



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ *Робототехники и комплексной автоматизации*

КАФЕДРА *Системы автоматизированного проектирования (РК-6)*

## **ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ**

по дисциплине: «Вычислительная математика»

Студент	Фуров Павел Павлович
Группа	РК6-61Б
Тип задания	Лабораторная работа №3
Тема лабораторной работы	Вынужденные колебания маятника

Студент	_____	<b>Фуров П.П.</b>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>
Преподаватель	_____	<b>Першин А.Ю.</b>
	<i>подпись, дата</i>	<i>фамилия, и.о.</i>

Оценка \_\_\_\_\_

*Москва, 2021 г.*

## Оглавление

Задание на лабораторную работу .....	3
Цель выполнения лабораторной работы .....	4
Ход выполнения лабораторной работы .....	5
1. Базовая часть.....	5
1.1. Преобразование ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка.....	5
1.2. Реализация функций .....	5
1.2.1. Разработка функции <code>runge_kutta</code> .....	6
1.2.2. Разработка функции <code>adams_moulton</code> .....	6
1.2.3. Разработка функции <code>milne_simpson</code> .....	8
1.3. Визуализация траектории, полученной каждым из реализованных методов .....	9
2. Продвинутая часть .....	12
2.1. Анализ методов .....	12
2.1.1. Отличия и сходства методов .....	12
2.1.2. Условия неустойчивости методов .....	13
2.1.3. Затратность схем по времени .....	15
2.1.4. Асимптотические состояния системы.....	16
2.2. Области притяжения состояний .....	17
2.3. Характерные детали областей притяжения .....	19
Заключение .....	21
Список использованных источников .....	22

## Задание на лабораторную работу

Дано ОДУ 2-го порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta + 0.1 \frac{d}{dt}\theta + \sin(\theta) = \cos(t),$$

где  $\theta(t)$  обозначает угол отклонения маятника от вертикальной оси как функцию времени  $t$ .

Требуется (базовая часть):

1. Преобразовать данное ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка.
2. Написать следующие функции, каждая из которых возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданную функцией  $f$ , начальным условием  $x_0$ , шагом по времени  $h$  и конечным временем  $t_n$ :
  - `runge_kutta(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка.
  - `adams_moulton(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью трёхшагового метода Адамса-Моултона.
  - `milne_simpson(x_0, t_n, f, h)`, где дискретная траектория строится с помощью метода Милна-Симпсона.
3. Для каждого из реализованных методов:
  - Численно найти траектории заданной динамической системы, используя шаг  $h = 0.1$  и 20 начальных условий с  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d}{dt}$ , выбранным случайно из интервала  $[1.85; 2.1]$ .
  - Вывести полученные траектории на едином графике как зависимость  $\theta$  от времени.

Требуется (продвинутая часть):

1. Ответить на вопросы:
  - (a) В чём принципиальные отличия реализованных методов друг от друга? В чём они схожи?
  - (b) Для каждой из схем каково значение шага, при котором она становится неустойчивой?

- (с) Какая из схем является наиболее затратной с точки зрения времени вычислений при произвольном значении шага, дающем устойчивое решение для каждой из схем? Наименее затратной?
  - (d) Как вы можете охарактеризовать асимптотические состояния, к которым сходится решение в зависимости от начальных условий? Опишите их физический смысл.
2. Построить области притяжения каждого из асимптотических состояний:
- (a) Каждому из асимптотических состояний назначить свой цвет.
  - (b) Построить множество начальных условий на основе структурированной сетки, построенной путём разбиения области  $[-4\pi; 4\pi] \times [-5, 5]$ .
  - (с) Выбрав наименее затратную по времени схему, построить траектории для каждого из начальных условий, соответствующих узлам сетки, и проклассифицировать, к какому асимптотическому состоянию сходится каждая из траекторий. Описать алгоритм, с помощью которого вы определяете, что данная траектория сходится к определённому асимптотическому состоянию.
  - (d) Вывести на экран график начальных условий, имеющих цвет соответствующих им асимптотических состояний.
3. Какие характерные детали полученных областей притяжения вы можете выделить?

### **Цель выполнения лабораторной работы**

Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка активно используются для изучения динамических систем, траектории которых не удастся найти с помощью аналитических методов. Цель лабораторной работы – исследовать траектории, являющиеся решением модели вынужденных колебаний маятника без предположения от малости угла отклонения маятника от вертикальной оси. Проанализировать, к каким решениям они сходятся в зависимости от начальных условий. Необходимо рассмотреть, сравнить и проанализировать три различных способа численного решения задачи Коши: метод Рунге-Кутты 4-го порядка, трёхшаговый метод Адамса-Моултона и метод Милна-Симпсона с точки зрения устойчивости и затрат по времени. Проанализировать асимптотические состояния

системы и множество начальных условий, приводящих систему к данным асимптотическим состояниям.

## Ход выполнения лабораторной работы

### 1. Базовая часть

#### 1.1. Преобразование ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + 0.1 \frac{d}{dt} \theta + \sin(\theta) = \cos(t) \quad (1)$$

может быть представлено в виде системы ОДУ 1-го порядка путём замены переменных:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = \cos(t) - \sin(y_1) - 0.1y_2 - \sin(y_1) \end{cases},$$

где  $y_1 = \theta, y_2 = \frac{d\theta}{dt}$ .

Тогда выражение (1) можно представить как:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ \cos(t) - \sin(y_1) - 0.1y_2 - \sin(y_1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

Таким образом ОДУ 2-го порядка (1) было преобразовано в систему ОДУ 1-го порядка (2).

#### 1.2. Реализация функций

Каждая из реализуемых функций возвращает дискретную траекторию системы ОДУ с правой частью, заданную функцией  $f$ , начальным условием  $x_0$ , шагом по времени  $h$  и конечным временем  $t_n$ .

Листинг 1 – Функция  $f$ , задающая правую часть ОДУ

```
1 def f(t, y):  
2     return np.array([y[1], np.cos(t) - np.sin(y[0]) - 0.1*y[1]])
```

### 1.2.1. Разработка функции `runge_kutta`

Формулировка метода Рунге-Кутты 4-го порядка для систем оду имеет вид:

$$\begin{aligned}w_0 &= \alpha, \\k_1 &= hf(t_i, w_i), \\k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\k_4 &= hf(t_i + h, w_i + k_3), \\w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), i = 0, 1, \dots, m-1\end{aligned}$$

По данным формулам была разработана функция, возвращающая траекторию системы ОДУ для заданных начальных условий с определённым шагом и временем.

