Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №7

«Управляемость и наблюдаемость»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать Python Control Systems Library. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в jupyter notebook на GitHub.

1 Полностью управляемая система

Рассмотрим систему, заданную матрицами A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 8 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 4 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1.1 Матрица управляемости

Запишем матрицу управляемости системы:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 18 & -40 \\ -2 & 10 & -14 \\ 4 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

Заметим, что ранг данной матрицы равен 3, следовательно, система - полностью управляема.

1.2 Жорданова форма

Представим систему в Жордановом базисе:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\hat{x} \end{cases} \tag{1}$$

где P - матрица обобщенных векторов. ЖНФ матрицы A:

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-3i & 0 \\ 0 & 0 & -2+3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Матрица входных воздействий в Жордановом базисе:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки матрицы J соответсвуют разным собственным числам и элементы матрицы входных воздействий соответствующие концам клеток не равны нулю. Следовательно: все собственные чила - управляемы.

Также, заметим:

$$\begin{cases} rank(\begin{bmatrix} A - (-1) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-2-3i) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-2+3i) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \end{cases}$$

что подтверждает управляемость всех собственных чисел.

1.3 Управляемое подпространство

Т.к. система - полностью управляема, управляемое подпространство совпадает с $\mathcal{R}^3$ и любой вектор принадлежит ему, в том числе x_1:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1.4 Грамиан управляемости

Расчитаем грамиан управляемости системы:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \tag{2}$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 1.777 & 0.654 & -1.982 \\ 0.654 & 0.538 & -0.538 \\ -1.982 & -0.539 & 2.534 \end{bmatrix}$$

Собственные числа грамиана:

$$\lambda_1 = 0.055, \lambda_2 = 0.439, \lambda_3 = 4.355$$

1.5 Расчет управления

Расчитаем управление, необходимое для перехода из нулевого состояния в состояние x_1 за t_1 секунд:

$$u(t) = B^T e^{A^T (t_1 - t)} (P(t_1))^{-1} x_1 \tag{3}$$

Искомое управление:

$$u(t) = B^T e^{A^T (3-t)} (P(3))^{-1} x_1 = -9.196 e^{t-3} - 32.765 e^{2t-6} sin(3t-9) - 5.244 e^{2t-6} cos(3t-9)$$

1.6 Моделирование

Выполним моделирование системы. Можем видеть, что система достагла желаемого состояния.

