

**Задача 8.** Требуется вычислить значение второй производной функции  $f(x) = \cos \pi x$  в точке  $x = \frac{1}{2}$  с помощью соответствующей формулы численного дифференцирования второго порядка, используя значения функции  $f(x)$  в точках  $x = \frac{1}{4}$  и  $x = \frac{3}{4}$ , и объяснить полученный результат.

**Решение.** Пусть  $f(x) \in C^4[a; b]$  и  $x_1 - h$  и  $x_1 + h$  принадлежат отрезку  $[a; b]$ . Тогда формула численного дифференцирования второго порядка для второй производной функции  $f(x)$  в точке  $x_1$  имеет вид:

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

где  $\xi \in (x_1 - h; x_1 + h)$ .

Значение  $h$  и значения  $f(x)$  в точках  $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ :

$$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad f(x_1 - h) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f(x_1 + h) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Приближённое значение второй производной в точке  $x = \frac{1}{2}$ :

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 0 = a^*$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(a^*) = f''\left(\frac{1}{2}\right) - a^* = \pi^2 \cos \frac{\pi}{2} - 0 = 0$$

Верхняя граница погрешности:

$$\Delta_{max} = \max \left( \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi) \right) = \frac{1}{192} \max \left( f^{(4)}(\xi) \right), \text{ где } \xi \in (x_1 - h; x_1 + h)$$

$$\max \left( f^{(4)}(\xi) \right) = \max(\pi^4 \cos \pi \xi)$$

Максимальное значение функция принимает при  $\xi$  стремящемуся к любому целому числу, но  $\xi \in \left(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right)$  в данном случае ближайшие к границам интервала числа это 0 и 1. Значит, верхняя граница погрешности получается при  $\xi \rightarrow \frac{1}{4}$  или  $\xi \rightarrow \frac{3}{4}$ :

$$\lim_{\xi \rightarrow \frac{1}{4}} \pi^4 \cos \pi \xi = \pi^4 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^4 \sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta_{max} = \frac{\pi^4 \sqrt{2}}{2 * 192} = \frac{\pi^4 \sqrt{2}}{384}$$

**Вывод.** Абсолютная погрешность не даёт полного представления о точности численного метода, так как она находится в пределах погрешности метода, и может быть равна, в том числе, нулю. В данной задаче результат совпал с фактическим из-за особенности метода: если использовать его для вычисления второй производной в точке  $x_1$ , относительно которой функция нечётна на определенном промежутке, то для любого  $h$ , такого, что  $x_1 + h$  и  $x_1 - h$  принадлежат этому промежутку, абсолютная погрешность будет равна нулю, как и значение второй производной в точке  $x_1$ . В данном случае функция нечётна относительно точки  $x_1 = \frac{1}{2}$  на всём промежутке, а значит для любого  $h$  погрешность будет равна нулю, как и значение производной т.к.

$$f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h) = f(x_1 - h) - f(x_1 - h) - 0 = 0$$

Примером таких случаев может послужить применение данного метода к функции  $f(x) = (x - a)^{2n+1} + b$  в точке  $x_1 = a$ , или функциям  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $tg$ ,  $ctg$  в точках перегиба.