Листинг 2 – Функция `runge_kutta`, возвращающая траекторию системы ОДУ, построенную с помощью метода Рунге-Кутта 4-го порядка

```
1 def runge_kutta(x_0, t_n, f, h):
2     m=int(t_n/h)+1
3     w = np.zeros((m,2))
4     w[0,:] = x_0[0]
5     for i in range(1,m):
6         k_1 = h*f(i*h,w[i-1])
7         k_2 = h*f(i*h+h/2,w[i-1]+k_1/2)
8         k_3 = h*f(i*h+h/2,w[i-1]+k_2/2)
9         k_4 = h*f(i*h+h,w[i-1]+k_3)
10        w[i] = w[i-1]+(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)/6
11    return w
```

### 1.2.2. Разработка функции `adams_moulton`

Неявный (p-1)-шаговый метод, известный как метод Адамса-Моултона имеет вид:

$$\begin{aligned}w_0 &= \alpha_0, w_1 = \alpha_1, \dots, w_{p-1} = \alpha_{p-1}, \\w_{i+1} &= w_i + h \sum_{j=1}^p a_j f(t_{i-j+2}, w_{i-j+2}), i = p-1, p, \dots, m-1, \quad (3)\end{aligned}$$

Где коэффициенты  $a_j$  имеют вид:

$$a_j = \int_0^1 \prod_{j \neq k} \frac{s+k-2}{k-j} ds, j = 1, \dots, p. \quad (4)$$

Трёхшаговый требует задания начальных условий для первых 3 шагов:

$$\mathbf{w}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0, \mathbf{w}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \mathbf{w}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2,$$

Где  $\boldsymbol{\alpha}_0$  известен из начальных условий, а для нахождения двух других можно использовать ранее разработанную функцию *runge\_kutta*.

Пользуясь формулой (4), найдём коэффициенты  $a_j$ . Для этого используем функцию *solve\_ints*, возвращающую аналитическое решение для формулы (4) для заданного j и p=3+1=4

Листинг 3 – Функция *solve\_ints*, вычисляющая значения коэффициентов  $a_j$  (sp - sympy).

```
1 def solve_ints(j):
2     s=sp.symbols('s')
3     mul=1
4     for k in range(1,5):
5         if k==j: continue
6         mul*=(s+k-2)/(k-j)
7     return sp.integrate(mul, (s,0,1))
```

Для j=1,...,4 были получены следующие значения:

$$a_1 = \frac{3}{8}, \quad a_2 = \frac{19}{24}, \quad a_3 = -\frac{5}{24}, \quad a_4 = \frac{1}{24}.$$

Тогда формула (3) раскроется как

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i + \frac{h}{24} (9\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}) + 19\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i) - 5\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{w}_{i-1}) + \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{w}_{i-2})),$$

Откуда можно выделить зависимую и независимую от  $\mathbf{w}_{i+1}$  части:

$$\mathbf{w}_{i+1} - \frac{3}{8}h\mathbf{f}(t_{i+1}, \mathbf{w}_{i+1}) = \mathbf{w}_i + \frac{h}{24} (19\mathbf{f}(t_i, \mathbf{w}_i) - 5\mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{w}_{i-1}) + \mathbf{f}(t_{i-1}, \mathbf{w}_{i-2})),$$

Таким образом можно будет сразу посчитать независимую часть, чтобы не считать её каждый раз при поиске корня. Для решения данного нелинейного уравнения используются функция *scipy.optimize.root*.

Листинг 4 – Функция *adams\_moulton*, возвращающая траекторию системы ОДУ, построенную с помощью трёхшагового метода Адамса-Моултона

```

1 def adams_moulton(x_0, t_n, f, h, t_0 = 0):
2     m=int(t_n/h)+1
3     w = np.zeros((m,2))
4     w[:3,:] = runge_kutta(x_0,h*3,f,h)[:3,:]
5     ft_0,ft_1,ft_2 = f(t_0,w[0]),f(t_0+h,w[1]),f(t_0+2*h,w[2])
6     for i in range(3,m):
7         f_right = w[i-1]+h/24*(19*ft_2-5*ft_1+ft_0)
8         f_min = lambda x: x-h*3/8*f(t_0+i*h,x)-f_right
9         w[i] = opt.root(f_min, w[i-1]).x
10        ft_0,ft_1,ft_2 = ft_1,ft_2,f(t_0+i*h,w[i])
11    return w

```

### 1.2.3. Разработка функции *milne\_simpson*

Метод Милна и метод Симпсона используются в комбинации по схеме предиктор-корректор:

$$w_0 = \alpha_0, w_1 = \alpha_1, w_2 = \alpha_2, w_3 = \alpha_3,$$

$$\tilde{w}_{i+1} = w_{i-3} + \frac{4h}{3}[2f(t_i, w_i) - f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 2f(t_{i-1}, w_{i-2})],$$

$$w_{i+1} = w_{i-1} + \frac{h}{3}[f(t_{i+1}, \tilde{w}_{i+1}) + 4f(t_i, w_i) + f(t_{i-1}, w_{i-1})], \quad i = 3, \dots, m-1.$$

Начальные условия  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  будут взяты как результат функции *runge\_kutta* для первых четырёх шагов.

Листинг 5 – Функция *milne\_simpson*, возвращающая траекторию системы ОДУ, построенную с помощью метода Милна-Симпсона.

```

1 def milne_simpson(x_0, t_n, f, h):
2     m=int(t_n/h)+1
3     w = np.zeros((m,2))
4     w[:4,:] = runge_kutta(x_0,h*4,f,h)[:4,:]
5     ft_0,ft_1,ft_2 = f(h,w[1]),f(2*h,w[2]),f(3*h,w[3])
6     for t in range(4,m):
7         w_ = w[t-4]+4*h*(2*ft_0-ft_1+2*ft_2)/3
8         w[t] = w[t-2]+h*(f(t*h,w_)+4*ft_2+ft_1)/3
9         ft_0,ft_1,ft_2 = ft_1,ft_2,f(t*h,w[t])
10    return w

```



### 1.3. Визуализация траектории, полученной каждым из реализованных методов

Для каждого из реализованных методов использовался шаг  $h = 0.1$  и 20 начальных условий с  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d}{dt}$ , выбранным случайно из интервала  $[1.85; 2.1]$ . Полученные траектории выведены на рисунках ниже.

