $p \vee q$, é a proposição

"O computador da Rebecca possui mais de 16 GB de espaço livre em disco

ou o processador do seu computador tem uma velocidade maior que 1 GHz."

Esta proposição é verdadeira quando o computador de Rebecca possuir mais de 16 GB de espaço livre em disco, o processador possuir uma velocidade maior que 1 GHz e quando ambas as condições forem verdadeiras. Será falsa quando ambas as condições forem falsas.

Definição 1.1.4. (Ou-Exclusivo ou Disjunção Exclusiva) Sejam as proposições p e q. A *disjunção exclusiva* de p e q, denotada por $p \oplus q$, é a proposição que é verdadeira quando exactamente apenas uma entre "p ou q" é verdadeira e falsa em caso contrário.

A tabela de verdade para a disjunção exclusiva de duas proposições é ilustrada na tabela 1.1.4.

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabela 1.1.4: A tabela de verdade da disjunção exclusiva de duas proposições.

Sentenças condicionais

Iremos agora abordar sobre outras formas importantes de combinar proposições.

Definição 1.1.5. (Sentença condicional) Sejam as proposições p e q. A *sentença condicional* de $p \to q$ é a proposição "se p, então q." A sentença condicional $p \to q$ é falsa quando p é verdadeiro e q é falso, e verdadeira em caso contrário. Na sentença condicional $p \to q$, p é chamado de "hipótese" (ou antecedente ou premissa) e q é chamado de conclusão (ou consequente).

A sentença $p \to q$ é chamada de sentença condicional porque $p \to q$ afirma que q é verdadeiro caso p se verifique. Uma sentença condicional é também chamada de **implicação**. A tabela de verdade para a sentença condicional $p \to q$ é apresentada na Tabela 1.1.5. Note que a expressão $p \to q$ é verdadeira quando ambos p e q são verdadeiros e quando p é falso (não importa qual seja o valor de q).

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabela 1.1.5: A tabela de verdade da sentença condicional $p \to q$.

Devido ao facto de as sentenças condicionais desempenharem um papel essêncial no raciocínio matemático, existe uma vasta gama de termos utilizados para expressar $p \to q$. Algumas destes termos são:

- "se p, então q"
- "p implica q"
- "se p, q"
- "q somente se p"
- "p é suficiente para q"
- "q se p"
- "q quando p"
- ...

Uma forma útil para entender uma tabela de verdade de uma sentença condicional é pensar numa obrigação ou contrato. Por exemplo, a promessa que muitos políticos fazem quando concorrem para uma determinada eleição é:

"Se eu for eleito, irei reduzir os impostos."

Se o político é eleito, os eleitores irão esperar que o político reduza os impostos. Além disso, se o político não for eleito, então os eleitores não terão expectativas que o mesmo político reduza os impostos, embora o político possa ter alguma influência para que tal aconteça. É apenas quando o político é eleito e não reduz os impostos que os eleitores podem dizer que o político não cumpriu com a sua promessa de campanha. Este último cenário corresponde ao caso em que p é verdadeiro mas q é falso em $p \to q$.

Exemplo 1.1.6. Seja p a sentença "Maria aprende Estruturas Discretas" e q a sentença "Maria conseguirá um bom emprego". Expresse a sentença $p \to q$ como uma sentença em Português.

Solução Da definição de sentenças condicionais, vemos que quando p é a expressão "Maria aprende Estruturas Discretas" e q a sentença "Maria conseguirá um bom emprego", $p \to q$ representa a sentença

"Se Maria aprende Estruturas Discretas, então ela encontrará um bom emprego."

Existem muitas outras formas de expressar esta sentença condicional em Português. As formais mais naturais poderiam ser:

- *"Maria encontrará um bom emprego quando ela aprender Estruturas Discretas".*
- *"Para Maria encontrar um bom emprego, é suficiente que ela aprenda Estruturas Discretas".*
- *"Maria encontrará um bom emprego, ao menos que ela não aprenda Estruturas Discretas".*

A forma como definimos as sentenças condicionais é mais geral do que o significado associado à estas sentenças na Língua Portuguesa. Por exemplo, a sentença condiconal

"Se estiver a chover, então iremos à praia"

é uma sentença utilizada na linguagem normal onde existe uma relação entre a hipótese e a conclusão. Por outro lado, a sentença

"Se João tem um telemóvel, então $2 + 3 = 5$*"*

é verdadeira pela definição de sentença condicional, porque a sua conclusão/consequente é verdadeira/o. (O valor lógico da hipótese ficaria sem efeito).

A sentença condicional

"Se João tem um telemóvel, então $2 + 3 = 6$*"*

é verdade se João não possui um telemóvel, embora $2 + 3 = 6$ seja falso. Não utilizaríamos estas duas sentenças condicionais em linguagem natural (excepto em sarcasmo), porque não existe relação entre a hipótese e a conclusão em nenhuma das sentenças. O conceito matemático sobre sentenças condicionais é independente de uma relação de causa-efeito entre uma hipótese e uma conclusão. A nossa definição de sentença condicional especifica apenas valores lógicos; não é baseada na utilização dada na língua Portuguesa. A linguagem proposicional é uma linguagem artificial.

Conversa, Contrapositiva e Inversa

Podemos formar novas sentenças condicionais partindo da sentença condicional $p \to q$. Em particular, existem três sentenças condicionais relacionadas que por ocorrerem frequentemente receberam nomes especiais. A proposição $q \to p$ é chamada de **conversa** de $p \to q$. A **contrapositiva** de $p \to q$ é a proposição $\neg q \to \neg p$. A proposição $\neg p \to \neg q$ é chamada de **inversa** de $p \to q$. Veremos que destas três sentenças condicionais formadas a partir de $p \to q$ apenas a contrapositiva possui sempre o mesmo valor que $p \to q$.

Primeiro demonstraremos que a contrapositiva, $\neg q \to \neg p$, de uma sentença condicional $p \to q$ possui sempre o mesmo valor lógico que $p \to q$. Para verificar isto, note que a contrapositiva é falsa apenas quando $\neg p$ é falso e $\neg q$ é verdadeiro, isto é, quando p é verdadeiro e q é falso. Agora demonstraremos que nem a conversa, $q \to p$, nem a inversa, $\neg p \to \neg q$, possuem o mesmo valor lógico que $p \to q$ para todos valores lógicos possíveis de p e q. Note que quando p é verdadeiro e q é falso, a sentença condicional original é falsa, mas a conversa e a inversa são ambas verdadeiras. Quando duas proposições compostas possuem o mesmo valor lógico dissemos que elas são **equivalentes**.

Para ilustrar a utilização de sentenças condicionais temos o exemplo 1.1.7.

Exemplo 1.1.7. Quais são, a contrapositiva, a conversa e a inversa da sentença condicional

"A equipa da casa vence sempre que chove"

Solução Como "q sempre que p" é uma das formas de expressar uma sentença condicional $p \to q$, a sentença original pode ser reescrita como:

"Se estiver a chover, então a equipa da casa vence."

Consequentemente, a contrapositiva desta sentença condicional é:

"Se a equipa da casa não vence, então não está a chover".

A conversa é:

"Se a equipa da casa vence, então está a chover"

A inversa é:

"Se não está a chover, então a equipa da casa não vence".

Definição 1.1.6. (Bicondicional) Sejam as proposições p e q. A *sentença bicondicional* $p \leftrightarrow q$ é a proposição "p se e somente se q." A sentença bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando p e q possuem os mesmos valores lógicos, e é falsa no caso contrario. As sentenças bicondicionais são também chamadas de dupla-implicações.

A tablela de verdade para $p \leftrightarrow q$ é apresentada na tabela 1.1.6.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabela 1.1.6: A tabela de verdade da sentença bicondicional $p \leftrightarrow q$.

Note que a expressão $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando ambas sentenças condicionais $p \to q$ e $q \to p$ são verdadeiras e falsas no caso contrário. Esta é a razao da utilização das palavras "se e somente se" para expressar esta conexão lógica e também da utilização da combinação dos símbolos $\to$ e $\leftarrow$. Existem algumas formas comuns de expressar $p \leftrightarrow q$.

- *"p é necessário e suficiente para q"*
- *"Se p então q, e vice-versa"*
- *"p sse q".*

Note que $p \leftrightarrow q$ possui o mesmo valor lógico que $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

Exemplo 1.1.8. Seja p a sentença *"Podes viajar"* e q a sentença *"Compras o bilhete".* Então $p \leftrightarrow q$ é a expressão *"Podes viajar se e somente se compras o bilhete".* Esta sentença é verdadeira se p e q são ambos verdadeiros ou ambos falsos, isto é, se compras um bilhete e podes viajar ou se não compras o bilhete e não podes viajar. É falsa quando p e q possuem valores lógicos opostos.

Tabelas de Verdade de Proposições Compostas

Até agora estudamos 4 conectores lógicos importantes - conjunções, disjunções, sentenças condicionais, e sentenças bicondicionais - e também as negações. Podemos utilizar estes conectores para construír proposições compostas complexas que envolvem um elevado número de variáveis proposicionais. Podemos utilizar tabelas de verdade para determinar os valores lógicos destas proposições compostas, como o exemplo abaixo ilustra. Utilizamos uma coluna separada para encontrar o valor lógico de cada expressão composta que ocorre na proposição composta. Os valores lógicos da proposição composta para cada combinação de valores lógicos das variáveis proposicioanis nesta expressão é encontrado na última coluna da tabela.

Exemplo 1.1.9. Construa a tabela de verdade para a proposição composta

$$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q).$$

Solução Como esta tabela involve duas variáveis proposicionais p e q, teremos quatro linhas nesta tabela de verdade, uma para cada par de valores lógicos VV, VF, FV, FF. As primeiras duas colunas são utilizadas para para os valores lógicos de p e q, respectivamente. Na terceira coluna encontramos o valor lógico $\neg q$, necessários para encontrar o valor lógico de $p \vee \neg q$, encontrados na quarta coluna. A quinta coluna fornece os valores lógicos de $p \wedge q$. Finalmente, o valor lógico de $(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$ é encontrado na última coluna. A tabela de verdade resultante é:

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \wedge q$	$(p \vee \neg q) \to (p \wedge q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Tabela 1.1.7: Tabela de verdade $(p \vee q) \to (p \wedge q)$.

Precedência dos operadores lógicos

Podemos construír proposições compostas utilizando o operador de negação e os operadores lógicos definidos até agora. No geral, utilizaremos os parêntesis para especificar a ordem na qual os operadores lógicos numa proposição composta serão aplicados. Por exemplo, $(p \vee q) \wedge (\neg r)$ é a conjunção de $p \vee q$ e $\neg r$. No entanto, para reduzir o número de parêntesis, especificamos que o operador de negação é aplicado antes dos outros operadores lógicos. Isto significa que $\neg p \wedge q$ é a conjunção de $\neg p$ e q, nomeadamente, $(\neg p) \wedge \neg q$, e não a negação da conjunção de p e q, nomeadamente, $\neg(p \wedge q)$.

Outra regra geral das precedências é que o operador de conjunção possui precedência sobre o operador de disjunção, tal que $p \wedge q \vee r$ significa $(p \wedge q) \vee r$ em vez de $p \wedge (q \vee r)$. Como esta regra é difícil de lembrar, iremos utilizar parêntesis para que a ordem dos operadores de disjunção e conjunção seja clara.

Finalmente, é uma regra aceite que os operadores de condicional e bicondicional, $\to$ e $\leftrightarrow$, possuem baixa precedência com relação os operadores de conjunção e disjunção. Consequentemente, $p \vee q \to r$ é o mesmo que $(p \vee q) \to r$. Iremos utilizar parentêsis quando a ordem do operador condicional e bicondicional estiver em questão, embora o operador condicional tenha maior prioridade que o operador bicondicional. A tabela 1.1.8 apresenta os níveis de precedência dos operadores lógicos, $\neg, \wedge, \vee$ e $\leftrightarrow$.

Operador	**Precedência**
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\to$	4
$\leftrightarrow$	5

Tabela 1.1.8: Precedência dos operadores lógicos.

1.2 Equivalências proposicionais

Um passo muito importante utilizado num argumento matemático é a substituição de uma sentença por outra com o mesmo valor lógico. Por causa disso, métodos que produzem proposições com o mesmo valor lógico que uma dada proposição composta são extensivamente utilizados na construção de argumentos matemáticos. Note que iremos utilizar o termo "proposição composta" para nos referir à uma expressão formada a partir de variáveis proposicionais utilizando operadores lógicos, como $p \wedge q$.

Começamos por classificar as proposições compostas de acordo aos seus valores lógicos possíveis.

Definição 1.2.1. (Tautologia, Contradição e Contingência) Uma proposição composta que é sempre verdadeira, não importando valor lógicos das variáveis proposicionais que a compoêm, é chamada de *tautologia*. Uma proposição composta que é sempre falsa é chamada de *contradição*. A proposição composta que não é nem uma tautologia nem uma contradição é chamada de *contingência*.

Tautologias e contradições são geralmente importantes no raciocínio matemático. O exemplo 1.2.1 ilustra estes dois tipos de proposições compostas.

Exemplo 1.2.1. Podemos construir exemplos de tautologias e contradições utilizando apenas uma variável proposicional. Considere as tabelas de verdade de $p \vee \neg p$ e $p \wedge \neg p$, apresentadas na tabela 1.2.1. Como $p \vee \neg p$ é sempre verdadeiro, é uma tautologia. Como $p \wedge \neg p$ é sempre falso, é uma contradição.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

Tabela 1.2.1: Exemplo de uma Tautologia e de uma Contradição.

Equivalências Lógicas

Proposições compostas que possuem o mesmo valor lógico em todos os casos possíves são chamadas de **lógicamente equivalentes**. Também podemos definir este conceito da seguinte forma.

Definição 1.2.2. As proposições compostas p e q são chamadas de *lógicamente equivalentes* se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. A notação $p \equiv q$ denota que p e q são lógicamente equivalentes.

Nota: O símbolo $\equiv$ não é um conector lógico, e $p \equiv q$ não é uma proposição composta, mas sim a sentença que diz que $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. O símbolo $\iff$ é algumas vezes uilizado em detrimento de $\equiv$ para denotar equivalências lógicas.

Uma forma de determinar se duas proposições compostas são equivalentes é uma utilizar uma tabela de verdade. Em particular, as proposições compostas p e q são equivalentes se e sómente se os valores lógicos nas suas colunas são iguais. O exemplo 1.2.2 ilustra este método por estabelecer uma equivalência lógica extremamente importante e útil, nomeadamente, de $\neg(p \vee q)$ com $\neg p \wedge \neg q$. Esta equivalência lógica é uma das **leis de De Morgan**, apresentadas na tabela 1.2.3, em homenagem ao matemático Augustus De Morgan, do século 19.

Exemplo 1.2.2. Mostre que $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são lógicamente equivalentes.

Solução A tabela de verdade para estas proposições compostas é apresentada na tabela 1.2.2. Como os valores lógicos das proposições compostas $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \wedge \neg q$ são iguais para todas as combinações possíveis de p e q, concluímos que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ é uma tautologia e que estas proposições compostas são lógicamente equivalentes.

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Tabela 1.2.2: Tabela de verdade de $\neg(p \wedge q)$ e $\neg p \wedge \neg q$.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$
$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Tabela 1.2.3: Leis de De Morgan.

Exemplo 1.2.3. Mostre que $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ são lógicamente equivalentes.

Solução Construímos a tabela de verdade para estas proposições compostas na tabela 1.2.4. Como os valores lógicos de $\neg p \vee q$ e $p \rightarrow q$ são iguais, elas são lógicamente equivalentes.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \to q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Tabela 1.2.4: Tabelas de verdade de $\neg p \vee q$ e $p \to q$.

Exemplo 1.2.4. Mostre que $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são lógicamente equivalentes. Esta é a *lei distributiva* da disjunção sobre a conjunção.

Solução: Construímos a tabela de verdade destas proposições compostas na tabela 1.2.5. Como os valores lógicos de $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ iguais, estas duas proposições compostas são lógicamente equivalentes.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Tabela 1.2.5: Tabelas de verdade de $p \vee (q \wedge r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

A tabela 1.2.6 contém algumas equivalências importantes. Nestas equivalências, **V** denota a proposição composta que é sempre verdadeira e **F** denota a proposição composta que é sempre falsa.

Equivalência	**Nome**
$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Leis da Identidade
$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Leis da Dominância
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Leis da Idempotência
$\neg(\neg p) \equiv p$	Lei da Dupla Negação
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Leis Comutativas
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Leis Associativas
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Leis Distributivas
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	Leis de De Morgan
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Leis da Absorção
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Leis da Negação

Tabela 1.2.6: Equivalências Lógicas.

Apresentamos também algumas equivalências úteis que são compostas por proposições compostas que utilizam sentenças condicionais e bicondicionai nas tabelas 1.2.7 e 1.2.8, respectivamente. A verificação das mesmas fica como exercício para o estudante.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

Tabela 1.2.7: Equivalências Lógicas envolvendo sentenças condicionais.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Tabela 1.2.8: Equivalências Lógicas envolvendo sentenças bicondicionais.

Utilizando as leis de De Morgan

As duas equivalências lógicas conhecidas como as leis de De Morgan são particularmente importantes. Elas nos dizem como negar conjunções e disjunções. Em particular, a equivalência $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ nos diz que a negação de uma disjunção é formada pela conjunção das negações das proposições que a compoêm. Similarmente, a equivalência $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ nos diz que a negação da conjunção é formada pela disjunção das negações das proposições que a compoêm. O exemplo 1.2.5 ilustra a utilização das leis de De Morgan.

Exemplo 1.2.5. Utilize as leis de De Morgan para expressar as negações de "O Miguel possui um telemóvel e um laptop" e "A Manuela irá ao concerto ou Sérgio irá ao concerto".

Solução: Seja p a sentença "O Miguel possui um telemóvel" e q a sentença "Miguel possui um laptop". Então a sentença "O Miguel possui um telemóvel e um laptop" pode ser representada por $p \wedge q$. Pela primeira lei de De Morgan, $\neg(p \wedge q)$ é equivalente a $\neg p \vee \neg q$. Consequentemente, podemos expressar a negação da sentença original como "o Miguel não possui um telemóvel ou não possui um laptop".

Seja r "A Manuela irá ao concerto" e s "Sérgio irá ao concerto". Então "A Manuela irá ao concerto ou Sérgio irá ao concerto" pode ser representada por $r \vee s$. Pela segunda lei de De Morgan, $\neg(r \vee s)$ é equivalente a $\neg r \wedge \neg s$. Consequentemente, podemos expressar a negação da nossa sentença original como "A Manuela não irá ao concerto e o Sérgio não irá ao concerto".

Construíndo Novas Equivalências Lógicas

As equivalências lógicas apresentadas na tabela 1.2.6 e outras que foram estabelecidas (como as das tabelas 1.2.7 e 1.2.8), podem ser utilizadas para construír novas equivalências lógicas. A justificação disto é que uma proposição numa proposição composta pode ser substituída por outra proposição composta que seja lógicamente equivalente sem alterar os valores lógicos na proposição composta original. Esta técnica é ilustrada nos exemplos 1.2.6 à 1.2.7, onde também utilizamos o facto de que se p e q são logicamente equivalentes e q e r são lógicamente equivalentes, então, p e r são logicamente equivalentes.

Exemplo 1.2.6. Mostre que $\neg(p \to q)$ e $p \wedge \neg q$ são lógicamente equivalentes.

Solução: Poderíamos fácilmente utilizar uma tabela de verdade para provar que estas duas sentenças são lógicamente equivalentes (tal como fizemos anteriormente). No entanto, queremos ilustrar como utilizar as identidades lógicas que conhecemos para estabelecer novas identidades lógicas, que é algo de importância prática no estabelecimento de equivalências lógicas de proposições compostas com um número elevado de variáveis. Sendo assim, iremos estabelecer esta equivalência por desenvolver uma série de equivalências lógicas utilizando as equivalências da tabela 1.2.6 de cada vez, começando por $\neg(p \to q)$ e terminando em $p \wedge \neg q$. Temos as seguintes equivalências.

$$\begin{aligned}
\neg(p \to q) &\equiv \neg(\neg p \vee q) && \textit{pelo exemplo 1.2.3} \\
&\equiv \neg(\neg p) \wedge \neg q && \textit{pela segunda lei de De Morgan} \\
&\equiv p \wedge \neg q && \textit{pela lei da dupla negação}
\end{aligned}$$

Exemplo 1.2.7. Mostre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e $\neg p \wedge \neg q$ são lógicamente equivalentes por desenvolver uma série de equivalências lógicas.

Solução: Iremos utilizar uma das equivalências na tabela 1.2.6 uma de cada vez, começando por $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ e terminando com $\neg p \wedge \neg q$. Teremos as seguintes equivalências.

$$\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &\equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \textit{pela segunda lei de De Morgan} \\
&\equiv \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q] && \textit{pela primeira lei de De Morgan} \\
&\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \textit{pela lei da dupla negação} \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \textit{pela segunda lei distributiva} \\
&\equiv \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) && \textit{porque } \neg p \wedge p \equiv \boldsymbol{F} \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F} && \textit{pela lei comutativa da disjunção} \\
&\equiv \neg p \wedge \neg q && \textit{pela lei da identidade para } \boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

Satisfabilidade Proposicional

Um proposição composta é **satisfazível** se existe uma atribuição de valores lógicos às suas variáveis que a torna verdadeira. Quando tais atribuições não existem. isto é, quando a proposição composta é falsa para todas as atribuições de valores lógicos às variáveis, a proposição composta é **insatisfazível**. Note que uma proposição composta é insatisfazível se e somente se a sua negação é verdadeira para todas as atribuições de valores lógicos às suas variáveis, isto é, se e somente se a sua negação é uma tautologia.

Quando encontramos uma atribuição de valores lógicos que torna a proposição composta verdadeira, demostramos que ela é satisfazível; essa tal atribuição é chamada de **solução** deste particula problema de satisfabilidade. No entanto, para mostrar que uma proposição composta é insatisfazível, devemos mostrar que *toda* a atribuição de valores lógicos às suas variáveis a torna falsa. Embora possamos utilizar sempre uma tabela de verdade para determinar se uma proposição composta é satisfazíl, geralmente é mais eficiente não utilizar uma, tal como indica o exemplo 1.2.8.

