Задача 7. Для интерполяционных узлов $x_1, \dots, x_n \in C^1[a; b]$ многочлен Эрмита, согласующийся с $f(x_i)$ и $f'(x_i), i = 1, \dots, n$ имеет следующий вид:

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i) \hat{h}_i(x),$$

где $h_i(x)$ и $\hat{h}_i(x)$ заданы как

$$h_i(x) = [1 - 2(x - x_i) l_i'(x_i)] l_i^2(x),$$

$$\hat{h}_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x),$$

где l_i – базисные полиномы Лагранжа $n - 1$ степени. Требуется найти выражение для многочлена Эрмита, проходящего через узлы $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$ для функции $f(x) = e^{2x}$

По условию многочлен Эрмита проходит через два узла, значит $n = 2$, а степень многочлена равна 3. Выражение $h_i(x)$ содержит первую производную базисного полинома Лагранжа. Уравнения производных при $n = 2$, $i = 1, 2$ имеют следующий вид:

$$l_1'(x) = \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\right)' = \frac{1}{x_1 - x_2},$$

$$l_2'(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)' = \frac{1}{x_2 - x_1},$$

Теперь, когда все выражения известны, следует подставить их в исходную формулу многочлена Эрмита 3 степени.

$$H_3(x) = f(x_1) \left[1 - 2(x - x_1) \left(\frac{1}{x_1 - x_2}\right)\right] \frac{(x - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} +$$

$$+ f(x_2) \left[1 - 2(x - x_2) \left(\frac{1}{x_2 - x_1}\right)\right] \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2} +$$

$$+ f'(x_1)(x - x_1) \frac{(x - x_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} + f'(x_2)(x - x_2) \frac{(x - x_1)^2}{(x_2 - x_1)^2}$$

Уравнение первой производной функции $f(x)$:

$$f'(x) = 2e^{2x}$$

Значения $f(x)$ и её первой производной в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{2}$:

$$f(0) = 1, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = e, \qquad f'(0) = 2, \qquad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e$$

После подстановки значений выражение искомого многочлена имеет следующий вид:

$$H_3(x) = \left[1 - 2x\left(\frac{1}{-\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{(-\frac{1}{2})^2} + e\left[1 - 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)\right]\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} +$$

$$+2x\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} + 2e\left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= 4\left[(1+4x)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + e(3-4x)x^2 + 2x\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + e(2x-1)x^2\right]$$

$$H_3(x) = 4\left[(1+6x)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + x^2 e(2-2x)\right] =$$

$$= 4\left[6x^3 - 6x^2 + \frac{6}{4}x + x^2 - x + \frac{1}{4} + 2ex^2 - 2ex^3\right] =$$

$$= (24-8e)x^3 + (8e-20)x^2 + 2x + 1$$

Сравнение графиков $H_3(x)$ и $f(x)$ для проверки полученного решения приведено ниже.

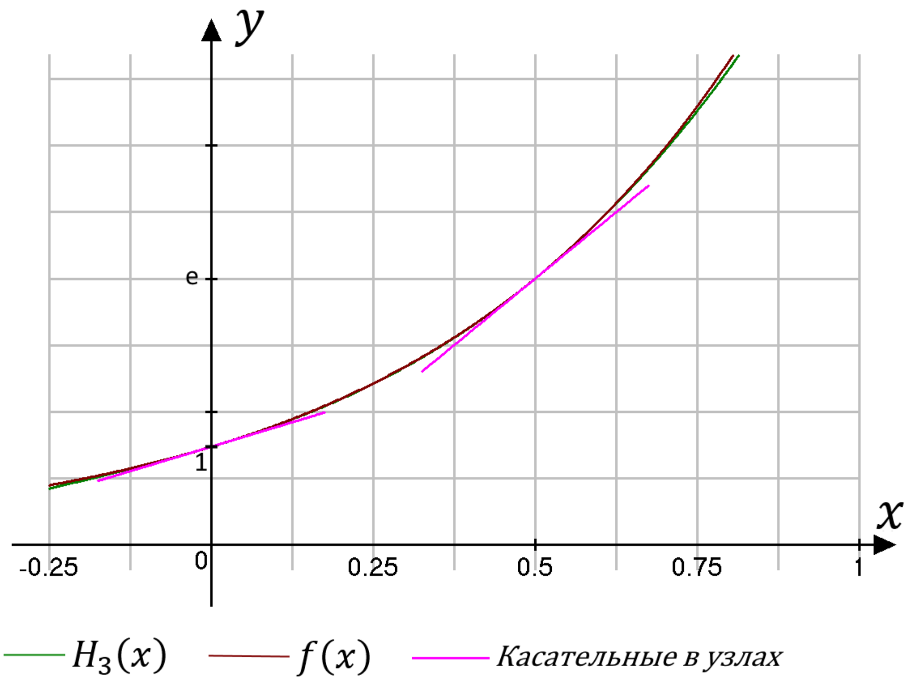

Рисунок 1. Графики искомого многочлена Эрмита и f(x).

Ответ: $H_3(x) = (24-8e)x^3 + (8e-20)x^2 + 2x + 1$