test 0_37 INPUT:

```
{OPENAGHDEFINITION( name="(kosinus hiperboliczny)")}
__Funkcją kosinus hiperboliczny__ nazywamy funkcję
__{OPENAGHMATHJAX()}\cos h:\mathbb R\to\mathbb
R{OPENAGHMATHJAX}__ określoną wzorem __{OPENAGHMATHJAX()}\cos
h(x)={{e^x+e^{-x}}\over 2}{OPENAGHMATHJAX}__, gdzie
{OPENAGHMATHJAX()}e{OPENAGHMATHJAX} jest stała Eulera (patrz
definicja F…).
Dziedziną funkcji kosinus hiperboliczny jest
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}, a zbiorem wartości
{OPENAGHMATHJAX()}[1,\infty){OPENAGHMATHJAX}{OPENAGHDEFINITION}
```

```
{OPENAGHANNOTATION( name="")}
Wykres funkcji cosh możemy utworzyć szkicując wykresy
{OPENAGHMATHJAX()}y={1\over 2}e^x{OPENAGHMATHJAX},
{OPENAGHMATHJAX()}y={1\over 2}e^{-x}{OPENAGHMATHJAX} i dodając
ich wartości w odpowiednich punktach.
```

```
Rys. F51. Kosinus
hiperboliczny.{OPENAGHANNOTATION}{OPENAGHANNOTATION( name="")}
Wykres funkcji kosinus hiperboliczny bywa nazywany krzywą
łańcuchową, gdyż jego kształt przyjmuje jednorodny giętki kabel
lub łańcuch, którego końce są umocowane na słupach o tej samej
wysokości.
```

test 0_37 OUTPUT:

```
{OPENAGHDEFINITION( name="(kosinus hiperboliczny)")} __Funkcj?
kosinus hiperboliczny__ nazywamy funkcj?
__{OPENAGHMATHJAX()}\cos h:\mathbb R\to\mathbb
R{OPENAGHMATHJAX}__ okre?lon? wzorem __{OPENAGHMATHJAX()}\cos
h(x)={{e^x+e^{-x}}\over 2}{OPENAGHMATHJAX}__, gdzie
{OPENAGHMATHJAX()}e{OPENAGHMATHJAX} jest sta?a Eulera (patrz
definicja F?). Dziedzin? funkcji kosinus hiperboliczny jest
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}, a zbiorem warto?ci
{OPENAGHMATHJAX()}[1,\infty){OPENAGHMATHJAX}{OPENAGHDEFINITION}
```

```
{OPENAGHANNOTATION( name="")} Wykres funkcji cosh mo?emy
utworzy? szkicuj?c wykresy {OPENAGHMATHJAX()}y={1\over
2}e^x{OPENAGHMATHJAX}, {OPENAGHMATHJAX()}y={1\over
2}e^{-x}{OPENAGHMATHJAX} i dodaj?c ich warto?ci w odpowiednich
punktach.
```

```
Rys. F51. Kosinus
hiperboliczny.{OPENAGHANNOTATION}{OPENAGHANNOTATION( name="")}
Wykres funkcji kosinus hiperboliczny bywa nazywany krzyw?
?a?cuchow?, gdy? jego koszta?t przyjmuje jednorodny gi?tki kabel
lub ?a?cuch, kt?rego ko?ce s? umocowane na s?upach o tej samej
wysoko?ci.
```

Rys. F52. Wykres krzywej łańcuchowej{OPENAGHANNOTATION}

{OPENAGHDEFINITION(name="(sinus hiperboliczny)")}__Funkcją sinus hiperboliczny__ nazywamy funkcję __{OPENAGHMATHJAX()}\sinh:\mathbb R\to\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}__ określoną wzorem __{OPENAGHMATHJAX()}\sinh(x)={{e^x-e^x}\over 2}{OPENAGHMATHJAX}__, gdzie {OPENAGHMATHJAX()}e{OPENAGHMATHJAX} jest stałą Eulera (patrz definicja F…).Dziedziną i zbiorem wartości funkcji sinus hiperboliczny jest {OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHDEFINITION}

{OPENAGHANNOTATION(name="")} Stąd, że {OPENAGHMATHJAX()}\sinh x={1\over 2}e^x+{{-1}\over 2}e^{-x}{OPENAGHMATHJAX} wynika, że wykres funkcji {OPENAGHMATHJAX()}y=\sinh x{OPENAGHMATHJAX} możemy otrzymać szkicując wykresy {OPENAGHMATHJAX()}y={1\over 2}e^x{OPENAGHMATHJAX} i {OPENAGHMATHJAX()}y={{-1}\over 2}e^{-x}{OPENAGHMATHJAX} i dodając ich wartości w odpowiednich punktach.Rys. F53. Sinus hiperboliczny.{OPENAGHANNOTATION}{OPENAGHDEFINITION(name="(tangens hiperboliczny)")}Funkcją tangens hiperboliczny nazywamy funkcję {OPENAGHMATHJAX()}\th:\mathbb R\to\mathbb R{OPENAGHMATHJAX} określoną wzorem

Rys. F52. Wykres krzywej ?a?cuchowej{OPENAGHANNOTATION} ?
{OPENAGHDEFINITION(name="(sinus hiperboliczny)")}__Funkcj? sinus hiperboliczny__ nazywamy funkcj? __{OPENAGHMATHJAX()}\sinh:\mathbb R\to\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}__ okre?lon? wzorem __{OPENAGHMATHJAX()}\sinh(x)={{ e^x-e^x}\over 2}{OPENAGHMATHJAX}__, gdzie {OPENAGHMATHJAX()}e{OPENAGHMATHJAX} jest sta?? Eulera (patrz definicja F?).Dziedzin? i zbiorem warto?ci funkcji sinus hiperboliczny jest {OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHDEFINITION}
?