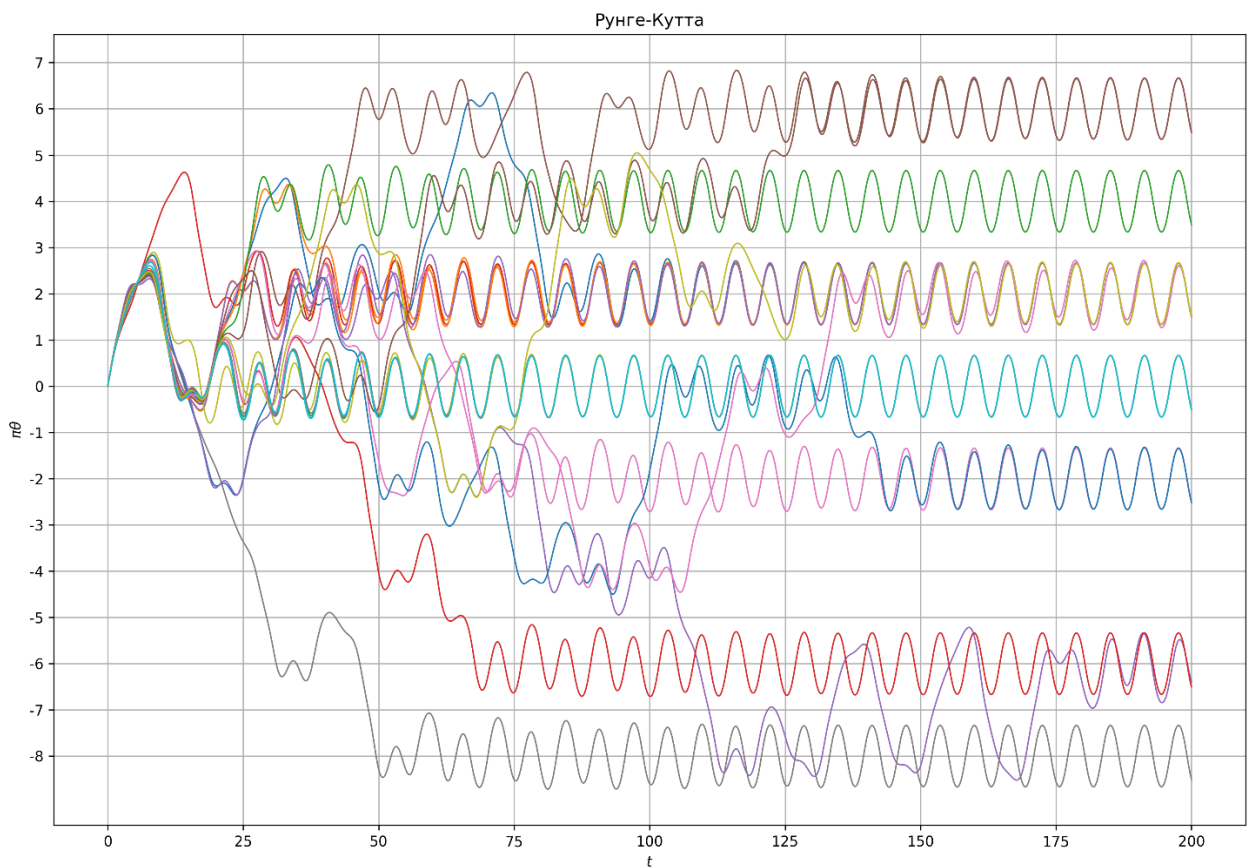


Рисунок 1 – визуализация траектории, полученной методом Рунге-Кутты.

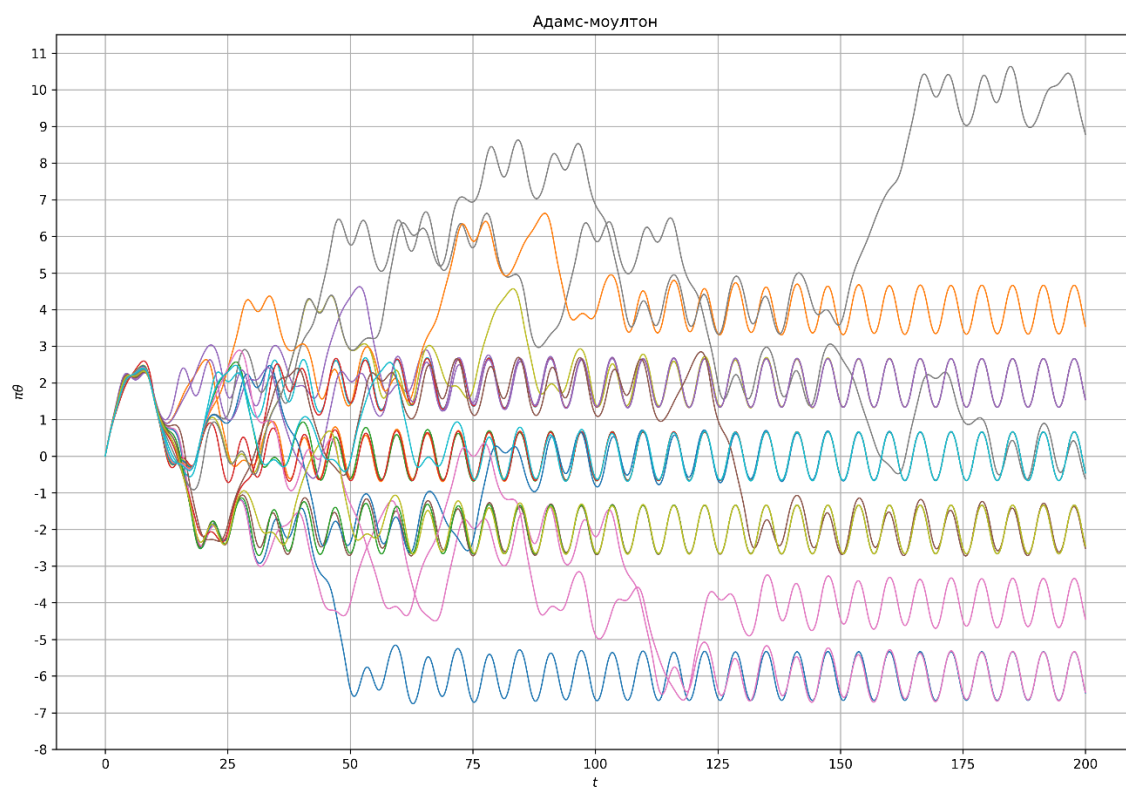


Рисунок 2 – визуализация траектории, полученной методом Адамса-Моултона.