Exemplo 1.2.8. Determine se cada uma das proposições compostas $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$, $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ e $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é satisfazível.

Solução: Ao invés de utilizar uma tabela de verdade para resolver este problema, iremos raciocinar sobre os valores lógicos. Note que $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee$

$\neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é verdadeiro quando as três variáveis p, q e r possuem os mesmos valores lógicos. Assim, a proposição composta é satisfazível pois existe pelo menos uma atribuição de valores lógicos para p, q e r que a torna verdadeira. Similarmente, note que $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é verdadeira quando pelo menos um entre p, q e r é verdadeiro e pelo menos um é falso. Assim, $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ é satisfazível pois existe pelo menos uma atribuição de valores lógicos para p, q e r que a torna verdadeira.

Finalmente note que para $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ ser verdadeira, $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ e $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ devem ambas ser verdadeiras. Para a primeira ser verdadeira, as três variáveis devem possuir o mesmo valor lógico, e para a segunda ser verdadeira, pelo menos uma entre três varáveis deve ser verdadeira e pelo menos uma deve ser falsa. No entanto, estas condições são contraditórias. Destas observações podemos concluír que nenhuma atribuição de valores lógicos a p, q e r torna $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$ verdadeiro. Logo é insatisfazível.

1.3 Predicados e Quantificadores

Introdução

A lógica proposicional, estudada anteriormente, não pode adequadamente expressar o significado de todas as sentenças matemáticas e na linguagem natural. Por exemplo, imagine que sabemos que

"Todo o computador conectado à rede da Universidade está a funcionar devidamente,"

Nenhuma regra da lógica proposicional nos permite concluir a veracidade da sentença

"O computador A está a funcionar devidamente"

onde o computador A é um dos computadores conectados à rede da Universidade. Da mesma forma, não usar as regras da lógica proposicional para concluir que da sentença

"O computador B está sob ataque,"

,

onde B é um computador na rede da Universidade, para concluir a veracidade de

"Existe um computador da rede da Universidade que está sob ataque."

Nesta secção iremos apresentar um tipo de lógica mais poderosa chamada **lógica de predicados**. Veremos como a lógica de predicados pode ser utilizada para expressar o significado de um número elevado de sentenças em matemática e em Ciência da Computação de maneiras que nos permitam raciocinar e explorar relações entre objectos. Para entender a lógica de predicados, precisamos primeiramente perceber o conceito de predicado. Posteriormente, iremos introduzir o conceito de quantificadores, que nos permitem raciocinar com sentenças que afirmam que uma certa propriedade é verdadeira (ou procede) para todos os objectos de um certo tipo e com sentenças que afirmam a existência de um objecto com uma propriedade particular.

Predicados

Sentenças envolvendo variáveis, como

$$\text{“}x > 3\text{”, “}x = y + 3\text{”, “}x + y = z\text{”}$$

e

“O computador x está sob ataque”

e

“O computador x está a funcionar devidamente”

são geralmente encontradas em asserções matemáticas, em programas de computador, e na especificação de sistemas. Estas sentenças não são nem verdadeiras nem falsas quando os valores das variáveis não são especificados. Nesta secção, iremos discutir sobre a forma como proposições podem ser produzidas a partir destas sentenças.

A sentença “x é maior que 3” possui duas partes. A primeira parte, a variável x, é o sujeito da sentença. A segunda parte - o **predicado**, “é maior que 3” - refere-se a uma propriedade que o sujeito da sentença pode ter. Podemos denotar a sentença “x é maior que 3” por $P(x)$, onde P denota o predicado “é maior que 3” e x é a variável. A sentença $P(x)$ é também chamada de o valor da **função proposicional** P em x. Quando um valor é atribuído à variável x, a sentença $P(x)$ torna-se numa proposição e possui um valor lógico. Considere os exemplos a seguir.

Exemplo 1.3.1. Seja $P(x)$ a sentença “$x > 3$”. Quais são os valores lógicos de $P(4)$ e $P(2)$)

Solução: Obtemos a sentença $P(4)$ por definir $x = 4$ na sentença “$x > 3$”. Assim, $P(4)$, que é a sentença “$4 > 3$”, é verdadeira. No entanto, $P(2)$, que é a sentença “$2 > 3$”, é falsa.

Exemplo 1.3.2. Seja $A(x)$ a sentença “O computador x está sob ataque”. Suponha que dos computadores no campus, apenas os computadores CS2 e MAT1 estão sob ataque de momento. Quais serão os valores lógicos de $A(CS1)$, $A(CS2)$ e $A(MAT1)$?

Solução: Obtemos a sentença $A(CS1)$ por definir $x = CS1$ na sentença “O computador x está sob ataque”. Como o computador CS1 não está na lista de computadores actualmente sob ataque, concluímos que $A(CS1)$ é falso. Similarmente, como CS2 e MAT1 estão na lista de computadores sob ataque, sabemos que $A(CS2)$ e $A(MAT1)$ são verdadeiros.

Podemos ter também sentenças que envolvam mais de uma variável. Por exemplo, considere a sentença "$x = y + 3$". Podemos denotar esta sentença por $Q(x, y)$, onde x e y são variáveis e Q é o predicado. Quando os valores de x e y são atribuidos, a sentença $Q(x, y)$ possui um valor lógico.

Exemplo 1.3.3. Seja $Q(x, y)$, que denota a sentença "$x = y+3$". Quais são os valores lógicos das proposições $Q(1, 2)$ e $Q(3, 0)$?

Solução: Para obter $Q(1, 2)$, definimos $x = 1$ e $y = 2$ na sentença $Q(x, y)$. Assim, $Q(1, 2)$ é a sentença "$1 = 2 + 3$", que é falsa. A sentença $Q(3, 0)$ é a proposição "$3 = 0 + 3$", que é verdadeira.

De forma similiar, podemos ter $R(x, y, z)$ a denotar a sentença "$x + y = z$". Quando valores são atribuidos às variáveis x, y e z, esta sentença possuirá um valor lógico.

Exemplo 1.3.4. Quais são os valores lógicos das proposições $R(1, 2, 3)$ e $R(0, 0, 1)$?

Solução: A proposição $R(1, 2, 3)$ é obtida por definir $x = 1, y = 2$ e $z = 3$ na sentença $R(x, y, z)$. Vemos que $R(1, 2, 3)$ é a sentença "$1 + 2 = 3$", que é verdadeira. Também notamos que $R(0, 0, 1)$, que é a sentença "$0+0 = 1$", é falsa.

No geral, uma sentença envolvendo as n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser denotada por

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Uma sentença da forma $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é o valor da **função proposicional** P na n-tupla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, e P é também chamado de **predicado n-ário**. Funções proposicionais ocorrem em programas de computador, como o exemplo 1.3.5 ilustra.

Exemplo 1.3.5. Considere a sentença

$$\textbf{se } x > 0 \textbf{ então } x := x + 1.$$

Quando esta sentença é encontrada num programa, o valor da variável x naquele ponto de execução do programa é inserida em $P(x)$, que é "$x > 0$". Se $P(x)$ for verdadeiro para este valor de x, a sentença $x := x + 1$ será executada, de formas a acrescentar o valor de x em 1. Se $P(x)$ for falso para este valor de x, a sentença $x := x + 1$ não será executada e o valor de x não será alterado.

PRÉCONDIÇÕES E PÓSCONDIÇÕES Predicados também são utilizados para estabelecer a correção de programas de computador, isto é, para verificar que programas de computador produzem sempre a saída desejada quando fornecido uma entrada válida. (Note que ao menos que a correção de um programa é estabelecida, nenhuma quantidade de testes pode mostrar que o mesmo produz a saída desejada para todos os valores de entrada, ao menos que todos os valores de entrada são testados.) As sentenças que descrevem entradas válidas são conhecidos como **precondições** e as condições que as saídas devem satisfazer quando o programa é executado são chamadas de **póscondições**.

Quantificadores

Quando são atribuídos valores às variáveis de uma função proposicional, a sentença resultante se torna numa proposição com um certo valor lógico. No entanto, existe uma outra forma importante, chamada de **quantificação**, para criar uma proposição de uma função proposicional. A quantificação expressa a extensão na qual o predicado é verdadeiro num conjunto de elementos. Em português, as palavras **todos, alguns, muitos, nenhum** e outras, são usadas em quantificações. Iremos focar-nos em dois tipos de quantificação: quantificação universal, que nos diz que um predicado é verdadeiro para todos os elementos sob consideração, e quantificação existêncial, que nos diz que existe um ou mais elementos sob consideração para os quais o predicado é verdadeiro. A área da lógica que trata dos predicados e quantificadores é chamada de **cálculo de predicados** ou **lógica de predicados**.

O QUANTIFICADOR UNIVERSAL Muitas sentenças matemáticas afirmam que uma propriedade é verdadeira para todos os valores de uma variável num particular domínio, chamado de **domínio de discuro** (ou **universo de discurso**, geralmente referido apenas como **domínio**. Tal sentença é expressa utilizando quantificação universal. A quantificação universal de $P(x)$ para um particular domínio é a proposição que asserta que $P(x)$ é verdadeira para todos os valores de x no domínio. Note que o domínio especifica os valores possíves de x. O significado do quantificador universal de $P(x)$ altera quando alteramos o domínio. O domínio deve sempre ser especificado quando o quantificador universal é utilizado; sem isso, a quantificação universal de uma sentença é indefinida.

Definição 1.3.1. A *quantificação universal* de $P(x)$ é a sentença

"$P(x)$ para todos os valores de x no domínio."

A notação $\forall x P(x)$ denota a quantificação universal de $P(x)$. Aqui, $\forall$ é chamado de **quantificador universal**. Lemos $\forall x P(x)$ como "para todo $xP(x)$" ou "para qualquer $xP(x)$". Um elemento para o qual $P(x)$ é falso é chamado de **contra-exemplo** de $\forall x P(x)$.

O significado do quantificador universal é sumarizado na primeira linha da Tabela 1.3.1. Ilustramos a utilização do quantificador universal nos exemplos a seguir.

Sentença	***Quando é Verdadeiro?***	***Quando é Falso?***
$\forall x P(x)$	$P(x)$ é V para todo x	Existe um x para o qual $P(x)$ é F.
$\exists x P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é V	$P(x)$ é F para todo x

Tabela 1.3.1: Quantificadores

Exemplo 1.3.6. Seja $P(x)$ e sentença "$x + 1 > x$". Qual é o valor lógico da quantificação $\forall x P(x)$, onde o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: Como $P(x)$ é verdadeiro para todos os números reais x, a quantificação $\forall x P(x)$ é verdadeira.

Nota: Geralmente, uma assumpção implícita é feita de tal forma que todos os domínios de discurso para os quantificadores não-vazios. Note que se o domínio é vazio, então $\forall x P(x)$ é verdadeiro para qualquer função proposicional $P(x)$ porque existem não existe nenhum elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso.

Para além de "para todos" e "para cada", a quantificação universal pode ser expressa em muitas formas, incluíndo "todos os", "dado qualquer", "para arbitrários", etc.

Uma sentença $\forall x P(x)$ é falsa, onde $P(x)$ é uma função proposicional, se e somente se $P(x)$ não é sempre verdadeira quando x está (ou existe) no domínio. Uma forma de mostrar que $P(x)$ não é sempre verdadeira quando x está no domínio é por encontrar um contra-exemplo para a sentença $\forall x P(x)$. Note que um único contra-exemplo é tudo o que se precisa para estabelecer que $\forall x P(x)$ é falso. O exemplo 1.3.7 ilustra como contra-exemplos são utilizados.

Exemplo 1.3.7. Seja $Q(x)$ a sentença "$x < 2$". Qual é o valor lógico da quantificação $\forall x Q(x)$, onde o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: $Q(x)$ não é verdadeiro para todo o número real x, porque, por exemplo, $Q(3)$ é falso. Isto é, $x = 3$ é um contra-exemplo para a sentença $\forall x Q(x)$. Assim, $\forall x Q(x)$ é falso.

Exemplo 1.3.8. Suponha que $P(x)$ é "$x^2 > 0$". Para mostrar que a sentença $\forall x P(x)$ é falso onde o universo de discurso consiste em todos os números inteiros, damos um contra-exemplo. Vemos que $x = 0$ é um contra-exemplo porque $x^2 = 0$ onde $x = 0$, tal que x^2 não é maior que 0 onde $x = 0$.

Procurar por contra-exemplos para sentença quantificadas universalmente é uma actividade importante no estudo da matemática, como veremos em secções futuras neste manual.

Quando todos os elementos no domínio podem ser lista - por exemplo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - procede que a quantificação universal $\forall x P(x)$ é a mesma que a conjunção,

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n),$$

porque esta conjunção é verdadeira se e somente se $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ são todos verdadeiros.

Exemplo 1.3.9. Qual é o valor lógico de $\forall x P(x)$, onde $P(x)$ é a sentença "$x^2 < 10$" e o domínio consiste nos inteiros positivos inferiores a 4?

Solução: A sentença $\forall x P(x)$ é a mesma que a conjunção

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4),$$

porque o domínio consiste nos inteiros 1, 2, 3 e 4. Como $P(4)$, que é a sentença "$4^2 < 10$", é falsa, segue-se que $\forall x P(x)$ é falsa.

Exemplo 1.3.10. Qual é o valor lógico de $\forall x(x^2 \geq x)$ se o domínio consiste em todos os números reais? Qual é o valor lógico desta sentença de o domínio consiste em todos os números inteiros?

Solução: A quantificação universal $\forall x(x^2 \geq x)$, onde o domínio consiste em todos os números reais, é falsa. Por exemplo, $(\frac{1}{2})^2 \not\geq \frac{1}{2}$. Note que $x^2 \geq x$ se e somente se $x^2 - x = x(x-1) \geq 0$. Consequentemente, $x^2 \geq x$ se e somente se $x \leq 0$ ou $x \geq 1$. Procede que $\forall x(x^2 \geq x)$ é falso se o domínio consiste em todos os números reais (porque a inequalidade é falsa para os todos os números reais x com $0 < x < 1$). No entanto, se o domínio consiste nos números inteiros, $\forall x(x^2 \geq x)$ é verdadeiro, porque não existe nenhum inteiro x tal que $0 < x < 1$.

O QUANTIFICADOR EXISTÊNCIAL Muitas sentenças matemáticas afirmam que existe um elemento com uma certa propriedade. Tais sentenças são expressas utilizando a quantificação existêncial. Com a quantificação existêncial, formamos uma proposição que é verdadeira se e somente se $P(x)$ é verdadeira para pelo menos um valor de x no domínio.

Definição 1.3.2. A *quantificação existêncial* de $P(x)$ é a sentença

"Exite um elemento x no domínio tal que $P(x)$."

Utilizamos a notação $\exists x P(x)$ para a quantificação existêncial de $P(x)$. Aqui, $\exists$ é chamado de **quantificador existêncial**.

Um domínio deve sempre ser especificado quando uma sentença $\exists x P(x)$ é utilizada. Além disso, o significado de $\exists x P(x)$ altera quando o domínio altera. Sem a especificação do domínio, a sentença $\exists x P(x)$ não tem significado algum.

Além da frase "existe", também podemos expressar a quantificação existêncial de outras formas, tais como utilizando as palavras "para algum", "para pelo menos um" ou "existe um". A quantificação existêncial $\exists x P(x)$ é lida como

"Existe um x tal que $P(x)$"
"Existe pelo menos um x tal que $P(x)$"

ou

"Para algum $xP(x)$".

O significado da quantificador existêncial é sumarizado na segunda linha da Tabela 1.3.1. Ilustramos a sua utilização com os exemplos a seguir.

Exemplo 1.3.11. Seja $P(x)$ a sentença "$x > 3$". Qual é o valor lógico da quantificação $\exists x P(x)$, o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: Como "$x > 3$" é verdadeiro em alguns casos - por exemplo, quando $x = 4$ - a quantificação existêncial de $P(x)$, que é $\exists x P(x)$, é verdadeira.

Note que a sentença $\exists x P(x)$ é falsa se e somente se não existe algum elemento x no domínio para o qual P é verdadeiro. Isto é, $\exists x P(x)$ é falso se e somente se $P(x)$ é falso para todo elemento no domínio. Ilustramos esta observação no exemplo 1.3.12.

Exemplo 1.3.12. Seja $Q(x)$ a sentença "$x = x + 1$". Qual é o valor lógico da quantificação $\exists x Q(x)$, o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: Como "$Q(x)$" é falso para todo o número real x, a quantificação existêncial de $Q(x)$, que é $\exists x Q(x)$, é falsa.

Nota: Geralmente, é feita uma suposição implíicita de que todos os domínios de discurso dos quantificadores são não-vazios. Se o domínio for vazio, então $\exists x Q(x)$ é falso sempre que $Q(x)$ é uma função proposicional porque quando o domínio é vazio, não pode existir um elemento x no domínio para o qual $Q(x)$ é verdaderio.

Quando todos os elementos no domínio podem ser listados-digamos, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - a quantificação existêncial $\exists x P(x)$ é o mesmo que a disjunção

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n),$$

porque esta disjunção é verdadeira se e somente se pelo menos um entre $P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$ é verdadeiro.

Exemplo 1.3.13. Qual é o valor lógico de $\exists x P(x)$, onde $P(x)$ é a sentença "$x^2 > 10$" e o universo de discurso consiste nos inteiros positivos não superiores a 4?

Solução: Como o domínio é $\{1, 2, 3, 4\}$, a proposição $\exists x P(x)$ é o mesmo que a disjunção

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4).$$

Como $P(4)$, que é a sentença "$4^2 > 10$", é verdadeira, segue-se que $\exists x P(x)$ é verdadeira.

Por vezes é útil pensar em termos de laços (ou *loopings*) e pesquisa ao determinar o valor lógico de uma quantificação. Imagine que existam n objectos no domínio para a variável x. Para determinar se o valor de $\forall x P(x)$ é verdadeiro, podemos percorrer todos os n valores de x para verificar se $P(x)$ é sempre verdadeiro. Se encontrarmos um valor de x +ara o qual $P(x)$ é falso, então demonstramos que $\forall x P(x)$ é falso. De outra forma, $\forall x P(x)$ seria verdadeiro. Para verificar se $\exists P(x)$ é verdadeiro, percorremos o laço por todos os n valores de x a procura de um valor para o qual $P(x)$ é verdadeiro. Se encontrarmos um, então $\exists x P(x)$. Se não encontrarmos tal x, então demonstramos que $\exists x P(x)$ é falso. (Note que este método de pesquisa não se aplica quando existe um número infinito de valores no domínio. No entanto, ainda é uma forma útil de pensar sobre os valores lógicos de quantificações.)

O QUANTIFICADOR DE SINGURALIDADE Apresentamos anteriormente o quantificador universal e o quantificador existêncial. Estes são os quantificadores mais importantes em Mátemática e Ciência da Computação. No entanto, não existem limitações para o número de quantificadores que podemos definir, tal como "existem exactamente dois", "não existem mais de três", "existem pelo menos 100", por aí em diante. Destes quantificadores, o mais encontrando geralmente é o **quantificar de singularidade**, denotado por $\exists!$ ou $\exists_1$. A notação $\exists! x P(x)$ [ou $\exists_1 x P(x)$] diz que "Existe um único x tal que $P(x)$ é verdadeiro". (Outras frases para a quantificação singular incluem "existe exactamente um" e "existe um e apenas um."). Por exemplo, $\exists! x (x - 1 = 0)$, onde o domínio é o conjunto dos números reais, indica que existe um único número real x tal que

$x - 1 = 0$. Esta é uma sentença verdadeira, pois $x = 1$ é o único número real tal que o $x - 1 = 0$. Observe que podemos usar quantificadores e lógica proposicional para expressar a singularidade, caso queiramos evitar o uso do quantificador de singularidade. Geralmente, é melhor permanecermos com o quantificador existêncial e universal para que as regras de inferência para estes quantificadores possam ser utilizadas.

Quantificadores com Domínios Restrictos

Uma notação abreviada é geralmente utilizada para restringir o domínio de um quantificador. Nesta notação, a condição que uma variável deve satisfazer é incluída após o quantificador. Isto é ilustrado no Exemplo 1.3.14. Iremos também descrever outras formas desta notação involvendo pertença de conjuntos na Secção 2.1.

Exemplo 1.3.14. O que as sentenças $\forall_{x<0}(x^2 > 0)$, $\forall_{y\neq 0}(y^3 \neq 0)$ e $\exists_{z>0}(z^2 = 2)$ significam, onde o domínio em cada um desses casos consiste nos números reais?

Solução: A sentença $\forall_{x<0}(x^2 > 0)$ diz que para todo o número real x com $x < 0$, $x^2 > 0$. Isto é, "O quadrado de um número real negativo é positivo". Esta sentença é a mesma que $\forall x(x < 0 \rightarrow x^2 > 0)$.

A sentença $\forall_{y\neq 0}(y^3 \neq 0)$ diz que para todo o número real y com $y \neq 0$, temos $y^3 \neq 0$. Isto é, "O cubo de todo o número real não-negativo, é não-negativo". Note que esta sentença é equivalente a $\forall y(y \neq 0 \rightarrow y^3 \neq 0)$.

Finalmnete, a sentença $\exists_{z>0}(z^2 = 2)$ diz que existe um número real z com $z > 0$ tal que $z^2 = 2$. Isto, diz que "Existe uma raiz quadrada positiva de 2". Esta sentença é equivalente a $\exists z(z > 0 \wedge z^2 = 2)$.