{OPENAGHANNOTATION(name="")} St?d, ?e {OPENAGHMATHJAX()}\sinh x={1\over 2}e^x+{{-1}\over 2}e^{-x}{OPENAGHMATHJAX} wynika, ?e wykres funkcji {OPENAGHMATHJAX()}y=\sinh x{OPENAGHMATHJAX} mo?emy otrzyma? szkicuj?c wykresy {OPENAGHMATHJAX()}y={1\over 2}e^x{OPENAGHMATHJAX} i {OPENAGHMATHJAX()}y={{-1}\over 2}e^{-x}{OPENAGHMATHJAX} i dodaj?c ich warto?ci w odpowiednich punktach.Rys. F53. Sinus hiperboliczny.{OPENAGHANNOTATION}{OPENAGHDEFINITION(name="(tangens hiperboliczny)")}Funkcj? tangens hiperboliczny nazywamy funkcj? {OPENAGHMATHJAX()}\th:\mathbb R\to\mathbb R{OPENAGHMATHJAX} okre?lon? wzorem

```
{OPENAGHMATHJAX()}\tanh(x)={{\sinh x}\over {\cosh
x}}{OPENAGHMATHJAX}.Dziedziną funkcji tangens hiperboliczny jest
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}, zaś zbiorem
wartości przedział otwarty
{OPENAGHMATHJAX()}(-1,1){OPENAGHMATHJAX}.Rys. F54. Tangens
hiperboliczny.{OPENAGHDEFINITION}{OPENAGHDEFINITION(
name="(kotangens hiperboliczny)")}Funkcją kotangens
hiperboliczny nazywamy funkcję {OPENAGHMATHJAX()}\coth:\mathbb
R\setminus \{ 0\}\to\mathbb R{OPENAGHMATHJAX} określoną wzorem
{OPENAGHMATHJAX()}\coth(x)={{\cosh x}\over {\sinh
x}}{OPENAGHMATHJAX}.Dziedziną funkcji tangens hiperboliczny jest
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R\slash \{0\}{OPENAGHMATHJAX}, zaś
zbiorem wartości suma przedziałów
{OPENAGHMATHJAX()}(-\infty,-1)\cup
(1,\infty){OPENAGHMATHJAX}.Rys. F55. Kotangens
hiperboliczny.{OPENAGHDEFINITION}{OPENAGHEXAMPLE(
name="")}Pokażemy, że funkcje
{OPENAGHMATHJAX()}\cosh{OPENAGHMATHJAX} i
{OPENAGHMATHJAX()}\sinh{OPENAGHMATHJAX} są odpowiednio składową
parzystą i nieparzystą funkcji wykładniczej
{OPENAGHMATHJAX()}f(X)=e^x{OPENAGHMATHJAX}__Rozwiązanie__Zauważm
y najpierw, że {OPENAGHMATHJAX()}\cosh x+\sinh x={{e^x+e^x}\over
2}+{{e^x-e^x}\over 2}={{2e^x}\over
2}=e^x{OPENAGHMATHJAX}.Dziedziną funkcji
{OPENAGHMATHJAX()}f{OPENAGHMATHJAX} jest
```


```
{OPENAGHMATHJAX()}\tanh(x)={{\sinh x}\over {\cosh x
}}{OPENAGHMATHJAX}.Dziedzin? funkcji tangens hiperboliczny jest
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}, za? zbiorem
warto?ci przedzia? otwarty
{OPENAGHMATHJAX()}(-1,1){OPENAGHMATHJAX}.Rys. F54. Tangens
hiperboliczny.{OPENAGHDEFINITION}{OPENAGHDEFINITION(
name="(kotangens hiperboliczny)")}Funkcj? kotangens
hiperboliczny nazywamy funkcj? {OPENAGHMATHJAX()}\coth:\mathbb
R\setminus \{ 0\}\to\mathbb R{OPENAGHMATHJAX} okre?lon? wzorem
{OPENAGHMATHJAX()}\coth(x)={{\cosh x}\over {\sinh
x}}{OPENAGHMATHJAX}.Dziedzin? funkcji tangens hiperboliczny jest
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R\slash \{0\}{OPENAGHMATHJAX}, za?
zbiorem warto?ci suma przedzia??w
{OPENAGHMATHJAX()}(-\infty,-1)\cup
(1,\infty){OPENAGHMATHJAX}.Rys. F55. Kotangens
hiperboliczny.{OPENAGHDEFINITION}{OPENAGHEXAMPLE(
name="")}Poka?emy, ?e funkcje
{OPENAGHMATHJAX()}\cosh{OPENAGHMATHJAX} i
{OPENAGHMATHJAX()}\sinh{OPENAGHMATHJAX} s? odpowiednio sk?adow?
parzyst? i nieparzyst? funkcji wyk?adniczej
{OPENAGHMATHJAX()}f(X)=e^x{OPENAGHMATHJAX}__Rozwi?zanie__Zauwa?m
y najpierw, ?e {OPENAGHMATHJAX()}\cosh x+\sinh x={{
e^x+e^x}\over 2}+{{e^x-e^x}\over 2}={{2e^x}\over
2}=e^x{OPENAGHMATHJAX}.Dziedzin? funkcji
{OPENAGHMATHJAX()}f{OPENAGHMATHJAX} jest
```


```
{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}, czyli mo?emy
skorzysta? z twierdzenia o rozk?adzie na cz??? parzyst? i
nieparzyst?.Mamy tu{OPENAGHMATHJAX()}f_1(x)={{f(x)+f(-x)}\over
2}={{e^x+e^{-x }}\over 2}=\cosh
x{OPENAGHMATHJAX},{OPENAGHMATHJAX()}f_2(x)={{f(x)-f(-x)}\over
2}={{e^x-e^{-x}}\over 2}=\sinh
x{OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHEXAMPLE}
?
```

{OPENAGHMATHJAX()}\mathbb R{OPENAGHMATHJAX}, czyli możemy skorzystać z twierdzenia o rozkładzie na część parzystą i nieparzystą.Mamy tu{OPENAGHMATHJAX()}f_1(x)={{f(x)+f(-x)}\over 2}={{e^x+e^{-x}}\over 2}=\cosh x{OPENAGHMATHJAX},{OPENAGHMATHJAX()}f_2(x)={{f(x)-f(-x)}\over 2}={{e^x-e^{-x}}\over 2}=\sinh x{OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHEXAMPLE}

