

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО  
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №8  
«Модальные регуляторы и наблюдатели»  
по дисциплине «Теория автоматического управления»  
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич  
Группа: R33353  
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Модальный регулятор</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Модальный наблюдатель</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Регулятор + наблюдатель</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Выводы</b>	<b>16</b>

## Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать **Python Control Systems Library**. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в **jupyter notebook** на GitHub.

## 1 Модальный регулятор

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

Матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Матрица  $A$  представлена в Жордановой форме, значит ее спектр:

$$\sigma(A) = \{-1, 2, 3 - 4i, 3 + 4i\}$$

Заметим, что все собственные числа, кроме  $-1$  являются управляемыми. Следовательно система – частично управляема и стабилизируема.

Для задания желаемого спектра матрице  $A + B \cdot K$  необходимо выбрать  $K$ , таким образом, чтобы она была подобна задаваемой матрице  $G$  (имеющей желаемый спектр).

$$A + BK = PGP^{-1} \implies AP - PG = -BKP \quad (2)$$

$$Y = -KP \implies AP - PG = BY$$

Задав матрицу  $Y$ , можем решить уравнение Сильвестра и найти  $P$ . Затем, выразим  $K$ :

$$K = -YP^{-1} \quad (3)$$

Согласно варианту, желаемые спектры имеют вид:

$$\sigma_1 = \{-1, -1, -1, -1\}, \sigma_2 = \{-1, -10, -100, -100\},$$

$$\sigma_3 = \{-1, -10, 4i, -4i\}, \sigma_4 = \{-1, -10, -3 + 4i, -3 - 4i\}$$

Соответствующие им матрицы:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Матрицу  $Y$  выберем следующим образом (первое собственное число не управляемо):

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Для каждого желаемого спектра найдем матрицу  $K$  и выполним моделирование системы с входным воздействием  $u = Kx$  при начальных условиях  $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ .

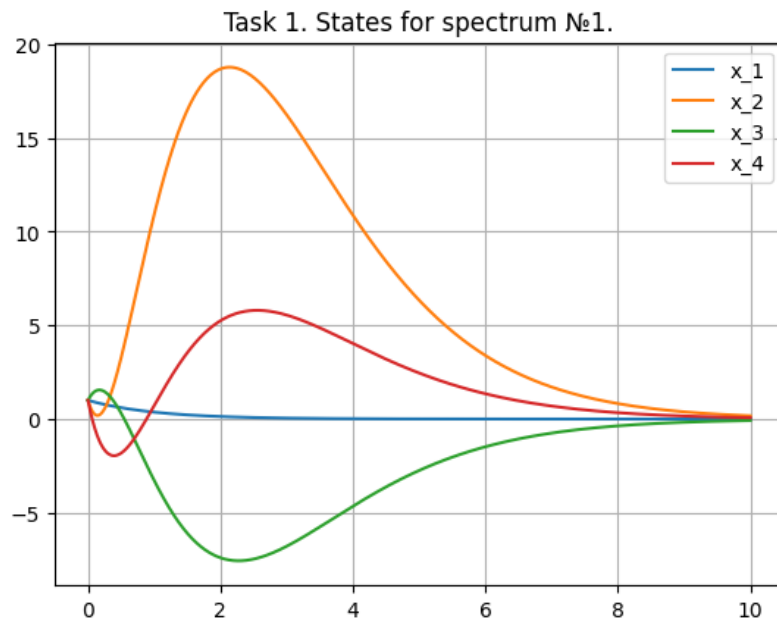


Рис. 1: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №1

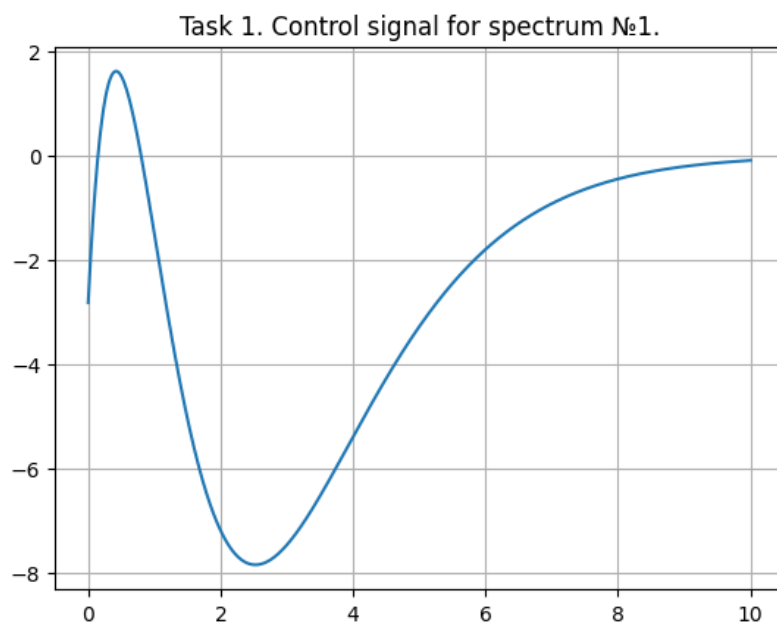


Рис. 2: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №1

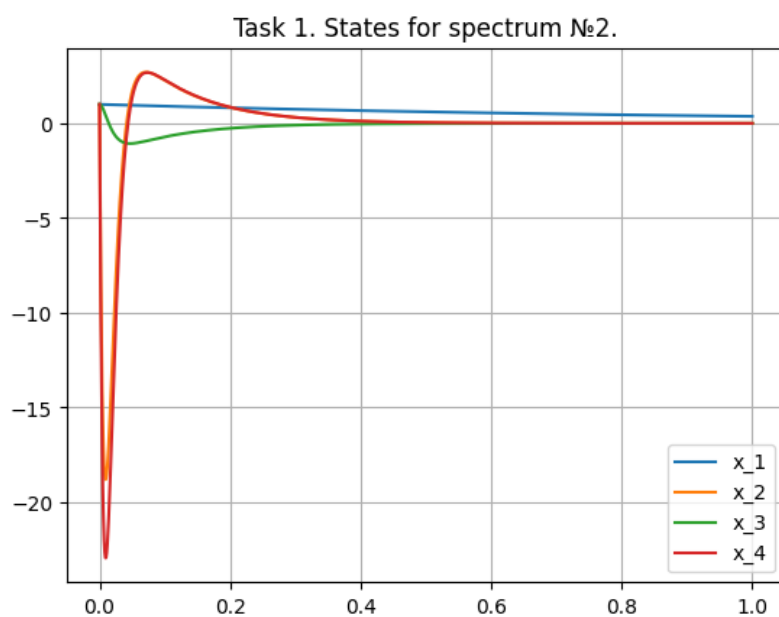


Рис. 3: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №2

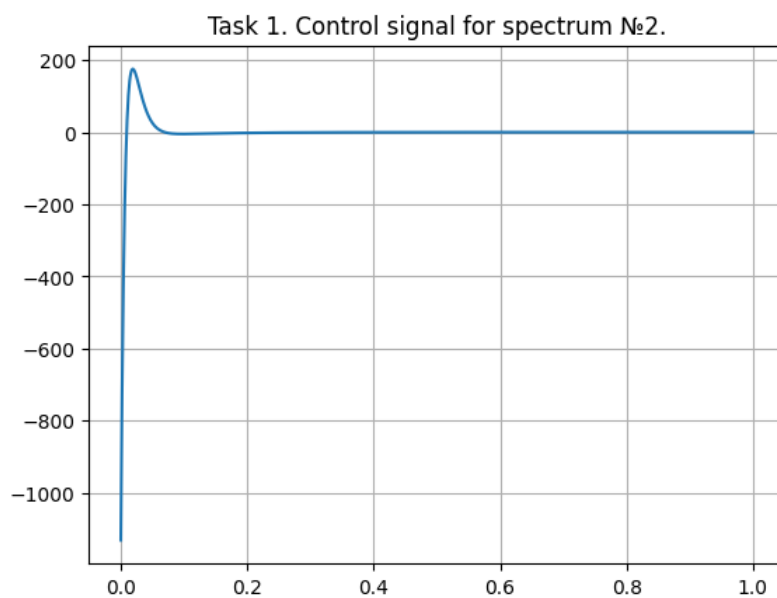


Рис. 4: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №2

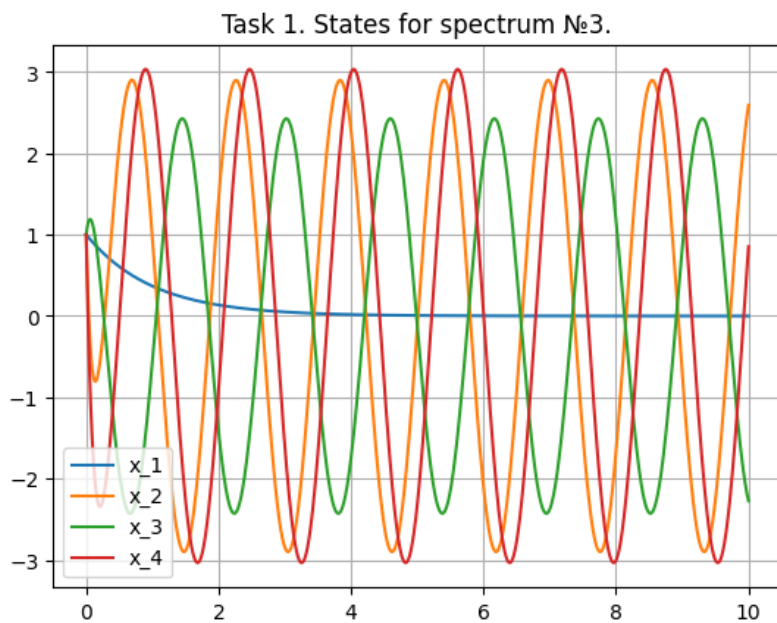


Рис. 5: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №3

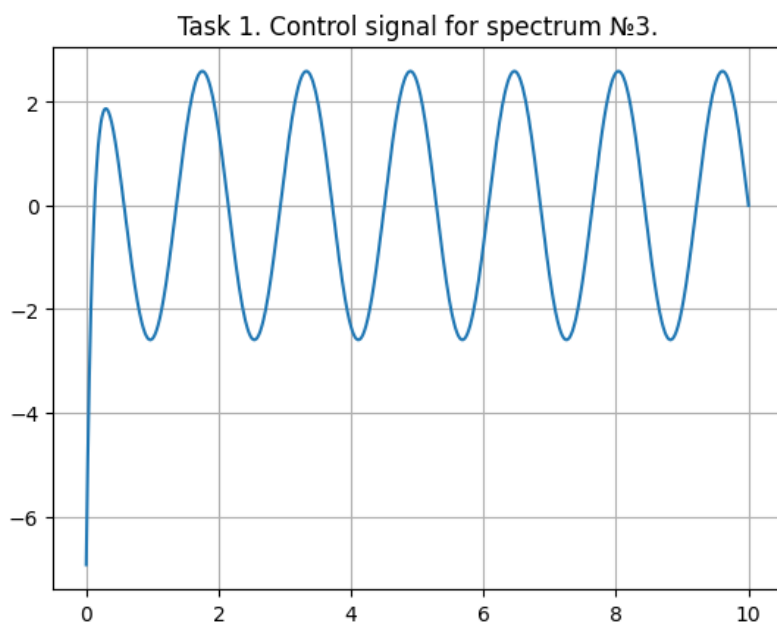


