Guía de Ejercicio I:
Oda a la Interpolación

nICO no IKO 777

El primer principio es que no debes engañarte a ti mismo y eres la persona más fácil de engañar. Una vez que no te engañas a ti mismo, es fácil que no engañes a los otros científicos. R. Feynman.

Indicaciones para el desarrollo y la entrega

- **Formato de entrega.** La entrega debe realizarse exclusivamente en formato PDF, generado a partir de un documento escrito en LaTeX. No se aceptarán entregas en formato Word u otros editores.
- **Presentación.** Sea ordenado y claro en la redacción. Incluya demostraciones completas en los ejercicios teóricos y explique adecuadamente los resultados obtenidos en los ejercicios prácticos. Las gráficas deben estar correctamente rotuladas y comentadas.
- **Plazo de entrega.** El plazo es de **dos semanas contadas a partir del 20/02/2026**. La fecha límite de entrega es el **06/03/2026**.
- **Uso de consultas.** Pueden realizar consultas durante el desarrollo de la guía. Con todo gusto los orientaré.
- **Clase de apoyo.** El martes 24 utilizaremos la clase para resolver ejercicios y discutir dificultades comunes. Si es necesario, podremos organizar una clase adicional optativa para profundizar en los temas más complejos.
- **Uso de Inteligencia Artificial.** Se permite el uso de herramientas de IA como apoyo. Sin embargo, deben ser plenamente conscientes de lo que están haciendo. La IA puede cometer errores o generar argumentos incorrectos. Usted es responsable del contenido que entrega.

Parte I – Ejercicios Teóricos

Ejercicio 1. Sea $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^{n}$ un conjunto de nodos con x_i distintos.

a) Demuestre que existe un único polinomio $p \in \mathbb{P}_n$ tal que

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Sugerencia: Suponga que existen dos polinomios p y q que interpolan los mismos datos y estudie el polinomio $r = p - q$.

b) Concluya utilizando el hecho de que un polinomio no nulo de grado $\leq n$ no puede tener más de n raíces.

Ejercicio 2. Sea $f \in C^{n+1}([a, b])$ y sea p_n su polinomio interpolante en nodos $x_0, \ldots, x_n$.

a) Demuestre que el error puede escribirse como

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

para algún $\xi_x \in (a, b)$.

b) Indique en qué parte del argumento se utiliza el teorema de Rolle.

c) Discuta qué ocurre si los nodos están muy próximos entre sí.

Ejercicio 3. Sean $x_0, \ldots, x_n$ nodos distintos y sean los polinomios fundamentales de Lagrange definidos por

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

a) Demuestre que

$$\ell_i(x_j) = \delta_{ij},$$

donde δ_{ij} es el delta de Kronecker.

b) Pruebe que el conjunto $\{\ell_0, \ldots, \ell_n\}$ es linealmente independiente.

c) Concluya que $\{\ell_0, \ldots, \ell_n\}$ forma una base del espacio $\mathbb{P}_n$ de los polinomios de grado menor o igual que n.

d) Compare esta base con la base canónica

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}.$$

¿Qué ventaja tiene la base de Lagrange en el contexto de interpolación?

Parte II – Ejercicios Prácticos

Ejercicio 4. Implementar la interpolación de Newton a partir de datos experimentales.

a) Cargar un archivo CSV con dos columnas numéricas.

b) Agrupar los datos si existen nodos repetidos.

c) Construir la tabla de diferencias divididas.

d) Evaluar el polinomio interpolante.

e) Dibujar el polinomio junto con los datos originales.

f) Construir un spline cúbico con los mismos datos.

g) ¿Cuál método recomendaría en la práctica? Justifique.

h) Cosntruya una situacion donde a los datos originales, le agregas, nuevos datos e interpolas.

Ejercicio 5. Estudiar la sensibilidad del polinomio interpolante.

a) Perturbar un solo dato y_k en una cantidad pequeña δ.

b) Construir el nuevo polinomio interpolante.

c) Dibujar la diferencia
$$|p(x) - \tilde{p}(x)|.$$

d) Comparar la magnitud de la perturbación con el error máximo obtenido.

Ejercicio 6. Aproximantes de Padé.
Sea f una función analítica en un entorno de $x = 0$, con desarrollo de Taylor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

a) **Definición.** Defina el aproximante de Padé $[m/n]_f(x)$ como una función racional

$$R_{m,n}(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

donde P_m y Q_n son polinomios de grado $\leq m$ y $\leq n$ respectivamente, con $Q_n(0) = 1$, tal que

$$f(x) - R_{m,n}(x) = \mathcal{O}(x^{m+n+1}) \quad \text{cuando } x \to 0.$$

- Entienda la definición con un ejemplo
- Explique en qué sentido este aproximante "coincide" con la serie de Taylor.

b) **Construcción algorítmica.** A partir de los coeficientes $a_0, \ldots, a_{m+n}$, deduzca el sistema lineal que permite calcular los coeficientes de $Q_n(x)$ y posteriormente los de $P_m(x)$.

Implemente un algoritmo en Python o Matlab que:

- Entienda el problema con un ejemplo (Todo lo que sigue a continuación, lo puede hacer con el ejemplo)
- reciba como entrada los coeficientes de Taylor,
- construya el aproximante $[m/n]$,
- evalúe la función racional obtenida.

c) **Comparación con interpolación polinómica.**

Considere la función
$$f(x) = e^x \quad \text{o} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

a) Construya el polinomio de Taylor de orden $m + n$. (Puede hacerlo con un ejemplo)
b) Construya el aproximante de Padé $[m/n]$.
c) Dibuje ambos aproximantes en un intervalo adecuado.
d) Compare visualmente el comportamiento cerca del origen y lejos de él.

d) **Discusión del error.**

a) Analice el error absoluto

$$|f(x) - R_{m,n}(x)| \quad \text{y} \quad |f(x) - T_{m+n}(x)|.$$

b) ¿En qué regiones el aproximante de Padé presenta menor error?

c) Discuta por qué los aproximantes racionales pueden capturar mejor comportamientos asintóticos o singularidades que los polinomios.

d) Relacione este comportamiento con el fenómeno de Runge y la estabilidad numérica.