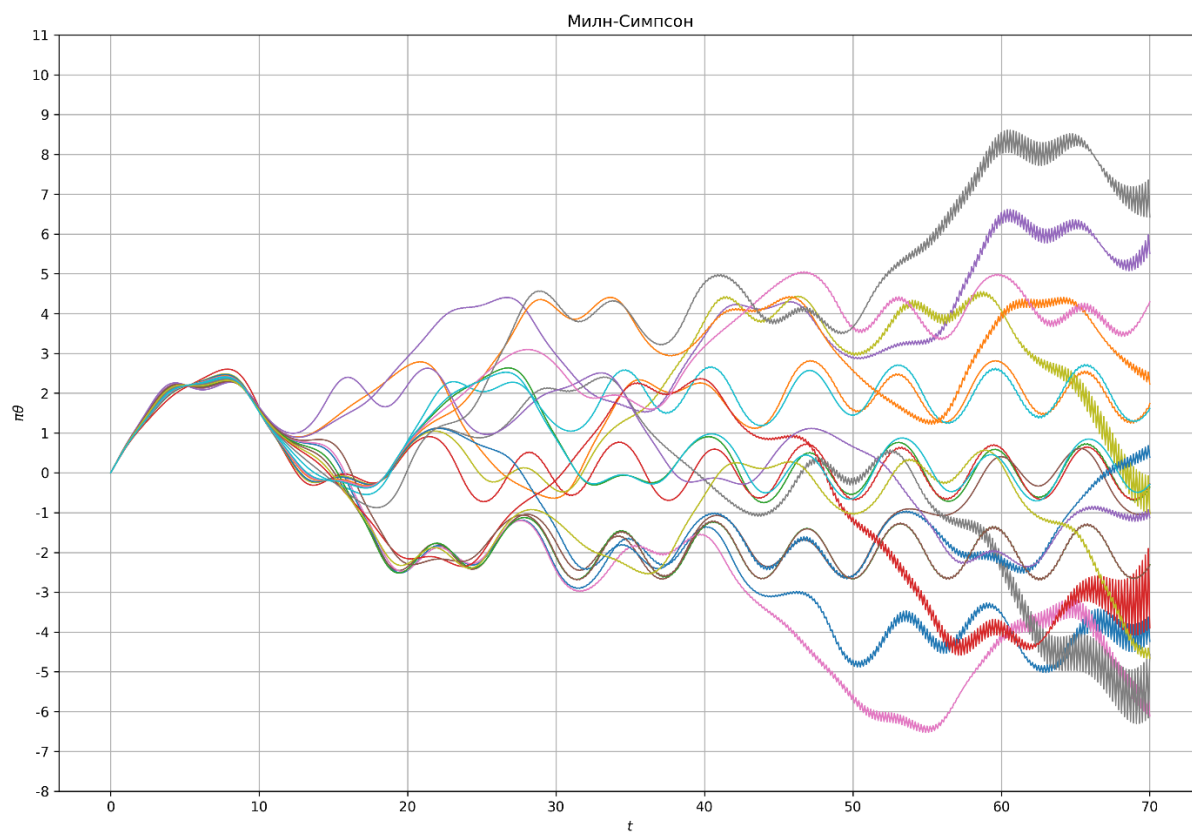


Рисунок 3 – визуализация траектории, полученной методом Милна-Симпсона.

Можно заметить, что для метода Милна-Симпсона был использован меньший временной интервал, так как при использовании данного метода для  $t=200$  получается малоинформативная картина, что будет обосновано в продвинутой части.

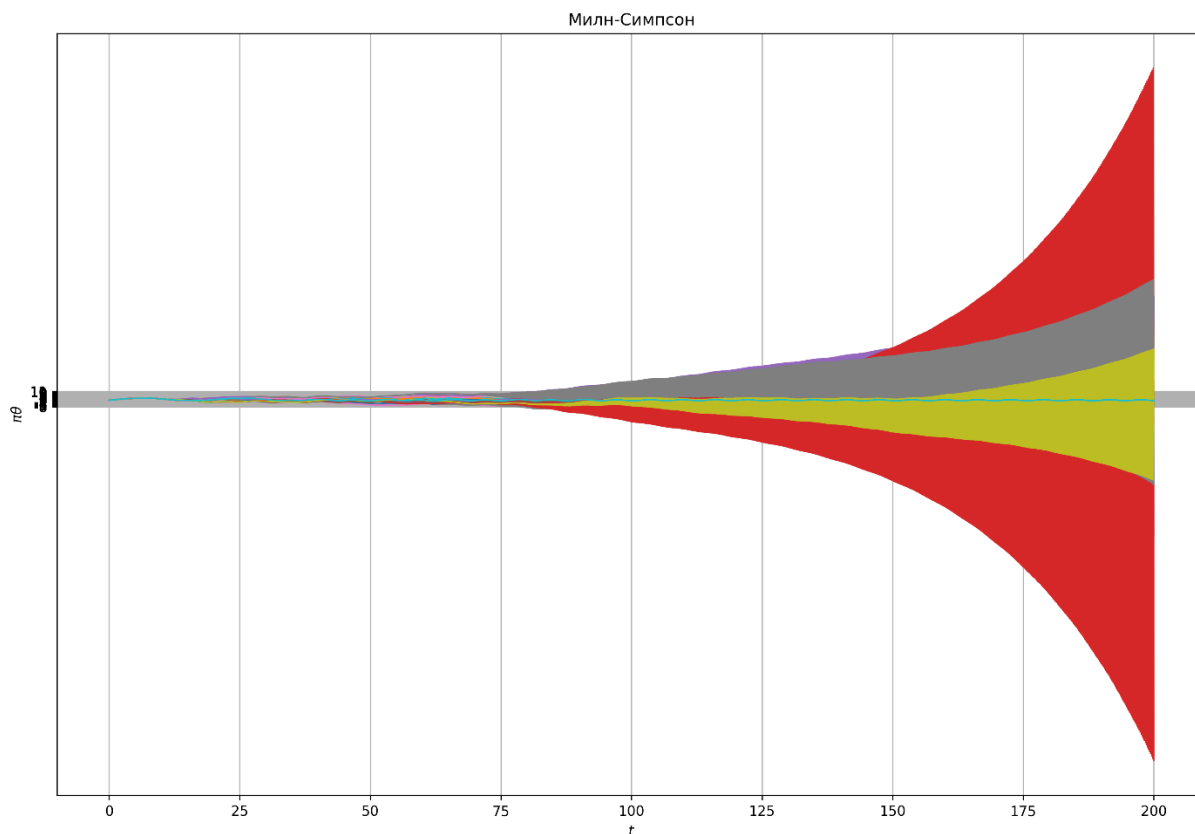


Рисунок 4 – визуализация траектории, полученной методом Милна-Симпсона для  $t=200$ .

Таким образом, были реализованы и визуализированы три различных метода численного решения задачи Коши для систем ОДУ. Более подробный анализ самих методов и дифференциального уравнения приведён в продвинутой части.

## **2. Продвинутая часть**

### **2.1. Анализ методов**

#### **2.1.1. Отличия и сходства методов**

Отличия:

- Требования. Методы требуют значения для на различном количестве предыдущих шагов. Причём метод Адамса-Моултона позволяет это количество шагов регулировать. Также, метод Рунге-Кутта не опирается на значение следующего шага, что отличает его от двух других методов
- Вычисления. Метод Рунге-Кутта вычисляет значение функции 4 раза, для метода Адамса-Моултона это значение не определено, так как функция оптимизируется. Метод Милна-Симпсона вычисляет функцию 2 раза для каждого шага.
- Кроме того, Метод Милна-Симпсона неустойчив относительно времени в связи с нарастанием погрешности на предикторе и корректоре, ведущей к нарастанию высокочастотных колебаний, что видно на рисунке 4. Сам подход, подразумевающий использование двух методов решения дифференциального уравнения в комбинации, существенно отличает метод от двух других.
- Методы имеют различную погрешность и как следствие различный оптимальный шаг.