Рис. 6: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №3

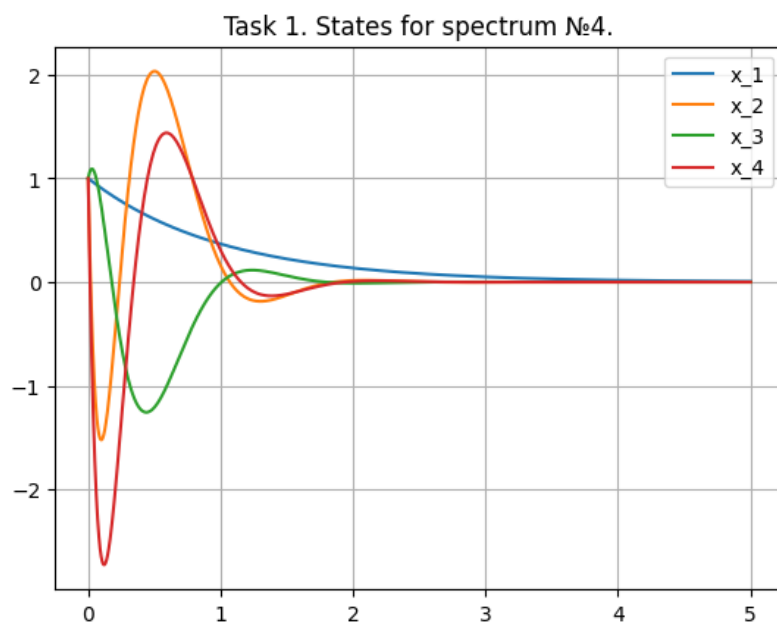


Рис. 7: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №4

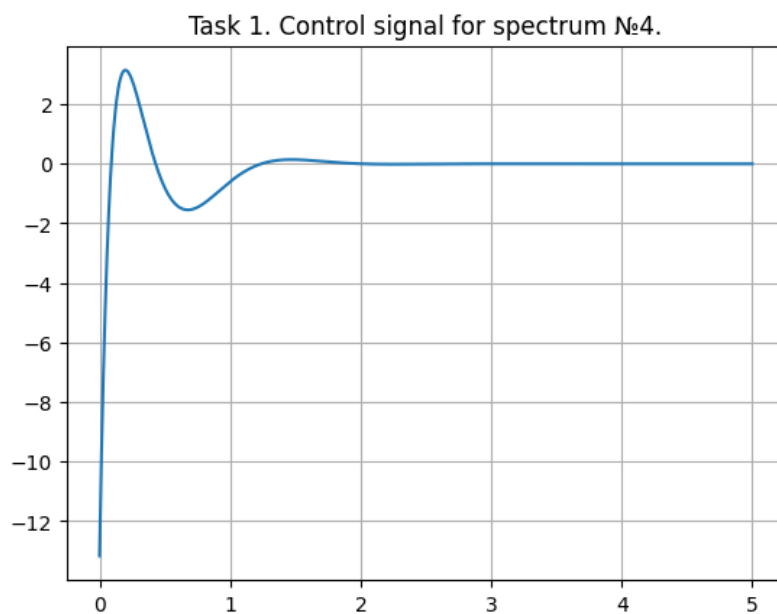


Рис. 8: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №4

Полученные матрицы  $K$ :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0.32 & -0.94 & -1.57 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1468.81 & -849.87 & 1187.67 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2.82 & -3.46 & -0.65 \end{bmatrix}, K_4 = \begin{bmatrix} 0 & -5.78 & -8.21 & 0.82 \end{bmatrix}$$