{OPENAGHEXAMPLE(name="")}Pokażemy, że dla funkcji hiperbolicznych zachodzą tożsamości podobne do znanych tożsamości trygonometrycznych{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x-\sinh^2x=1{OPENAGHMATHJAX}, {OPENAGHMATHJAX()}\cosh(2x)=\cosh^2x+\sinh^2x{OPENAGHMATHJAX}, {OPENAGHMATHJAX()}\sinh (2x)=2\sinh x\cosh x{OPENAGHMATHJAX}.__Rozwiązanie__Korzystamy z określenia funkcji hiperbolicznych__ad

a__{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x-\sinh^2x=({{e^x+e^{-x}}\over 2})^2-({{e^x-e^{-x}}\over 2})^2={{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}\over 4}-{{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}\over 4}={OPENAGHMATHJAX}{OPENAGHMATHJAX()}={{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}-e^{2x}+2e^0-e^{-2x}}\over 4}={4\over 4}=1{OPENAGHMATHJAX}__ad b__{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x+\sinh^2x{OPENAGHMATHJAX}.Przekształcamy prawą stronę

{OPENAGHEXAMPLE(name="")}Poka?emy, ?e dla funkcji hiperbolicznych zachodz? to?samo?ci podobne do znanych to?samo?ci trygonometrycznych{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x-\sinh^2x=1{OPENAGHMATHJAX}, {OPENAGHMATHJAX()}\cosh(2x)=\cosh^2x+\sinh^2x{OPENAGHMATHJAX}, {OPENAGHMATHJAX()}\sinh (2x)=2\sinh x\cosh x{OPENAGHMATHJAX}.__Rozwi?zanie__Korzystamy z okre?lenia funkcji hiperbolicznych__ad

a__{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x-\sinh^2x=({{e^x+e^{-x}}\over 2})^2-({{e^x-e^{-x}}\over 2})^2={{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}}\over 4}-{{e^{2x}-2e^xe^{-x}+e^{-2x}}\over 4}={OPENAGHMATHJAX}{OPENAGHMATHJAX()}={{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}-e^{2x}+2e^0-e^{-2x}}\over 4}={4\over 4}=1{OPENAGHMATHJAX}__ad b__{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x+\sinh^2x{OPENAGHMATHJAX}.Przekszta?camy praw? stron? r?wnania{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x+\sinh^2x=({{e^x+e^{-x}}\over 2})^2-({{e^x-e^{-x}}\over

równania{OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2x+\sinh^2x=({{e^x+e^{-x}}\over 2})^2-({{e^x-e^{-x}}\over 2})^2={{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}+e^{2x}-2e^0+e^{-2x}}\over 4}={{2e^{2x}+2e^{-2x}}\over 4}={OPENAGHMATHJAX}{OPENAGHMATHJAX()}={{e^{2x}+e^{-2x}}\over 2}=\cosh(2x){OPENAGHMATHJAX}.__ad c__{OPENAGHMATHJAX()}2\sinh x\cosh x{OPENAGHMATHJAX}.Przekształcamy prawą stronę równania korzystając z definicji funkcji{OPENAGHMATHJAX()}2\sinh x\cosh x=2{{e^x-e^{-x}}\over 2}{{e^x+e^{-x}}\over 2}=2{{(e^x)^2-(e^{-x})^2}\over 4}={{e^2x-e^{-2x}}\over 2}=\sinh (2x){OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHEXAMPLE}

2})^2={{e^{2x}+2e^0+e^{-2x}+e^{2x}-2e^0+e^{-2x}}\over 4}={{2e^{2x}+2e^{-2x}}\over 4}={OPENAGHMATHJAX}{OPENAGHMATHJAX()}={{e^{2x}+e^{-2x}}\over 2}=\cosh(2x){OPENAGHMATHJAX}.__ad c__{OPENAGHMATHJAX()}2\sinh x\cosh x{OPENAGHMATHJAX}.Przekszta?camy praw? stron? r?wnania korzystaj?c z definicji funkcji{OPENAGHMATHJAX()}2\sinh x\cosh x=2{{e^x-e^{-x}}\over 2}{{e^x+e^{-x}}\over 2}=2{{(e^x)^2-(e^{-x})^2}\over 4}={{e^2x-e^{-2x}}\over 2}=\sinh (2x){OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHEXAMPLE} ?

{OPENAGHANNOTATION(name="(o nazwie funkcji hiperbolicznych)")}Funkcje hiperboliczne mają wiele własności podobnych do własności funkcji trygonometrycznych, stąd słowa sinus, kosinus, tangens, kotangens w ich nazwach. Mają też pewne związki z hiperbolą. Mianowicie dla dowolnego rzeczywistego {OPENAGHMATHJAX()}t{OPENAGHMATHJAX} punkt {OPENAGHMATHJAX()}P{OPENAGHMATHJAX} o współrzędnych {OPENAGHMATHJAX()}P=(\cosh t,\sinh t){OPENAGHMATHJAX} leży na hiperboli {OPENAGHMATHJAX()}H{OPENAGHMATHJAX} o równaniu {OPENAGHMATHJAX()}x^2-y^2=1{OPENAGHMATHJAX}. Faktycznie współrzędne tego punktu spełniają równanie hiperboli, gdyż z pierwszej tożsamości występującej w poprzednim przykładzie mamy {OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2 x-\sinh^2 x=1{OPENAGHMATHJAX}. Liczba {OPENAGHMATHJAX()}t{OPENAGHMATHJAX} może być interpretowana jako miara łukowa kąta pomiędzy osią {OPENAGHMATHJAX()}0\vec