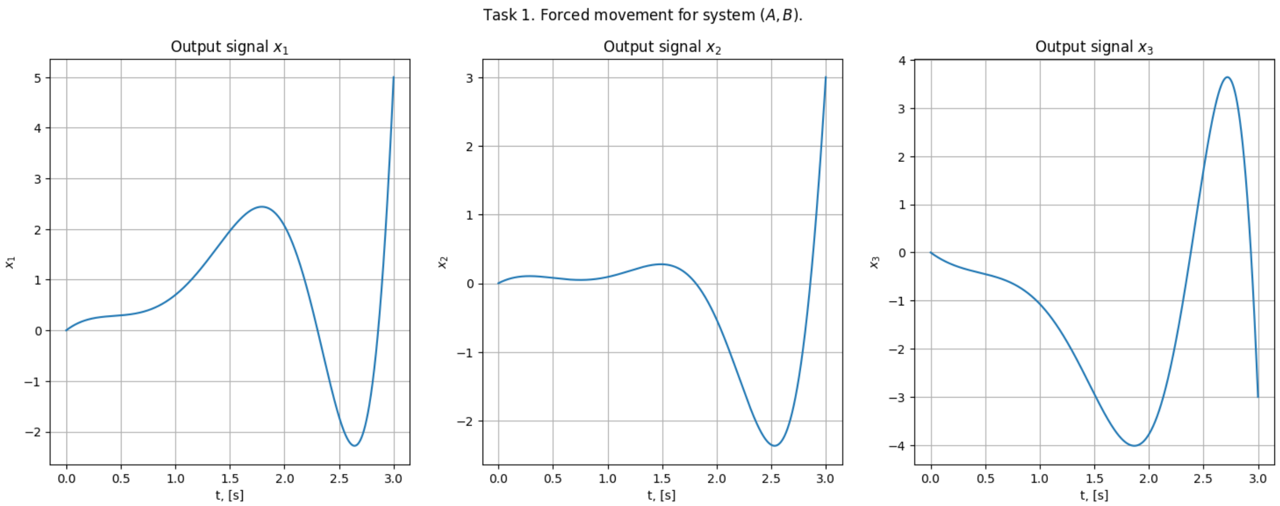

Рис. 1: Задание 1. Компоненты вектра состояний при расчитаном управлении

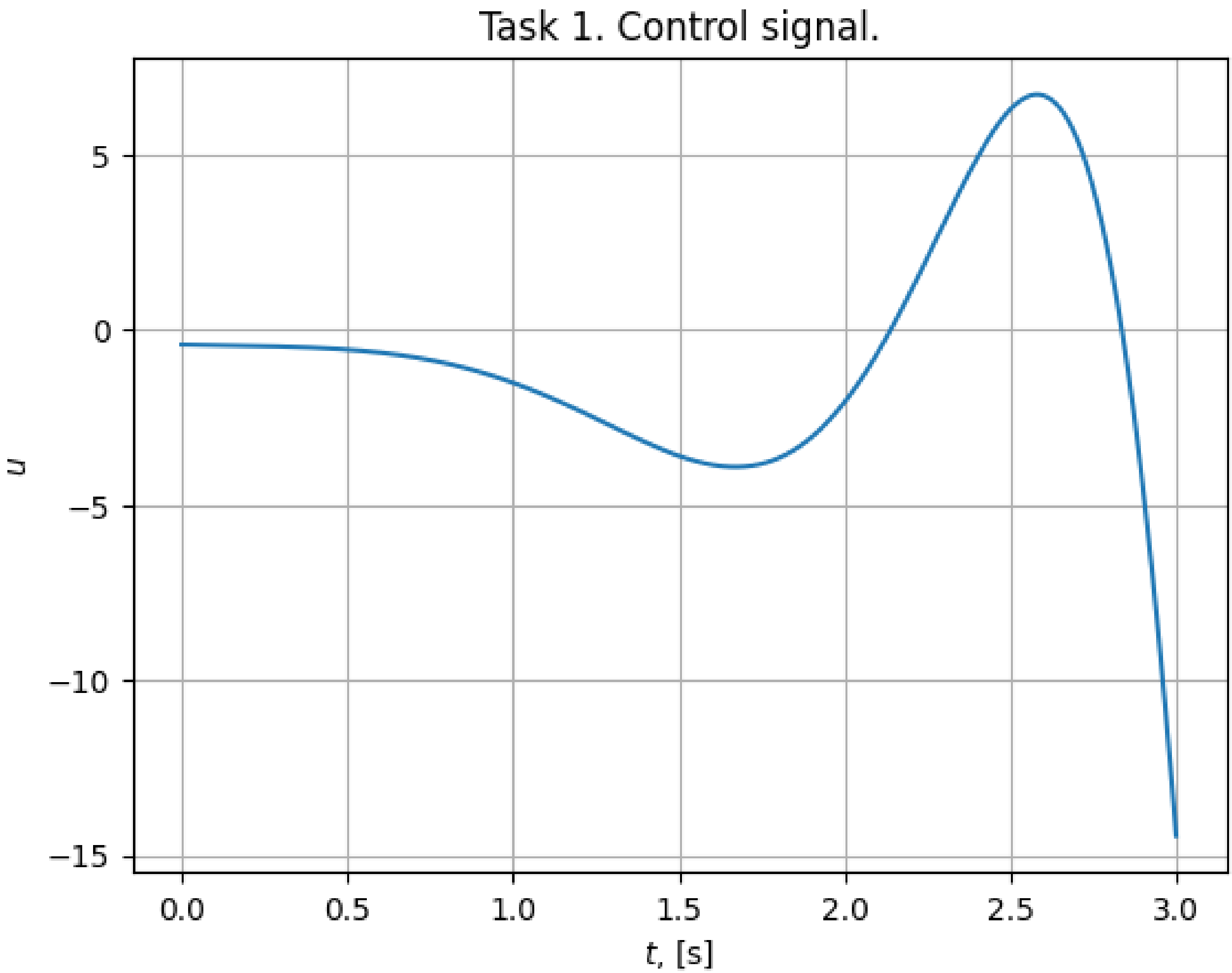

Рис. 2: Задание 1. Расчитанное управляющее воздействие

2 Частично управляемая система

Рассмотрим систему, заданную матрицами A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 8 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 4 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.1 Матрица управляемости

Запишем матрицй управляемости системы:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & -82 \\ 0 & 12 & -48 \\ 0 & -12 & 48 \end{bmatrix}$$

Заметим, что ранг данной матрицы равен 2, следовательно, система - частично управляема.

2.2 Жорданова форма

Представление системы в Жордановом базисе идентично заданию 1. Матрица входных воздействий в Жордановом базисе:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2i \\ 2i \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки матрицы J соответсвуют разным собственным числам, однако элемент матрицы входных воздействий соответствующий концу клетки -1 равен нулю. Следовательно: собственное число -1 - неуправляемо.

Также, заметим:

$$\begin{cases} rank(\begin{bmatrix} A - (-1) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 2 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-2-3i) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-2+3i) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \end{cases}$$

что подтверждает прошлый вывод.

2.3 Управляемое подпространство

$$x_1' = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, x_1'' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} rank(\begin{bmatrix} U & x_1' \end{bmatrix}) = 2 \\ rank(\begin{bmatrix} U & x_1'' \end{bmatrix}) = 3 \end{cases}$$

Можем сделать вывод, что вектор x_1' лежит в управляемом подпространстве.

2.4 Грамиан управляемости

Расчитаем грамиан управляемости системы:

$$P(3) = \begin{bmatrix} 5.153 & 2.538 & -2.538 \\ 2.538 & 1.385 & -1.385 \\ -2.538 & -1.385 & 1.385 \end{bmatrix}$$

Собственные числа грамиана:

$$\lambda_1 = 7.744, \lambda_2 = 0.179, \lambda_3 = 0$$

2.5 Расчет управления

Расчитаем управление, необходимое для перехода из нулевого состояния в состояние x_1 за t_1 секунд:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}(P(t_1))^{\dagger}x_1 \tag{4}$$

Искомое управление:

$$u(t) = B^T e^{A^T(3-t)}(P(3))^{-1}x_1 = -10e^{2t-6}sin(3t-9) - 2e^{2t-6}cos(3t-9)$$

2.6 Моделирование

Выполним моделирование системы. Можем видеть, что система достагла желаемого состояния.