## 2 Модальный наблюдатель

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax, y = Cx \quad (4)$$

Матрицы  $A$  и  $C$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$$

Матрица  $A$  представлена в Жордановой форме, значит ее спектр:

$$\sigma(A) = \{-3i, 3i, -i, i\}$$

Заметим, что все собственные числа являются наблюдаемыми. Следовательно система – наблюдаема.

Рассмотрим систему:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y), \hat{y} = C\hat{x} \quad (5)$$

Введем величину ошибки наблюдателя  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ :

$$\dot{e} = Ae + LCe \quad (6)$$

Заметим, что задав спектр матрицы,  $A + LC$ , представив подобную ей, можем определить тип переходного процесса ошибки наблюдателя.

$$A + LC = Q^{-1}GQ \implies GQ - QA = YC, Y = -QL \quad (7)$$

Выбрав  $Y$  и решив уравнение Сильвестра из выражения (7), можем найти матрицу  $L$ .

Желаемые спектры матрицы  $A + LC$  совпадают с указанными в первом задании (матрицы  $G$ , соответственно, тоже). Матрицу  $Y$  выберем следующим образом:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для каждого желаемого спектра найдем матрицу  $L$  и выполним моделирование при начальных условиях  $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [2, 0, 0, -1]^T$ .

Полученные матрицы  $L$ :

$$L_1 = [-2 \quad 0.58 \quad -0.16 \quad 0]^T, L_2 = [6881.31 \quad -204.35 \quad 3657.96 \quad -4657.88]^T,$$

$$L_3 = [4.81 \quad 0.14 \quad 5.63 \quad -6.88]^T, L_4 = [11.37 \quad -12.04 \quad 6.25 \quad -13.25]^T$$

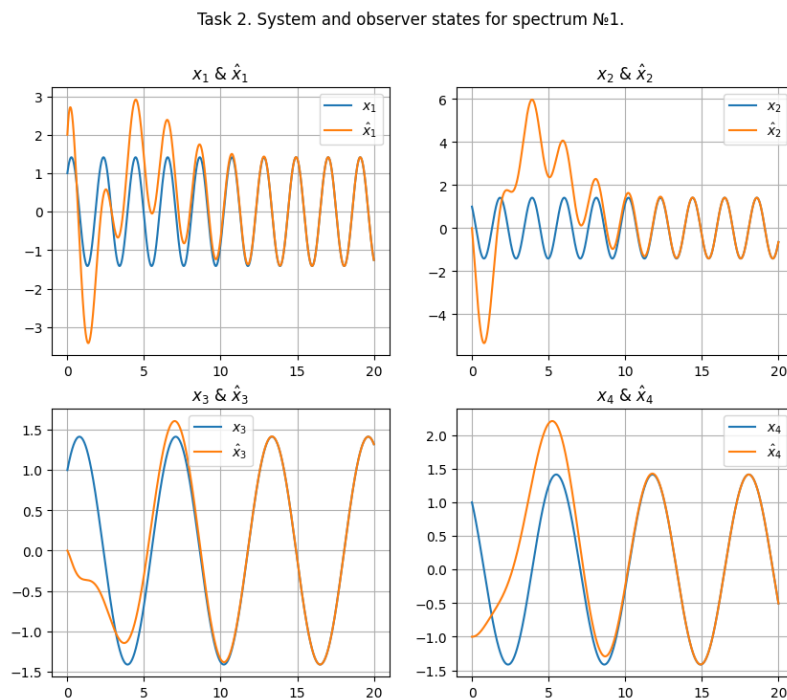


Рис. 9: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №1

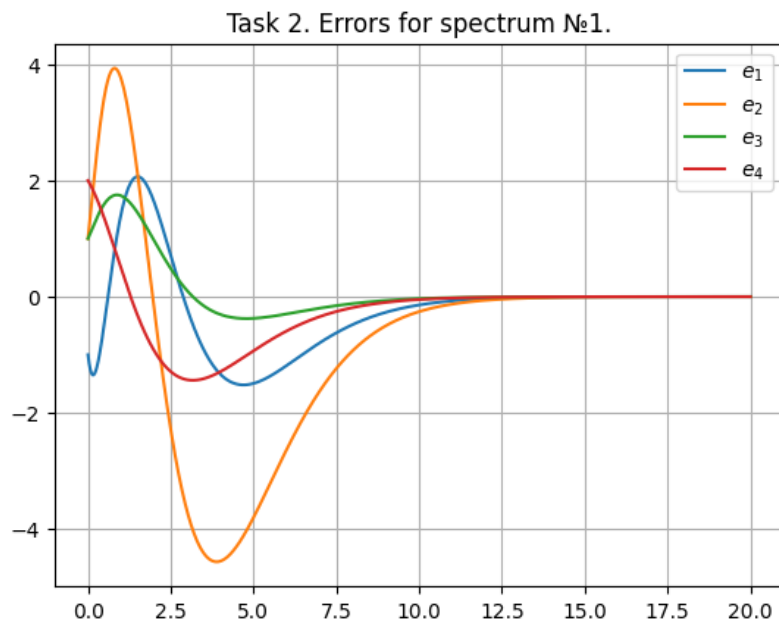


Рис. 10: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №1

Task 2. System and observer states for spectrum №2.