Precedência de Quantificadores

Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ possuem precedência superior com relação a todos os operadores lógicos do cálculo proposicional. Por exemplo, $\forall x P(x) \vee Q(x)$ é a disjunção de $\forall x P(x)$ e $Q(x)$. Por outras palavras, isto significa $(\forall x P(x)) \vee Q(x)$ ao invés de $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Variáveis Ligadas

Quando um quantificador é utilizado na variável x, dizemos que esta ocorrência da variável é **ligada**. Uma ocorrência de uma variável que não é ligada por um quantificador ou definida para um valor particular é chamada de **livre**. Todas as variáveis que ocorrem numa função proposicional devem estar ligadas ou definidas para um valor particular de formas a torná-la numa proposição. Isto pode ser feito utilizando a combinação de quantificadores universais, existênciais e atribuição de valores.

A parte da expressão lógica para o qual um quantificador é aplicado é chamada de **escopo** deste quantificador. Consequentemente, uma variável é livre se estiver fora do escopo de todos os quantificadores na fórmula que especifica esta variável.

Exemplo 1.3.15. Na sentença $\exists x(x+y=1)$, a variável x é ligada pela quantificação existêncial $\exists x$, mas a variável y é livre porque não está ligada ao quantificador e nenhum valor é atribuído à esta variável. Isto ilustra que na sentença $\exists x(x+y=1)$, x é ligada, mas y é livre.

Na sentença $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$, todas as variáveis são ligadas. O escopo do primeiro quantificador, $\exists x$, é a expressão $P(x) \wedge Q(x)$ porque $\exists x$ é aplicado apenas à $P(x) \wedge Q(x)$, e não ao resto da sentença. De forma similar, o escopo do segundo quantificador, $\forall x$, é a expressão $R(x)$. Isto é, o quantificador existêncial liga-se à variável x em $P(x) \wedge Q(x)$ e o quantificador universal $\forall x$ liga-se à variável x em $R(x)$. Observe que poderíamos escrever a nossa sentença usando duas variáveis diferentes x e y, como em $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall y R(y)$, porque o escopo dos dois quantificadores não se sobrepõem.

Equivalências Lógicas Envolvendo Quantificadores

Na Secção 1.2 introduzimos a noção de equivalências lógicas de proposições compostas. Podemos estender esta noção para expressões envolvendo predicados e quantificadores.

Definição 1.3.3. Sentenças envolvendo predicados e quantificadores são *logicamente equivalentes* se e somente se as mesmas possuem o mesmo valor lógico independentemente de os predicados serem substituidos nestas nestas sentenças e independentemente do domínio de discurso das variáveis nestas funções proposicionais. Utilizamos a notação $S \equiv T$ para indicar que duas sentenças S e T envolvendo predicados e quantificadores são logicamente equivalentes.

O Exemplo 1.3 ilustra como provar que duas sentenças envolvendo quantificadores e predicados são logicamente equivalentes.

Exemplo 1.3.16. Mostre que $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ são lógicamente equivalentes (onde o mesmo domínio é utilizado ao longo da quantificação). Esta equivalência lógica mostra que podemos distribuir um quantificador universal sob uma conjunção. Além do mais, também podemos distribuir um quantificador existêncial sob uma disjunção. No entanto, não podemos distribuir um quantificador universal sob uma disjunção, nem podemos distribuir um quantificador existêncial sob uma conjunção.

Solução Para mostrar que estas sentenças são logicamente equivalentes, devemos mostrar que as mesmas possuem sempre o mesmo valor lógico, independentemente do que são os predicados P e Q, e independentemente do domínio de discurso utilizado. Suponha que temos dois predicados P e Q, com o mesmo domínio. Podemos mostrar que $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ e $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ são logicamente equivalentes de duas formas. Primeiro, mostramos que se $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeiro, então $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ também é verdadeiro. Segundo, mostramos que se $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeiro, então $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ também é.

Então, suponha que $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$. Isto significa que se a no domínio, então $P(a) \wedge Q(a)$ é verdadeiro. Assim, $P(a)$ é verdadeiro e $Q(a)$ é verdadeiro. Como $P(a)$ e $Q(a)$ são verdadeiros para todos os elementos no domínio, podemos concluir que $\forall x P(x)$ e $\forall x Q(x)$ são ambos verdadeiros. Isto significa que $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeiro.

A seguir, suponha que $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ é verdadeiro. Segue-se que $\forall x P(x)$ e $\forall x Q(x)$ são verdadeiros. Assim, se a está no domínio, então $P(a)$ é verdadeiro e $Q(a)$ é verdadeiro [como $P(x)$ e $Q(x)$ são ambos verdadeiros para todos os elementos no domínio, não existe conflito em usar o mesmo valor de a aqui]. Segue-se que para todo a, $P(a) \wedge Q(a)$ é verdadeiro. Assim, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ é verdadeiro. Podemos concluir que,

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x).$$

Negação de Expressões Quantificadas

Iremos com regularidade considerar a negação de uma expressão quantificada. Por exemplo, considere a sentença

"Todo o estudante da tua turma teve a disciplina de Análise Matemática I"

Esta sentença é uma quantificação universal, nomeadamente,

$$\forall x P(x),$$

onde $P(x)$ é a sentença "x teve a disciplina de Análise Matemática I" e o domínio consiste nos estudantes da tua turma. A negação desta sentença é "Não é verdade que todo o estudante da tua turma teve a discplina de Análise Matemática I". Isto é equivalente a "Existe um estudante da tua turma que não teve a disciplina de Análise Matemática I". E isto é simplesmente a quantificação existêncial da negação da função proposicional original, nomeadamente,

$$\exists x \neg P(x).$$

Este exemplo ilustra a seguinte equivalência lógica:

$$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x).$$

Para mostrar que $\neg \forall x P(x)$ e $\exists x P(x)$ são logicamente equivalentes independentemente da função proposicional $P(x)$ e do domínio, primeiro note que $\neg \forall x P(x)$ é verdadeiro se e somente se $\forall x P(x)$ é falso. A seguir, note que $\forall x P(x)$ é falso se e somente se existe um elemento x no domínio para o qual $P(x)$ é falso. Isto procede se e somente se existe um elemento x no domínio para o qual $\neg P(x)$ é verdadeiro. Finalmente, note que existe um elemento x no domínio para o qual $\neg P(x)$ é verdadeiro se e somente se $\exists \neg P(x)$ é verdadeiro. Juntando estes passos, podemos concluir que $\neg \forall x P(x)$ é verdadeiro se e somente se $\exists x \neg P(x)$ é verdadeiro. Segue-se que $\neg \forall x P(x)$ e $\exists x \neg P(x)$ são logicamente equivalentes.

Suponha que queiramos negar um quantificador existêncial. Por exemplo, considere a proposção "Existe um estudante na tua turma que teve a disciplina de Análise Matemática I". Isto é a quantificação existêncial,

$$\exists x Q(x),$$

onde $Q(x)$ é a sentença "x teve a disciplina de Análise Matemática I". A negação desta sentença é a proposição "Não é verdade que existe um estudatne na tua turma que teve a disciplina de Análise Matemátitca I". Isto é equivalente a "Todo o estudante na tua turma não teve a disciplina de Análise Matemática I", que é simplesmente a quantificação universal da negação da função proposicional original, ou, na linguagem dos quantificadores,

$$\forall x \neg Q(x).$$

Este exemplo ilustra a equivalência

$$\neg \exists x Q(x) \equiv \forall x \neg Q(x).$$

Para mostrar que $\neg \exists x Q(x)$ e $\forall x \neg Q(x)$ são logicamente equivalente independentemente de $Q(x)$ e do domínio, primeiro note que $\neg \exists x Q(x)$ é verdadeiro se e somente se $\exists x Q(x)$ é falso. Isto é verdadeiro se e somente não existe um x no domínio para o qual $Q(x)$ é verdadeiro. A seguir, note que não existe x no domínio para o qual $Q(x)$ é verdadeiro se e somente se $Q(x)$ é falso para todo x no domínio. Finalmente, note que $Q(x)$ é falso para todo x no domínio se e somente se $\neg Q(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio, o que procede se e somente se $\forall \neg Q(x)$ é verdadeiro. Juntando todos estes passos, vemos que $\neg \exists x Q(x)$ é verdadeiro se e somente se $\forall x \neg Q(x)$ é verdadeiro. Concluímos que $\neg \exists x Q(x)$ e $\forall x \neg Q(x)$ são logicamente equivalentes.

As regras de negação de quantificadores são chamadas de **Leis de De Morgan para os quantificadores**. Estas regras são resumidas na Tabela 1.3.2.

Negação	***Sentença Equivalente***	***Quando a negação é V?***	***Quando é F?***
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	Para todo x, $P(x)$ é falso	Existe um x para o qual $P(x)$ é verdadeiro
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	Existe um x para o qual $P(x)$ é falso	$P(x)$ é verdadeiro para todo x

Tabela 1.3.2: Leis de De Morgan para os quantificadores.

Nota: Quando o domínio de um predicado consite em n elementos, onde n é um inteiro positivo maior que 1, as regras para a negação de sentenças quantiificadas são exactamente as mesmas que as regras de negação (de De Morgan) estudadas na Secção 1.1. É por isso que estas regras são chamadas de Leis de De Morgan para os quantificadores. Quando domínio possui n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, segue-se que $\neg \forall x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n))$, que é equivalente a $\neg P(x_1) \vee \neg P(x_2) \vee \ldots \vee \neg P(x_n)$ pela lei de De Morgan, e isto é o mesmo que $\exists \neg P(x)$. Da mesma forma, $\neg \exists x P(x)$ é o mesmo que $\neg(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n))$, que pela lei de De Morgan é equivalnte a $\neg P(x_1) \wedge \neg P(x_2) \wedge \ldots \wedge \neg P(x_n)$, e isto é o mesmo que $\forall x \neg P(x)$.

Ilustramos a utilização da negação de sentenças quantificadas com os exemplos a seguir.

Exemplo 1.3.17. Quais são as negações das sentenças "Existe um político honesto" e "Todos os angolanos comem magogas"?

Solução: Façamos $H(x)$ denotar "x é honesto". Então, a sentença "Existe um político honesto" é representada por $\exists x H(x)$, onde o domínio consiste em todos os políticos. A negação desta sentença é $\neg \exists H(x)$, que é equivalente à $\forall x \neg H(x)$. Esta negação pode ser expressa como "Todo o político é desonesto". (Nota: Em português, a sentença "Todos os políticos não são honestos" é ambígua. Em linguagem comum, esta sentença geralmente significa “Nem todos os políticos são honesto”. Consequentemente, não usamos esta sentença para exprimir esta negação.)

Façamos $C(x)$ a denotar a expressão “x como magogas”. Então a sentença “Todos os angolanos comem magogas” é representada por $\forall x C(x)$, onde o domínio consiste em todos os angolanos. A negação desta sentença é $\neg\forall C(x)$, que é equivalente à $\exists x \neg C(x)$. Esta negação pode ser expressada em diferentes formas, incluindo “Alguns angolanos não comem magogas” e “Existe um americano que não come magogas”.

Exemplo 1.3.18. Mostre que $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\exists x(P(x)) \wedge \neg Q(x))$ são logicamente equivalentes.

Solução: Pela lei de De Morgan para os quantificadores universais, sabemos que $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\exists(\neg(P(x) \rightarrow Q(x)))$ são logicamente equivalentes. Pela quinta lógica equivalênncia na Tabela 1.2.6 da Secção 1.1, sabemos que $\neg(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $P(x) \wedge \neg Q(x)$ são logicamente equivalentes para todo x. Como podemos substituir uma expressão logicamente equivalente por outra numa equivalência lógica, segue-se que $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ são logicamente equivalentes.

Tradução do Português para Expressões Lógicas

Traduzir sentenças em português (ou outra língua) para expressões lógicas é uma tarefa crucial em matemática, lógica de programação, inteligência artificial, engenharia de *software* e em muitas outra disciplinas. Começamos a estudar este tópico na Secção 1.1, onde utilizamos proposições para expressar sentenças em expressões lógicas. Em tal discussão, evitamos propositadamente sentenças cuja tradução requeria predicados e quantificadores. Traduzir de português para expressões lógica é mais complexo ainda quando são necessários quantificadores. Além disso, podem existir muitas formas de traduzir uma sentença. (Como consequência, não existe um “livro de recietas” para fazer isso). Iremos utilizar alguns exemplos para ilustrar como traduzir sentenças do português para expressões lógicas. O objectivo nesta tradução é produzir expressões lógicas simples e úteis. Nesta secção, iremos nos restringir à sentenças que podem ser traduzidas em expressões lógicas utilizando um único quantificador; na próxima secção, iremos olhar para sentenças mais complicadas que requerem múltiplos quantificadores.

Exemplo 1.3.19. Expresse a sentença “Todos os estudantes nesta sala teve Cálculo I” utilizando predicados e quantificadores.

Solução: Primeiro, reescrevemos a sentença para que possamos claramente identificar os quantificadores apropriados a utilizar. Fazendo isso, obtemos:

“Para todo o estudante nesta sala, tal estudante teve Cálculo I”,

A seguir, introduzimos a variável x para que a nossa sentença se torne

“Para todo o estudante x nesta sala, x teve Cálculo I”.

Continuando, introduzimos $C(x)$, que é a sentença "x teve Cálculo I". Consequentemente, se o domínio para x consiste nos estudantes na sala, podemos traduzir a nossa sentença em $\forall x C(x)$.

No entanto, existem outras abordagens; podem ser utilizandos diferentes domínios de discurso e outros predicados. A abordagem que escolhermos depende do raciocínio subsequente que queremos ter. Por exemplo, poderemos estar interessdaos num grupo maior de pessoas para além dos estudantes nesta sala. Se alterarmos o domínio para passar a ser o de todas as pessoas, teremos de expressar a nossa sentença assim

"Para toda a pessoa x, se a pessoa x é um estudante nesta sala, então x teve Cálculo I".

Se $S(x)$ representa a sentença que uma pessoa x está nesta sala, vemos que a nossa sentença pode ser expressa como $\forall x(S(x) \to C(x))$. [*Cuidado!* A nossa sentença *não pode* expressa como $\forall x(S(x) \wedge C(x))$ porque esta sentença diz que todas as pessoas são estudantes nesta sala e tiveram Cálculo I!].

Finalmente, quando estamos interessados no histórico da pessoa em tópicos para além de Cálculo I, devemos preferencialmente utilizar o quantificadores de duas variáveis $Q(x, y)$ para a sentença "o estudante x teve a disciplina y". Depois iriamos substituir $C(x)$ por $Q(x,\text{"Cálculo I"})$ nas duas abordagens para obter $\forall x Q(x,\text{"Cálculo I"})$ ou $\forall x(S(x) \to Q(x,\text{"Cálculo I"}))$.

No exemplo 1.3.19 mostramos diferentes abordagens para expressar a mesma sentença usando predicados e quantificadores. No entanto, devemos sempre adoptar a abordagem mais simples que é apropriada para raciocínio subsequente.

Exemplo 1.3.20. Expresse a sentença "Alguns estudantes nesta sala já visitaram o México" e "Todo o estudante nesta sala já visitou Canadá ou México" utilizando predicados e quantificadores.

Solução: A sentença "Alguns estudantes nesta sala já visitaram o México" significa que

"Existe um estudante nesta sala com a propriedade de que tal estudante já visitou o México."

Podemos introduzir a variável x, para que a nossa sentença se torne

"Existe um estudante x nesta sala com a propriedade de que x já visitou o México."

Introduzimos $M(x)$, que é a sentença "x já visitou México". Se o domínio de x consiste nos estudantes desta sala, podemos traduzir esta primeira sentença como $\exists x M(x)$.

No entanto, se estiveremos interessados em pessoas para além destas na sala, olhamos para a sentença de forma diferente. A nossa sentença pode ser expressa como

"Existe uma pessoa x com a propriedade de que x é um estudante nesta sala e x já visitou México".

Neste caso, a domínio da variável x consiste em todas as pessoas. Introduzimos $S(x)$ para reprsentar "x é um estudante nesta sala". A nossa solução torna-se $\exists x(S(x) \wedge M(x))$ porque a sentença é que existe uma pessoa x que é estudante nesta sala e que já visitou México. [*Cuidado!*] A nossa sentença não pode ser expressa como $\exists x(S(x) \rightarrow M(x))$, que é verdade quando existe alguém que não é parte desta sala porque, neste caso, para tal pessoa x, $S(x) \rightarrow M(x)$ torna-se $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V}$ ou $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$, que são ambos verdadeiros.

Similarmente, a segunda sentença pode ser expressa como

"Para todo x nesta sala, x possui a propriedade de x já ter visitado México ou de x ter visitado Canadá".

(Note que estamos a assumir o ou-inclusivo, ao invés do ou-exclusivo.) Fazemos $C(x)$ ser a sentença "x já visitou Canada". Seguindo o nosso raciocínio anterior, vemos que se o domínio de x consiste nos estudantes desta sala, esta segunda sentença pode ser expressa como $\forall x(C(x) \vee M(x))$. No entanto, se o domínio para x consiste em todas as pessoas, a nossa sentença pode ser expressa como

"Para cada pessoa x, se x é um estudante nesta sala, então x já visitou México ou x já visitou Canadá".

Neste caso, a sentença pode ser expressa como $\forall x(S(x) \rightarrow (C(x) \vee M(x)))$. Ao invés de utilizarmos $M(x)$ e $C(x)$ para representar o facto de x já ter visitado México e x já ter visitado Canadá, respectivamente, podemos um predicado de duas variáveis $V(x, y)$ para representar "x já visitou o país y". Neste caso, $V(x,$"México"$)$ e $V(x,$"Canadá"$)$ teriam os mesmos significados que $M(x)$ e $C(x)$ e pode removê-los nas nossas respostas. Se estivermos a trabalhar com muitas sentenças que envolvem pessoas visitando países diferentes, talvez possamos preferir utilizar a abordagem de duas variáveis. De outra forma, por simplicidade, iremos ficar pelos predicados de uma variável $M(x)$ e $C(x)$.

1.4 Quantificadores Aninhados

Introdução

Na Secção 1.3 definimos os quantificadores existências e universais e mostramos como os mesmos podem ser utilizandos para representar sentenças matemáticas. Também explicamos como estas podem ser utilizadas para traduzir sentenças em Português para expressões lógicas. No entanto, na Seccção 1.3 evitamos a utilização de **quantificadores aninhandos**, onde um quantificador está no escopo de outro, como em

$$\forall x \exists y(x + y = 0).$$

Note uque tudo o que está dentro do escopo de um quantificador pode ser visto como uma função proposicional. Por exemplo,

$$\forall x \exists y(x + y = 0)$$

é o mesmo que $\forall x Q(x)$, onde $Q(x)$ é $\exists y(P(x, y))$, onde $P(x, y)$ é $x + y = 0$.

Quantificadores aninhados ocorrem normalmente em matemática e ciência da computação. Embora quantificadores aninhados podem por vezes ser difíceis de entender, as regras que já estudamos na Secção 1.4 podem ajudar-nos. Nesta secção, iremos aumentar a experiência com quantificadores aninhados. Veremos como utilizadr quantificadores aninhados para expressar sentenças matemáticas como "A soma de dois inteiros positovs é sempre positiva". Iremos mostrar como quantificadores aninhados podem ser utilizados para traduzir sentenças em Português como "Todos possuem exactamente um melhor amigo" em sentenças lógicas. Além disso, iremos trabalhar com a negação de sentenças que envolvem quantificadores aninhados.

Sentenças Envolvendo Quantificadores Aninhados

Para perceber sentenças envolvendo quantificadores animhados, iremos desmistificar como os quantificadores e predicados que nelas apareçem significam. Isto é ilustrado nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.4.1. Assuma que os domínios das variáveis x e y consiste em todos os números reais. A sentença

$$\forall x \forall y(x + y = y + x)$$

diz que $x + y = y + x$ para todos os números reais x e y. Esta é a lei comutativa da adição de números reais. Da mesma forma, a sentença

$$\forall x \exists y(x + y = 0)$$

diz que para todo o número real x existe um número real y tal que $x+y = 0$. Isto significa que todo o número real possui um inverso aditivo. De forma similar, a sentença

$$\forall x \forall y \forall z(x + (y + z) = (x + y) + z)$$

é a lei associativa para a adição de números reais.

Exemplo 1.4.2. Traduza para Português a sentença,

$$\forall x \forall y((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0)),$$

onde os domínios para ambas variáveis consiste nos números reais.

Solução: Esta sentença diz que para todo o número real x e para todo o número real y, se $x > 0$ e $y < 0$, então $xy < 0$. Isto é, esta sentença diz que para os números reais x e y, se x é positivo e y é negativo, então xy é negativo. Isto pode ser descrito de forma mas sucinta como "O produto de um número real positivo e um número real negativo, é sempre um número real negativo".

PENSE EM QUANTIFICADORES COMO LOOPS Ao trabalhar com quantificadores com mais de uma variável, é por vezes útil pensar em termos de *loops* ou *repetições* aninhadas. (Obviamente, se existem muitos elementos infinitos no domínio de uma variável, não poderemos percorrer todos os valores. Ainda assim, esta forma de pesar é útil no entendimento de quantificadores aninhados.) Por exemplo, para verificar se $\forall x \forall y P(x, y)$ é verdadeiro, devemos percorrer todos os valores de x, e para cada x percorremos os valores de y. Se verificarmos que $P(x, y)$ é verdadeiro para todos os valores de x e y, determinamos que $\forall x \forall y P(x, y)$ é verdadeiro. Se encontrarmos um valor de x para o qual encontramos um valor de y para o qual $P(x, y)$ é falso, determinamos assim que $\forall x \forall y P(x, y)$ é falso.

De maneira similar, para determinar se $\forall x \exists y P(x, y)$ é verdadeiro, percorremos os valores para x. Para cada x, percorremos os valores de y até encontrarmos um y para o qual $P(x, y)$ seja verdadeiro. Se para todo x encontramos tal y, então $\forall x \exists y P(x, y)$ é verdadeiro; se para algum x nunca encontramos tal y, então $\forall x \exists y P(x, y)$ é falso.

Para verificar se $\exists x \forall y P(x, y)$ é verdadeiro, percorremos os valores para x até encontrarmos um x para o qual $P(x, y)$ é sempre verdadeiro quando percorremos todos os valores para y. Quando encontramos tal x, sabemos que $\exists x \forall y P(x, y)$ é verdadeiro. Se nunca encontramos tal x, então sabemos que $\exists x \forall y P(x, y)$ é falso.