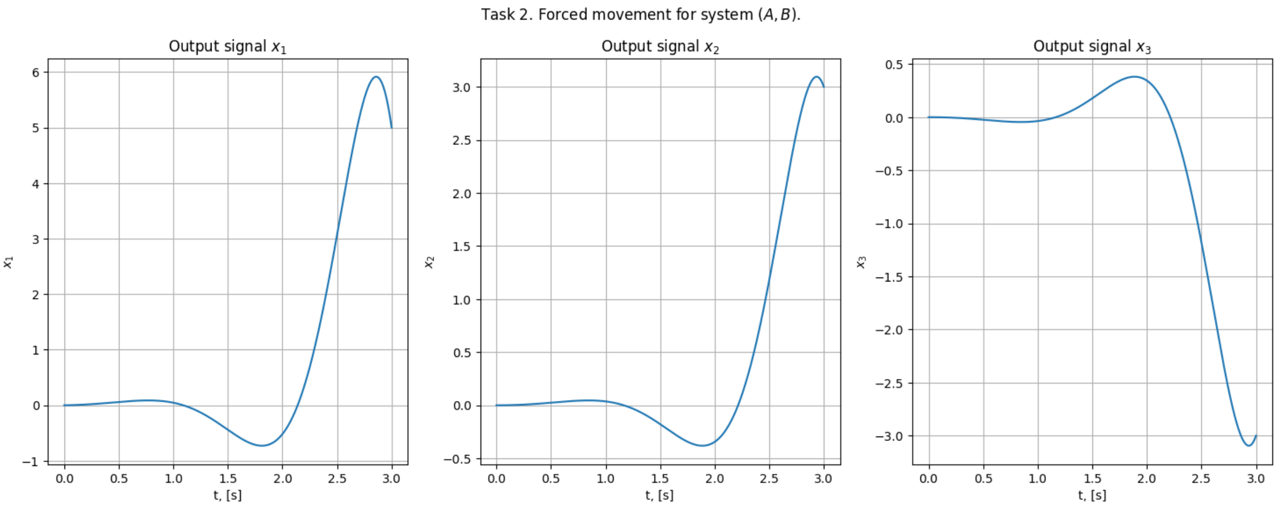

Рис. 3: Задание 2. Компоненты вектра состояний при расчитаном управлении

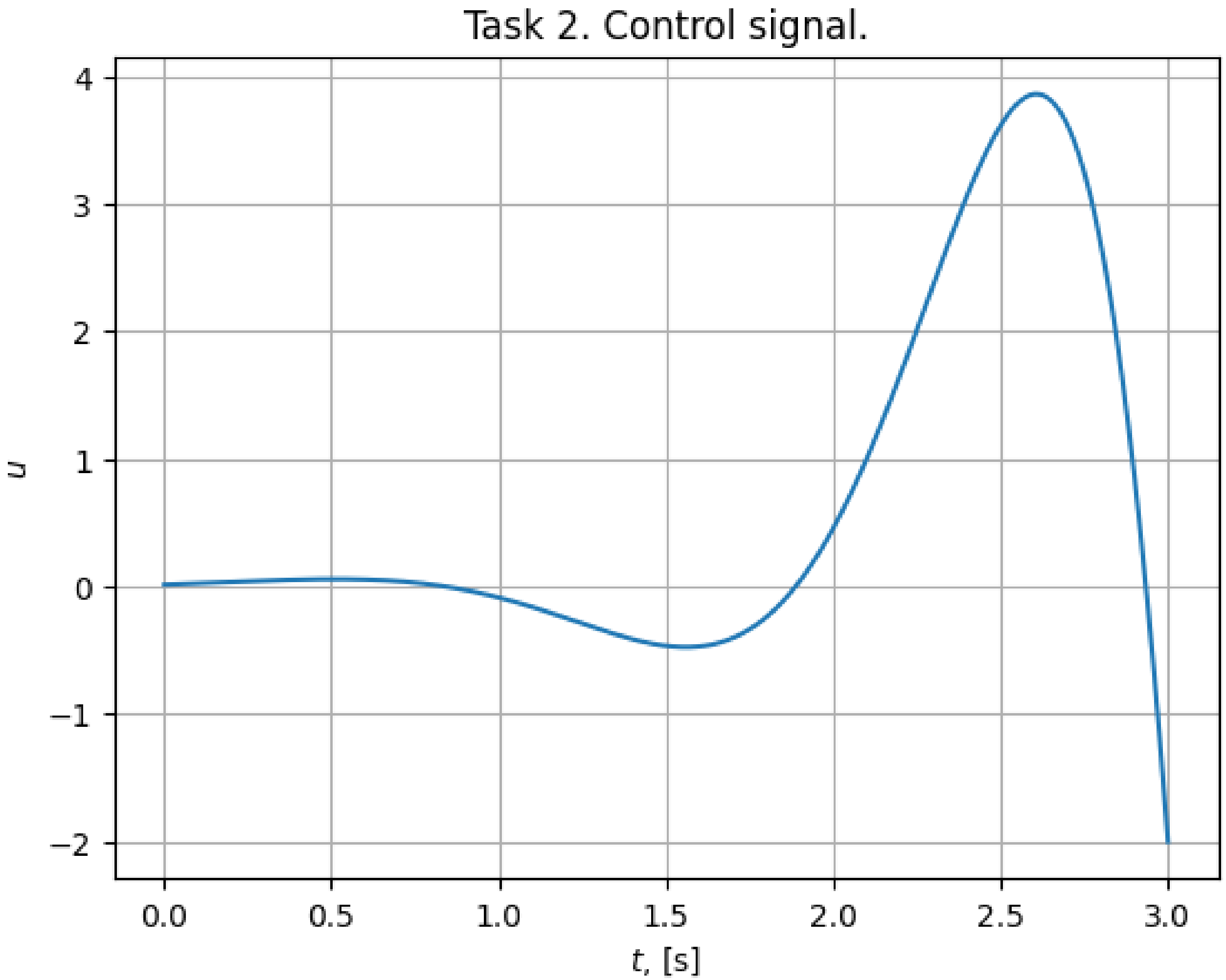

Рис. 4: Задание 2. Расчитанное управляющее воздействие

3 Полностью наблюдаемая система

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax, y = Cx \tag{5}$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -8 \\ -5 & 0 & -6 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3.1 Матрица наблюдаемости

Запишем матрицу наблюдаемости системы:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 5 & -14 & -7 \\ -22 & 43 & 23 \end{bmatrix}$$

Заметим, что ранг данной матрицы равен 3, следовательно, система - полностью наблюдаема.