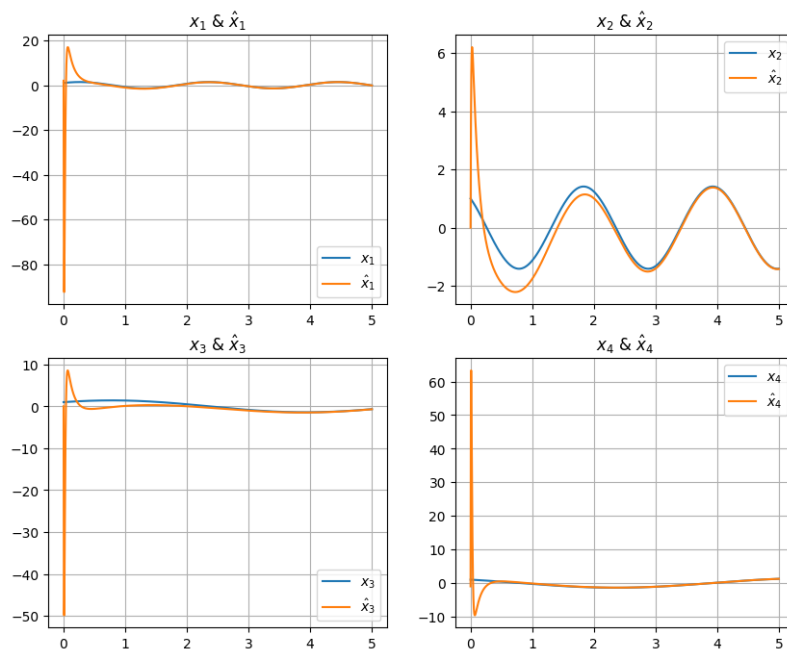


Рис. 11: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №2

Task 2. Errors for spectrum №2.

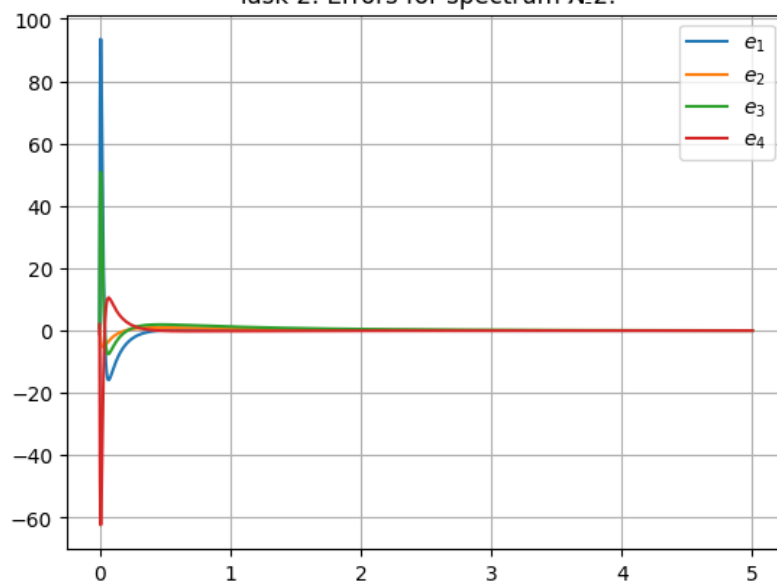


Рис. 12: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №2

Task 2. System and observer states for spectrum №3.