Finalmente, para verificar que $\exists x \exists y P(x, y)$ é verdadeiro, percorremos pelos valores para x onde para cada x percorremos os valores de y até encontrarmos um x para o qual encontramos um y para o qual $P(x, y)$ seja verdadeiro. A sentença $\exists x \exists y P(x, y)$ é falsa apenas se nunca encontrarmos um x para o qual encontramos um y para o qual $P(x, y)$ é verdadeiro.

A Ordem dos Quantificadores

Muitas sentenças matemáticas envolvem múltiplas quantificações de funções proposicionais envolvendo mais de uma variável. É importante notar que a ordem dos quantificadores é importante, ao menos que todos os quantificadores sejam quantificadores universais ou que todos sejam quantificadores existênciais. Estes detalhes são ilustrados nos exemplos a seguir.

Exemplo 1.4.3. Seja $P(x, y)$ a sentença "$x + y = y + x$". Quais são os valores lógicos para as quantificações $\forall x \forall y P(x, y)$ e $\forall y \forall x P(x, y)$ onde o domínio para todas as variáveis consiste em todos os números reais?

Solução: A quantificação

$$\forall x \forall y P(x, y)$$

denota a proposição

"Para todos os números reais x, para todos os números reais y, $x + y = y + x$"

Como $P(x, y)$ é verdadeiros para todos os números reais x e y (esta é a lei comutativa da adição, que é um axioma para os números reais), a proposição $\forall x \forall y$ é verdadeira. Note que a sentença $\forall y \forall x P(x, y)$ diz "Para todos os números reais y, para todos os números reais x, $x + y = y + x$". Isto é possui o mesmo significado que a sentença "Para todos os números reais x, para todos os números reais y, $x + y = y + x$". Isto é, $\forall x \forall y$ e

$\forall y \forall x$ possuem o mesmo significado, e ambos são verdadeiros. Isto ilustra o princípio de que a ordem dos quantificadores aninhados numa sentença sem outros quantificadores pode ser alterada sem alterar o significado da sentença quantificada.

Exemplo 1.4.4. Seja $Q(x, y)$ denotar "$x + y = 0$". Quais são os valores lógicos das quantificações $\exists y \forall x Q(x, y)$ e $\forall x \exists y Q(x, y)$, onde o domínio consiste em todos os números reais?

Solução: A quantificação

$$\exists y \forall x Q(x, y)$$

denota a proposição

"Existe um número real y tal que para todo o número real x, $Q(x, y)$."

Não importa o valor escolhido para y, existe apenas um valor de x para o qual $x + y = 0$. Como não existe nenhum número real y tal que $x + y = 0$ para todos os números reais x, a sentença $\exists y \forall x Q(x, y)$ é falsa.

A quantificação

$$\forall x \exists y Q(x, y)$$

denota a proposição

"Para todo o número real x existe um número real y tal que $Q(x, y)$".

Dado um número real x, existe um número real y tal que $x + y = 0$; nomeadamente, $y = -x$. Assim, a sentença $\forall x \exists y Q(x, y)$ é verdadeira.

O Exemplo 1.4.4 ilustra que a ordem na qual os quantificadores aparecem faz diferença. As sentenças $\exists y \forall x P(x, y)$ e $\forall x \exists y P(x, y)$ não são logicamente equivalentes. A sentença $\exists y \forall x P(x, y)$ é verdadeira se e somente se existe um y que torna $P(x, y)$ verdadeiro para todo o x. Assim, para esta sentença ser verdadeira, deverá existir um valor particular de y para o qual $P(x, y)$ seja verdadeiro independentemente da escolha de x. Por outro lado, $\forall x \exists y P(x, y)$ é verdadeiro se e somente se para todo valor x existe um valor de y para o qual $P(x, y)$ é verdadeiro. Assim, para esta sentença ser verdadeira, não importando a escolha de x, deverá existir um valor de y (possivelmente dependendo do valor de x escolhido) para o qual $P(x, y)$ é verdadeiro. Por outras palavras, no segundo caso, y pode depender em x, enquanto que no primeiro caso, y é uma constante independentem de x.

Destas observações, segue-se que se $\exists y \forall x P(x, y)$ é verdadeiro, então $\forall x \exists y P(x, y)$ também deverá ser verdadeiro. No entanto, se $\forall x \exists y P(x, y)$ é verdadeiro, não é necessário que $\exists y \forall x P(x, y)$ seja verdadeiro.

A tabela 1.4.1 sumariza o significado das diferentes quantificações possíveis envolvendo duas variáveis.

Sentença	Quando Verdadeira?	Quando Falsa?
$\forall x \forall y P(x,y)$ $\forall y \forall x P(x,y)$	$Px(x,y)$ é verdadeirox,y para todo o par	Existe um par x,y para o qual $P(x,y)$ é falso
$\forall x \exists y P(x,y)$	Para todo x existe um y para o qual $P(x,y)$ é verdadeiro	Existe um x tal que $P(x,y)$ é falso para todo y.
$\exists x \forall y P(x,y)$	Existe um x para o qual $P(x,y)$ é verdadeiro para todo y	Para todo x existe um y para o qual $P(x,y)$ é falso.
$\exists x \exists y P(x,y)$ $\exists y \exists x P(x,y)$	Para todo o par x,y para o qual $P(x,y)$ é verdadeiro	$P(x,y)$ é falso para todo o par x,y

Tabela 1.4.1: Quantificações de Duas Variáveis.

Quantificações com mais de duas variáveis também são comuns, como o exemplo a seguir ilustra.

Exemplo 1.4.5. Seja $Q(x,y,z)$ a sentença "$x+y=z$". Quais são os valores lógicos das sentenças $\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z)$ e $\exists z \forall x \forall y Q(x,y,z)$, onde o domínio de todas as variáveis consiste em todos os números reais?

Solução: Suponha que x e y possuem valores. Então, existe um número real z tal que $x+y=z$. Consequentemente, a quantificação

$$\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z),$$

que é a sentença

"Para todo os números x e para todos os números reais y existe um número real z para o qual $x+y=z$",

é verdadeira. Aqui, a ordem da quantificação é importantem porque a quantificação

$$\exists z \forall x \forall y Q(x,y,z),$$

que é a sentença

"Existe um número real z tal que para todo o número real x e para todo o número real y é verdadeiro que $x+y=z$",

é falsa, porque não existe um valor de z que satisfaça a equação $x+y=z$ para todos os valores de x e y.

Exercícios do Capítulo 1

1. Quais das seguintes frases são proposições?
   (a) A lua é feita de queijo verde.
   (b) Ele é certamente, um homem alto.
   (c) Dois é um número primo.
   (d) O jovo vai acabar logo?
   (e) Os juros vão subir ano que vem.
   (f) Os juro vão descer ano que vem.
   (g) $x^2 - 4 = 0$.
2. Qual das seguintes sentenças é uma proposição? Quais são os valores de verdade para as que são proposições?
   (a) Lisboa é a capital do Brasil.
   (b) $2 + 3 = 5$
   (c) Que horas são?
   (d) $2^n \geq 100$
   (e) A lua é feita de queijo.
3. Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições?
   (a) A Joana tem um leitor de MP3.
   (b) Não existe poluição em Luanda.
   (c) $2 + 2 = 4$
   (d) O Paulo e o Tomás são amigos.
   (e) A Maria envia mais de 100 SMS por dia.
4. Suponha que o telemóvel A tenha 256 MB de RAM e 32 GB de ROM e que a sua resolução gráfica seja de 8 MP; o telemóvel B possui 288 MB de RAM, 64 GB de ROM e 4 MP de resolução gráfica; e por fim o telemóvel C possui 128 MB de RAM, 32 GB de ROM e 5 MP de resolução gráfica. Determine o valor de verdade para cada uma das seguintes proposições.
   (a) O telemóvel B possui a maior capacidade de RAM.
   (b) O telemóvel C possui a maior capacidade de ROM ou maior resolução gráfica do que o telemóvel B.

(c) O telemóvel B possui mais RAM, mais ROM e mais MP do que o telemóvel A.

(d) Se o telemóvel B possui mais RAM e mais ROM que o telemóvel C, então também possui a maior resolução gráfica.

(e) O telemóvel A possui mais RAM do que o telemóvel B se e somente se o telemóvel B possui mais RAM do que o telemóvel A.

5. Sejam p e q as proposições
   p: Eu comprei um bilhete para o teatro esta semana
   q: Eu ganhei um milhão de kwanzas na loteria
   Expresse cada uma das seguintes proposições como sentenças em Português.

   (a) $\neg p$
   (b) $p \vee q$
   (c) $p \to q$
   (d) $p \wedge q$
   (e) $p \leftrightarrow q$
   (f) $\neg p \to \neg q$
   (g) $\neg p \wedge \neg q$
   (h) $\neg p \vee (p \vee q)$

6. Determine se os seguintes bicondicionais são verdadeiros ou falsos.

   (a) $2 + 2 = 4$ se e somente se $1 + 1 = 2$.
   (b) $1 + 1 = 2$ se e somente se $2 + 3 = 4$.
   (c) $1 + 1 = 3$ se e somente se macacos conseguem voar.
   (d) $0 > 1$ se e somente se $2 > 1$.

7. Escreva cada uma das sentenças abaixo na forma "Se p então q".

   (a) É necessário lavar o carro do chefe para ser promovido.
   (b) Quando o vento vem do sul significa que a primaveira aproxima-se.
   (c) Uma condição suficiente para que a garantia seja válida é a de que o computador foi comprado a menos de um ano.
   (d) O Pedro é apanhado toda vez que cabula.
   (e) Obterás acesso ao *website* se pagares a taxa de subscrição.
   (f) Para ser eleito deves conhecer as pessoas certas.

8. Construa a tabela de verdade para as seguintes proposições

   (a) $p \oplus p$
   (b) $p \oplus \neg p$
   (c) $p \oplus \neg q$
   (d) $\neg p \oplus \neg q$
   (e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$

(f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

(g) $((p \to q) \to r) \to s$.

9. Explique, sem utilizar uma tabela de verdade, porquê $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p)$ é verdade quando p, q e r possuem os mesmos valores de verdade e falso em caso contrário.

10. O soba de uma vila diz que existe um barbeiro numa outra vila muito distante, que apenas faz a barba à pessoas e somente à pessoas que não fazem a barba por sí próprias. Será que este barbeiro existe?

11. Utiliza a lei de DeMorgan para encontrar a negação para cada uma das seguintes sentenças.

    (a) O Ndongala vai procurar um emprego ou terminar a licenciatura.

    (b) A Luísa percebe Java e Estrutura Discreta.

    (c) O Nadilson é jovem e forte.

    (d) A Rebecca vai viajar para o Brasil ou para a Espanha.

12. Utilize tabelas de verdade para verificar as seguintes leis da absorção

    (a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

    (b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

13. Mostre que $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ é uma tautologia

14. Encontre uma proposição composta involvendo as variáveis p, q e r que seja verdadeira quando p e q são verdadeiros e r é falso, mas que seja falso em caso contrário.

15. Encontre uma proposição composta lógicamente equivalente a $p \to q$ utilizando apenas o operador $\downarrow$.

    Nota: O símbolo $\downarrow$ representa o operador NOR (ou negação do operador $\vee$). A proposição $p\ NOR\ q$ é verdadeira quando ambos p e q são falsos, e falsa em caso contrário.

16. Demonstre que as seguintes proposições são logicamente equivalentes

    (a) $p \leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

    (b) $\neg(p \leftrightarrow q)$ e $p \leftrightarrow \neg q$

    (c) $p \to q) \wedge (p \to r)$ e $p \to (q \wedge r)$

17. Cada habitante de uma vila remota sempre diz a verdade ou mente. Um habitante desta vila irá apenas responder com "Sim" ou "Não" a uma pergunta feita por um turista. Imagine que és um turista em visita a esta cidade e encontras um ponto onde a estrada divide-se em dois caminhos: um que leva para o teu destino e outra que leva para uma floresta perigosa. Um habitante da vila está mesmo ao lado do ponto da estrada em que te encontras. Qual é pergunta que deves fazer a este habitante para obteres a resposta que desejas sobre o caminho a tomar para chegar ao teu destino?

18. Ao planear uma festa pretendes identificar a quem convidar. No grupo de amigos que queres convidar, existem três amigos esquisitos. Sabes que se a Joana for, ela não vai ficar contente se o Samuel for. Samuel irá a festa apenas se a Katia também for e a Kátia não irá a festa ao menos que Joana também não vá. Entre estes três amigos quais deves convidar para garantir que ninguém fique infeliz.

19. Seja $P(x)$ a expressão "a palavra x contém a letra a". Quais são os valores de verdade para?

    (a) $P(laranja)$

    (b) $P(limo)$

    (c) $P(verdade)$

    (d) $P(dificil)$

    (e) $P(falso)$

20. Seja $P(x)$ a expressão "x perde mais do que cinco horas por dia no Facebook", onde o domínio para x consiste em todos os estudantes. Descreve cada uma das expressões a seguir em Português.

    (a) $\exists x P(x)$

    (b) $\forall x P(x)$

    (c) $\exists x \neg P(x)$

    (d) $\forall x \neg P(x)$

21. Traduza as seguintes expressões para Português, onde $C(x)$ é "x é um comediante" e $E(x)$ é "x é muito engraçado" e o domínio que consiste em todas as pessoas.

    (a) $\forall x(C(x) \rightarrow E(x))$

    (b) $\forall x(C(x) \wedge E(x))$

    (c) $\exists x(C(x) \rightarrow E(x))$

    (d) $\exists x(C(x) \wedge E(x))$

22. Seja $Q(x)$ a expressão "$x + 1 > 2$". Se o domínio consiste em todos os números inteiros, quais são os valores de verdade para

    (a) $Q(0)$

    (b) $Q(-1)$

    (c) $Q(1)$

    (d) $\exists x Q(x)$

    (e) $\forall x Q(x)$

    (f) $\exists x \neg Q(x)$

    (g) $\forall x \neg Q(x)$

23. Determine os valores de verdade para cada uma das seguintes afirmações se o domínio de todas as variáveis consiste no conjunto dos números inteiros.

(a) $\forall n(n^2 \geq 0)$

(b) $\exists n(n^2 = n)$

(c) $\forall n(n^2 \geq n)$

(d) $\exists n(n^2 < 0)$

24. Suponha que o domínio das funções proposicionais $P(x)$ consiste nos inteiros $0, 1, 2, 3$ e 4. Reescreva cada uma das proposições utilizando disjunções, conjunnções e negações.

    (a) $\exists x P(x)$

    (b) $\forall x P(x)$

    (c) $\exists x \neg P(x)$

    (d) $\forall x \neg P(x)$

    (e) $\neg \exists x P(x)$

    (f) $\neg \forall x P(x)$

25. Para as seguintes afirmações, encontre um domínio de tal forma que a afirmação seja verdadeira e um domínio de tal forma que a afirmação seja falsa.

    (a) Todo o mundo está a estudar Estruturas Discretas.

    (b) Todos têm mais de 21 anos.

    (c) Duas pessoas diferentes não possuem a mesma avó.

    (d) Todo mundo fala Japonês.

    (e) Alguém conhece mais do que duas pessoas.

26. Traduza as seguintes afirmações em expressões lógicas utilizando predicados, quantificadores e conectores lógicos.

    (a) Ninguém é perfeito.

    (b) Nem todo o mundo é perfeito.

    (c) Todos os teus amigos são perfeitos.

    (d) Pelo menos, um dos teus amigos é perfeito.

    (e) Alguém na tua sala foi nascido no século 21.

    (f) Tudo está no sítio certo e em perfeitas condições.

27. Determine se $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ e $\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$ são lógicamente equivalentes. Justifique a sua resposta.

28. Seja $G(x)$ a expressão "x possui um gato", seja $C(x)$ a expressão "x possui um cão" e seja $F(x)$ a expressão "x possui um furão". Expresse cada uma das seguintes sentenças em termos de $G(x), C(x), F(x)$, quantificadores e conectores lógicos. O domínio é o conjuntos dos estudantes da tua sala.

    (a) Um estudante na tua sala possui um gato, um cão e um furão.

    (b) Todos os estudantes na tua sala possuem um gato, um cão ou um furão.

(c) Alguns estudantes na tua sala possuem um gato e um furão, mas não possuem um cão.

(d) Nenhum estudante na tua sala possui um gato, um cão e um furão.

29. Seja $P(x)$ a sentença "$x = x^2$." Se o domínio consiste dos números inteiros, qual é o valor lógico das seguintes expressões:

    (a) $P(0)$

    (b) $P(1)$

    (c) $P(2)$

    (d) $P(-1)$

    (e) $\exists x P(x)$

    (f) $\forall P(x)$

30. Traduza cada uma das seguintes sentenças em expressões lógicas utilizando predicados, quantificadores e conectores lógicos.

    (a) Ninguém é perfeito.

    (b) Todos os teus amigos são perfeitos.

    (c) Pelo menos um dos teus amigos é perfeito.

    (d) Todos são teus amigos e são perfeitos.

31. Seja $Q(x, y)$ a sentença "x enviou um email a y", onde o domínio de x e y consiste em todos os estudantes da tua sala. Expresse cada uma das seguintes quantificações em Português.

    (a) $\exists x \exists y Q(x, y)$

    (b) $\exists x \forall y Q(x, y)$

    (c) $\forall x \exists y Q(x, y)$

    (d) $\exists y \forall x Q(x, y)$

32. Encontre um contra-exemplo, quando possível, para estas quantificações universais, onde o domínio das variáveis consiste no conjunto dos números inteiros.

    (a) $\forall x \exists y (x = 1/y)$

    (b) $\forall x \exists y (y^2 - x < 100)$

    (c) $\forall x \forall y (x^2 \neq y^3)$

Exercícios com Programação

Escreva programas de computador com as entradas e saídas especificadas.

1. Dado os valores lógicos das proposições p e q, encontre os valores lógicos da conjunção, disjunção inclusiva, disjunção exclusiva, condicional e a bicondicional destas proposições.

2. Dada uma proposição composta, determinar se é satisfazível por verificar os seus valores lógicos para todos as atribuições positivas de valores lógicos às suas variáveis proposicionais.

Capítulo 2

Conjuntos, Funções, Matrizes e Sequências

2.1 Conjuntos

Introdução

Nesta secção estudaremos as estruturas discretas fundamentais nas quais todas as outras estruturas discretas são construídas, nomeadamente, os conjuntos. Os conjuntos são utilizados para agrupar objectos. Geralmente, mas não sempre, os objectos num conjunto possuem propriedades semelhantes. Por exemplo, todos os estudantes que estão inscritos na Universidade Agostinho Neto formam um conjunto. Da mesma forma, todos os estudantes actualmente inscritos na disciplina de Estruturas Discretas em qualquer Universidade formam um conjunto. Além disso, estes estudantes inscritos na Universidade Agostinho Neto e inscritos na disciplina de Estruturas Discretas formam um conjunto composto pelos elementos em comum das duas primeiras coleções.

A linguagem dos conjuntos é uma forma de se estudar tais coleções de forma organizada. Daremos a seguir uma definição do termo "conjunto". Esta definição é apenas intuitiva e não é parte da definição formal da teoria dos conjuntos.

Definição 2.1.1. (Conjunto) Um conjunto é uma colecção não-ordenada de objectos, chamados de *elementos* ou *membros* do conjunto. Diz-se que um conjunto *contém* elementos. Escrevemos $a \in A$ para denotar que a é um elemento do conjunto. A notação $a \notin A$ denota que a não é um elemento do conjunto A.

É comum representar os conjuntos com letras maiúsculas. As letras minúsculas são geralmente utilizadas para denotar os elementos dos conjuntos. Existem diversas formas de descrever um conjunto. Uma delas é por listar todos os elementos do conjunto, quando isto é possível. Utilizamos as chavetas para denotar um conjunto com todos os elementos listados. Por exemplo, a notação $\{a, b, c, d\}$ representa o conjunto com os quatro elementos a, b, c e d. Esta forma de descrever um conjunto é conhecida como **método de listagem**.

Exemplo 2.1.1. O conjunto V de todas as vogais no alfabeto Português pode ser escrito como $V = \{a, e, i, o, u\}$.

Exemplo 2.1.2. O conjunto I de todos os inteiros ímpares positivos menores que 10 pode ser escrito como $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Exemplo 2.1.3. Embora os conjuntos são geralmente utilizados para agrupar elementos com propriedades comuns, não existe alguma restrição que impeça-os de possuírem elementos não relacionados. Por exemplo, $\{a, 2,$ Francisco, Malange$\}$ é o conjunto que contêm os quatro elementos a, 2, Francisco e Malanje.

Por vezes o método de listagem é utilizado para descrever um conjunto sem listar todos os seus elementos. Alguns elementos são listados e a seguir elípses ou reticências $(\ldots)$ são acrescentadas quando o padrão geral dos elementos é óbvio.

Exemplo 2.1.4. O conjunto dos números positivos inteiros menores que 100 pode ser denotado por $\{1, 2, 3, \ldots, 99\}$.

Uma outra forma de descrever um conjunto é por utilizar um **constructor de conjunto**. Caracterizamos os elementos de um conjunto por definir uma propriedade ou propriedades que os elementos devam possuír para fazer parte do conjunto. Por exemplo, o conjunto I, de todos os números positivos inteiros menores que 10 pode ser escrito como:

$$O = \{x \mid x \text{ é um inteiro positivo menor que 10.}\}$$

ou, especificando o universo como o conjunto dos inteiros positivos, da seguinte maneira:

$$O = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ é impar e } x < 10\}$$

Geralmente utilizamos esta notação para descrever conjuntos onde é impossível listar todos os elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}^+$ de todos os números racionais positivos pode ser escrito como:

$$\mathbb{Q}^+ = x \in \mathbb{R} \mid x = \tfrac{p}{q} \text{ para alguns inteiros positivos } p \text{ e } q.$$

Cada um dos conjuntos abaixo, denotados por uma letra maiúscula a negrito, tem um papel importante na matemática discreta:

1. $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, o conjunto dos **números naturais**
2. $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, o conjunto dos **inteiros**
3. $\mathbf{Z}^+ = \{1, 2, \ldots\}$, o conjunto dos **inteiros positivos**
4. $\mathbf{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z}, \text{ e } q \neq 0\}$, o conjunto dos **números racionais**
5. $\mathbf{R}$, o conjunto dos **números reais**
6. $\mathbf{R}^+$, o conjunto dos **números reais positivos**
7. $\mathbf{C}$, o conjunto dos **números complexos**

Note que que algumas pessoas não consideram o 0 como um número natural, portanto tenha cuidado na utilização do termo *número natural* quando lê outros conteúdos/livros.