{OPENAGHANNOTATION(name="(o nazwie funkcji hiperbolicznych)")}Funkcje hiperboliczne maj? wiele w?asno?ci podobnych do w?asno?ci funkcji trygonometrycznych, st?d s?owa sinus, kosinus, tangens, kotangens w ich nazwach. Maj? te? pewne zwi?zki z hiperbol?. Mianowicie dla dowolnego rzeczywistego {OPENAGHMATHJAX()}t{OPENAGHMATHJAX} punkt {OPENAGHMATHJAX()}P{OPENAGHMATHJAX} o wsp??rz?dnych {OPENAGHMATHJAX()}P=(\cosh t,\sinh t){OPENAGHMATHJAX} le?y na hiperboli {OPENAGHMATHJAX()}H{OPENAGHMATHJAX} o r?wnaniu {OPENAGHMATHJAX()}x^2-y^2=1{OPENAGHMATHJAX}. Faktycznie wsp??rz?dne tego punktu spe?niaj? r?wnanie hiperboli, gdy? z pierwszej to?samo?ci wyst?puj?cej w poprzednim przyk?adzie mamy {OPENAGHMATHJAX()}\cosh^2 x-\sinh^2 x=1{OPENAGHMATHJAX}. Liczba {OPENAGHMATHJAX()}t{OPENAGHMATHJAX} mo?e by? interpretowana jako miara ?ukowa k?ta pomi?dzy osi? {OPENAGHMATHJAX()}0\vec x{OPENAGHMATHJAX} a promieniem wodz?cym punktu {OPENAGHMATHJAX()}P{OPENAGHMATHJAX}.{OPENAGHANNOTATION}

test 0_57 INPUT:

```
W module tym pokażemy jaka jest średnia moc absorbowana przez
oscylator poruszający się pod wpływem siły wymuszonej,
dyskutowany w module ((Drgania wymuszone i rezonans)). Moc
średnia jest dana wyrażeniem

{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}{\overline{P}=\overline{Fv}=\overl
ine{F}\overline{\frac{dx}{dt}}}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

gdzie kreska górna oznacza średnią czasową.

Korzystając z wyrażeń (12.34) i (12.43) znajdujemy (szczegółowe
obliczenia pomijamy)

{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}{\overline{{P}}=\frac{1}{2}{m\alph
a}_{{0}}^{{2}}\frac{2\beta \omega^2}{(\omega
_{{0}}^{{2}}-\omega^{{2}})^{{2}}+(2{\beta
\omega})^{{2}}}}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Zależność mocy absorbowanej od częstości drgań wymuszających,
dla przypadku słabego tłumienia, jest przedstawiona na rysunku
poniżej. Widać wyraźnie maksimum mocy związane ze zjawiskiem
rezonansu.
```

test 0_57 OUTPUT:

```
W module tym poka?emy jaka jest ?rednia moc absorbowana przez
oscylator poruszaj?cy si? pod wp?ywem si?y wymuszonej,
dyskutowany w module ((Drgania wymuszone i rezonans)). Moc
?rednia jest dana wyra?eniem
{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}{\overline{P}=\overline{Fv}=\overl
ine{F}\overline{\frac{dx}{dt}}}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
gdzie kreska g?rna oznacza ?redni? czasow?.
Korzystaj?c z wyra?e? (12.34) i (12.43) znajdujemy (szczeg??owe
obliczenia pomijamy)
{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}{\overline=\frac{1}{2}{m\alpha}_0^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for
details.\frac{2\beta \omega^2}{(\omega _0^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for
details.-\omega^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.)^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for
details.+(2{\beta \omega})^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.
}}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
Zale?no?? mocy absorbowanej od cz?sto?ci drga? wymuszaj?cych,
dla przypadku s?abego t?umienia, jest przedstawiona na rysunku
poni?ej. Wida? wyra?nie maksimum mocy zwi?zane ze zjawiskiem
rezonansu.
```

{img fileId="190"}

Rys. Średnia moc absorbowana dla oscylatora harmonicznego wymuszonego.

{img fileId="190"}
ata-parsoid='{"dsr":[915,986,0,0]}'>Rys. ?rednia moc absorbowana dla oscylatora harmonicznego wymuszonego.

test 0_95 INPUT:

```
W module tym wyjaśnimy pojęcie prędkości grupowej, wspomniane w
module ((Prędkość fal i równanie falowe)).

Rozważmy, dwie poprzeczne fale sinusoidalne o zbliżonych
częstotliwościach i długościach fal (rysunek poniżej) opisane
równaniami

{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
\begin{matrix}{y_{{1}}=A\sin\left[(\omega +{d\omega
})t-(k+{dk})x\right]}
\\    y_{{2}}=A\sin\left[(\omega -{d\omega
})t-(k-{dk})x\right] \end{matrix}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Sumą takich dwóch fal jest fala
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{y=y_{{1}}+y_{{2}}=2A\cos\left[({d\omega})t-({dk})x\right]\cos({
\omega t}-{kx})}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

{img type="fileId" fileId="381" width="450" noDrawIcon="n"}
Dwie fale sinusoidalne {OPENAGHMATHJAX()}y_{1}{OPENAGHMATHJAX} i
{OPENAGHMATHJAX()}y_{2}{OPENAGHMATHJAX} o zbliżonych
częstotliwościach i długościach fal; obwiednia ich sumy (linia
przerywana) rozchodzi się z prędkością grupową
```

test 0_395 OUTPUT:

```
W module tym wyja?nimy poj?cie pr?dko?ci grupowej, wspomniane w
module ((Pr?dko?? fal i r?wnanie falowe)).
Rozwa?my, dwie poprzeczne fale sinusoidalne o zbli?onych
cz?stotliwo?ciach i d?ugo?ciach fal (rysunek poni?ej) opisane
r?wnaniami
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation} \begin{matrix}{y_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for
details.=A\sin\left[(\omega +{d\omega })t-(k+{dk})x\right]} \\y_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.
=A\sin\left[(\omega -{d\omega })t-(k-{dk})x\right] \end{matrix}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
Sum? takich dw?ch fal jest fala
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation} {y=y_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for
details.+y_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for
details.=2A\cos\left[({d\omega})t-({dk})x\right]\cos({\omega
t}-{kx})} \end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
{img type="fileId" fileId="381" width="450" noDrawIcon="n"}
Dwie fale sinusoidalne {OPENAGHMATHJAX()}y_{1}{OPENAGHMATHJAX} i
{OPENAGHMATHJAX()}y_{2}{OPENAGHMATHJAX} o zbli?onych
cz?stotliwo?ciach i d?ugo?ciach fal; obwiednia ich sumy (linia
przerywana) rozchodzi si? z pr?dko?ci? grupow?
```