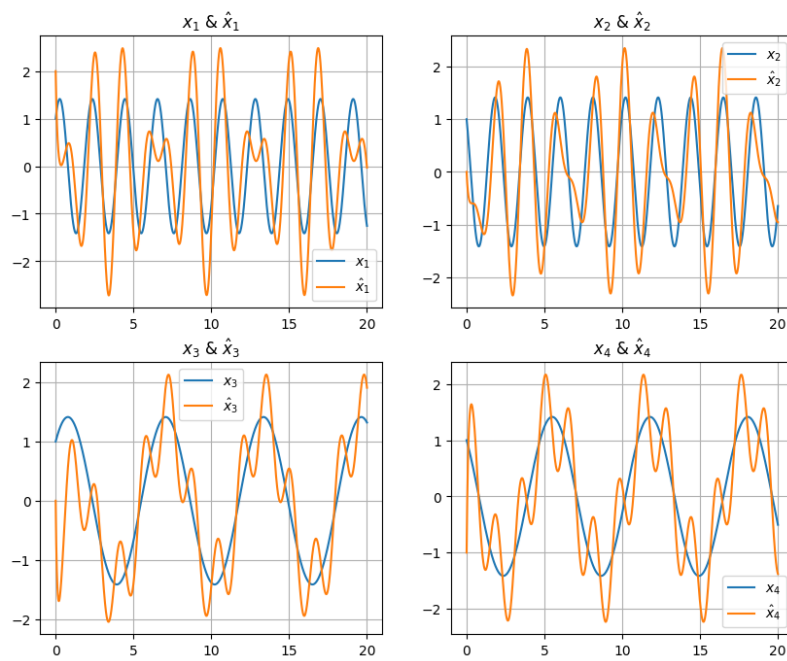


Рис. 13: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №3

Task 2. Errors for spectrum №3.

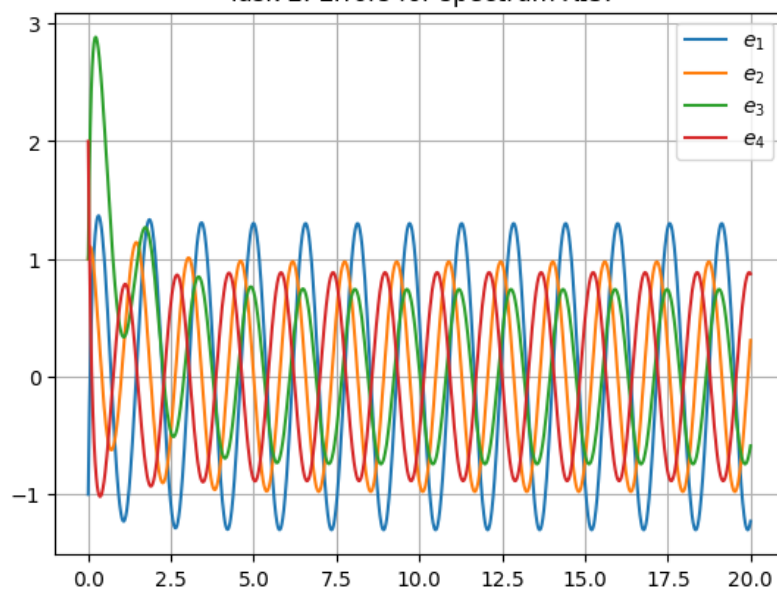


Рис. 14: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №3

Task 2. System and observer states for spectrum №4.

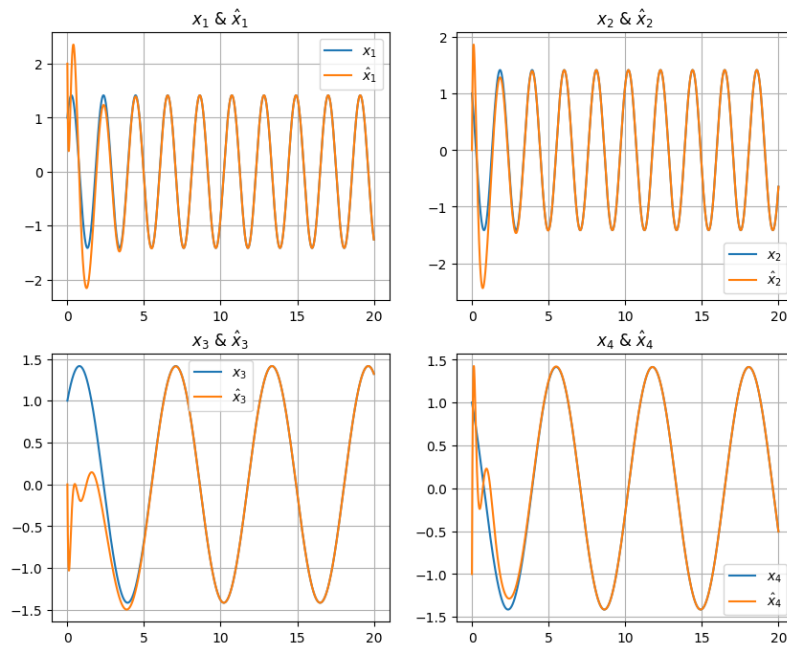


Рис. 15: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №4

Task 2. Errors for spectrum №4.