3.2 Жорданова форма

Представим систему в Жордановом базисе. ЖНФ матрицы A:

$$A = PJP^{-1}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4-i & 0 \\ 0 & 0 & -4+i \end{bmatrix}$$

Матрица выхода в Жордановом базисе:

$$CP = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2}(1-i) & \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки матрицы J соответсвуют разным собственным числам и элементы матрицы выхода соответствующие началам клеток не равны нулю. Следовательно: все собственные чила - наблюдаемы.

Также, заметим:

$$\begin{cases} rank(\begin{bmatrix} A-(1)\cdot I \\ C \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A-(-4-i)\cdot I \\ C \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A-(-4+i)\cdot I \\ C \end{bmatrix}) = 3 \end{cases}$$

что подтверждает наблюдаемость всех собственных чисел.

3.3 Грамиан наблюдаемости

Расчитаем грамиан наблюдаемости системы:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \tag{6}$$

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 806.09 & -803.52 & 808.02 \\ -803.52 & 802.35 & -804.23 \\ 808.02 & -804.23 & 811.05 \end{bmatrix}$$

Собственные числа грамиана:

$$\lambda_1 = 2.417, \lambda_2 = 0.002, \lambda_3 = 2.456$$

3.4 Расчет начальных условий

Выходной сигнал системы:

$$y(t) = -3e^{-4t}cos(t) + 3e^{-4t}sin(t)$$

Расчитаем начальные условия для реализации данного выхода:

$$x_0 = (Q(t_1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt \tag{7}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3.5 Ненаблюдаемое подпространство

Т.к. система является полностью наблюдаемой, по определению каждой траектории соответсвует один вектор начальных условий.

3.6 Моделирование

Выполним моделирование свободного движения системы при заданных начальных условиях:

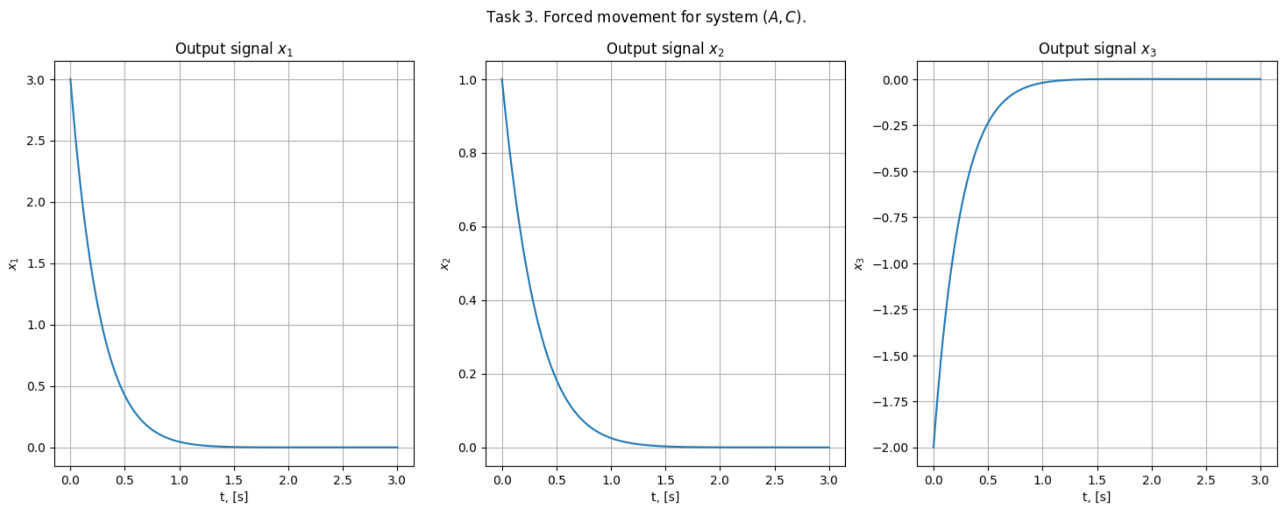

Рис. 5: Задание 3. Компоненты вектра состояний при расчитаном управлении

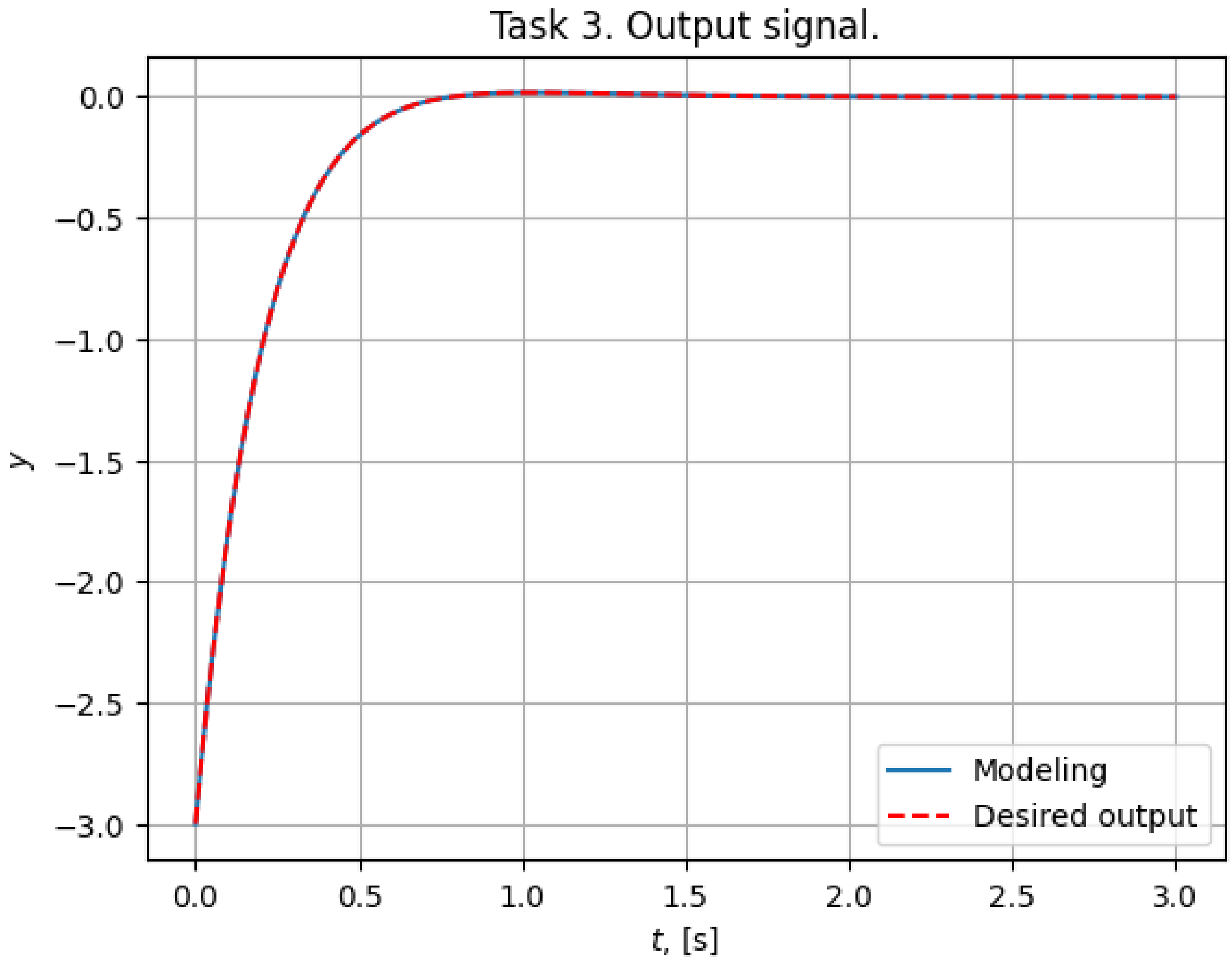

Рис. 6: Задание 3. Сравнение выходного сигнала с желаемым

4 Частично наблюдаемая система

Рассмотрим систему:

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 3 & -8 \\ -5 & 0 & -6 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

4.1 Матрица наблюдаемости

Запишем матрицу наблюдаемости системы:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & -12 & -9 \\ -24 & 45 & 21 \end{bmatrix}$$

Заметим, что ранг данной матрицы равен 2, следовательно, система - частично наблюдаема.

4.2 Жорданова форма

Представим систему в Жордановом базисе. ЖНФ матрицы A:

$$A = PJP^{-1}, J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4-i & 0 \\ 0 & 0 & -4+i \end{bmatrix}$$

Матрица выхода в Жордановом базисе:

$$CP = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2}(1-i) & \frac{3}{2}(1+i) \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки матрицы J соответсвуют разным собственным числам, однако элемент матрицы выхода соответствующие началу первой клетки равен нулю. Следовательно: собственное число 1 - ненаблюдаемо.

Также, заметим:

$$\begin{cases} rank(\begin{bmatrix} A - (1) \cdot I \\ C \end{bmatrix}) = 2 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-4-i) \cdot I \\ C \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-4+i) \cdot I \\ C \end{bmatrix}) = 3 \end{cases}$$

что подтверждает прошлый вывод.

4.3 Грамиан наблюдаемости

Расчитаем грамиан наблюдаемости системы:

$$Q(3) = \begin{bmatrix} 0.033 & 0.132 & 0.165 \\ 0.132 & 1.091 & 1.224 \\ 0.165 & 1.224 & 1.389 \end{bmatrix}$$

Собственные числа грамиана:

$$\lambda_1 = 2.492, \lambda_2 = 0.022, \lambda_3 = 0$$

4.4 Расчет начальных условий

Выходной сигнал системы:

$$y(t) = -3e^{-4t}cos(t) + 3e^{-4t}sin(t)$$

Расчитаем начальные условия для реализации данного выхода:

$$x_0 = (Q(t_1))^{\dagger} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt \tag{8}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.5 Ненаблюдаемое подпространство

Любой вектор из ядра матрицы наблюдаемости является ненаблюдаемым и сложение любого вектора из него с вектором начальных условий не повлияет на выход системы.

$$Nullspace(V) = \mathcal{L}(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T)$$

4.6 Моделирование

Выполним моделирование свободного движения системы при заданных начальных условиях. Можем наблюдать, что во всех случаях желаемых выходной сигнал совпал с полученным в результате моделирования:

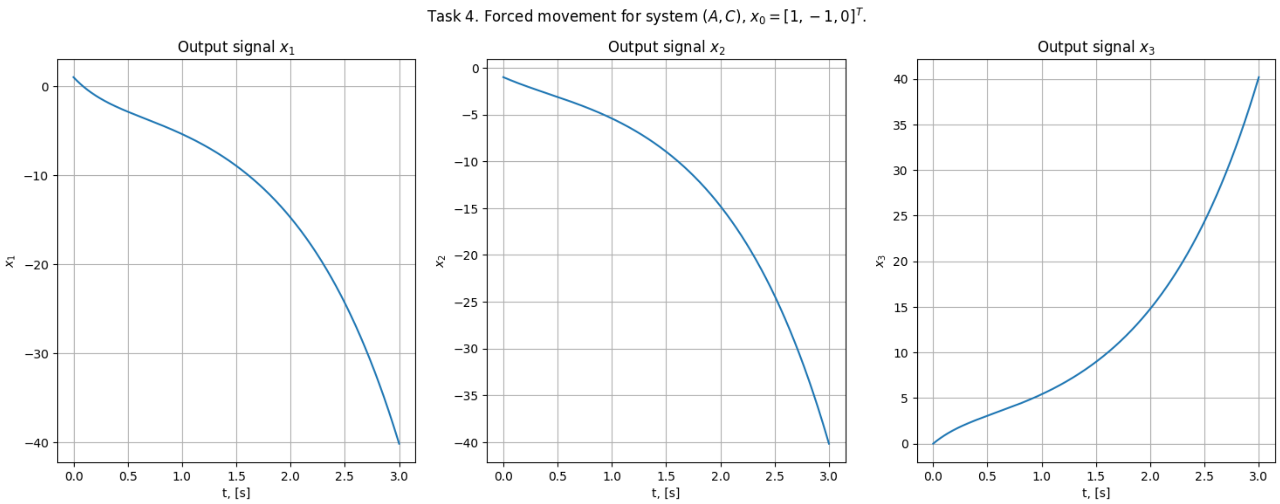

Рис. 7: Задание 4. Компоненты вектра состояний при расчитаных начальных условиях (1)