Сходства:

- Методы используют концептуально разные подходы к решению системы ОДУ, можно лишь выделить то, что два последних похожи между собой тем, что опираются на значение следующего шага. Все методы имеют четвёртый порядок точности и вычисляют дискретные траектории системы ОДУ

### 2.1.2. Условия неустойчивости методов

Критерием возникновения неустойчивости будем считать существенное отличие графика от графика при заведомо малой погрешности, то есть, когда график становится неинформативным, либо приход к другому асимптотическому состоянию. Поиск будет проводиться с точностью до одной тысячной в несколько итераций путём сужения области поиска. На последующих рисунках представлены последние итерации поиска для каждого из методов. Начальные условия:  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d}{dt} = 1.85$ .

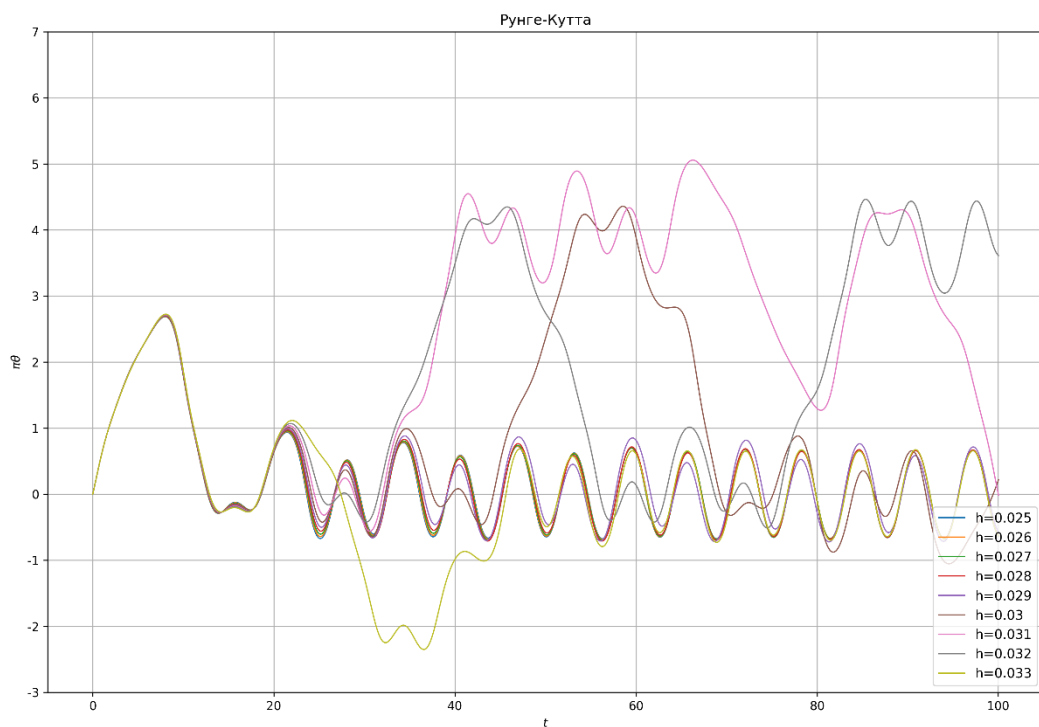


Рисунок 5 — визуализация траектории, полученной методом Рунге-Кутты для различных  $h$ .

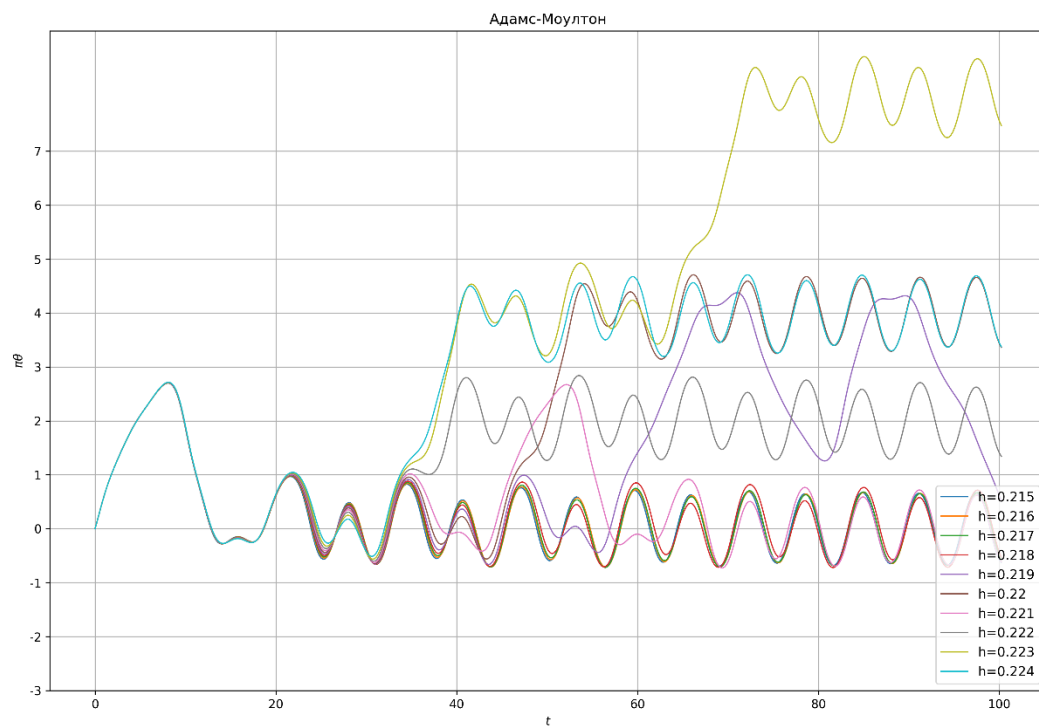


Рисунок 6 – визуализация траектории, полученной методом Адамса-Моултона для различных  $h$ .