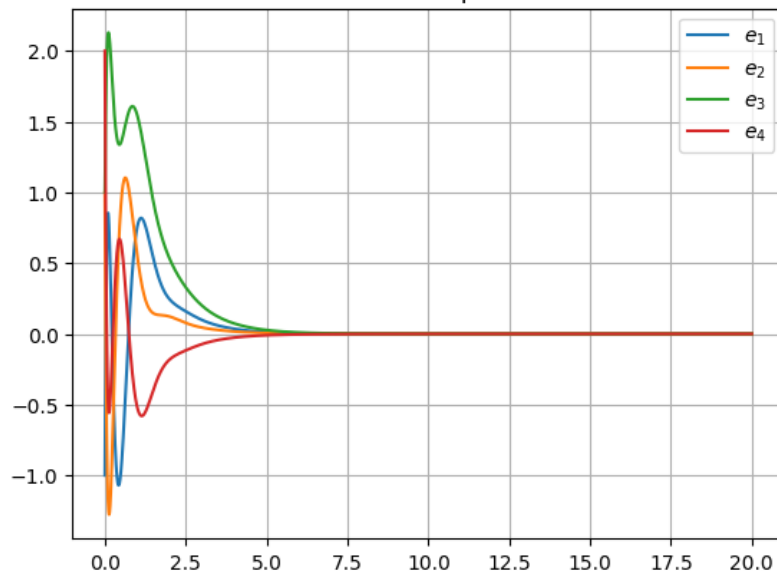


Рис. 16: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №4

### 3 Регулятор + наблюдатель

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (8)$$

Матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма матрицы  $A$ :

$$A = PJP^{-1}, J = \text{diag}(\{-20, 4, 12, 16\})$$

При этом:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Можем сделать вывод, что система является полностью управляемой, однако частично наблюдаемой (собственное число -20 не является наблюдаемым). При этом система обнаруживаема.

Построим регулятор, состоящий из наблюдателя  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$ , где  $u = K\hat{x}$ . Матрицы  $K$  и  $L$  можем найти независимо, согласно алгоритмам, рассмотренным в прошлых заданиях. Матрицы  $Y$  для этого выберем следующим образом:

$$Y_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Y_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Желаемый спектр матриц  $A + BK$  и  $A + LC$  примем равным  $\sigma = \{-10, -11, -12, -13\}$ . Соответствующая матрица  $G = \text{diag}(\sigma)$ .

Можем представить систему в виде приведенной матрицы (имеющей блочно-треугольный вид):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ \Theta & A + LC \end{bmatrix} \quad (9)$$

Найденные матрицы  $K$  и  $L$ :

$$K = \begin{bmatrix} 112.31 & -118.41 & 36.03 & 29.74 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 164.55 & 164.55 \\ -171.64 & -171.64 \\ -56.73 & -56.73 \\ -63.82 & -63.82 \end{bmatrix}$$

Выполним моделирование данной системы при начальных условиях:  $x(0) = [-1, -1, -1, -1]^T$ ,  $\hat{x}(0) = [1, 1, 1, 1]^T$ .

Task 3. System and observer states.

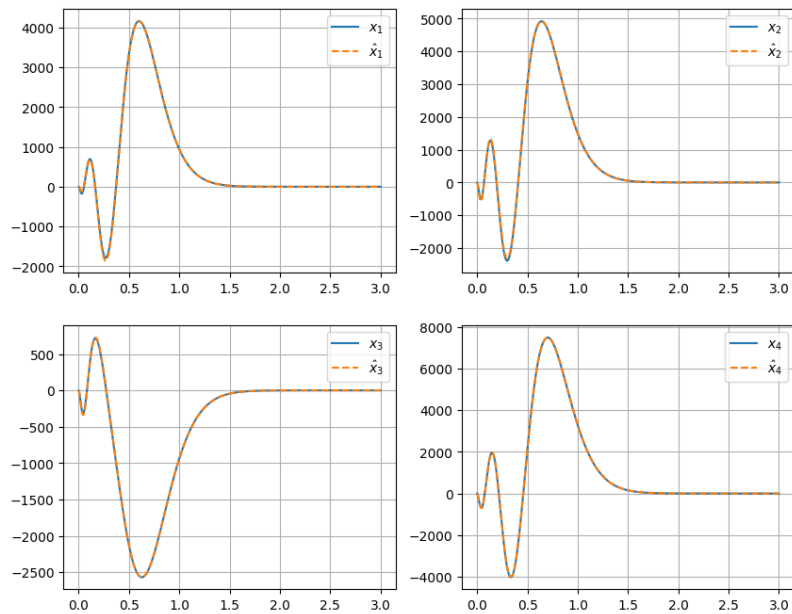


Рис. 17: Задание 3. Компоненты вектора состояний исходной системы и наблюдателя.

Task3. Observer errors.