Conjuntos podem ter outros conjuntos como seus elementos, como ilustra o exemplo 2.1.5.

Exemplo 2.1.5. O conjunto {**N,Z,Q,R**} é um conjunto constituído por quatro elementos, sendo cada um deles um conjunto.

***Nota*:** O conceito de tipo de dados na Ciência da Computação é construído sobre o conceito de um conjunto. Em particular um **tipo de dados** é o nome de um conjunto, juntamente com um conjunto de operações que podem ser realizadas nos objectos de tal conjunto. Por exemplo, *boolean* é o nome do conjunto $\{0, 1\}$ juntamente com as operações em um ou mais elementos deste conjunto, tais como AND, OR e NOT.

Como muitas sentenças matemáticas afirmam que duas coleções de objectos especificadas de forma diferente são na verdade o mesmo conjunto, precisamos entender o que significa igualdade de dois conjuntos.

Definição 2.1.2. Dois conjuntos são *iguais* se e somente se possuem os mesmos elementos. Portanto, se A e B são conjuntos, então A e B são iguais se e somente se $\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$. Escrevemos $A = B$ se A e B são conjuntos iguais.

Exemplo 2.1.6. Os conjuntos $\{1, 3, 5\}$ e $\{3, 5, 1\}$ são iguais porque possuem os mesmos elementos. Note que a ordem em que os elementos de um conjuntos são listados não interessa. Note também que não importa se um elemento de um conjunto é listado mais de uma vez, portanto, o conjunto $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ é o mesmo conjunto que $\{1, 3, 5\}$ pois possuem os mesmos elementos.

O CONJUNTO VAZIO Existe um conjunto especial que não possui elementos. Este conjunto é chamado de **conjunto vazio** ou **conjunto nulo**, e é denotado por $\emptyset$. O conjunto vazio pode também ser denotado por $\{\}$ (isto é, representamos o conjunto com um par de chavetas que inclui todos os elementos neste grupo). Geralmente, um conjunto de elementos com certas propriedades acaba por transformar-se num conjunto vazio. Por exemplo, o conjunto de todos os inteiros positivos que são maiores que os seus quadradados é um conjunto vazio.

Um conjunto com apenas um elemento é chamado de **conjunto unitário**. Um erro comum é confundir o conjunto vazio $\emptyset$ com o conjunto $\{\emptyset\}$, que é um conjunto unitário. O único elemento do conjunto $\{\emptyset\}$ é o próprio conjunto vazio! Uma analogia útil para lembrar-se desta diferença é pensar nos directórios ou pastas de um computador. O conjunto vazio nesta analogia seria um pasta vazia e o conjunto composto pelo conjunto vazio seria uma pasta com apenas um elemento, nomeadamente, uma pasta vazia.

Subconjuntos

É comum encontrarmos situações onde os elementos de um conjunto são também os elementos de um segundo conjunto. Iremos agora introduzir alguma terminologia e notações para expressar estas relações entre conjuntos.

Definição 2.1.3. O conjunto A é um *subconjunto* de B se e somente se todo elemento de A é também um elemento de B. Utilizamos a notação $A \subseteq B$ para indicar que A é um subconjunto do conjunto B.

Nós vemos que $A \subseteq B$ se e somente se a quantificação

$$\forall x(x \in A \to x \in B)$$

é verdadeira. Note que para provar que A não é um subconjunto de B precisamos apenas encontrar um elemento $x \in A$ com $x \notin B$. Um elemento x com estas características é chamado de contra-exemplo da afirmação de que $x \in A$ implica $x \in B$.

Exemplo 2.1.7. O conjunto de todos os números ímpares positivos menores que 10 é um subconjunto do conjunto de todos os inteiros positivos menores que 10. O conjunto dos números racionais é um subconjunto do conjunto dos números reais.

Teorema 1. Para todo conjunto S,

1. $\emptyset \subseteq S$
2. $S \subseteq S$

Demonstração: Iremos demonstrar (1) e deixar a demonstração de (2) como exercício. Seja S um conjunto. Para mostrar que $\emptyset \subseteq S$, devemos mostrar que $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ é verdadeiro. Como o conjunto vazio não possui elementos, segue-se que $x \in \emptyset$ é sempre falso. Segue-se daí que a sentença condicional $x \in \emptyset \to x \in S$ é sempre falsa, porque a sua hipótese é sempre falsa e uma sentença condicional com uma falsa hipótese, é verdadeira. Sendo assim, $\forall x(x \in \emptyset \to x \in S)$ é verdadeiro. Isto completa a demonstração de (1).

Quando queremos enfatizar que um conjunto A é um subconjunto de um conjunto B mas que $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$ e dizemos que A é um **subconjunto próprio** de B. Para $A \subseteq B$ ser verdadeiro, deve acontecer que $A \subseteq B$ e deve existir um elemento x em B que não é um elemento de A. Isto é, A é um subconjunto próprio de B se e somente se

$$\forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

é verdadeiro.

Uma forma útil de mostrar que dois conjuntos possuem os mesmos elementos é por provar que cada conjunto é um subconjunto do outro. Por outras palavras, podemos mostrar que A e B são conjuntos com $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$. Isto é, $A = B$ se e somente se $\forall x(x \in A \to x \in B)$ e $\forall x(x \in B \to x \in A)$ ou de maneira equivalente, se e somente se $\forall x(x \in A \leftrightarrow B)$, que é o que significa A e B serem iguais.

Os conjuntos podem ter outros conjuntos como membros. Por exemplo, temos os conjuntos

$$A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ e } B = \{x \mid x \text{ é um subconjunto do conjunto } \{a, b\}\}$$

Note que estes dois conjuntos são iguais, isto é, $A = B$. Note também que $\{a\} \in A$, mas $a \notin A$.

O Tamanho de um Conjunto

Conjuntos são extensivamente utilizados em problemas de contagem, e para esta utilização precisamos discutir o tamanho dos conjuntos.

Definição 2.1.4. Seja S um conjunto. Se existem exactamente n elementos distintos em S onde n é um inteiro não negativo, dizemos que S é um *conjunto finito* e que n é a cardinalidade de S. A cardinalidade de S é denotada por $\mid S \mid$.

Nota: O termo *cardinalidade* vem da utilização comum do termo *número cardinal* como o tamanho de um conjunto finito.

Exemplo 2.1.8. Seja A o conjunto dos inteiros positivos menores que 10. Então $\mid A \mid = 5$.

Exemplo 2.1.9. Seja S o conjunto das letras do alfabeto Português. Então $\mid S \mid = 26$.

Exemplo 2.1.10. Como o conjunto vazio não possui elementos, segue-se que $\mid \emptyset \mid = 0$.

Definição 2.1.5. Um conjunto é chamado de *infinito* quando não é finito.

O conjunto dos números inteiros positivos é um conjunto infinito.

Conjunto - Potência

Muitos problemas envolvem a necessidade de testar todas as combinações possíveis de elementos de um conjunto para ver se os mesmos satisfazem alguma propriedade. Para considerar todas estas combinações de elementos de um conjunto S, construímos um novo conjunto que possui como elementos, todos os subconjuntos de S.

Definição 2.1.6. Dado um conjunto S, o conjunto-potência de S é o conjunto de todos os subconjuntos do conjunto S. O conjunto-potência de S é denotado por $\mathcal{P}$.

Exemplo 2.1.11. Qual é o conjunto-potência do conjunto $\{0, 1, 2\}$?

Solução: O conjunto-potência $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ é o conjunto de todos os subconjuntos de $\{0, 1, 2\}$. Sendo assim

$$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Note que o conjunto vazio e conjunto em si próprio são membros de conjunto de subconjuntos.

Exemplo 2.1.12. Qual é o conjunto-potência do conjunto vazio? Qual é o conjunto potência do conjunto $\{\emptyset\}$?

Solução: O conjunto vazio possui exactamente um subconjunto, nomeadamente, sí próprio. Consequentemente,

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}.$$

O conjunto $\{\emptyset\}$ possui exactamente dois subconjuntos, nomeadamente, $\emptyset$ e o conjunto $\{\emptyset\}$. Portanto,

$$\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}.$$

Se um conjunto possui n elementos, então o seu conjunto-potência possui 2^n elementos. Iremos demonstrar este facto de várias formas em secções subsequentes.

Produto Cartesiano

A ordem dos elementos numa coleção geralmente é importante. Como os conjuntos são não-ordenados, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas. Isto é providenciado pelas **n-tuplas ordenadas**.

Definição 2.1.7. A *n-tupla ordenada* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é a coleção ordenada que possui a_1 como o seu primeiro elemento, a_2 como o seu segundo, $\ldots$, e a_n como o seu n^o elemento (ou elemento de ordem n).

Dizemos que duas n-tuplas ordenadas são iguais se e somente se cada par correspondente dos seus elementos são iguais. Por outras palavras, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ se e somente se $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em particular, 2-tuplas ordenadas são chamadas de **pares ordenados**. Os pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se e somente se $a = c$ e $b = d$. Note (a, b) e (b, a) não são iguais ao menos que $a = b$.

Muitas das estruturas discretas que iremos estudar em capítulos posteriores são baseadas na noção de *produto Cartesiano* (em homenagem ao matemático francês René Descartes). Iremos primeiramente definir o produto cartesiano de dois conjuntos.

Definição 2.1.8. Sejam A e B dois conjuntos. O *produto Cartesiano* de A e B, denotado por $A \times B$, é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b), onde $a \in A$ e $b \in B$. Assim,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Exemplo 2.1.13. Qual é o produto Cartesiano de $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$?

Solução: O produto Cartesiano $A \times B$ é

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Note que o produto Cartesiano $A \times B$ e $B \times A$ não são equivalentes, ao menos que $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ (de tal forma que $A \times B = \emptyset$) ou $A = B$. Isto é ilustrado no exemplo 2.1.14.

Exemplo 2.1.14. Mostre que o produto Cartesiano $B \times A$ não é igual ao produto cartesiano $A \times B$ onde A e B são os mesmos do exemplo 2.1.13.

Solução: O produto Cartesiano $B \times A$ é

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}.$$

Este resultado é diferente de $A \times B$ obtido no exemplo 2.1.13.

Definição 2.1.9. O *producto Cartesiano* dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, denotado por $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, é o conjunto de n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ onde a_i pertence a A_i para $i = 1, 2, \ldots, n$. Em outras palavras,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Exemplo 2.1.15. Qual é o produto Cartesiano $A \times B \times C$, onde $A = \{0, 1\}, B = \{1, 2\}$ e $C = \{0, 1, 2\}$?

Solução: O produto Cartesiano $A \times B \times C$ consiste em todas as triplas ordenadas (a, b, c), onde $a \in A$, $b \in B$, e $c \in C$. Assim,

$$\begin{aligned} A \times B \times C = \quad & \{(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,0),(0,2,1),(0,2,2), \\ & (1,1,0),(1,1,1),(1,1,2),(1,2,0),(1,2,1),(1,2,2)\} \end{aligned}$$

Nota: Note que quando A, B e C são conjuntos, $(A \times B) \times C$ não é o mesmo que $A \times B \times C$.

Utilizamos a notação A^2 para denotar $A \times A$, o produto Cartesiano do conjunto A consigo próprio. De forma similar, $A^3 = A \times A \times A$, $A^4 = A \times A \times A \times A$. De maneira geral,
$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo 2.1.16. Suponha que $A = \{1, 2\}$. Segue-se que $A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ e $A^3 = \{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$.

O subconjunto R do produto cartesiano de $A \times B$ é chamado de a **relação** do conjunto A para o conjunto B. Os elementos de R são pares ordenados, onde o primeiro elemento pertence à A e o segundo à B. Por exemplo, $R = \{(a,0),(a,1),(a,3),(b,1),(b,2),(c,0),(c,3)\}$ é a relação do conjunto $\{a, b, c\}$ para o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. A relação do conjunto A para si mesmo é chamada de relação em A.

Iremos estudar relações e as suas propriedades no Capítulo 3.

Utilizando a Notação de Conjuntos com Quantificadores

Por vezes restringimos o domínio de um sentença quantificada por explicitamente utilizar uma notação em particular. Por exemplo, $\forall x \in S(P(x))$ denota a quantificação universal de de $P(x)$ para todos os elementos do conjunto S. Em outras palavras, $\forall x \in S(P(x))$ é a simplificação de $\forall x(x \in S \to P(x))$. Similarmente, $\exists x \in S(P(x))$ denota a quantificação existêncial de $P(x)$ sobre os elementos em S. Isto é, $\exists x \in S(P(x))$ é a simplificação de $\exists x(x \in S \wedge P(x))$.

Exemplo 2.1.17. O que é que as sentenças $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ e $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ significam?

Solução: A sentença $\forall x \in \mathbf{R}(x^2 \geq 0)$ afirma que para todos os números reais x, $x^2 \geq 0$. Esta sentença pode ser expressa como "O quadrado de todo o número real é não-negativo".

A sentença $\exists x \in \mathbf{Z}(x^2 = 1)$ afirma que existe um número inteiro x tal que $x^2 = 1$. Esta sentença pode ser expressa como "Existe um inteiro cujo o quadrado é igual a 1".

Conjunto-verdade e Quantificadores

Iremos agora alinhar os conceitos da teoria dos conjuntos e da lógica de predicados. Dado um predicado P, e um domínio D, definimos o **Conjunto-verdade** de P como sendo o conjunto de elementos x em D para os quais $P(x)$ é verdade. O conjunto-verdade de $P(x)$ é denotado por $\{x \in D \mid P(x)\}$.

Exemplo 2.1.18. Quais são os conjuntos-verdade dos predicados $P(x), Q(x)$ e $R(x)$, onde o domínio é o conjunto dos números inteiros e $P(x)$ é "$|x| = 1$", $Q(x)$ é "$x^2 = 2$" e $R(x)$ é "$|x| = x$".

Solução: O conjunto-verdade de P, $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = 1\}$, é o conjunto de inteiros para os quais $|x| = 1$. Como $|x| = 1$ quando $x = 1$ ou $x = -1$, e para mais nenhum outro inteiro x, vemos que o conjunto-verdade de P é o conjunto $\{-1, 1\}$.

O conjunto-verdade de Q, $\{x \in \mathbf{Z} \mid x^2 = 2\}$, é o conjunto de inteiros para os quais $x^2 = 2$. Este conjunto é vazio porque não existe um número inteiro x para os quais $x^2 = 2$.

O conjunto-verdade de R, $\{x \in \mathbf{Z} \mid |x| = x\}$, é o conjunto de inteiros para os quais $|x| = x$. Como $|x| = x$ se e somente se $x \geq 0$, acontece que o conjunto-verdade de R é o conjunto $\mathbf{N}$, o conjunto dos números inteiros não-negativos.

Note que $\forall x P(x)$ é verdadeiro no domínio U (conjunto universo) se e somente se o conjunto-verdade de P é o conjunto U. Da mesma forma, $\exists x P(x)$ é verdadeiro sob o domínio U se e somente se o conjunto-verdade de P não é vazio.

2.2 Operações sobre Conjuntos

Introdução

Dois ou mais conjuntos podem ser combinados de diversas formas. Por exemplo, começando com o conjunto das disciplinas do curso de Matemática da tua universidade e o conjunto das disciplinas do curso de Ciência da Computação, podemos formar o conjunto dos estudantes que têm disciplinas do curso de Matemática e do curso de Ciência da Computação, o conjunto dos estudantes que têm disciplinas dos dois cursos e por aí em diante.

Definição 2.2.1. Sejam A e B dois conjuntos. A *união* dos conjuntos A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto que contém os elementos que estão em A ou em B, ou em ambos.

Um elemnto x pertence a união dos conjuntos A e B se e somente se x pertence a A ou x pertence a B. Isto nos diz que

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$

O diagrama de Venn (*Pesquisar sobre Diagramas de Venn*) da figura 2.1 representa a união dos conjuntos A e B. A area que representa $A \cup B$ é a área sombreada entre os círculos que representam A ou que representam B.

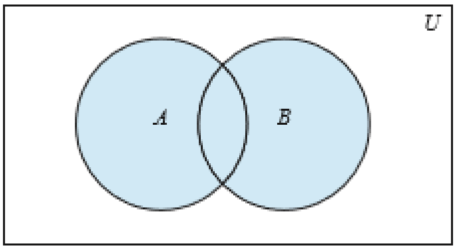


Figura 2.1: Diagrama de Venn da união de A e B.

Exemplo 2.2.1. A união dos conjuntos $\{1,3,5\}$ e $\{1,2,3\}$ é o conjunto $\{1,2,3,5\}$; isto é, $\{1,3,5\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3,5\}$.

Definição 2.2.2. Sejam A e B dois conjuntos. A *intersecção* dos conjuntos A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto que contém os elementos que estão tanto em A como em B.

Um elemento x pertence a intersecção dos conjuntos A e B se e somente se x pertence a A e x pertence a B. Isto nos diz que,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

O diagrama de Venn apresentado na figura 2.2 representa a intersecção dos dois conjuntos A e B. A zona sombreada que está entre ambos os círculos representando os conjuntos A e B é a área que representa a intersecção de A e B.

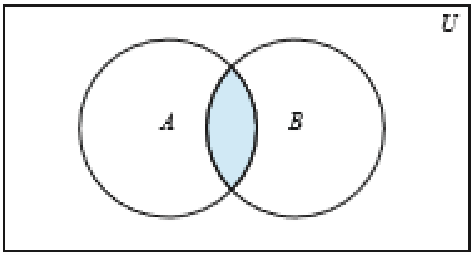


Figura 2.2: Diagrama de Venn da intersecção de A e B.

Exemplo 2.2.2. A intersecção dos conjuntos $\{1,3,5\}$ e $\{1,2,3\}$ é o conjunto $\{1,3\}$; isto é $\{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$.

Definição 2.2.3. Dois conjuntos são chamados de *disjuntos* se a sua interseção é o conjunto vazio (ou é nula).

Exemplo 2.2.3. Seja $A = \{1,3,5,7,9\}$ e $B = \{2,4,6,8,10\}$. Como $A \cap B = \emptyset$. A e B são disjuntos.

Geralmente estamos interessados em encontrar a cardinalidade da união de dois conjuntos finitos. Note que $|A| + |B|$ conta cada elemento em A mas não em B ou em B mas não em A exactamente uma vez, e cada elemento que está em ambos A e B é contado duas vezes. Assim, se o número de elementos que estão ao mesmo tempo em A e B é subtraído de $|A| + |B|$, elementos em $A \cap B$ serão contados apenas uma vez. Dessa forma,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

A generalização desse resultado para uniões de um número arbitrário de conjuntos é chamado de **princípo de inclusão-exclusão**. Este princípio é uma técnica importante utilizada em numeração.

Existem outras formas importantes de combinar dois conjuntos.

Definição 2.2.4. Sejam A e B dois conjuntos. A *diferença* entre A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto que contém os elementos que existem em A mas não existem em B. A diferença entre A e B é também chamada de *complemento* de B com respeito a A.

Nota: A diferença entre os conjuntos A e B é por vezes denotada por $A \setminus B$.

Um elmento x pertence a diferença entre A e B se e somente se $x \in A$ e $x \notin B$. Isto nos diz que,

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

O diagrama de Venn apresentado na figura 2.3 representa a diferença entre os conjuntos A e B. A área marcada no círculo que representa A e fora do círculo que representa B é a área que representa $A - B$.

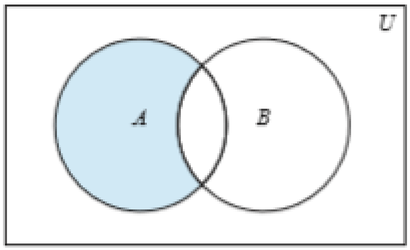


Figura 2.3: Diagrama de Venn da diferença de A e B.

Exemplo 2.2.4. A diferença entre $\{1, 3, 5\}$ e $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto $\{5\}$; isto é, $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$. Isto é diferente da diferença entre $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 3, 5\}$, que é o conjunto $\{2\}$.

Uma vez que o conjunto universal U é especificado, o **complemento** de um conjunto pode ser definido.

Definição 2.2.5. Seja U o conjunto universo. O complemento do conjunto A, denotado por $\overline{A}$, é o complemento de A com respeito a U. Assim, o complemento do conjunto A é $U - A$.

Um elemento pertence a $\overline{A}$ se e somente se $x \notin A$. Isto nos diz que,

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Na figura 2.4 a área sombreada fora do círculo que representa A é a área que representa $\overline{A}$.

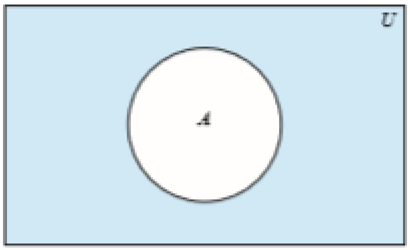


Figura 2.4: Diagrama de Venn para o complemento de A.

Exemplo 2.2.5. Seja $A = \{a, e, i, o, u\}$, onde o conjunto-universo é o conjunto de todas as letras do alfabeto, então $\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, \ldots, x, y, z\}$.

Exemplo 2.2.6. Seja A o conjunto dos números positivos inteiros maiores que 10 (onde o conjunto universal é o conjunto de todos os positivos inteiros), então $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Cabe ao leitor demonstrar que podemos expressar a diferença de A e B como a intersecção de A e o complemento de B. Isto é,
$A - B = A \cap \overline{B}$.