Na rysunku widzimy, że fala sumaryczna
{OPENAGHMATHJAX()}y_{1}{OPENAGHMATHJAX} + {OPENAGHMATHJAX()}y_{2
}{OPENAGHMATHJAX}jest modulowana, a z równania (IV.1.2) wynika,
że funkcja modulująca ma postać
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{A(x,t)=2A\cos\left[({d\omega })t-({dk})x\right]}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Prędkość __paczki fal__ (prędkość ruchu obwiedni) wyznaczamy
analizując jak przemieszcza się w czasie wybrany punkt obwiedni
(na przykład maksimum). Odpowiada to warunkowi
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{({d\omega })t-({dk})x=\text{const.}}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Różniczkując to równanie względem czasu
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{{d\omega }-{dk}\frac{{dx}}{{dt}}=0}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

otrzymujemy wyrażenie na prędkość grupową
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{v_{{{gr}}}=\frac{{dx}}{{dt}}=\frac{{d\omega}}{{dk}}}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Prędkość grupowa jest na ogół różna od prędkości fal składowych.

Na rysunku widzimy, ?e fala sumaryczna
{OPENAGHMATHJAX()}y_{1}{OPENAGHMATHJAX} + {OPENAGHMATHJAX()}y_{2
}{OPENAGHMATHJAX}jest modulowana, a z r?wnania (IV.1.2) wynika,
?e funkcja moduluj?ca ma posta?
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{A(x,t)=2A\cos\left[({d\omega })t-({dk})x\right]}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Pr?dko?? __paczki fal__ (pr?dko?? ruchu obwiedni) wyznaczamy
analizuj?c jak przemieszcza si? w czasie wybrany punkt obwiedni
(na przyk?ad maksimum). Odpowiada to warunkowi
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation} {({d\omega
})t-({dk})x=\text{const.}} \end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

R??niczkuj?c to r?wnanie wzgl?dem czasu
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{{d\omega }-{dk}\fracTemplate:Dx

{{{1}}}
=0} \end{equation}{OPENAGHMATHJAX} otrzymujemy wyra?enie na
pr?dko?? grupow? {OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}
{v_{{{gr}}}=\fracTemplate:Dx

{{{1}}}
=\fracTemplate:D\omegaTemplate:Dk}
\end{equation}{OPENAGHMATHJAX} Pr?dko?? grupowa jest na og??
r??na od pr?dko?ci fal sk?adowych.

test 1_53 INPUT:

```
Często spotykamy się z nakładaniem się dwu lub więcej drgań harmonicznych. Poniżej rozpatrzymy kilka przypadków drgań złożonych, powstających w wyniku nakładania się dwu drgań harmonicznych zachodzących zarówno wzdłuż prostych równoległych jak i prostych prostopadłych.

!!!!# Składanie drgań równoległych

Rozpatrzymy ruch punktu materialnego wynikający ze złożenia dwu drgań harmonicznych równoległych (zachodzących wzdłuż jednej prostej) opisanych równaniami

{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}\begin{matrix}{x_{{1}}=A_{{1}}\cos
{\omega t}}\\ x_{{2}}=A_{{2}}\cos({\omega t}+\varphi_{{0}})
\end{matrix}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Drgania te odbywają się z jednakową częstością
{OPENAGHMATHJAX()}\omega {OPENAGHMATHJAX}, ale są przesunięte w fazie (różnią się fazami) o
{{OPENAGHMATHJAX()}\varphi{OPENAGHMATHJAX}}{OPENAGHMATHJAX()}_{0
}{OPENAGHMATHJAX}. Podobnie jak dla ruchu postępowego czy obrotowego również dla drgań obowiązuje zasada niezależności ruchów.
```

test 1_53 OUTPUT:

```
Cz?sto spotykamy si? z nak?adaniem si? dwu lub wi?cej drga?
harmonicznych. Poni?ej rozpatrzymy kilka przypadk?w drga?
z?o?onych, powstaj?cych w wyniku nak?adania si? dwu drga?
harmonicznych zachodz?cych zar?wno wzd?u? prostych r?wnoleg?ych
jak i prostych prostopad?ych.
!!!!# Sk?adanie drga? r?wnoleg?ych
Rozpatrzymy ruch punktu materialnego wynikaj?cy ze z?o?enia dwu
drga? harmonicznych r?wnoleg?ych (zachodz?cych wzd?u? jednej
prostej) opisanych r?wnaniami
{OPENAGHMATHJAX( type="block")}\begin{equation}\begin{matrix}{x_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for
details.=A_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for
details.\cos{\omega t}}\\ x_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for
details.=A_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for
details.\cos({\omega t}+\varphi_0)
\end{matrix}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
Drgania te odbywaj? si? z jednakow? cz?sto?ci?
{OPENAGHMATHJAX()}\omega {OPENAGHMATHJAX}, ale s? przesuni?te w
fazie (r??ni? si? fazami) o
{{OPENAGHMATHJAX()}\varphi{OPENAGHMATHJAX}}{OPENAGHMATHJAX()}_{0
}{OPENAGHMATHJAX}. Podobnie jak dla ruchu post?powego czy
obrotowego r?wnie? dla drga? obowi?zuje zasada niezale?no?ci
ruch?w.
```

{OPENAGHRULE(name="Zasada superpozycji")}To, że drgania odbywają się niezależnie oznacza, że przemieszczenie punktu materialnego jest po prostu sumą przemieszczeń składowych. Ta zasada dodawania przemieszczeń nosi nazwę superpozycji drgań.{OPENAGHRULE}