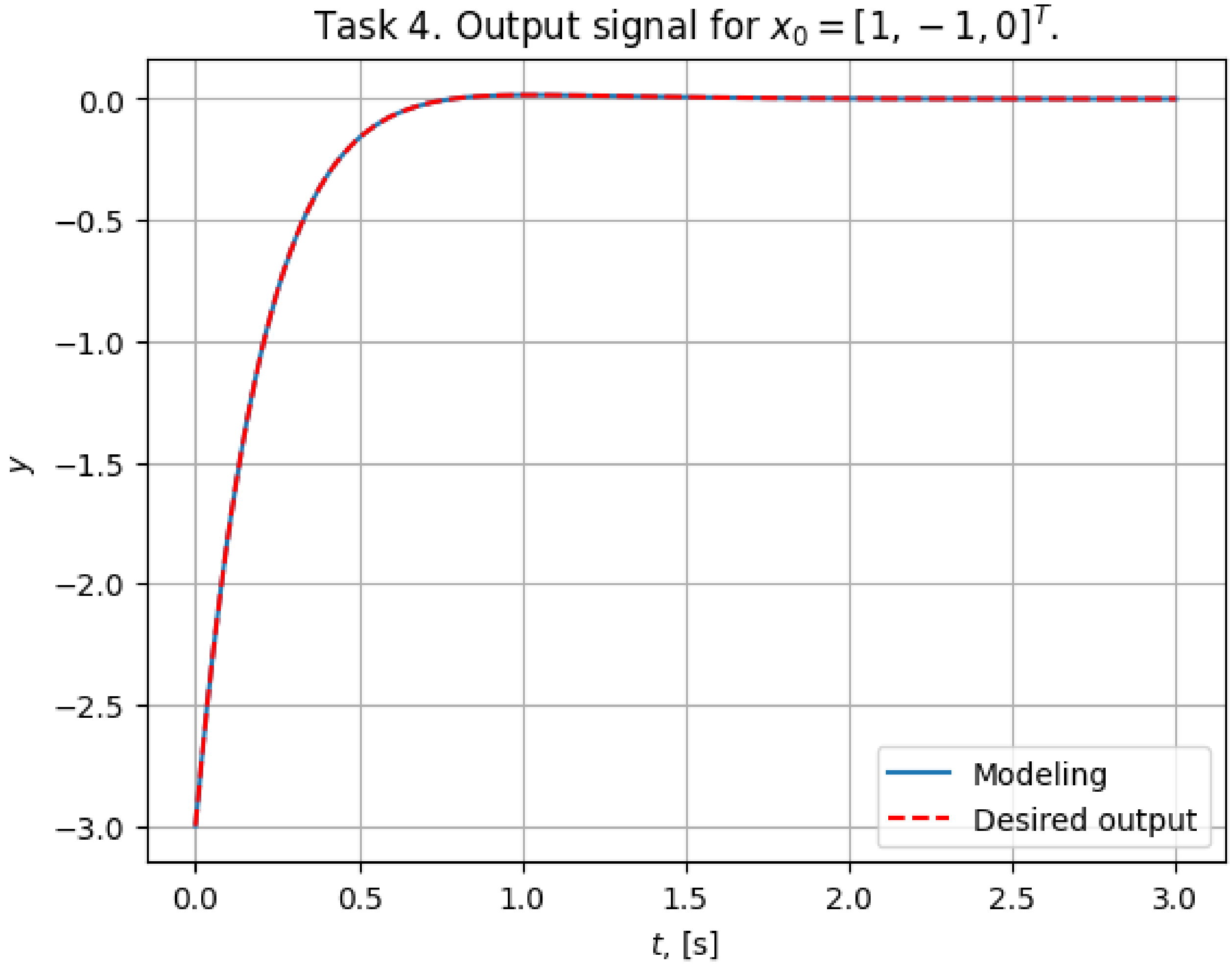

Рис. 8: Задание 4. Сравнение выходного сигнала с желаемым (1)