Identidade de Conjuntos

A tabela 2.2.1 lista as identidades mais importantes dos conjuntos. Iremos demonstrar algumas destas identidades utilizando três mêtodos diferentes. Estes métodos são apresentados para ilustrar que geralmente existem diferentes abordagens na resolução de um problema. As demonstrações das restantes identidades serão deixadas como exercícios. Deverá notar também a similaridade entre as identidades de conjuntos com as equivalências lógicas apresentadas no capítulo 1. Na verdade, as identidades de conjuntos apresentadas podem demonstradas directamente das equivalências lógicas correspondentes. Além disso, ambos são casos especiais de identidades da álgebra de Boole.

Identidade	**Nome**
$A \cap U = A$ $A \cup \emptyset = A$	Leis da Identidade
$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	Leis da Dominação
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	Leis da Idempotência
$\overline{(\overline{A})} = A$	Lei da Complementação
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	Leis Comutativas
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Leis Associativas
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Leis Distributivas
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	Leis de De Morgan
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	Leis da Absorção
$A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$	Leis do Complemento

Tabela 2.2.1: Idnetidades de conjuntos.

Uma forma de demonstrar que dois conjuntos são iguais é por demonstrar que um é subconjunto do outro e vice-versa. Lembre-se que para mostrar que um conjunto é subconjunto de um outro conjunto, podemos mostrar que se um elemento pertence ao primeiro conjunto então também deverá pertencer ao segundo conjunto. Geralmente utilizamos uma demonostração directa para fazer isso. Iremos ilustrar este tipo de demonstração por estabelecer a primeira lei de De Morgan.

Exemplo 2.2.7. Demonstre que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Solução: Iremos primeiramente demonstrar que os dois conjuntos $\overline{A \cap B}$ e $\overline{A} \cup \overline{B}$ são iguais por provar que cada um deles é subconjunto do outro.

Primeiro, mostramos que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Fazemos isto por provar que se x está em $\overline{A \cap B}$, então deverá também estar em $\overline{A} \cup \overline{B}$. Agora, suponha que $x \in \overline{A \cap B}$. Pela definição do complemento, $x \notin A \cap B$. Usando a definição de intersecção, vemos que a proposição $\neg((x \in A) \wedge (x \in B))$ é verdadeira.

Ao aplicar a lei de De Morgan para as proposições, temos que $\neg(x \in A)$ ou $\neg(x \in B)$. Utilizando a definição de negação das proposições, temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Utilizando a definição do complemento de um conjunto, vemos que isto implica que $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Consequentemente, pela definição da união, vemos que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Temos agora demonstrado que $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Agora, iremos mostrar que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$. Fazemos isso por mostrar que se x está em $\overline{A} \cup \overline{B}$, então também deverá estar em $\overline{A \cap B}$. Suponha agora que $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Pela definição de união, sabemos que $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Utilizando a definição de complemento, vemos que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Consequentemente, a proposição $\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$ é verdadeira.

Pela lei de De Morgan das proposições, concluímos que $\neg((x \in A) \vee (x \in B))$ é verdadeira. Pela definição de intersecção, segue-se que $\neg(x \in A \cap B)$. Acabamos de utilizar a definição do complemento para concluir que $x \in \overline{A \cap B}$. Isto mostra que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

Como demonstramos que cada conjunto é subconjunto do outro, os dois conjuntos são iguais e a identidade está provada.

Podemos agora mais sucintamente expressar este raciocínio no exemplo 2.2.8, utilizando a notação de construção de domínios, tal como o exemplo 2.2.9 ilustra.

Exemplo 2.2.8. Utilize a notação de construção de conjuntos e equivalências lógicas para estabelecer a primeira lei de De Morgan $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Solução: Podemos provar esta identidade com os seguintes passos:

$$
\begin{array}{rcll}
\overline{A \cap B} & = & \{x \mid x \notin A \cap B\} & \textit{pela definição do complemento} \\
& = & \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} & \textit{pela definição de não pertença} \\
& = & \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} & \textit{pela definição de intersecção} \\
& = & \{x \mid \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)\} & \textit{pela 1a. lei de De Morgan para equiv. lógicas} \\
& = & \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} & \textit{pela definição de não pertença} \\
& = & \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} & \textit{pela definição do complemento} \\
& = & \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\} & \textit{pela definição da união} \\
& = & \overline{A} \cup \overline{B} & \textit{pelo significado do construtor de conjunto}
\end{array}
$$

Note que para além das definições do complemento, união, pertença em conjuntos e o construtor de conjuntos, esta demonstração utiliza a segunda lei de De Morgan das equivalências lógicas.

Exemplo 2.2.9. Prove que a segunda lei distributiva da Tabela 2.2.1, que diz que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ para todos os conjuntos A, B e C.

Solução: Iremos demonstrar esta identidade por mostrar que cada lado é um subconjunto do outro lado. Suponha que $x \in A \cap (B \cup C)$. Então $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Pela definição de união, segue-se que $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in C$ (ou em ambos). Por outras palavras, sabemos que a proposição composta $(x \in A) \wedge ((x \in B) \vee (x \in C))$ é verdadeira. Pela lei distributiva para a conjunção sobre a disjunção, segue-se que $((x \in A) \wedge (x \in B)) \vee ((x \in A) \wedge (x \in C))$. Concluímos que $x \in A$ e $x \in B$, ou $x \in A$ e $x \in C$. Pela definição de intersecção, segue-se que $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Usando a definição de união, concluímos que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Concluímos que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Agora suponha que $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Assim, pela definição de união, $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. Pela definição de intersecção, segue-se que $x \in A$ e $x \in B$ ou $x \in A$ e $x \in C$. Disto vemos que $x \in A$, e $x \in B$ ou $x \in C$. Consequentemente, pela definição de união vemos que $x \in A$

e $x \in B \cup B$. Além disso, pela definição de intersecção, segue-se que $x \in A \cap (B \cup C)$. Concluímos que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Isto completa a demonstração da identidade.

Tópicos por Explorar

- União e Interesecção Generalizadas
- Representação de Conjuntos no Computador

2.3 Funções

Introdução

Em muitas instâncias atribuímos a cada elemento de um conjunto um outro elemento particular de um segundo conjunto (que poderá ser o mesmo que o primeiro). Por exemplo, suponha que a cada estudante na disciplina de Estruturas Discreta é atribuído uma classificação do conjunto $\{10, 12, 13, 14, 17\}$. Suponha também que estas notas são distribuídas a um grupo de alunos da seguinte forma: 10 para o Aldo, 13 para a Carla, 12 para o Gabriel, 10 para a Rosa e 17 para o Samuel. Esta atribuição é ilustrada na figura 2.5.

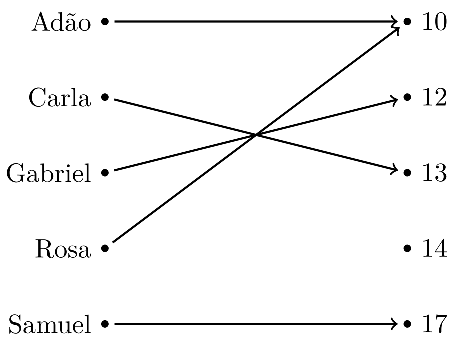


Figura 2.5: Atribuição de notas na disciplina de Estrutura Discretas.

Esta atribuição é um exemplo de uma função. O conceito de função é extremamente importante em matemática e ciência da computação. Por exemplo, em matemática discreta, funções são utilizadas na definição destas estruturas discretas como sequências. Funções também são também utilizadas para representar quanto tempo um computador leva para resolver um problema de um determinado tamanho. Muitos programas de computadores e subrotinas de programação, são desenhadas para calcular valores de funções. Funções recursivas, que são funções definidas em termos de sí próprias, são utilizadas extensivamente em ciência da computação.

Definição 2.3.1. Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. A *função* f de A para B é uma atribuição de exactamente um elemento de B a cada elemento de A. Escrevemos $f(a) = b$ se b é um único elemento de B atribuído pela função f ao elemento a de A. Se f é uma função de A para B, escrevemos $f : A \to B$.

Nota: Funções são por vezes chamadas **mapeamentos** ou **transformações**.

As funções são especificadas de várias formas. Por vezes nós apresentamos as atribuições explicitamente, como na figura 2.5. Geralmente utilizamos uma fórmula, como $f(x) = x + 1$, para definir uma função. Noutras ocasiões utilizamos um programa de computador para especificar uma função.

A função $f : A \to B$ pode ser também definida em termos de uma relação de A para B. Uma relação de A para B é apenas um subconjunto de $A \times B$. A relação de A para B que contém um, e apenas um, par ordenado (a, b) para cada elemento $a \in A$, define a função f de A para B. Esta função é definida pela atribuição de $f(a) = b$, onde (a, b) é o único par ordenado na relação que possui a como o seu primeiro elemento.

Definição 2.3.2. Se f é uma função de A para B, dizemos que A é o *domínio* de f e B é o co-domínio de f. Se $f(a) = b$, dizemos que b é a *imagem* de a e a é a pré-imagem de b. O *alcance*, ou *imagem*, de f é o conjunto de todas as imagens dos elementos de A. Também, se f é uma função de A para B, dizemos que f *mapeia* A em B.

A figura 2.6 representa a função f de A para B.

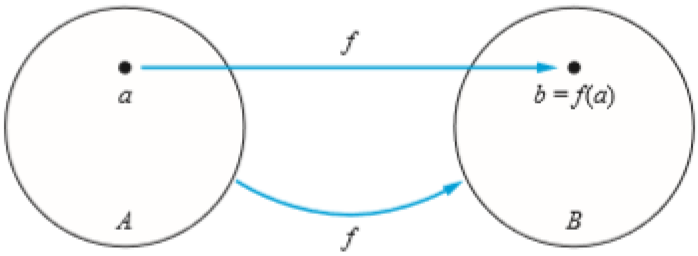


Figura 2.6: Função f que mapeia A em B.

Quando definimos uma função nós especificamos o seu domínio, co-domínio, e o mapeamento dos elementos do domínio para os elementos no co-domínio. Duas funções são iguais quando elas possuem o mesmo domínio, o mesmo co-domínio, e mapeam cada elemento do domínio comum para os mesmos elementos do co-domínio comum. Note que se mudarmos quer seja o domínio ou o co-domínio da função, obteremos uma função diferente. Se mudarmos o mapeamento dos elementos, obteremos também uma função diferente.

Os exemplos a seguir são exemplos de funções. Em cada exemplo, descrevemos o domínio, o co-domínio, a imagem da função e a atribuição de valores para os elementos do domínio.

Exemplo 2.3.1. Seja R a relação com os pares ordenados (André, 22), (Brenda, 24), (Carla, 21), (Doriel, 22), (Edna, 24) e (Felicia, 22). Cada um desses pares consiste no nome de um estudante e a sua idade. Especifique uma função determinada por esta relação?

Solução: Se f é a função especificada por R, então $f(\text{André}) = 22$, $f(\text{Brenda}) = 24$, $f(\text{Carla}) = 21$, $f(\text{Doriel}) = 22$, $f(\text{Edna}) = 24$ e $f(\text{Felicia}) = 22$. Aqui, $f(x)$ é a idade de x, onde x é um estudante. Para o domínio, temos o conjunto $\{\text{André, Brenda, Carla, Doriel, Edna, Felícia}\}$. Precisamos também especificar o co-domínio, que deverá conter todas as idades possíveis dos estudantes. Como é muito provável que os estudantes tenham todos menos de 100 anos de idade, podemos indicar o conjunto dos números positivos inteiros como o co-domínio. Note que poderíamos ter escolhido um co-domínio diferente, como o conjunto dos inteiros positivos ou o conjunto dos inteiros positivos entre 10 e 90, mas isto mudaria a função. Usar este co-domínio daria também a possibilidade de extender a função por adicionar nomes e idades de mais estudantes depois. A imagem da função especificada é o conjunto das diferentes idades dos estudantes, que é o conjunto {21,22,24}.

Exemplo 2.3.2. Seja f a função que atribui os dois últimos bits de uma cadeia de bits de tamanho 2 ou superior, a tal cadeia. Por exemplo $f(11010) = 10$. Assim, o domínio de f é o conjunto de todas as cadeias de bits de tamanho superior a 2, e o co-domínio e a imagem são o conjunto $\{00, 01, 10, 11\}$.

Exemplo 2.3.3. Seja $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ que atribui o quadrado de um número inteiro a este número. Então, $f(x) = x^2$, onde o domínio de f é o conjuntos de todos os números inteiros, o co-domínio de f é o conjunto dos números inteiros, e a imagem de f é o conjunto de todos inteiros que são quadrados perfeitos, nomeadamente, $\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$.

Exemplo 2.3.4. O domínio e o co-domínio de funções geralmente são especificados em linguagens de programação. Por exemplo, a seguinte expressão em Java

```
int piso (double num){...}
```

nos diz que o domínio da função `piso` é o conjunto dos números reais (representado pelo tipo de dados `double`) e o seu co-domínio é o conjunto dos números inteiros.

Definição 2.3.3. Sejam f_1 e f_2 funções de A para $\mathbf{R}$. Então $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ são também funções de A para $\mathbf{R}$ definidas para todo $x \in A$ por

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$$

Note que as funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$ foram definidas pela especificação dos seus valores em x em termos dos valores de f_1 e f_2 em x.

Sejam f_1 e f_2 duas funções de $\mathbf{R}$ em $\mathbf{R}$ tal que $f_1(x) = x^2$ e $f_2(x) = x - x^2$. Quais são os valores das funções $f_1 + f_2$ e $f_1 f_2$?

Solução: Da definição da soma e produto de funções, temos que

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x,$$

e

$$(f_1 f_2)(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4.$$

Quando f é uma função de A para B, a imagem de um subconjunto de A também pode ser definida.

Definição 2.3.4. Seja f uma função de A para B e seja S um subconjunto de A. A *imagem* de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que

$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S(t = f(s))\}.$$

Também podemos utilizar a notação curta $\{f(s) \mid s \in S\}$ para denotar este conjunto

Nota: A notação $f(S)$ para a imagem do conjunto S sobre a função f é potencialmente ambígua. Aqui, $f(S)$ denota um conjunto e não o valor da função f no conjunto S.

Exemplo 2.3.5. Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

Funções injectivas e sobrejectivas

Algumas funções nunca atribuiem o mesmo valor para dois elementos diferentes do domínio. Estas funções são chamadas de injectivas.

Definição 2.3.5. A função f é chamada de uma *injunção*, se e somente se $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para todo a e b no domínimo de f. A função é chamada de *injectiva* se for uma injunção.

Note que um função f é injectiva se e somente se $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$. Esta forma de expressar que f é uma injunção é obtida por obter a contrapositiva da implicação na definição.

Nota: Podemos expressar que f é uma injunção utilizando quantificadores como $\forall a \forall b(f(a) = f(b) \to a = b)$ ou equivalentemente $\forall a \forall b(a \neq b \to f(a) \neq f(b))$, onde o universo em discurso é o domínio da função.

Ilustraremos este conceito com alguns exemplos de funções que são injectivas e outras que não são.

Exemplo 2.3.6. Determine se a função f de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ e $f(d) = 3$ é injectiva.

Solução: A função f é injecetiva porque f obtém valores diferentes nos quatro elementos do seu domínio. Isto é ilustrado na figura 2.7.

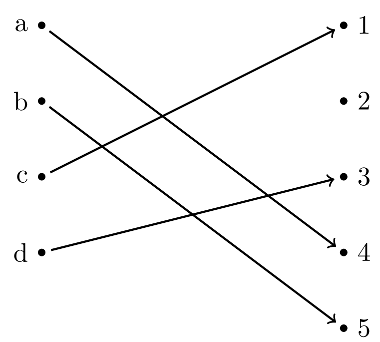


Figura 2.7: Uma função injectiva.

Exemplo 2.3.7. Determine se a função $f(x) = x^2$ do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números inteiros é injectiva.

Solução: A função $f(x) = x^2$ não é injectiva porque, por exemplo, $f(1) = f(-1) = 1$, mas no entanto $1 \neq -1$. Note que a função $f(x) = x^2$ com os seus domínios restrictos de $\mathbf{Z}^+$ é injectiva. (Tecnicamente, quando restringimos o domínio de uma função, obtemos uma nova função cujos valores coincidem com os mesmo valores da função original para os elementos do domínio restricto. A função restricta não é definida para os elementos do domínio original fora do domínio restricto.)

Exemplo 2.3.8. Determine se a função $f(x) = x + 1$ do conjunto dos números reais para o mesmo conjunto é injectiva.

Solução: A função $f(x) = x + 1$ é uma função injectiva. Para demonstrar isto, note que $x + 1 \neq y + 1$ quando $x \neq y$.

Definição 2.3.6. Uma função f cujo domínio e co-domínio são subconjuntos do conjuntos dos números reais é chamada de *crescente* se $f(x) \leq f(y)$, e *estritamente crescente* se $f(x) < f(y)$, quando $x < y$ e x e y estão no domínio de f. Similarmente, f é chamada de *decrescente* se $f(x) \geq f(y)$, e *estritamente decrescente* se $f(x) > f(y)$, sempre que $x < y$ e x e y estão no domínio de f. (A palavra *estritamente* nesta definição indica que desigualdade.)

Nota: Uma função f é crescente se $\forall x \forall y(x < y \to f(x) \leq f(y))$, estritamente crescente se $\forall x \forall y(x < y \to f(x) < f(y))$, decrescente se $\forall x \forall y(x < y \to f(x) \geq f(y))$ e estritamente decrescente se $\forall x \forall y(x < y \to f(x) > f(y))$, onde o universo de discurso é o domínio de f.

Definição 2.3.7. A função f de A para B é chamada de *sobrejectiva*, se e somente se para cada elemento $b \in B$ existe um elemento $a \in A$ com $f(a) = b$.

Nota: A função f é sobrejectiva se $\forall y \exists x(f(x) = y)$, onde o domínio para x é o domínio da função e o domínio para y é o co-domínio da função.

Exercícios do Capítulo 2

Conjuntos

1. Seja A o conjunto dos estudantes que vivem à $5km$ do campus e B o conjunto dos estudantes que vêm de bicicleta às aulas. Descreva os estudantes em cada um dos seguintes conjuntos.

   (a) $A \cap B$

   (b) $A \cup B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

2. Liste os elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 < 25\}$

   (b) $\{x | x$ é um dos antigos vencedores da Fórmula 1 $\}$

   (c) $\{x | x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = -1\}$

   (d) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$

3. Qual é cardinalidade de cada um dos seguintes conjuntos?

   (a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$

   (b) $\{\{a\}, \{\{a\}\}\}$

   (c) $\{a, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

   (d) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$

4. Suponha que A é o conjunto dos estudantes do segundo ano e B é o conjunto dos estudantes de Lógica de Programação. Descreva cada um dos conjuntos em termos de A e B.

   (a) O conjunto dos estudantes do segundo ano com a cadeira de Lógica de Programação

   (b) O conjunto dos estudantes do segundo ano que não têm a cadeira de Lógica de Programação

   (c) O conjunto dos estudantes que são, ou do segundo ano ou têm a cadeira de Lógica de Programação

   (d) O conjunto dos estudantes que não são do segundo ano, nem têm a cadeira de Lógica de Programação

5. Sejam, $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ encontre:

   (a) $A \cup B$

   (b) $A \cap B$

   (c) $A - B$

   (d) $B - A$

6. Desenhe os diagramas de Venn para cada uma das seguintes combinações dos domínios A, B e C

   (a) $A \cap (B \cup C)$

   (b) $A \cap B \cap C$

   (c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

   (d) $A \cap (B - C)$

   (e) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (f) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercícios com Programação

Escreva programas de computador com as entradas e saídas especificadas.

1. Dados dois conjuntos finitos, liste todos os elementos do produto Cartesiano dos dois conjuntos.

2. Dado um conjunto finito, liste todos os elementos do seu conjunto-potência.

3. Dados dois conjuntos A e B subconjuntos do mesmo conjunto universal, encontre os conjuntos $A \cup B$, $A \cap B$ e $A - B$.

Exercícios

Funções

1. Determine se f é uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ se

   (a) $f(n) = \pm n$

   (b) $\sqrt{n^2 + 1}$

   (c) $\frac{1}{(n^2 - 4)}$

2. Determine se as seguintes funções de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}$ são injectivas ou sobrejectivas.

   (a) $f(n) = n - 1$

   (b) $f(n) = n^2 + 1$

   (c) $f(n) = n^3$

   (d) $f(n) = \frac{n}{2}$

3. Considere as seguintes funções do conjunto dos estudantes de Estruturas Discretas. Em que condições uma função é injectiva se ela atribui a um estudante o seu:

   (a) Número de telemóvel

   (b) Número de estudante

   (c) Nota final

   (d) Local de Nascimento

   Definição 1 Uma função diz-se *bijectiva* quando é ao mesmo tempo injectiva (um para um) e sobrejectiva.

   Exemplo 1 Seja f uma função da forma $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4, f(b) = 2, f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é uma função injectiva e sobrejectiva. É injectiva porque não existem valores no domínio que são mapeados para o mesmo valor no co-domínio. É sobrejectiva porque todos os quatro elementos do co-domínio são imagens dos elementos no domínio. Então f é uma função *bijectiva* ou uma *bijeção*.

4. Determina se cada uma das seguintes funções é uma bijeção de $\mathbb{R}$ para $\mathbb{R}$.

   (a) $f(x) = -3x + 4$

(b) $f(x) = -3x^2 + 7$

(c) $f(x) = (x+1)/(x+2)$

(d) $f(x) = x^5 + 1$

(e) $f(x) = 2x + 1$

(f) $f(x) = x^2 + 1$

Definição 2 Seja f a função de A para B e seja S um subconjunto de A. A imagem de S sobre a função f é o subconjunto de B que consiste nas imagens dos elementos de S. Denotamos a imagem de S por $f(S)$, tal que $f(S) = \{t | \exists s \in S(t = f(s))\}$. Também podemos utilizar a representação $\{f(s) | s \in S\}$

Exemplo 2 Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 4, f(d) = 1$, e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$.