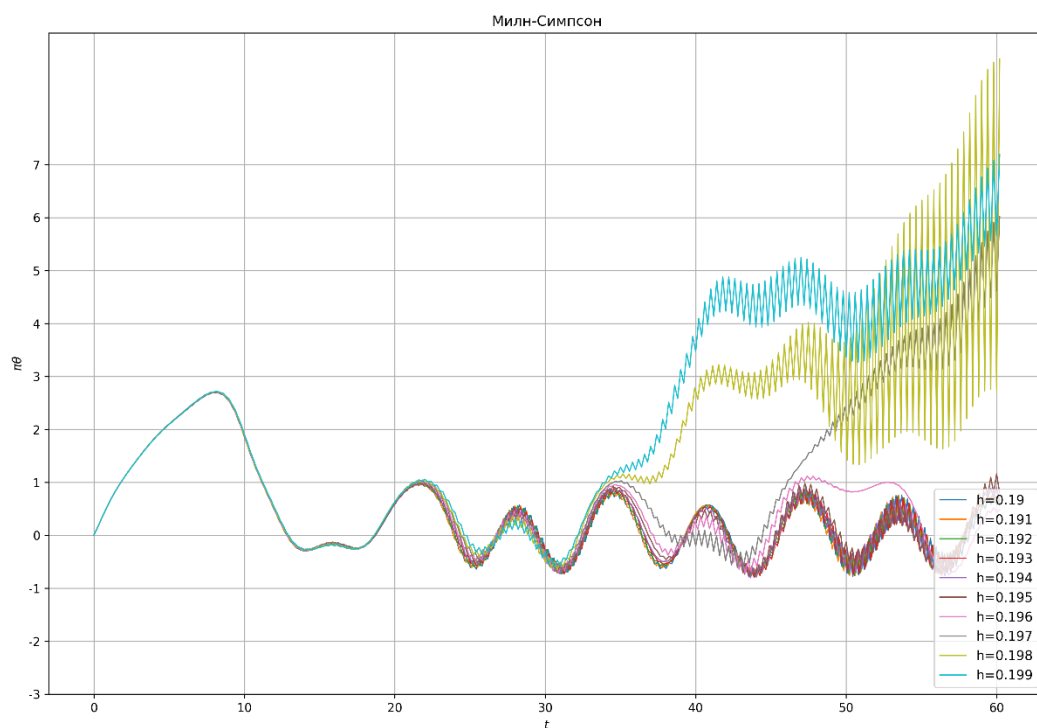


Рисунок 7 – визуализация траектории, полученной методом Милна-Симпсона для различных  $h$ .

Таким образом, получены следующие значения шага, при котором схема становится неустойчивой:

- Метод Рунге-Кутты: 0.03
- Метод Адамса-Моултона: 0.218
- Метод Милна-Симпсона: 0.196

При меньших значениях во всех трёх случаях графики совпадают практически полностью.

### 2.1.3. Затратность схем по времени

Очевидно, что для каждой схемы следует брать не одинаковый шаг, а оптимальный, ведь интересна в первую очередь затратность схемы с точки зрения времени, потраченного на получение правильного результата. Начальные условия остаются теми же:  $\theta(0) = 0$  и  $\frac{d}{dt} = 1.85$ .

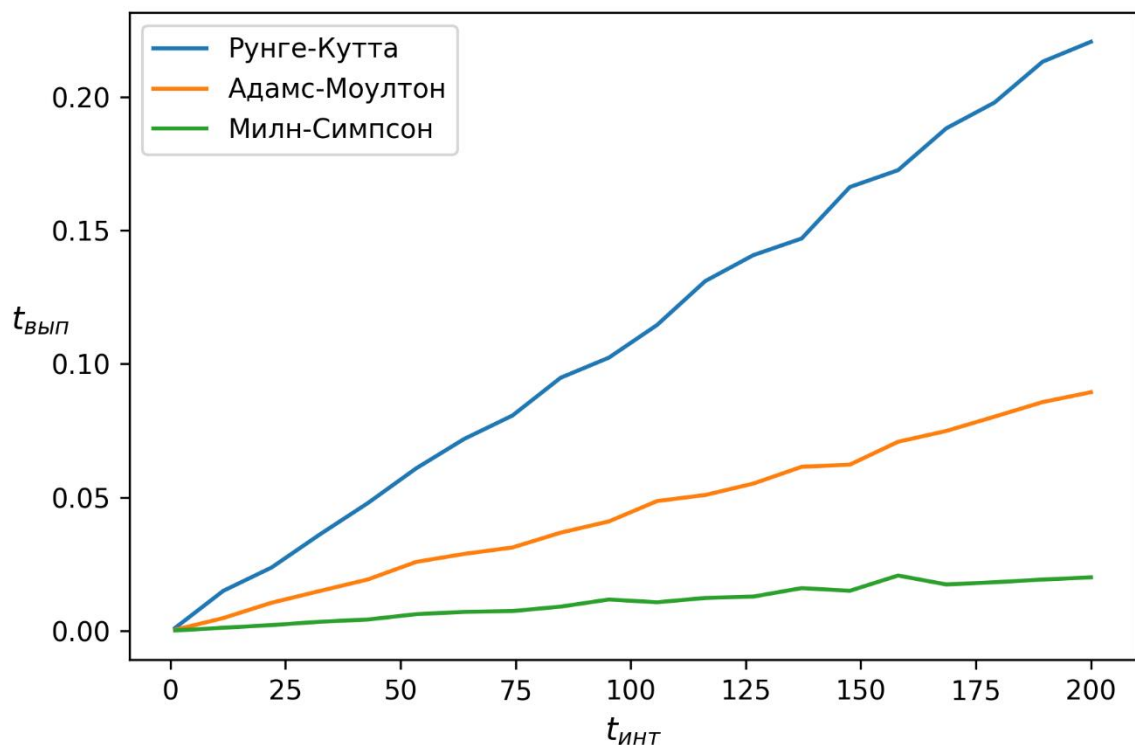


Рисунок 8 – График зависимости времени выполнения от выбранного интервала

График говорит сам за себя и самым эффективным по времени является метод Милна-Симпсона. Однако далее следует важное примечание. Был сделан

ошибочный вывод, что продолжение лабораторной работы следует выполнять, используя метод Милна-Симпсона, как самый эффективный. Однако в процессе выполнения с ним возникали различные проблемы, связанные с его неустойчивостью. Позже было выяснено, что в отличие от других методов, условие возникновения вычислительной неустойчивости для метода Милна-Симпсона очень сильно зависит от начальных условий, настолько сильно, что оптимальный шаг может отличаться на порядок, а значит, адекватно определить оптимальность данного метода по времени сложно, так как она напрямую зависит от оптимального шага, который в свою очередь очень сильно зависит от начальных условий. Поэтому, в дальнейшем исследовании системы используется метод Адамса-Моултона.

#### 2.1.4. Асимптотические состояния системы.

В процессе выполнения базовой части было замечено, что кривые на графиках сходятся к асимптотическим состояниям, находящимся на расстоянии  $2\pi n$  друг от друга. Физический смысл —  $n$  является количеством полных оборотов маятника. К примеру, при увеличении начальной скорости, асимптотическое состояние увеличится, что логично.