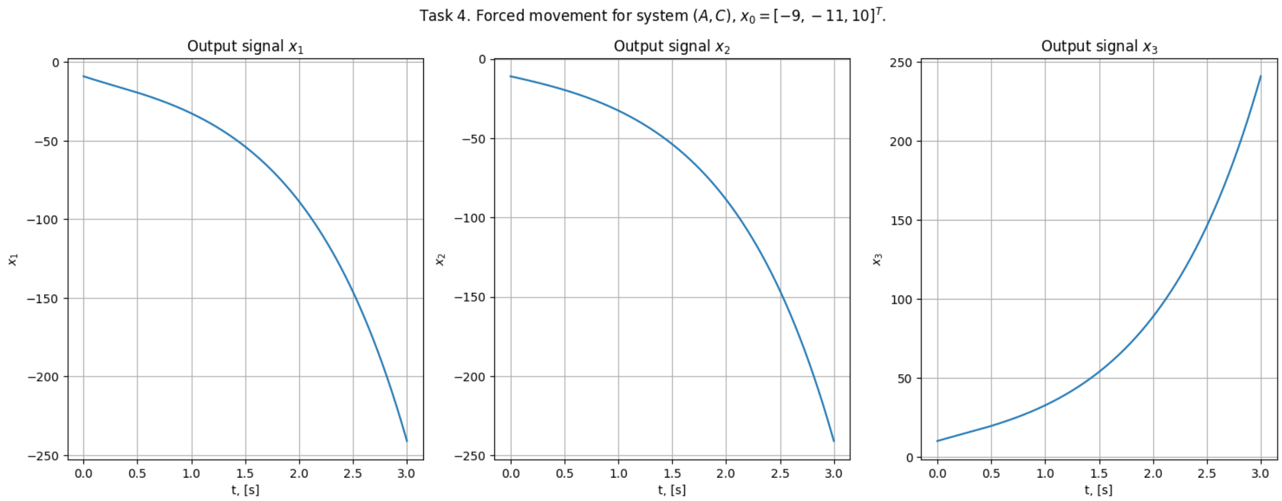

Рис. 9: Задание 4. Компоненты вектра состояний при расчитаных начальных условиях (2)

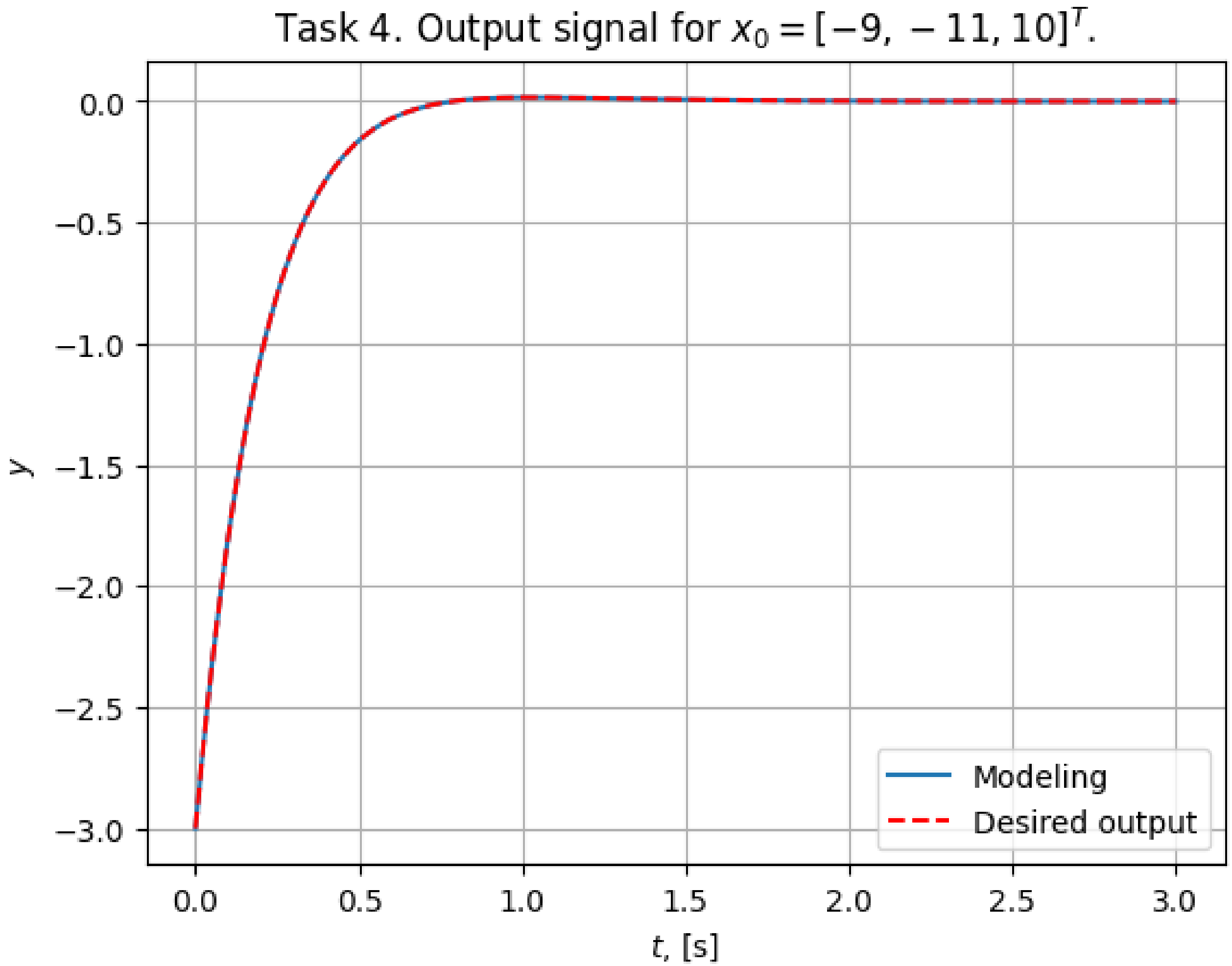

Рис. 10: Задание 4. Сравнение выходного сигнала с желаемым (2)

