Задача 8. Требуется вычислить значение второй производной функции $f(x) = \cos \pi x$ в точке $x = \frac{1}{2}$ с помощью соответствующей формулы численного дифференцирования второго порядка, используя значения функции $f(x)$ в точках $x = \frac{1}{4}$ и $x = \frac{3}{4}$, и объяснить полученный результат.

Решение. Пусть $f(x) \in C^4[a;b]$ и $x_1 - h$ и $x_1 + h$ принадлежат отрезку $[a;b]$. Тогда формула численного дифференцирования второго порядка для второй производной функции $f(x)$ в точке x_1 имеет вид:

$$f''(x_1) = \frac{f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

где $\xi \in (x_1 - h;\ x_1 + h)$.

Значение h и значения $f(x)$ в точках $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$:

$$h = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \qquad f(x_1 - h) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\,, \qquad f(x_1 + h) = f\left(\frac{3}{4}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

Приближённое значение второй производной в точке $x = \frac{1}{2}$:

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 0 = a^*$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta(a^*) = f''\left(\frac{1}{2}\right) - a^* = \pi^2 \cos\frac{\pi}{2} - 0 = 0$$

Верхняя граница погрешности:

$$\Delta_{max} = \max\left(\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)\right) = \frac{1}{192} \max\left(f^{(4)}(\xi)\right), \text{где } \xi \in (x_1 - h;\ x_1 + h)$$

$$\max\left(f^{(4)}(\xi)\right) = \max(\pi^4 \cos \pi\xi)$$

Максимальное значение функция принимает при ξ стремящемуся к любому целому числу, но $\xi \in (\frac{1}{4};\ \frac{3}{4})$ в данном случае ближайшие к границам интервала числа это 0 и 1. Значит, верхняя граница погрешности получается при $\xi \to \frac{1}{4}$ или $\xi \to \frac{3}{4}$:

$$\lim_{\xi \to \frac{1}{4}} \pi^4 \cos \pi\xi = \pi^4 \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^4\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta_{max} = \frac{\pi^4\sqrt{2}}{2 * 192} = \frac{\pi^4\sqrt{2}}{384}$$

Вывод. Абсолютная погрешность не даёт полного представления о численном методе, так как она находится в пределах погрешности метода, и может быть равна, в том числе, нулю. В данной задаче результат совпал с фактическим из-за особенности метода: если использовать его для вычисления второй производной в точке x_1, относительно которой функция нечётна на определенном промежутке, то для любого h, такого, что $x_1 + h$ и $x_1 - h$ принадлежат этому промежутку, абсолютная погрешность будет равна нулю, как и значение второй производной в точке x_1. В данном случае функция нечётна относительно точки $x_1 = \frac{1}{2}$ на всём промежутке, а значит для любого h погрешность будет равна нулю, как и значение производной т.к.

$$f(x_1 - h) - 2f(x_1) + f(x_1 + h) = f(x_1 - h) - f(x_1 - h) - 0 = 0$$

Примером таких случаев может послужить применение данного метода к функции $f(x) = (x - a)^{2n+1} + b$ в точке $x_1 = a$, или функциям sin, cos, tg, ctg в точках перегиба.