Wychylenie wypadkowe jest więc równe

{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}{x=x_{{1}}+x_{{2}}=A\cos({\omega t}+\varphi)}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

gdzie

{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}\begin{matrix}{A=\sqrt{A_{{1}}^{{2}}+A_{{2}}^{{2}}+2A_{{1}}A_{{2}}\cos\varphi_{{0}}}} \\ {tg}\varphi=\frac{A_{{2}}\sin\varphi_{{0}}}{A_{{1}}+A_{{2}}\cos\varphi _{{0}}}\end{matrix}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Wyrażenia powyższe można znaleźć składając drgania metodą wektorową.
Więcej o wektorowym składaniu drgań możesz dowiedzieć się z modułu ((Składanie drgań metodą wektorową|Składanie drgań metodą wektorową))

{OPENAGHRULE(name="Zasada superpozycji")}To, ?e drgania odbywaj? si? niezale?nie oznacza, ?e przemieszczenie punktu materialnego jest po prostu sum? przemieszcze? sk?adowych. Ta zasada dodawania przemieszcze? nosi nazw? superpozycji drga?.{OPENAGHRULE}?
Wychylenie wypadkowe jest wi?c r?wne
{OPENAGHMATHJAX(type="block")}\begin{equation}{x=x_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for details.+x_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.=A\cos({\omega t}+\varphi
)}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
gdzie
{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}\begin{matrix}{A=\sqrt{A_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for details.^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.+A_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.^
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.+2A_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for details.A_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.\cos\varphi_0}} \\ {tg}\varphi=\frac{A_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.\sin\varphi_0}{A_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for details.+A_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.\cos\varphi
_0}\end{matrix}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}
Wyra?enia powy?sze mo?na znale?? sk?adaj?c drgania metod? wektorow?. Wi?cej o wektorowym sk?adaniu drga? mo?esz dowiedzie? si? z modu?u ((Sk?adanie drga? metod? wektorow?|Sk?adanie drga? metod? wektorow?))

Z powyższych równań wynika, że złożenie drgań harmonicznych równoległych o jednakowej częstości daje w wyniku oscylacje harmoniczne o takiej samej częstości. Sytuacja ta jest pokazana na rysunku poniżej. Ze wzoru (12.49) wynika ponadto, że amplituda wypadkowa osiąga maksimum dla drgań składowych o zgodnych fazach (różnica faz {OPENAGHMATHJAX()}\varphi_{0} = 0{OPENAGHMATHJAX}), natomiast minimum gdy różnica faz {OPENAGHMATHJAX()}\varphi_{0}\pi {OPENAGHMATHJAX} (fazy przeciwne).

{img fileId="183"}

Rys. 12.9. Złożenie dwu drgań harmonicznych równoległych o jednakowych częstościach

!!!!#   Składanie drgań prostopadłych

Rozpatrzmy teraz złożenie dwu drgań harmonicznych zachodzących na płaszczyźnie wzdłuż kierunków prostopadłych względem siebie

{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}\begin{matrix}{x=A_{{1}}\cos\omega _{{1}}t}\\ y=A_{{2}}\cos(\omega _{{2}}t+\varphi)\end{matrix}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Z powy?szych r?wna? wynika, ?e z?o?enie drga? harmonicznych r?wnoleg?ych o jednakowej cz?sto?ci daje w wyniku oscylacje harmoniczne o takiej samej cz?sto?ci. Sytuacja ta jest pokazana na rysunku poni?ej. Ze wzoru (12.49) wynika ponadto, ?e amplituda wypadkowa osi?ga maksimum dla drga? sk?adowych o zgodnych fazach (r??nica faz {OPENAGHMATHJAX()}\varphi_{0} = 0{OPENAGHMATHJAX}), natomiast minimum gdy r??nica faz {OPENAGHMATHJAX()}\varphi_{0}\pi {OPENAGHMATHJAX} (fazy przeciwne).
{img fileId="183"}
Rys. 12.9. Z?o?enie dwu drga? harmonicznych r?wnoleg?ych o jednakowych cz?sto?ciach !!!!# Sk?adanie drga? prostopad?ych
Rozpatrzmy teraz z?o?enie dwu drga? harmonicznych zachodz?cych na p?aszczy?nie wzd?u? kierunk?w prostopad?ych wzgl?dem siebie
{OPENAGHMATHJAX(
type="block")}\begin{equation}\begin{matrix}{x=A_
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for details.\cos\omega _
Unexpected use of template {{1}} - see Template:1 for details.t}\\ y=A_
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.\cos(\omega _
Unexpected use of template {{2}} - see Template:2 for details.t+\varphi)\end{matrix}\end{equation}{OPENAGHMATHJAX}

Punkt materialny wykonujący drgania złożone porusza się po krzywej leżącej na płaszczyźnie {OPENAGHMATHJAX()}xy{OPENAGHMATHJAX}, a jego położenie jest dane w dowolnej chwili równaniem (12.50). Przykładowe krzywe odpowiadające drganiom o jednakowych częstościach {OPENAGHMATHJAX()}\omega_{1} = \omega_{2}{OPENAGHMATHJAX}, dla różnych wartości amplitud {OPENAGHMATHJAX()}A_{1}{OPENAGHMATHJAX} i {OPENAGHMATHJAX()}A_{2}{OPENAGHMATHJAX} oraz różnych wartości przesunięcia fazowego {OPENAGHMATHJAX()}\varphi {OPENAGHMATHJAX} są pokazane na rysunku 12.10a poniżej.}

Złożenie drgań prostopadłych o różnych częstościach daje w wyniku bardziej skomplikowany ruch. Na rysunku 12.10b pokazane są przykładowe krzywe (tak zwane __krzywe Lissajous__) będące wynikiem złożenia takich drgań. Sytuacja pokazana na tym rysunku odpowiada składaniu drgań o jednakowych amplitudach.