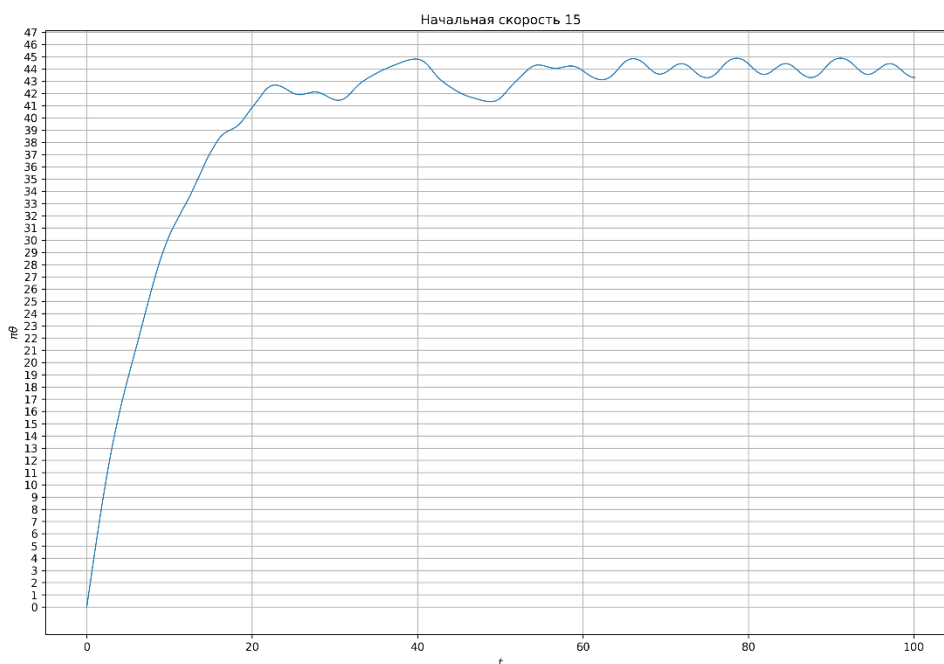


Рисунок 7 – визуализация траектории при начальной скорости равной 15.



Переходные процессы связаны с тем, что маятнику для синхронизации с вынужденными колебаниями необходимо некоторое время. Полученная с помощью метода Адамса-Моултона фазовая траектория представлена на рисунке 8:

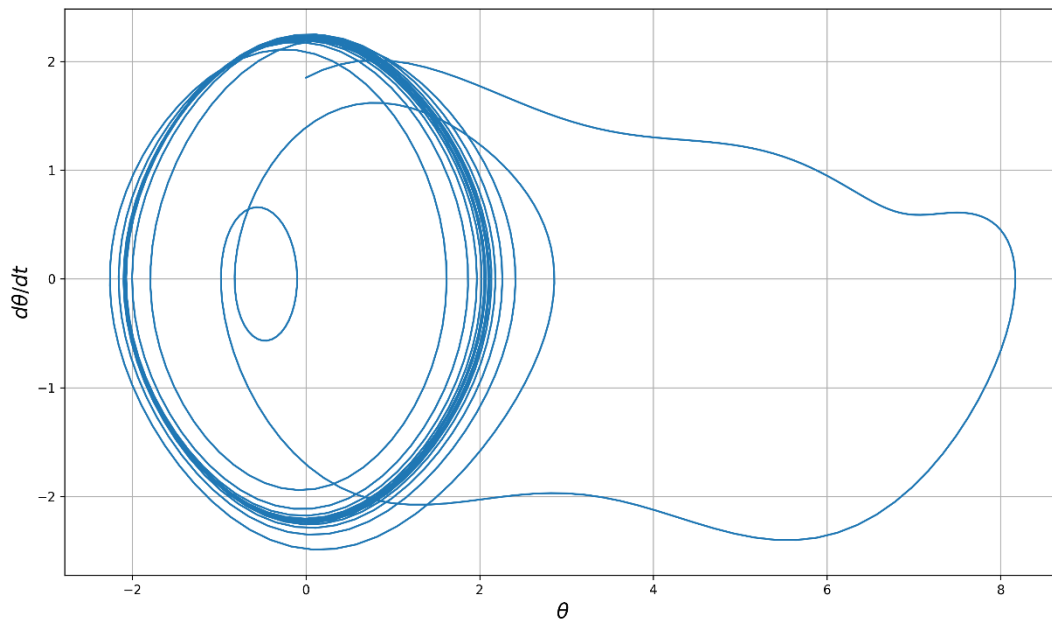


Рисунок 8 – фазовая траектория для начальной скорости, равной 1.85.

Можно заметить, что на рисунке сформирована орбита в виде эллипса – она является аттрактором или областью притяжения. Для визуализации аттрактора достаточно будет брать один период колебаний на «устоявшемся» участке.

## 2.2. Области притяжения состояний

Область притяжения – это область фазового пространства, откуда фазовые траектории стремятся к аттрактору. Для начала следует определить количество асимптотических состояний и назначить каждому из состояний свой цвет для сетки, полученной путём равномерного разбиения области  $[-4\pi; 4\pi] \times [-5, 5]$  на 25 узлов:

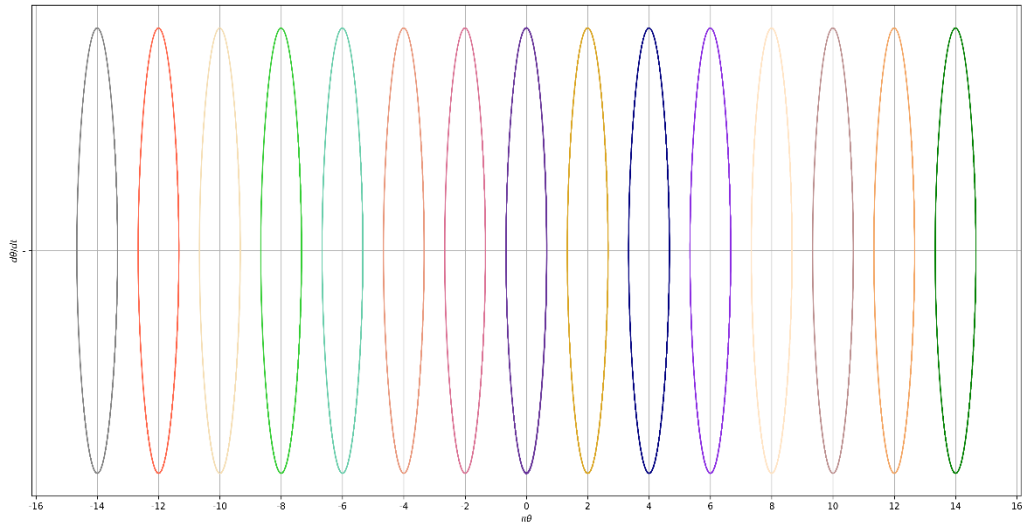


Рисунок 8 – фазовые траектории для различных состояний.

Известно, что асимптотические состояния не выйдут за пределы тех, что изображены на рисунке выше при более мелком разбиении сетки, потому что для используемого шага метод устойчив, а физически маятник не может при меньшей скорости обернуться большее количество раз. Область притяжения асимптотического состояния, это множество таких условий, при которых соответствующие им траектории стремятся к данному асимптотическому состоянию при  $t \rightarrow \infty$ . Поиск асимптотического состояния проводится элементарно: выводы о вычислительной устойчивости для различных шагов для метода Адамса-Моултона сделаны, также мы знаем в пределах этой сетки каждый элемент обязательно сойдётся к асимптотическому состоянию. Также известно, что амплитуда устоявшихся колебаний не может быть больше  $\pi$ , а по графикам выше видно, что она куда меньше. Значит нужно взять фазу в последний момент времени, и найти ближайшее асимптотическое состояние. Сделать это можно с помощью функции `round`, округлив значение фазы, делённое на  $2\pi$ , получив тем самым уникальный номер цвета для каждой фазы. Соответствие фазы и цвета изображено на рисунке 8.