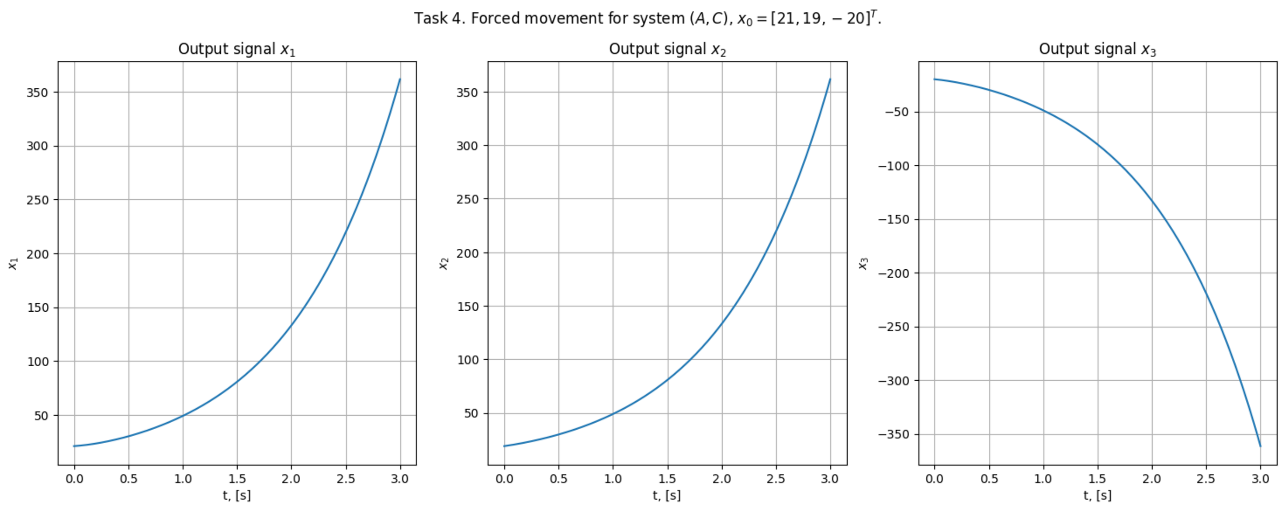

Рис. 11: Задание 4. Компоненты вектра состояний при расчитаных начальных условиях (3)

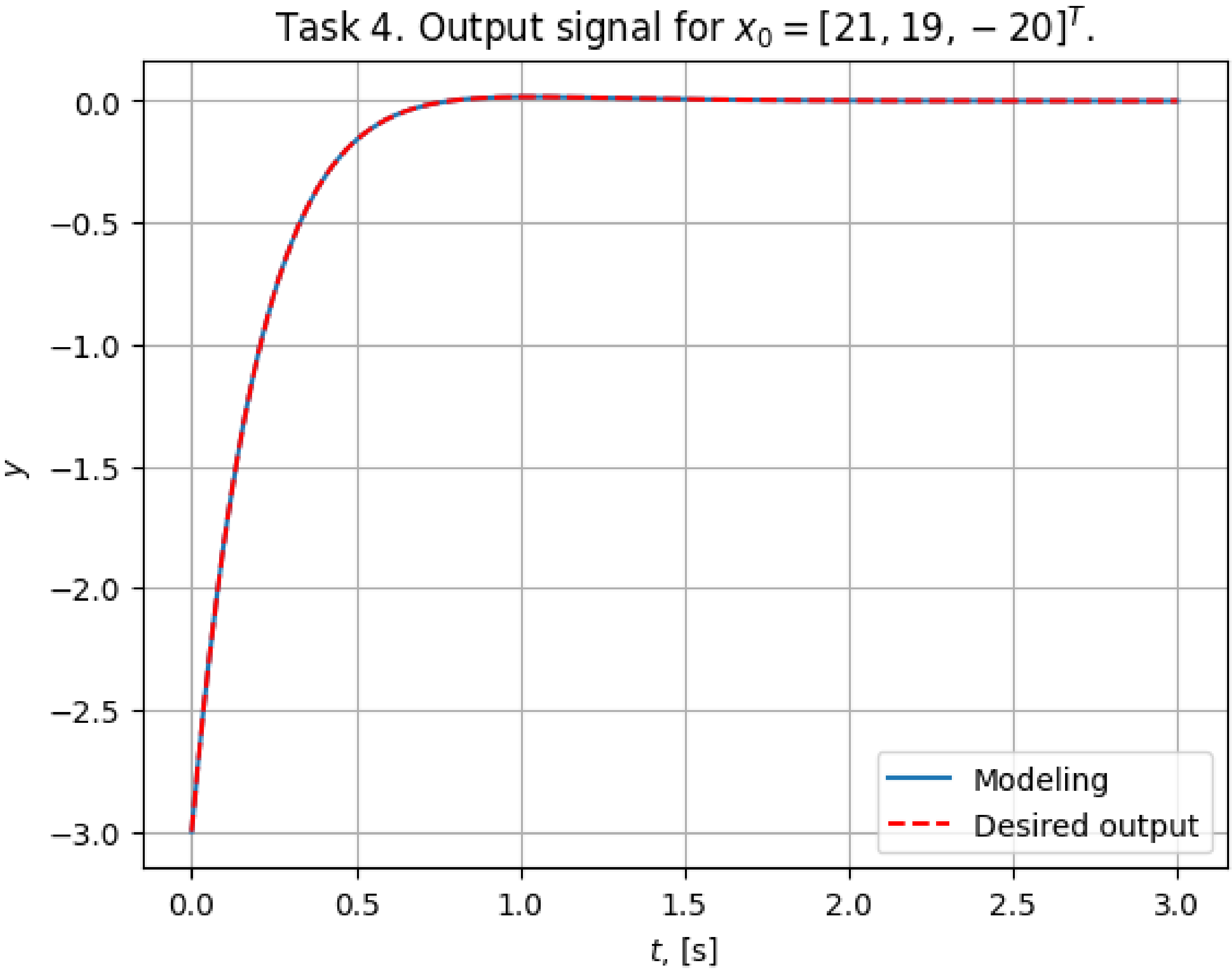

Рис. 12: Задание 4. Сравнение выходного сигнала с желаемым (3)

5 Выводы

В ходе выполнения работы удалось ознакомиться с понятиями управляемости и наблюдаемости, на практике исследовать поведение управляемых и наблюдаемых систем и изучить их свойства.

Результаты моделирования подтверждают приведенные теоретические выкладки: расчитанное предложенным способом управление способно привести систему к желаемому состоянию, также удалось добиться желаемого выходного сигнала заданием расчитанных начальных условий.