{img fileId="184"}{img fileId="185"}

Rys. 12.10a. Złożenie drgań prostopadłych o jednakowych częstościach Rys. 12.10b. Złożenie drgań prostopadłych o różnych częstościach i jednakowych amplitudach

Punkt materialny wykonuj?cy drgania z?o?one porusza si? po krzywej le??cej na p?aszczy?nie {OPENAGHMATHJAX()}xy{OPENAGHMATHJAX}, a jego po?o?enie jest dane w dowolnej chwili r?wnaniem (12.50). Przyk?adowe krzywe odpowiadaj?ce drganiom o jednakowych cz?sto?ciach {OPENAGHMATHJAX()}\omega_{1} = \omega_{2}{OPENAGHMATHJAX}, dla r??nych warto?ci amplitud {OPENAGHMATHJAX()}A_{1}{OPENAGHMATHJAX} i {OPENAGHMATHJAX()}A_{2}{OPENAGHMATHJAX} oraz r??nych warto?ci przesuni?cia fazowego {OPENAGHMATHJAX()}\varphi {OPENAGHMATHJAX} s? pokazane na rysunku 12.10a poni?ej.}
Z?o?enie drga? prostopad?ych o r??nych cz?sto?ciach daje w wyniku bardziej skomplikowany ruch. Na rysunku 12.10b pokazane s? przyk?adowe krzywe (tak zwane __krzywe Lissajous__) b?d?ce wynikiem z?o?enia takich drga?. Sytuacja pokazana na tym rysunku odpowiada sk?adaniu drga? o jednakowych amplitudach.
{img fileId="184"}{img fileId="185"}
Rys. 12.10a. Z?o?enie drga? prostopad?ych o jednakowych cz?sto?ciach Rys. 12.10b. Z?o?enie drga? prostopad?ych o r??nych cz?sto?ciach i jednakowych amplitudach

Obraz drgań złożonych można otrzymać w prosty sposób za pomocą oscyloskopu. Wiązki elektronów w lampie oscyloskopowej są odchylane przez dwa zmienne, prostopadłe pola elektryczne. Na ekranie oscyloskopu obserwujemy więc obraz odpowiadający złożeniu drgań wiązki elektronów wywołany przez te zmienne pola elektryczne, których amplitudy, częstości fazy możemy regulować.

Inny sposób bezpośredniej obserwacji składania drgań można zobaczyć na poniższym filmie

{youtube movie="4HTfvB4d-Ok" alt="Film obrazujący powstawanie figur Lassajou" imageId="168"}

Obraz drga? z?o?onych mo?na otrzyma? w prosty spos?b za pomoc? oscyloskopu. Wi?zki elektron?w w lampie oscyloskopowej s? odchylane przez dwa zmienne, prostopad?e pola elektryczne. Na ekranie oscyloskopu obserwujemy wi?c obraz odpowiadaj?cy z?o?eniu drga? wi?zki elektron?w wywo?any przez te zmienne pola elektryczne, kt?rych amplitudy, cz?sto?ci fazy mo?emy regulowa?.
Inny spos?b bezpo?redniej obserwacji sk?adania drga? mo?na zobaczy? na poni?szym filmie
{youtube movie="4HTfvB4d-Ok" alt="Film obrazuj?cy powstawanie figur Lassajou" imageId="168"}

test 1_117 INPUT:

```
{openaghexercise body="
Korzystając z definicji Heinego granicy funkcji, wyznaczyć granicę {OPENAGHMATHJAX()}\lim_{x \to 1}
\frac{x^3-1}{x-1}{OPENAGHMATHJAX}. Sprawdzić otrzymany wynik przy pomocy definicji Cauchy'ego.
" solution="
Na początku, zauważmy, że \( \frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1 \).
Aby wyznaczyć granicę na podstawie definicji Heinego, weźmy dowolny ciąg \(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \) taki, że \( \lim_{n \to
\infty} x_n =1 \). Wówczas, korzystając z własności granic ciągów dostajemy \( \lim_{n \to \infty} (x_n^2+x_n+1)=3 \), a zatem \(
\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}=3 \) .
Sprawdzenie powyższego wyniku na podstawie definicji Cauchy'ego granicy jest równoznaczne sprawdzeniu, czy zachodzi warunek:
\( \forall_{\varepsilon >0} \exists_{\delta>0} (|x-1|<\delta \Rightarrow |\frac{x^3-1}{x-1}-3|<\varepsilon ) \).
Ustalmy więc dowolne \( \varepsilon>0 \).
Zauważmy, że ponieważ \(\frac{x^3-1}{x-1}-3=x^2+x+1-3=(x-1)(x+2) \), warunek po prawej stronie implikacji można zapiać jako \[
|x-1| \cdot |x+2| < \varepsilon. \] Zastanówmy się więc, jak dobrać \( \delta>0 \), aby z nierówności \( |x-1|<\delta \) wynikała
nierówność \( |x-1| \cdot |x+2| < \varepsilon \).
Jak łatwo obliczyć, warunek \( |x-1|<\delta \) implikuje \( |x+2|<3+\delta \), a w konsekwencji \[ |x-1| \cdot |x+2| < \delta (3+
\delta). \] Biorąc więc dowolne \( \delta>0 \) spełniające nierówność \( \delta (3+ \delta) <\varepsilon \), warunek z definicji
Cauchy'ego będzie prawdziwy. Oczywiście, ponieważ \( \varepsilon >0 \), takie \( \delta \) zawsze istnieje.

"}

{openaghexercise body="Pokazać, że nie istnieje granica \(\lim_{x \to 2} \cos(\frac{\pi}{x^2-4x+4}). \)" solution="Aby wykazać nie
istnienie powyższej granicy, wskażemy dwa ciągi \( \{x_n\} \) i \(\{y_n\} \) takie, że \(\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to
\infty} y_n = 2, \) ale \( \lim_{n \to \infty} \cos(\frac{\pi}{x_n^2-4x_n+4}) e \lim_{n \to \infty} \cos(\frac{\pi}{y_n^2-4y_n+4})
\) Niech ciąg \( \{x_n\} \) będzie zadany wzorem \(x_n=\frac{1}{\sqrt{2n}}+2.\) Wówczas \(\lim_{n \to \infty} x_n =2 \)
```

oraz zachodzi następująca równość: \[[\frac{1}{x_n^2-4x_n+4}=2n.\] Oznacza to, że \[[\cos(\frac{\pi}{x_n^2-4x_n+4}) =cos(2 \pi n)=1\] dla dowolnego \(n \in \mathbb{N} \), czyli \[[\lim_{n \to \infty} \cos(\frac{\pi}{x_n^2-4x_n+4})=1.\]Z drugiej strony, biorąc ciąg \(y_n=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}+2,\) otrzymujemy równość \[[\frac{1}{y_n^2-4y_n+4}=2n+1,\] a w konsekwencji \[[\cos(\frac{\pi}{y_n^2-4y_n+4})=\cos((2n+1) \pi)=-1 \] \[[\lim_{n \to \infty} \cos(\frac{\pi}{y_n^2-4y_n+4})=-1.\]"}