5. Seja $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$ encontre $f(S)$ se

   (a) $f(x) = 1$

   (b) $f(x) = 2x + 1$

   (c) $f(x) = \lceil \frac{x}{5} \rceil$

   (d) $f(x) = \lfloor \frac{(x^2+1)}{3} \rfloor$

6. Seja $f(x) = \lfloor \frac{x^2}{3} \rfloor$, encontre $f(S)$ se,

   (a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   (b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   (c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$

   (d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

7. Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(x) = x + 1$. Seja $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 3x$. Calcule o seguinte:

   (a) $(g \circ f)(5)$

   (b) $(f \circ g)(5)$

   (c) $(g \circ f)(x)$

   (d) $(f \circ g)(x)$

   (e) $(f \circ f)(x)$

   (f) $(g \circ g)(x)$

8. Para cada uma das seguintes bijeções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, encontre f^{-1}

   (a) $f(x) = 7x$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \frac{(x+4)}{3}$

Capítulo 3

Relações

Relações entre elementos de conjuntos ocorrem em muitos contextos. Todos dias lidamos com relações como por exemplo: uma pessoa e o seu número de telemóvel, um empregado(a) e o seu salário, etc. Em matemática estudamos relações como as que existem entre um número inteiro positivo e um seu divisor, um inteiro e o seu quadrado, um valor real x e o valor $f(x)$ onde f é uma função, etc.

As relações são representadas utilizando uma estrutura chamada de *relação*, que é simplesmente um subconjunto do produto cartesiano de conjuntos. As relações podem ser utilizadas para resolver problemas tais como: determinar quais pares de cidades estão ligadas pela mesma companhia área numa rede, armazenamento de informações em bases de dados, etc.

3.1 Relações e suas propriedades

A forma mais directa de expressar uma relação entre elementos de dois conjuntos é por utilizar pares ordenados (dois elementos). Por esta razão, os conjuntos de pares ordenados são chamados de *relações binárias.* Nesta secção apresentamos a terminologia básica utilizada para descrever as relações binárias.

Definição 3.1.1. Sejam A e B conjuntos, uma relação binária de A para B é um subconjunto de $A \times B$.

Por outras palavras, uma relação binária de A para B é um conjunto R de pares ordenados onde o primeiro elemento de cada par ordenado provém de A e o segundo elemento provém de B. Utilizamos a notação $a\ R\ b$ para denotar que $(a, b) \in R$ e $a \not R\ b$ para denotar que $(a, b) \notin R$. Além disso, quando (a, b) pertecem a R, dizemos que *a está relacionado* à b por intermédio de R.

As relações binárias representam relacionamentos entre elementos de dois conjuntos. Apresentaremos mais adiante as relações n-árias que expressam relacionamentos entre elementos de mais de dois conjuntos. Iremos omitir a palavra *binária* sempre que não houver perigo de má interpretação. Os exemplos a seguir ilustram o conceito de *relação.*

Exemplo 3.1.1. Sejam A o conjunto dos estudantes da tua escola, e B o conjunto das disciplinas. Seja R a relação que consiste nos pares (a, b), onde a é um estudante inscrito na disciplina b. Por exemplo, se João e David estão inscritos na disciplina de Estruturas Discretas (ED), os pares (João, ED) e (David, ED) pertecem a R. Note que se David não está inscrito na disciplina de ED, então o par (David, ED) não pertence a R. Se um estudante não está inscrito em nenhuma disciplina, não existirá nenhum par em R com este estudante como primeiro elemento. Da mesma forma se uma disciplina não existe, não existirá nenhum par em R com esta disciplina como segundo elemento.

Exemplo 3.1.2. Sejam $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$, então $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ é uma relação de A para B. Isto significa que, por exemplo, $0\ R\ a$, mas $1 \not R\ b$.

3.2 Relações sobre um conjunto

Definição 3.2.1. Uma *relação* num conjunto A é uma relação de A para A.

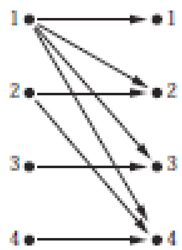
Por outras palavras, uma relação sobre um conjunto A é um subconjunto de $A \times A$.

Exemplo 3.2.1. Seja A o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Que pares ordenados fazem parte da relação $R = \{(a, b) \mid a \text{ divide } b\}$?

Solução: Como (a, b) pertence a R se e somente se a e b forem inteiros positivos não maiores que 4 tal que a divida b, vemos que

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Os pares nesta relação são apresentados graficamente e em forma tabular na Figura 3.1.



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

Figura 3.1: Apresentando os pares ordenados na relação R no exemplo 3.2.

Exemplo 3.2.2. Considere as seguintes relações no conjunto dos números inteiros:
$R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$,
$R_2 = \{(a, b) \mid a > b\}$,
$R_3 = \{(a, b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$,
$R_4 = \{(a, b) \mid a = b\}$,
$R_5 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$,
$R_6 = \{(a, b) \mid a + b \leq 3\}$,
Qual destas relações contém cada um dos pares $(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, -1)$ e $(2, 2)$?

Solução: O par $(1, 1)$ está em R_1, R_3, R_4 e R_6; $(1, 2)$ está em R_1 e R_6; $(2, 1)$ está em R_2, R_5 e R_6;$(1, -1)$ está em R_2, R_3 e R_6; e finalmente, $(2, 2)$ está em R_1, R_3 e R_4.

3.3 Propriedades das relações

Existem várias propriedades que são utilizadas para classificar as relações sobre um conjunto. Iremos apresentar as mais importantes de seguida.

Nalgumas relações um elemento está sempre relacionado consigo próprio. Por exemplo, seja R a relação no conjunto de todas as pessoas, consistindo nos pares (x, y) onde x e y são filhos da mesmo pai e da mesma mãe, então $x\ R\ y$ para todas as pessoas x.

Definição 3.3.1. A relação R num conjunto A é chamada de *reflexiva* se $(a, a) \in R$ para todo o elemento $a \in A$.

Nota: Utilizando quantificadores vemos que uma relação R num conjunto A é reflexiva se $\forall a((a, a) \in R)$, onde o universo em discurso é o conjunto de todos os elementos em A.

Vemos que a relação em A é reflexiva se todo elemento de A está relacionado consigo próprio. Os exemplos a seguir ilustram o conceito de uma relação reflexiva.

Exemplo 3.3.1. Considere as seguintes relações em $\{1, 2, 3, 4\}$:

- $R_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$,
- $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$,
- $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$,
- $R_4 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$,
- $R_5 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,
- $R_6 = \{(3, 4)\}$.

Quais destas relações são reflexivas?

Solução: As relações R_3 e R_5 são reflexivas porque ambas contêm todos os pares na forma (a, a), nomeadamente, $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ e $(4, 4)$. As outras relações não são reflexivas porque não contêm todos estes pares ordenados. Em particular R_1, R_2, R_4 e R_6 não são reflexivas porque por exemplo $(3, 3)$ não faz parte de nenhuma destas relações.

Exemplo 3.3.2. Quais das relações no exemplo 3.3 são reflexivas?

Solução: As relações reflexivas do exemplo 3.3 são R_1 (porque $a \leq a$ para todo inteiro a), R_3 e R_4. Para cada uma das outras relações no exemplo citado é fácil encontrar um par da forma (a, a) que não faz parte de nenhuma das relações.

Definição 3.3.2. A relação R num conjunto A é chamada de *simétrica* se $(b, a) \in R$ sempre que $(a, b) \in R$, para todos $a, b \in A$. A relação R num conjunto A tal que para todo $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$, então $a = b$, é chamada de *antissimétrica*.

Nota: Utilizando quantificadores vemos que uma relação R num conjunto A é simétrica se $\forall a \forall b((a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R))$. Similarmente, a relação R num conjunto A é antissimétrica se $\forall a \forall b(((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow (a = b))$.

Tenha em atenção que uma relação é simétrica se e somente se a está relacionado à b implica que b está relacionado à a. A relação é antissimétrica se e somente se não existírem pares de distintos elementos a e b com a relacionado a b e b relacionado a a. Isto é, a única forma de ter a relacionado à b e b relacionado a a é se a e b forem os mesmos elementos. Os termos *simétrica* e *antissimétrica* não são opostos, porque a relação pode ter ambas propriedades ou não. A relação só não pode ser ao mesmo tempo simétrica e antissimétrica se contém algum par da forma (a, b), onde $a \neq b$.

Exemplo 3.3.3. Quais das relações no exemplo 3.3 são simétricas e quais são antissimétricas?

Solução: As relações R_2 e R_3 são simétricas, porque em cada caso (b, a) pertence a relação sempre que (a, b) está na relação. Para R_2, a única coisa a verificar é se ambos $(2, 1)$ e $(1, 2)$ estão na relação. Para R_3, é necessário verificar que $(1, 2)$ e $(2, 1)$ pertencem a relação, e $(1, 4)$ e $(4, 1)$ pertencem a relação. Pode-se facilmente verificar que as outras relações não são simétricas. Isto pode ser feito por encontrar um par (a, b) na relação para o qual não exista um par (b, a). R_4, R_5 e R_6 são todas antissimétricas. Para cada uma destas relações não existe um par de elementos a e b com $a \neq b$ tal que ambos (a, b) e (b, a) pertencem a relação. O leitor pode verificar que nenhuma das outras relações é antissimétrica. Isto pode ser feito por encontrar um par (a, b) com $a \neq b$ tal que (a, b) e (b, a) estão ambos na relação.

Definição 3.3.3. A relação R num conjunto A é chamada de *transitiva* se sempre que $(a, b) \in R$ e $(b, c) \in R$, então $(a, c) \in R$, para todos $a, b, c \in A$.

Nota: Utilizando quantificadores vemos que uma relação R num conjunto A é transitiva se temos $\forall a \forall b \forall c(((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R)$.

Exemplo 3.3.4. Quais das relações no exemplo 3.3 são transitivas?

Solução: As relações R_4, R_5 e R_6 são transitivas. Para cada uma destas relações, poderemos provar que são transitivas por verificar que se (a, b) e (b, c) pertencem a esta relação, então (a, c) também fazem parte. Por exemplo, R_4 é transitiva, porque $(3, 2)$ e $(2, 1)$, $(4, 2)$ e $(2, 1)$, $(4, 3)$ e $(3, 1)$, e $(4, 3)$ e $(3, 2)$ fazem parte da relação tal como os pares $(3, 1), (4, 1)$ e $(4, 2)$. Como exercício, verifique se R_5 e R_6 são transitivas. R_1 não é transitiva porque $(3, 4)$ e $(4, 1)$ pertencem a R_1, mas $(3, 1)$ não. R_2 não é transitiva porque $(2, 1)$ e $(1, 2)$ pertencem a R_2, mas $(2, 2)$ não fazem parte. R_3 não é transitiva porque $(4, 1)$ e $(1, 2)$ pertencem a R_3, mas $(4, 2)$ não.

3.4 Combinação de relações

Como as relações de A para B são subconjuntos de $A \times B$, duas relações de A para B podem ser combinadas da mesma forma como os conjuntos podem ser combinados. Considere os exemplos abaixo:

Exemplo 3.4.1. Sejam $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$. As relações $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ e $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$ podem ser combinadas para obter:

- $R_1 \cup R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(3,3)\}$
- $R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$

Exemplo 3.4.2. Seja R_1 a relação "menor que" no conjunto dos números reais e seja R_2 a relação "maior que" no conjunto dos números reais, isto é, $R_1 = \{(x,y) \mid x < y\}$ e $R_2 = \{(x,y) \mid x > y\}$. O que são $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 - R_2$ e $R_2 - R_1$?

Solução: Notamos que $(x,y) \in R_1 \cup R_2$ se e somente se $(x,y) \in R_1$ ou $(x,y) \in R_2$. Assim, $(x,y) \in R_1 \cup R_2$ se e somente se $x < y$ ou $x > y$. Como a condição $x < y$ ou $x > y$ é o mesmo que a condição $x \neq y$, segue-se que $R_1 \cup R_2 = \{(x,y) \mid x \neq y\}$. Por outras palabras, a união da relação "menor que" com a relação "maior que" é a relação "diferente de". De seguida, note que é impossível para um par (x,y) pertencer a ambos os pares R_1 e R_2 porque é impossível que $x < y$ e $x > y$. Segue-se que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Também notamos que $R_1 - R_2 = R_1$ e $R_2 - R_1 = R_2$.

Existe uma outra forma de combinar relações que é análoga a composição de funções.

Definição 3.4.1. Seja R a relação de um conjunto A para um conjunto B e S uma relação de B para C. A *composta* de R e S é a relação que consiste nos pares ordenados (a,c), onde $a \in A$, $c \in C$ e para os quais existe um elemento $b \in B$ tal que $(a,b) \in R$ e $(b,c) \in S$. Denotamos a composta de R e S por $S \circ R$.

Calcular a composta de duas relações requer que encontremos elementos que são o segundo elemento de um par ordenado na primeira relação e o primeiro elemento de pares ordenados na segunda relação, como os exemplos a seguir ilustram.

Exemplo 3.4.3. Qual é a composta das relaçãoes R e S, onde R é a relação de $\{1,2,3\}$ para $\{1,2,3,4\}$ com $R = \{(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)\}$ e S é uma relação de $\{1,2,3,4\}$ para $\{0,1,2\}$ com $S = \{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)\}$?

Solução: $S \circ R$ é construída utilizando todos os pares ordenados em R e pares ordenados em S, onde o segundo elemento do par ordenado em R é o mesmo que o primeiro elemento do par ordenado em S. Por exemplo, os pares ordenados $(2,3)$ em R e $(3,1)$ em S produzem o par ordenado $(2,1)$ em $S \circ R$. Computando todos os pares ordenados na composta de S e R obtemos,

$$S \circ R = \{(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)\}.$$

Exemplo 3.4.4. Compondo uma relação consigo própria Seja R a relação no conjunto de todas as pessoas tal que $(a, b) \in R$ se a pessoa a é o pai da pessoa b.

3.5 Representação de relações

3.5.1 Introdução

Nota: Nesta secção, utilizaremos sómente as relações binárias. Por esta razão a palavra relação irá apenas referir-se a relações binárias.

Existem muitas formas de representar uma relação entre conjuntos finitos. Uma forma é por listar os pares ordenados. Outra forma de representar uma relação é por meio de tabelas como vimos na secção anterior. Nesta secção vamos apresentar dois métodos de representação alternativos: matrizes zero-um e gráfos direccionados. No geral, as matrizes são apropriadas para a representação de relações em programas de computador. Por outro lado, algumas pessoas acham a representação de relações utilizando grafos direccionados mais útil ao entendimento das propriedades dessas relações.

3.5.2 Representação de relações por meio de matrizes

A relação entre conjuntos finitos pode ser representada utilizando matrizes zero-um. Suponha que R é uma relação de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ para $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. (Aqui os elementos dos conjuntos A e B são listados duma forma particular, embora arbitrária. Além dos mais, quando $A = B$ utilizamos a mesma ordenação para A e B.) A relação R pode ser representada pela matriz $M_R = [m_{ij}]$,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } (a_i, b_j) & \in R, \\ 0 \text{ se } (a_i, b_j) & \notin R. \end{cases}$$

Por outras palavras, a matriz zero-um que representa R tem o valor 1 em (i, j) quando a_i está relacionado a b_j, e o valor 0 nesta posição se a_i não está relacionado a b_j. Esta representação depende da ordem utilizada para A e B. A utilização de matrizes para representar relações é ilustrada no exemplos a seguir.

Exemplo 1 Suponha que $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2\}$. Seja R a relação de A para B contendo os pares (a, b) se $a \in A$, $b \in B$ e $a > b$. Qual é a matriz que representa R se $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ e $b_1 = 1$ e $b_2 = 2$?

Solução: Como $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$, a matriz para R é:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os 1s em M_R mostram que os pares $(2, 1), (3, 1)$ e $(3, 2)$ pertencem a R. Os 0s mostram que os outros pares não pertencem a R.

Exemplo 2 Sejam $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, quais pares ordenados estão na relação R representada pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ?$$

Solução Como R consiste nos pares ordenados (a_i, b_j) com $m_{ij} = 1$ daí resulta que $R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

A matriz de uma relação em um conjunto, que é uma matriz quadrada, pode ser utilizada para determinar se a relação possui certas propriedades. Sabemos que uma relação R num conjunto A é reflexiva se $(a, a) \in R$ sempre que $a \in A$, então, R é reflexiva se e somente se $(a_i, a_i) \in R$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Assim, R é reflexiva se e somente se $m_{ii} = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. Por outras palavras, R é reflexiva se todos os elementos da diagonal principal de M_R são iguais a 1, como ilustrado na Figura 3.2. Note que os elementos fora da diagonal podem ser $0s$ ou $1s$.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 3.2: A matriz zero-um para uma relação reflexiva. (Os elementos fora da diagonal podem ser 0 ou 1.)

A relação R é simétrica se $(a, b) \in R$ implica que $(b, a) \in R$. Consequentemente, a relação R no conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ é simétrica se e somente se $(a_j, a_i) \in R$ sempre que $(a_i, a_j) \in R$. Em termos dos valores de M_R, R é simétrica se e somente se $m_{ji} = 1$ sempre que $m_{ij} = 1$. Isto também significa que $m_{ji} = 0$ sempre que $m_{ij} = 0$. Consequentemente, R é simétrica se e somente se $m_{ij} = m_{ji}$, para todos os pares de inteiros i e j com $i = 1, 2, \ldots, n$ e $j = 1, 2, \ldots, n$. R é simétrica se e somente se $M_R = (M_R)^t$ onde $(M_R)^t$ é matriz transposta de M_R.

A relação R é antissimétrica se e somente se $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica que $a = b$. Consequentemente, a matrix de uma relação antissimétrica tem a propriedade de que se $m_{ij} = 1$ com $i \neq j$, então $m_{ji} = 0$. Ou, em outras palavras, $m_{ij} = 0$ ou $m_{ji} = 0$ quando $i \neq j$. A forma da matriz para uma relação antissimétrica é ilustrada na Figura 3.3.

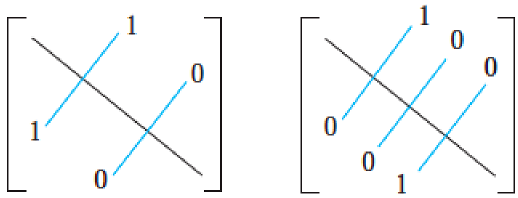


Figura 3.3: A matriz zero-um para uma relação simétrica e antissimétrica.

Exemplo 3 Suponha que a relação R é representada pela matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}?$$

R é reflexiva, simétrica e/ou antisimétrica?

Solução: Como todos os elementos das diagonais nesta matriz são iguais a 1, R é reflexiva. Além do mais, como M_R é simétrica, então R é simétrica. É também fácil notar que R não é antissimétrica.

As operações booleanas estudadas anteriormente também podem ser utilizadas para encontrar as matrizes que representam a união e a intersecção de duas relações. Suponha que R_1 e R_2 são relações num conjunto A representada pelas matrizes M_{R_1} e M_{R_2}, respectivamente. A matriz que representa a união destas duas relações possui o valor 1 nas posições em que M_{R_1} ou M_{R_2} possuem o valor 1. A matriz que representa a intersecção destas duas relações possui o valor 1 nas posições em que M_{R_1} e M_{R_2} possuem o valor 1. Sendo assim, as matrizes que representam a união e a intersecção destas duas relações são:

- $M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$ e,
- $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$

3.5.3 Representação de relações por meio de grafos direccionados

Vimos anteriormente que uma relação pode ser representada por uma listagem de todos os seus pares ordenados ou por meio de uma matriz zero-um. Existe outra forma importante de representar uma relação utilizando uma representação pictural. Cada elemento do conjunto é representado por um ponto, e cada par ordenado é representado utilizando um arco cuja direcção é indicada por uma seta. Utilizamos essa representação sempre que pensamos em relações como grafos direccionados ou dígrafos, num conjunto finito.

Definição 1 Um *grafo direccionado*, ou *dígrafo*, consiste num conjunto V de *vértices* (ou *nós*) e um conjunto E de pares ordenados dos elementos de V chamados de *arestas* (ou *arcos*). O vértice a é chamado de *vértice inicial* da aresta (a, b), e o vértice b é chamado de *vértice terminal* desta aresta.

Uma aresta da forma (a, a) é representada utilizando um arco do vértice a de volta à sí mesmo. Tal aresta é chamada de **laço** ou **loop**.

Exemplo 4 O grafo direccionado com os vértices a, b, c e d e as arestas $(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b)$ e (d, b) é apresentado na Figura 3.4

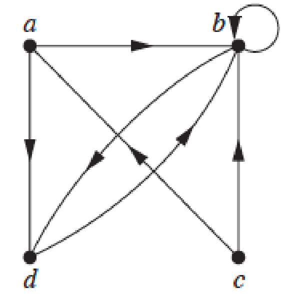


Figura 3.4: Um grafo direccionado.

A relação R no conjunto A é representada pelo grafo ordenado que possui elementos de A como seus vértices e os pares ordenados (a, b), onde $(a, b) \in R$, como arestas. Esta atribuição configura uma correspondência *um-para-um* entre as relações no conjunto A e os grafos direcionados que possuem A como o seu conjunto de vértices. Assim, cada afirmação sobre relações corresponde a uma afirmação sobre grafos direccionados, e vice-versa. Grafos direccionados fornecem uma exibição visual das relações e por isso são utilizados no estudo das relações e de suas propriedades. A utilização de grafos direccionados na represetntação de relações num conjunto é ilustrada nos seguintes exemplos.

Exemplo 5 O grafo direccionado da relação
$R = (1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (4, 1)$
no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ é ilustrado na Figura 3.5

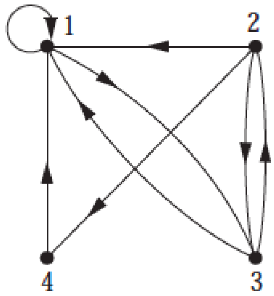


Figura 3.5: Um grafo direccionado.

