clase-03

martes 23 agosto 2022, presencial

repaso clase anterior y programa hoy (15 min)

la clase anterior repasamos conceptos básicos de matemática, incluyendo:

- escalares
- vectores
- fuerzas
- 3 leyes de Newton
- ley de gravitación universal

la clase de hoy es la unidad 0: cinemática en 1 y 2 dimensiones

- definición de cinemática
- ecuación de velocidad en 1D
- ecuación de velocidad en 2D
- ecuación de posición en 1D
- ecuación de posición en 2D

definición de cinemática

en cinemática, describiremos y modelaremos los vectores de posición $\vec{x}$, velocidad $\vec{v}$ y de aceleración $\vec{a}$ de cuerpos, sin importar las fuerzas ni las causas de estos movimientos.

notación en cinemática

en 1D:

- posición: $x(t)$, medida en m
- velocidad: $v(t)$, medida en $\frac{m}{s}$
- aceleración: $a(t)$, medida en $\frac{m}{s^2}$

en 2D:

- posición: $\vec{x}(t)$, descomponemos en $x(t)$, $y(t)$.
- velocidad: $\vec{v}(t)$, descomponemos en $v_{x}(t)$, $v_{y}(t)$.
- aceleración: $\vec{a}(t)$, descomponemos en $a_{x}(t)$, $a_{y}(t)$.

adicionales:

- Δ: significa diferencia entre final e inicial. por ejemplo $\Delta t = t_{final} - t_{inicial}$
- $algo_{0}$: el subíndice 0 implica en instante $t=0$, que llamamos instante inicial.

supuestos y simplificaciones de cinemática

- un cuerpo se puede describir con una posición en un punto

- en ese punto, está toda la masa del cuerpo

relaciones entre posición, velocidad y aceleración:

aceleración es cambio de velocidad en el tiempo, entonces por definición:

$$a(\Delta t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

donde Δ significa diferencia, y la ecuación anterior se lee como la aceleración en una ventana de tiempo, es igual a la variación de velocidad en esa ventana de tiempo, dividida por la ventana de tiempo.

velocidad es cambio de posición el tiempo, entonces por definición:

$$v(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

ecuación de aceleración en una dimensión (1D)

en este curso simplificaremos nuestros cálculos, usando una aceleración promedio, que notaremos $\overline{a}$ y es una constante, entonces:

$$a(t) = \overline{a}$$

nuestra aceleración será un número constante, y no dependerá del tiempo, o en otras palabras, tendrá el mismo valor para todo instante de tiempo.

nota: aceleración se mide en $\frac{m}{s^2}$.

ecuación de velocidad en una dimensión (1D)

si conocemos la aceleración promedio $\overline{a}$ en un instante, podemos usar como ventana de tiempo el tiempo entre origen $t_0 = 0$ y ese instante, y así escribir la aceleración en ese instante de tiempo entre ellos como:

$$\overline{a} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

podemos simplificar ya que sabemos que $t_0 = 0 s$, entonces:

$$\overline{a} = \frac{v(t) - v(t_0)}{t}$$

y sabemos que $v(t_0)$ es la velocidad inicial en instante $t=0$, y es una constante, que podemos llamar v_0, entonces:

$$\overline{a} = \frac{v(t) - v_0}{t}$$

y despejando la velocidad $v(t)$, tenemos la ecuación de velocidad:

$$v(t) = v_0 + \overline{a} \cdot t$$

nota: velocidad se mide en $\frac{m}{s}$.

ecuación de posición en una dimensión (1D)

la posición $x(t)$ en el instante de tiempo t, es igual a la posición inicial x_0 más el producto entre la velocidad promedio $\overline{v}$ y el tiempo t.

$$x(t) = x_0 + \overline{v} \cdot t$$

a su vez, la velocidad promedio $\overline{v}$ la podemos plantear como:

$$\overline{v} = \frac{v(t) + v_0}{2}$$

y a su vez, podemos escribir $v(t)$ en función de v_0 y a:

$$\overline{v} = \frac{(v_0 + \overline{a} \cdot t) + v_0}{2} = v_0 + \frac{\overline{a} \cdot t}{2}$$

y reemplazando en la ecuación de posición x(t) resulta en:

$$x(t) = x_0 + (v_0 + \frac{\overline{a} \cdot t}{2}) \cdot t$$

y desarrollando:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a} \cdot t^2$$

resumen cinemática en 1D

con aceleración promedio $\overline{a}$, podemos escribir las ecuaciones de posición y aceleración asi:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a} \cdot t^2$$

$$v(t) = v_0 + \overline{a} \cdot t$$

ecuación de velocidad en 2D

en 2D basta con tomar la ecuación de 1D y reemplazar por vectores:

$$\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{\overline{a}} \cdot t$$

y descomponiendo en componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$, tenemos el sistema:

$$v_{x}(t) = v_{x0} + \overline{a}_{x} \cdot t$$

$$v_{y}(t) = v_{y0} + \overline{a}_{y} \cdot t$$

ecuación de posición en 1D

en 2D basta con tomar la ecuación de 1D y reemplazar por vectores:

$$\vec{x}(t) = \vec{x_0} + \vec{v_0} \cdot t + \frac{1}{2} \vec{\overline{a}} \cdot t^2$$

y descomponiendo en componentes $\hat{x}$ e $\hat{y}$, tenemos el sistema:

$$x(t) = x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a}_{x} \cdot t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a}_{y} \cdot t^2$$

resumen cinemática en 2D

con aceleración promedio $\vec{\overline{a}}$, podemos escribir las ecuaciones de posición y aceleración asi:

$$x(t) = x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a}_{x} \cdot t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a}_{y} \cdot t^2$$

$$v_{x}(t) = v_{x0} + \overline{a}_{x} \cdot t$$

$$v_{y}(t) = v_{y0} + \overline{a}_{y} \cdot t$$

comentarios matemáticos sobre estas ecuaciones físicas:

las ecuaciones de velocidad en 1D y 2D del estilo:

$$v(t) = v_{0} + \overline{a} \cdot t$$

las podemos pensar como ecuaciones con variable independiente t, donde v es la variable dependiente de t, y donde:

- $\overline{a}$ es la pendiente de la ecuación, por lo tanto su signo nos dice si la velocidad aumenta, disminuye o es constante con el paso del tiempo
- v_0: intercepto de la recta $v(t)$ con el eje vertical, donde $t=0$, nos dice la velocidad inicial.

a su vez, si analizamos las ecuaciones de posición en 1D y 2D del estilo:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \overline{a} \cdot t^2$$

podemos ver que

ecuaciones de cinemática sin tiempo en 1D

otra manera de ver la posición en un determinado momento es:

$$x(t) = x_0 + \overline{v} \cdot t$$

donde tenemos:

- $x(t)$: posición en instante t
- x_0: posición inicial
- $\overline{v}$: velocidad promedio
- t: instante t

si queremos eliminar la dependencia en t, podemos despejarlo desde la ecuación original de velocidad $v(t)$:

$$v(t) = v_0 + \overline{a} \cdot t$$

y despejando t:

$$t = \frac{v(t) - v_{0}}{\overline{a}}$$

y reemplazando este t en la ecuación de posición $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \overline{v} \cdot t = x_0 + \overline{v} \cdot \frac{v(t) - v_{0}}{\overline{a}}$$

si además reemplazamos la velocidad promedio $\overline{v}$ por su definición:

$$\overline{v} = \frac{v(t) + v_{0}}{2}$$

la ecuación de posición x(t) resulta:

$$x(t) = x_0 + \overline{v} \cdot \frac{v(t) - v_{0}}{\overline{a}} = x_0 + \frac{v(t) + v_{0}}{2} \cdot \frac{v(t) - v_{0}}{\overline{a}}$$

y como $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, entonces:

$$x(t) = x_0 + \frac{v(t) + v_{0}}{2} \cdot \frac{v(t) - v_{0}}{\overline{a}} = x_0 + \frac{v^2(t) - {v_{0}}^2}{2 \cdot \overline{a}}$$

y podemos despejar la velocidad $v(t)$ en el instante t así:

$$v^2(t) = {v_{0}}^2 + (x(t) - x_{0}) \cdot 2 \overline{a}$$

donde

- v_{0} es la velocidad inicial, una constante.
- x_{0} es la posición inicial, una constante.
- $\overline{a}$ es la aceleración promedio, una constante.
- $x(t)$ es la posición en el instante t.

con esto, si tenemos los valores de las constantes, para toda posición $x(t)$ podemos saber la velocidad $v(t)$, y viceversa.

ejemplo:

si un cuerpo se mueve en dirección ascendente con $v_0 > 0$, con una aceleración opuesta y constante $-a$, va a disminuir su velocidad, y en algún momento va a pasar por 0, y va seguir disminuyendo.

cuando su velocidad es 0, es en el instante en que se empieza a devolver en la otra dirección, y sería su máximo punto. veamos este valor en la ecuación que acabamos de plantear:

$$v^2(t) = {v_{0}}^2 + (x(t) - x_{0}) \cdot 2 \overline{a}$$

donde $v(t) = 0$, entonces:

$$0 = {v_{0}}^2 + (x(t) - x_{0}) \cdot 2 \overline{a}$$

y despejando x(t):

$$- {v_{0}}^2 = (x(t) - x_{0}) \cdot 2 \overline{a}$$

$$-2a \cdot {v_0}^2 = x(t) - x_0$$

$$ x(t) = x_0 + -2a \cdot {v*{0}}^2$$

movimiento circular

consideración:

- consideramos una superficie en forma de disco
- se mueve con velocidad angular constante
- nos centramos en un radio del disco, todo ese radio avanza y pasa por el origen con regularidad (periodo T).
- pero un cuerpo a $\frac{R}{2}$ del centro, se más lento que un cuerpo en R.

la ecuación es:

$$v = \omega \cdot r$$

donde

- v es velocidad, se mide en $\frac{m}{s}$
- $omega$ es velocidad angular, se mide en $\frac{radianes}{s}$
- r es radio, se mide en m

si tenemos una velocidad angular constante, podemos plantear esta ecuación como:

$$\omega = \frac{v}{r}$$

donde v es directamente proporcional a r, entonces con velocidad angular constante, a mayor radio, mayor velocidad.

por lo tanto, un cuerpo muy cerca del centro va más lento que uno a mayor distancia.

eso aplica a las canchas para correr, donde a la personas que corren más fuera del centro se les da una ventaja, y después durante la carrera se les permite a todes ir al centro, para que corran la misma distancia.

referencias

- https://openstax.org/details/books/university-physics-volume-1
- https://www.cliffsnotes.com/study-guides/physics/classical-mechanics/kinematics-in-one-dimension