{openaghexercise body="Zbadać granice: lewo- i prawostronną w punkcie \(x_0=0\) funkcji \(f(x)=e^{\frac{1}{x}} \). " solution="Obliczymy najpierw granicę lewostronną. Zauważmy, że zbiegając z \(x \to 0 \) po wartościach ujemnych, w granicy \(\lim_{x \to 0^{-}} \frac{1}{x} \) dostajemy \(- \infty \). Korzystając z własności granic funkcji, \[[\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}} = 0 \]Z drugiej strony, granica prawostronna w \(0 \) wyrażenia \(\frac{1}{x} \) wynosi \(+ \infty \), ponieważ dążymy do wartości \(0 \) po liczbach dodatnich. Oznacza to, że \[[\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}}=+ \infty \]"}

{openaghexercise body="Obliczyć granicę \(\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x+5} \). " solution="Aby obliczyć powyższą granicę, dokonajmy podstawienia \(y:=\frac{1}{x} \). Wówczas \(y \to 0 \) gdy \(x \to \infty\) i granica przyjmuje postać: \[[\lim_{y \to 0} \frac{3 (\frac{1}{y})^2 \sin(y)}{\frac{1}{y}+5}= \lim_{y \to 0} \frac{3 \sin y}{y+5y^2}= \lim_{y \to 0} \frac{3 y}{y+5y^2} \cdot \frac{\sin y}{y}=\lim_{y \to 0} \frac{3}{1+5y} \cdot \frac{\sin y}{y} \] Na mocy twierdzenia (?), wiemy, że \(\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y}=1 \), a zatem \[[\lim_{y \to 0} \frac{3}{1+5y} \cdot \frac{\sin y}{y}=3 \cdot 1 = 3\]"}

test 1_117 LOGI:

```
PS C:\git\parsoid\bin> Na początku, zauważmy, że \( \frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1 \).
\frac : The term '\frac' is not recognized as the name of a cmdlet, function, script file, or operable program. Check the spelling of the name, or if a path was
included, verify that the path is correct and try again.
At line:1 char:30
+ Na początku, zauważmy, że \( \frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1 \).
+                              ~~~~~
    + CategoryInfo          : ObjectNotFound: (\frac:String) [], CommandNotFoundException
    + FullyQualifiedErrorId : CommandNotFoundException

PS C:\git\parsoid\bin> Aby wyznaczyć granicę na podstawie definicji Heinego, weźmy dowolny ciąg \(\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \) taki, że \( \lim_{n \to \infty} x_n =1 \
). Wówczas, korzystając z własności granic ciągów dostajemy \( \lim_{n \to \infty} (x_n^2+x_n+1)=3 \), a zatem \( \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1}=3 \) .
\ : The term '\' is not recognized as the name of a cmdlet, function, script file, or operable program. Check the spelling of the name, or if a path was included,
verify that the path is correct and try again.
At line:1 char:76
+ ... ranicę na podstawie definicji Heinego, weźmy dowolny ciąg \(\{x_n\}_{ ...
+                                                                 ~
    + CategoryInfo          : ObjectNotFound: (\:String) [], CommandNotFoundException
    + FullyQualifiedErrorId : CommandNotFoundException

PS C:\git\parsoid\bin> Sprawdzenie powyższego wyniku na podstawie definicji Cauchy'ego granicy jest równoznaczne sprawdzeniu, czy zachodzi warunek:
>> \( \forall_{\varepsilon >0} \exists_{\delta>0} (|x-1|<\delta \Rightarrow |\frac{x^3-1}{x-1}-3|<\varepsilon ) \).
>> Ustalmy więc dowolne \( \varepsilon>0 \).
>> Zauważmy, że ponieważ \(\frac{x^3-1}{x-1}-3=x^2+x+1-3=(x-1)(x+2) \), warunek po prawej stronie implikacji można zapiać jako \[ |x-1| \cdot |x+2| < \varepsilon. \] Za
stanówmy się więc, jak dobrać \( \delta>0 \), aby z nierówności \( |x-1|<\delta \) wynikała nierówność \( |x-1| \cdot |x+2| < \varepsilon \).
>> Jak łatwo obliczyć, warunek \( |x-1|<\delta \) implikuje \( |x+2|<3+\delta \), a w konsekwencji \[ |x-1| \cdot |x+2| < \delta (3+ \delta). \] Biorąc więc dowolne \(
\delta>0 \) spełniające nierówność \( \delta (3+ \delta) <\varepsilon \), warunek z definicji Cauchy'ego będzie prawdziwy. Oczywiście, ponieważ \( \varepsilon >0 \), ta
kie \( \delta \) zawsze istnieje.
\varepsilon : The term '\varepsilon' is not recognized as the name of a cmdlet, function, script file, or operable program. Check the spelling of the name, or if a
path was included, verify that the path is correct and try again.
At line:5 char:313
+ ... chy'ego będzie prawdziwy. Oczywiście, ponieważ \( \varepsilon >0 \),  ...
+                                                       ~~~~~~~~~~~
    + CategoryInfo          : ObjectNotFound: (\varepsilon:String) [], CommandNotFoundException
    + FullyQualifiedErrorId : CommandNotFoundException
```