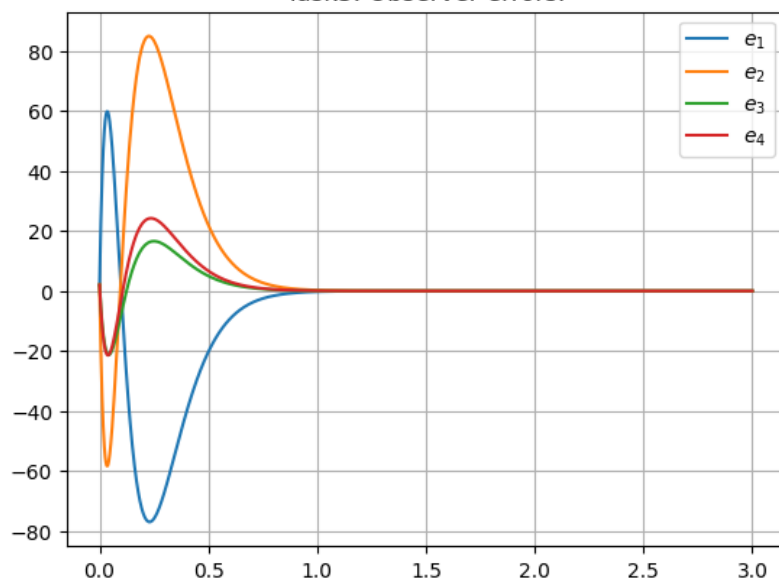


Рис. 18: Задание 3. Ошибка наблюдателя системы.

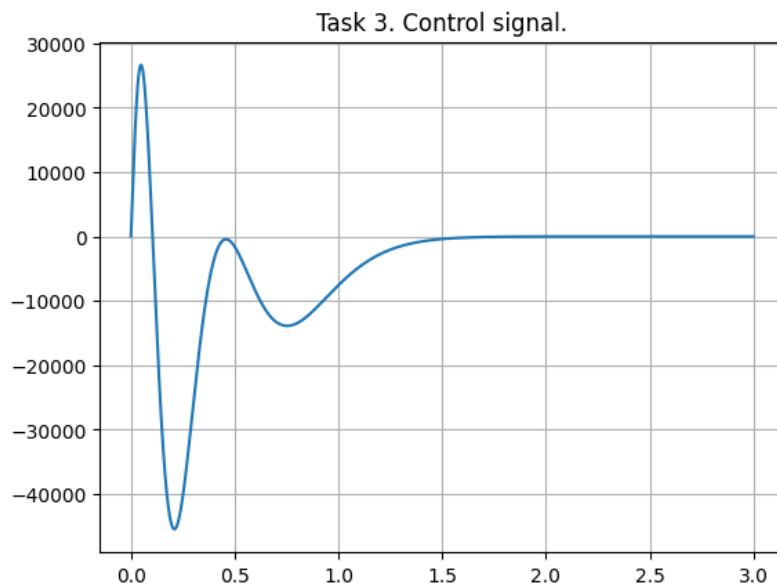


Рис. 19: Задание 3. управляющий сигнал системы.

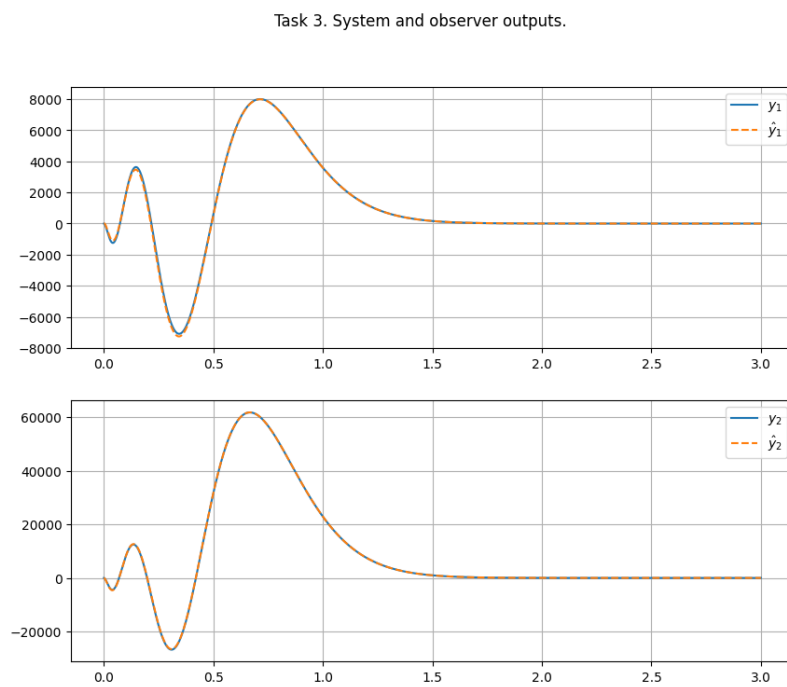


Рис. 20: Задание 3. Выходное воздействие системы и наблюдателя.



## 4 Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы удалось получить навыки синтеза модальных регуляторов и наблюдателей для линейных систем. В ходе выполнения заданий, заметим:

1. Характер переходных процессов вектора состояний наблюдался согласно выбранному спектру.
2. Характер переходных процессов ошибки наблюдателя наблюдался согласно выбранному спектру.
3. Характер переходных процессов вектора состояний системы и ошибки наблюдателя наблюдался согласно выбранному спектру.

При синтезе модальных регуляторов и наблюдателей важную роль играет выбор вспомогательных матриц  $Y_K$  и  $Y_L$ .