Exemplo 6 Quais são os pares ordenados na relação R representada pelo grafo direccionado da Figura 3.6

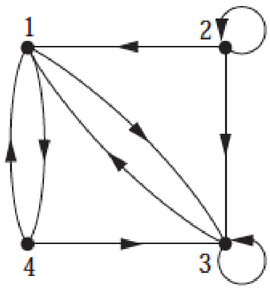


Figura 3.6: Um grafo direccionado da relação R.

Solução: Os pares ordenados (x, y) na relação são

R = (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (4, 1), (4, 3)

Cada um destes pares corresponde à uma aresta do grafo direccionado sendo $(2, 2)$ e $(3, 3)$ dois laços.

O grafo direccionado que representa uma relação pode ser utilizado para determinar se a relação possui certas propriedades. Por exemplo, a relação é reflexiva se e somente se existe um laço em cada vértice do grafo direccionado, de tal forma que todos os pares ordenados da forma (x, x) ocorrem na relação. A relação é simétrica se e somente se para cada aresta entre vértices distintos no digrafo existe uma aresta na direcção oposta, tal que (y, x) existe na relação sempre que (x, y) existe na relação. Da mesma forma, uma relação é antissimétrica se e somente se não existem duas arestas em direcções opostas entre vértices distintos. Finalmente, uma relação é transitiva se e somente se sempreque que existe uma aresta de um vértice x para um vértice y e uma aresta de um vértice y para um vértice z, existe uma aresta de x para z (completando um triângulo onde cada lado é uma aresta na direcção correcta).

Exemplo 7 Determine se os grafos direccionados apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8 são reflexivos, simétricos, antissimétricos e/ou transitivos.

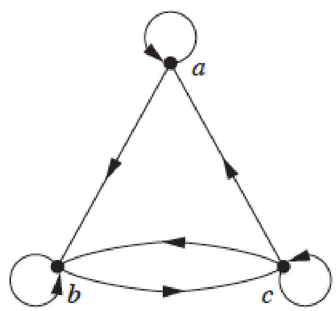


Figura 3.7: Um grafo direccionado da relação R.

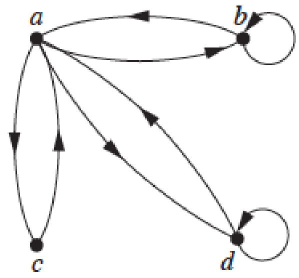


Figura 3.8: Um grafo direccionado da relação S.

Solução: Como existem laços em todos os vértices do grafo direccionado de R, ele é reflexivo. R não é simétrico nem anti-simétrico porque existe uma aresta de a para b mas não de b para a, mas existem arestas em ambas direcções que conectam b e c. Finalmente, R não é transitivo porque existe uma aresta de a para b e uma aresta de b para c, mas não existe uma aresta de a para c. Como não existem laços em todos os vértices do grafo direccionado de S, esta relação não é reflexiva. É simétrica mas não antissimétrica, porque cada aresta entre vértices distintos é acompanhada por uma aresta na direcção oposta. Não é díficil notar também que o grafo direccionado de S não é transitivo, porque (c, a) e (a, b) pertencem a S, mas (c, b) não pertence a S.

Estudaremos os grafos em mais detalhes no capítulo 4.

3.6 Fecho de relações (Opcional)

3.6.1 Introdução

Uma rede de computadores de uma empresa possui centros de dados em Benguela, Bengo, Cabinda, Cunene, Huíla e Luanda. Existem ligações directas de Benguela para o Bengo, de Benguela para o Bengo, de Benguela para Cunene, do Bengo para o Cunene, de Cunene para Cabinda e da Huíla para Luanda. Seja R a relação que contém (a, b) se existe uma ligação do centro de dados em a com o centro de dados em b, como podemos determinar se existe uma ligação (possívelmente indirecta) composta de uma ou mais linhas de um centro para outro? Como nem todas as ligações são directas, tal como a ligação de Benguela para Cabinda que passa por Cunene, R não pode ser utilizada directamente para responder esta questão. Na linguagem das relações, R não é transitiva, portanto não contém todos os pares que podem ser ligado. Tal como iremos mostrar nesta secção, é possível achar todos os pares de centros de dados que possuem um link por construír uma relação transitiva S que contém R tal que S é um subconjunto de todas as relações transitivas que contêm R.

3.7 Relações de equivalência

3.8 Ordens parciais (Opcional)

Exercícios

Relações e suas propriedades

1. Liste os pares ordendados na relação R de $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ para $B = \{0, 1, 2, 3\}$ onde $(a, b) \in R$ se e somente se
   (a) $a = b$
   (b) $a + b = 4$
   (c) $a > b$
   (d) $a|b$
   (e) $mdc(a, b) = 1$
   (f) $mmc(a, b) = 2$
2. Para cada uma das relações no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ indiqye se são: reflexivas, simétricas, antissimétricas e transitivas
   (a) $\{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
   (b) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (c) $\{(2, 4), (4, 2)\}$
   (d) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
   (e) $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
   (f) $\{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$
3. Determine se a relação R conjunto de todas as pessoas é reflexiva, simétrica, antissimétrica, e/ou transitiva, onde $(a, b) \in R$ se e somente se
   (a) a é mais alto que b.
   (b) a e b foram nascidos no mesmo dia.
   (c) a possui o mesmo apelido que b.
   (d) a e b possuem o mesmo avó.

Capítulo 4

Grafos

Grafos são estruturas discretas que consistem em vértices, e arestas que conectam estes vértices. Existem vários tipos de grafos, dependendo da existência de uma direcção nas arestas, de acordo a possibilidade de várias arestas se interligarem ao mesmo par de vértices e de acordo a existência de *loops* ou repetições. Problemas em quase todas as disciplinas podem resolvidos utilizando modelos de grafos. Iremos apresentar alguns exemplos para ilustrar como os grafos são utilizados como modelos numa variedade de aéras. Por exempo, iremos mostrar como os grafos são utilizados para representar a competição de diferentes espécias num nicho ecológico, e como os grafos são usados para representar quem influencia quem numa organização e etc.

Utilizando modelos de grafos, podemos determinar se é possível caminhar todas as ruas de uma cidade sem psasar por uma rua duas vezes, e podemos determinar o número de cores necessário para colorar as regiões de um mapa. Grafos podem ser utilizados para determinar se um circuito pode ser implementado numa placa de circuitos plana. Podemos distinguir entre dois compostos químicos com a mesma fórmula molecular mas estruturas diferentes utilizando grafos. Podemos determinar se dois computadores estão conectados por um *link* de comunicação utilizando modelos gráficos de redes. Grafos com pesos atribuidos as suas arestas podem ser utilizados para resolver problemas como encontrar o caminho mais curto entre duas cidades numa rede de transporte. Neste capítulo iremos apresentar os conceitos básicos da teoria dos grafos e apresentar alguns modelos de grafos. Para resolver uma boa parte dos problemas que podem ser estudados utilizando grafos, iremos apresentar alguns algoritmos de grafos. Iremos também estudar a complexidade destes algoritmos.

4.1 Grafos e Modelos de Grafos

Começamos com a definição de grafos.

Definição 4.1.1. Um *grafo* $G = (V, E)$ consiste em V, um conjunto não-vazio de *vértices* (ou *nós*) e E, um conjunto de *arestas.* Cada aresta possui ou um ou mais vértices associados a esta, chamada de sua *extremidade.* Diz-se que uma aresta *conecta* as suas extremidades.

***Nota*:** O conjunto de vértices V de um grafo G pode ser infinito. Um grago com um conjuntos infinito de vértices ou um número infinito de arestas é chamado de **grafo infinito**, e em comparação, um grafo com um conjunto de finito de vértices e um conjunto finito de arestas é chamado de **grafo finito**. Neste manual iremos considerar apenas grafos finitos.

Agora imagine que uma rede de computadores é formada por centros de dados e *links* de comunicação entre computadores. Podemos representar a localização de cada centro de dados por um ponto e cada *link* de comunicação por um segmento de linha, como mostra a Figura 4.1

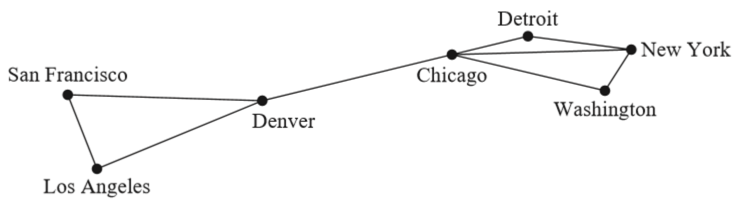


Figura 4.1: Uma Rede de Computadores.

Esta rede de computadores pode ser modelada utilzando grafos em que os vértices do grafo representam centros de dados e as areas representam os *links* de comunicação. No geral, visualizamos os grafos usando pontos para represtentar os vértices e segmentos de linha, possivelmente curvos, para representar as arestas, onde as extremidades de um segmento de linha representando uma aresta são os pontos representando as extremidades da aresta. Quando desenhamos um grafo, geralmente tentamos desenhar as arestas de formas a não se cruzarem. No entanto, isto não é necessário porque qualquer representação utilizando pontos para representar os vértices e qualquer forma de conexão entre os vértices pode ser utilizada. De facto, existem alguns grafos que não podem ser desenhados no plano sem que as arestas se cruzem (veja a Secção **??**). O ponto principal é que a forma como desenhamos um grafo é arbitrária, desde que as conexões correctas entre os vértices estejam representadas.

Note que cada aresta do grafo representando esta rede de computadores conecta dois vértices diferentes. Isto é, nenhuma aresta conecta um vértice a si próprio. Além disso, duas arestas diferentes não conectam o mesmo par de vértices. Um grafo em que cada aresta conecta dois vértices diferentes e em que duas arestas conectam o mesmo par de vértices é chamada de **grafo simples**. Note que num grafo simples, cada aresta está associada à um par não-ordenado de vértices, e mais nenhuma aresta está associada a esta mesma aresta. Consequentemente, quando existe uma aresta de um grafo simples associada a $\{u, v\}$, também podemos dizer, sem possibilidade de confusão, que $\{u, v\}$ é uma aresta do grafo.

Uma rede de computadores pode conter múltiplas ligações entre centros de dados, como ilustrado na Figura 4.2. Para modelar tais redes precisamos de grafos que posuam mais de uma aresta conectando o mesmo par de vértices. Grafos que possam ter **múltiplas arestas** a conectar os mesmos vértices são chamados de **multigrafos**. Quando existem m arestas diferentes associadas ao mesmo par não-ordenado de vértices $\{u, v\}$, também dizemos que $\{u, v\}$ é uma aresta de multiplicidade m. Isto é, podemos pensar neste conjunto de arestas como m diferentes cópias de uma aresta $\{u, v\}$.

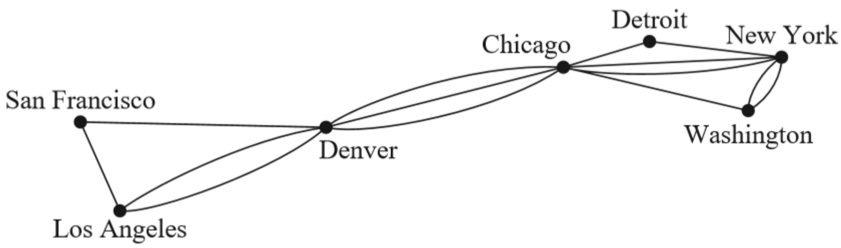


Figura 4.2: Uma Rede de Computadores com Múltiplos LInks entre Centros de Dados.

Por vezes um *link* de comunicação de conecta um centro de dados consigo próprio, possivelmente um laço de realimentação para diagnóstico. Uma rede deste tipo é ilustrada na Figura 4.3. Para modelar esta rede precisamos incluir arestas que conectem um vértice consigo próprio. Tais arestas são chamadas de **laços** e as vezes podemos até ter mais de um laço no vértice. Grafos que podem incluir laços, e possivelmente múltiplas arestas conectando o mesmo par de vértices ou um vértice consigo próprio, são por vezes chamados de **pseudo-grafos**.

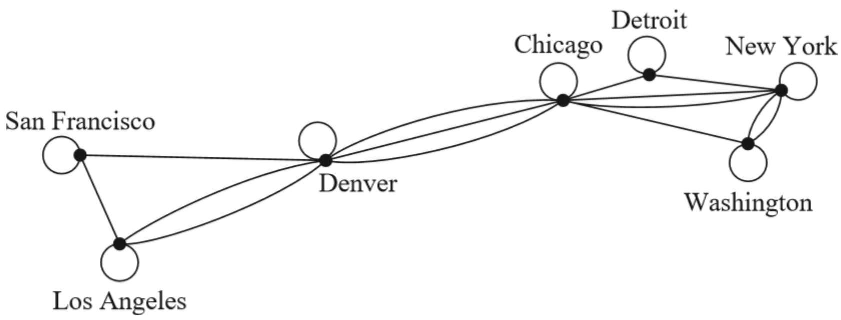


Figura 4.3: Uma Rede de Computadores com Links para Diagnósticos.

Até agora os grafos que apresentamos são **grafos não-direccionados**. As suas arestas também são chamadas de **não direccionadas**. No entanto, para construir um modelo de grafo, talvez achemos necessário atribuir direcções às arestas do grafo. Por exemplo, numa rede de computadores, alguns *links* poderão operar apenas em uma direcção (tais ligaçõs são chamadas de linhas *duplex* simples). Isto pode ser o caso quando existe uma quantidade enorme de tráfego enviada para alguns centros de dados, com pouco ou nenhum tráfego na direcção oposta.

Para modelar tais redes de computadores utilizamos um grafo direccionado. Cada aresta de um grafo direccionado está associada à um par ordenado. A definição de um grafo direccionado que apresentamos aqui é mais geral do que a utilizada no Capítulo 3, onde utilizamos grafos direccionados para representar relações.

Definição 4.1.2. Um *grafo direccionado* (ou *digrafo*) (V, E) consiste num conjunto não-vazio de vértices V e um conjunto de *arestas direccionadas* (ou *arcos*) E. Cada aresta direccionada está associada à um par ordenado de vértices. A aresta direccionada associada ao par ordenado (u, v) é dita que *começa* em u e *termina* em v.

Quando representamos um grafo direccionado por meio de linhas, podemos utilizar uma seta a apontar de u à v para indicar a direcção de uma aresta que começa em u e termina em v. Um grafo direccionado pode conter laços e pode conter múltiplas arestas direccionadas que começam e terminam nos mesmos vértices. Um grafo direccionado pode também conter arestas direccionads que conectam os vértices u e v em ambas direcções; isto é, quando o dígrafo contém uma aresta de u à v, pode também conter uma ou mais arestas de v para u. Note que obtemos um grafo direccionado quando atribuímos uma direcção a cada aresta em um grafo não-direccionado. Quando um grafo direccionado não possui laços e não possui múltiplas arestas direccionadas, é chamado de **grafo direccionado simples**. Como um grafo direccionado simples possui no máximo uma aresta associada à cada par ordenado de vértices (u, v), chamamos (u, v) de uma aresta se existe uma aresta associada à si no grafo.

Em algumas redes de computadores, multiplas ligações de comunicação entre dois centros de dados podem ser representadas, como ilustrado na figura 4.4. Grafos direccionados que possam ter **múltiplas arestas direccionadas** de um vértice para outro vértice (possivelmente o mesmo) são usados para modelar tais redes. Chamamos tais grafos de **multigrafos direccionados**. Quando existm m arestas direccionadas, cada associada à um par ordenado de vértices (u, v), dizemos que (u, v) é uma aresta de **multiplicidade** m.

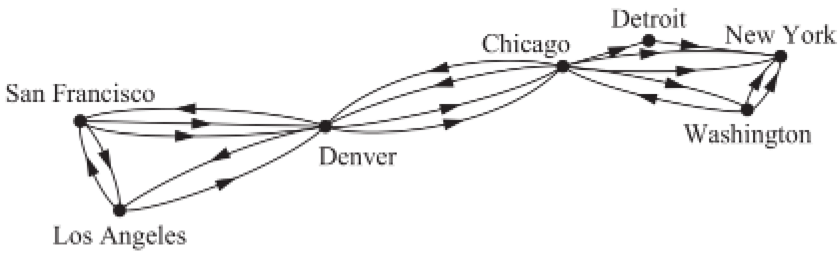


Figura 4.4: Uma Rede de Computadores Múltiplos Links de Uma Via.

Para alguns modelos podemos necessitar um grafo onde algums arestas não são direccionadas, enquanto que outras são direccionadas. Um grafo com ambas arestas direccionadas e não-direccionadas é chamado de **grafo misto**. Por exemplo, um grafo misto pode ser utilizado para modelar uma rede de computadores que contém ligações que operam em ambas direcções e outras ligações que operam apenas em uma direcção.

Esta terminologia para os vários tipos de grafos é sumarizada na Tabela 4.1.1. Iremos algumas vezes utilizar o termo **grafo** como um termo deral para descrever grafos com arestas direccionadas ou não direccionadas (ou ambos), com ou sem laços e com ou sem arestas múltiplas. Em outros casos, quando o contexto estiver claro, iremos utilizar o termo grafo para nos referirmos apenas aos grafos não-direccionados.

Tipo	Arestas	Múltiplas Arestas?	Laços?
Grafo simples	Não direccionada	Não	Não
Multigrafo	Não direccionada	Sim	Não
Pseudo-grafo	Nao direccionada	Sim	Sim
Grafo direccionado simples	Direccionada	Não	Não
Multigrafo direccionado	Direccionada	Sim	Sim
Grafo misto	Direccionada e não direccionada	Sim	Sim

Tabela 4.1.1: Terminologia dos Grafos.

Por causa do recente interesse na teoria dos gradfos, e por causa da sua aplicação à uma variedade de disciplinas, muitas terminologias da teoria dos grados foram introduzidas. O estudante deverá determinar como tais termos estão a ser utilizados quando os encontrar na literatura. A terminologia utilizada por matemáticas para descrever grafos tem sido padronizada incrementalmente, mas a terminologia usada em outras disciplinas ainda é muito variada. Embora a terminologia usada para descrever grafos pode variar, três questões nos ajudam a entender a estrutura de um grafo:

- As arestas do grafo são não-direccionadas ou direccionadas (ou ambas)?
- Se o grafo é não-direccionado, existem múltiplas arestas que conectam o mesmo par de vértices? Se o grafo é direccionado, existem múltiplas arestas direccionads?
- Existem laços?

Responder a estas questões ajuda-nos a entender grafos independemente da terminologia particular utilizada.

Modelos de Grafos

Grafos são utilizados numa enorme variedade de modelos. Iniciamos esta secção por descrever como construir modelos de redes de comunicação que ligam centros de dados. Iremos completar a secção por descrever alguns modelos diversos de grados para algumas aplicações interessantes. Iremos retornar à algumas dessas aplicações mais no final do capítulo. Iremos introduzir modelos adicionais de grafos em secções subsequentes.

REDES SOCIAIS Grafos são extensivamente utilizados para modelar estruturas sociais baseadas nos diferentes tipos de relacionamentos entre pessoas ou grupos de pessoas. Estas estruturas sociais, e os grafos que as representam, são chamadas de **redes sociais**. Nestes modelos de grafos, indivíduos ou organizaçãoes são representados por vértices; relacionamentos entre indivíduos ou organizaçãoes são representadas por arestas. O estudo de redes sociais é uma área multidisciplinar extremamente activa, e muitos diferentes tipos de relacionamento entre pessoas foram estudados utilizando as mesmas. Iremos apresentar algumas das mais geralmente estudadas redes sociais.

Exemplo 4.1.1. Grafos de Relação Pessoal e de Amizade Podemos utilizar um grafo simples para representar o facto de duas pessoas se conhecerem ou não, isto é, se têm uma relação pessoal ou se são amigos (no mundo real ou no mundo virtual através de uma rede social como o Facebook). Cada pessoa num grupo particular de pessoas é representada por um vértice. Uma aresta não-direccionada é usada para conectar duas pessoas quando estas pessoas conhecem-se, ou seja têm uma relação pessoal ou se são amigos. Não são utilizadas múltiplas arestas nem laços (se quisermos introduzir o conceito de auto-conhecimento, acrescentaríamos laços). Um exemplo de grafo de relação pessoal é apresentado na Figura 4.5. O grafo de relação pessoal de todas as pessoas no mundo possui mais de seis biliões de vértices e provavelmente mais de um trilião de arestas!

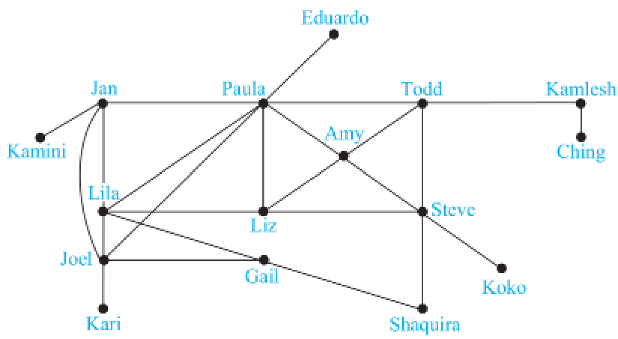
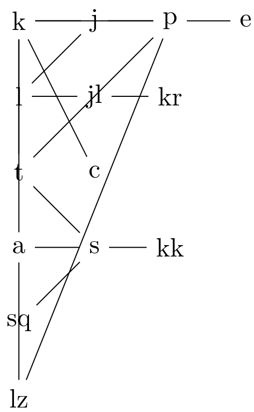


Figura 4.5: Um Grafo de Relação Pessoal.



REDES DE COMUNICAÇÃO

REDES DE INFORMAÇÃO

APLICAÇÕES PARA O DESENHO DE SOFTWARE

REDES DE TRANSPORTE

REDES BIOLÓGICAS

TORNEIOS

4.2 Terminologia dos Grafos e Tipos de Grafos Especiais

4.3 Representação de Grafos e Isomorfismo de Grafos

4.4 Conectividade

4.5 Trajectória de Euler e de Hamilton

4.6 Problemas do Caminho-Mais-Curto

4.7 Grafos Planares

4.8 Coloração de Grafos

Exercícios do Capítulo 4

Grafos

Capítulo 5

Árvores

Exercícios

Árvores