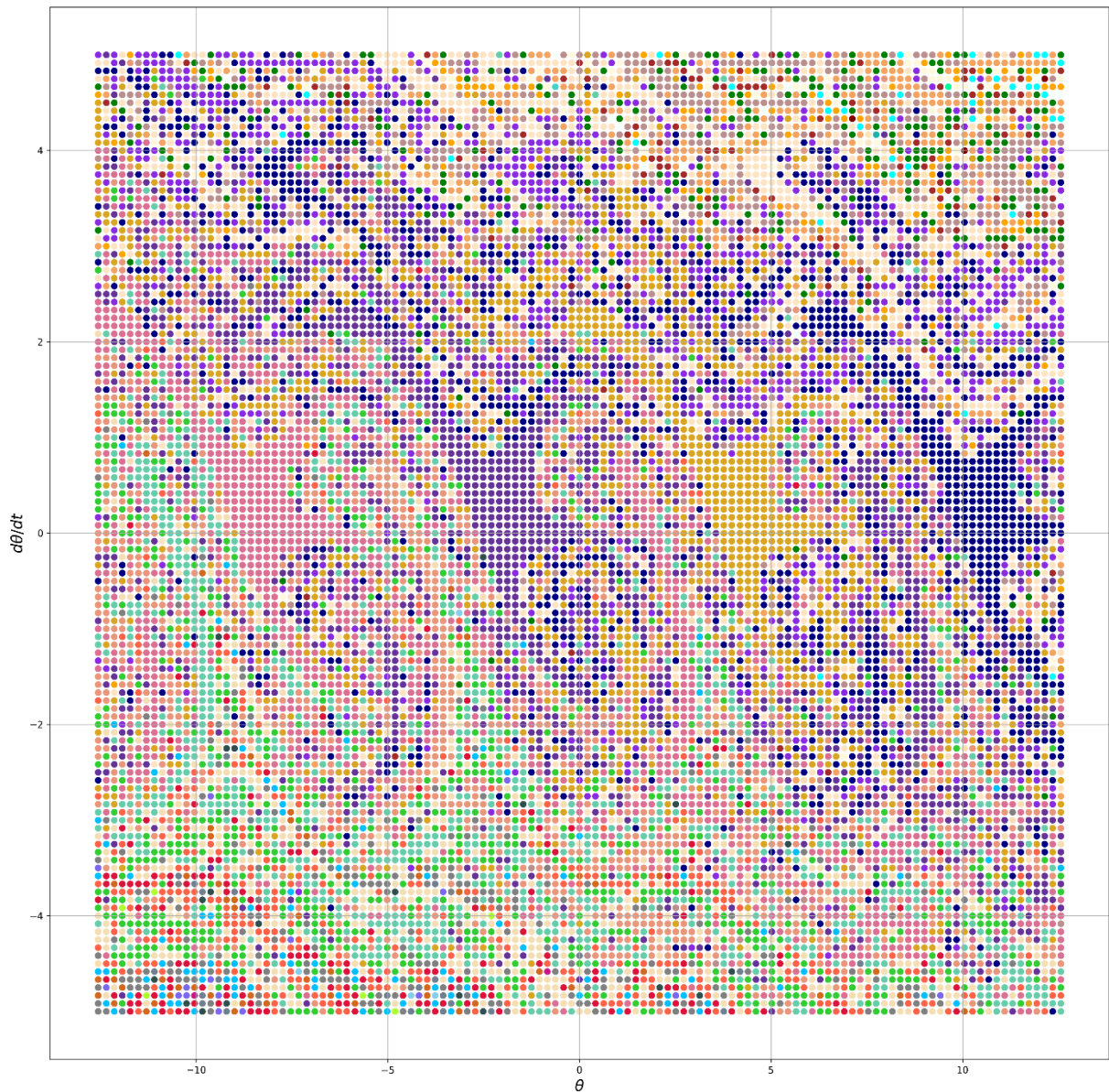


Рисунок 9 – график начальных условий, имеющих цвет соответствующих им асимптотических состояний

### 2.3. Характерные детали областей притяжения

Распределение цветов довольно хаотично, что можно обосновать неустойчивостью динамической системы и наличием погрешности в используемом методе. Однако и из полученных результатов можно сделать выводы:

- Диаграмма периодична. Особенно это заметно в области центральной горизонтальной полосы.

- Наименее хаотичные области соответствуют скорости, близкой к нулю и отклонению, близкому к  $2\pi n$ , что логично, так как физически это означает практически нетронутый маятник. И наоборот, чем больше скорость и отклонение от  $2\pi n$ , тем хаотичнее область.
- Набор цветов в левом нижнем углу и правом верхнем углу существенно различается, что можно объяснить направлением вращения маятника. Действительно, сложно, запустив маятник в одну сторону, заставить его крутиться в другую.

## **Заключение**

В ходе выполнения данной лабораторной работы были изучены различные вычислительные методы решения ОДУ 2-го порядка. Все они основаны на преобразовании ОДУ в систему ОДУ 1-го порядка. Сами методы имеют совершенно разные подходы к численному решению задачи Коши, что отражалось тем, что они давали различные результаты. Однако, как и в прошлых двух лабораторных работах, вывод таков, что методы дают нужный результат при правильном использовании параметров. Поиску таких параметров мы тоже научились.

Удостоверившись, в том, что методам можно доверять (и при каких условиях). С их помощью было проанализировано поведение маятника при вынужденных колебаниях, а именно связь начальных условий и асимптотического состояния, к которому приходит маятник. Также был выяснен физический смысл асимптотических состояний.

### Список использованных источников

1. **Першин А.Ю.** *Лекции по вычислительной математике (черновик)*. [archrk6.bmstu.ru] // Кафедра РК6 МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2020, 145.
2. **Першин А.Ю.** *Вычислительная математика, лекция №9*. Видеохостинг «YouTube» [<https://www.youtube.com/watch?v=s2TfeF-22zo>] // (дата обращения (07.05.2021)).
3. **Першин А.Ю.** *Вычислительная математика, лекция №10*. Видеохостинг «YouTube» [<https://www.youtube.com/watch?v=4OdB86cqEdY>] // (дата обращения (08.05.2021)).
4. **Першин А.Ю.** *Вычислительная математика, лекция №11*. Видеохостинг «YouTube» [<https://www.youtube.com/watch?v=kbyMpLzmjBM>] // (дата обращения (08.05.2021)).