

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО  
Факультет систем управления и робототехники

# Курсовой проект

«Управление перевернутым маятником на тележке»  
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич  
Группа: R33353  
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Построение математической модели объекта</b>	<b>2</b>
1.1	Вывод уравнений . . . . .	2
1.2	Точки равновесия . . . . .	3
1.3	Линеаризация . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Анализ математической модели</b>	<b>5</b>
2.1	Анализ матриц . . . . .	5
2.2	Передаточные функции . . . . .	5
2.3	Линейное моделирование . . . . .	5
2.4	Нелинейное моделирование . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Модальное управление</b>	<b>13</b>
3.1	Синтез регулятора по состоянию . . . . .	13
3.2	Исследование регулятора по состоянию . . . . .	13
3.3	Синтез наблюдателя . . . . .	13
3.4	Исследование наблюдателя . . . . .	21
3.5	Синтез регулятора по выходу . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Регуляторы с заданной степенью устойчивости</b>	<b>27</b>
4.1	Синтез регулятора по состоянию . . . . .	27
4.2	Исследование регулятора по состоянию . . . . .	30
4.3	Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление . . . . .	30
4.4	Синтез наблюдателя . . . . .	45
4.5	Синтез регулятора по выходу . . . . .	45
<b>5</b>	<b>LQR &amp; фильтр Калмана</b>	<b>45</b>
5.1	Синтез линейно-квадратичного регулятора . . . . .	45
5.2	Исследование линейно-квадратичного регулятора . . . . .	53
5.3	Синтез фильтра Калмана . . . . .	53
5.4	LQG для линейной модели . . . . .	58
5.5	LQG для нелинейной модели . . . . .	58
<b>6</b>	<b>Слежение и компенсация</b>	<b>61</b>
6.1	Компенсация . . . . .	61
6.2	Слежение . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Итог</b>	<b>68</b>

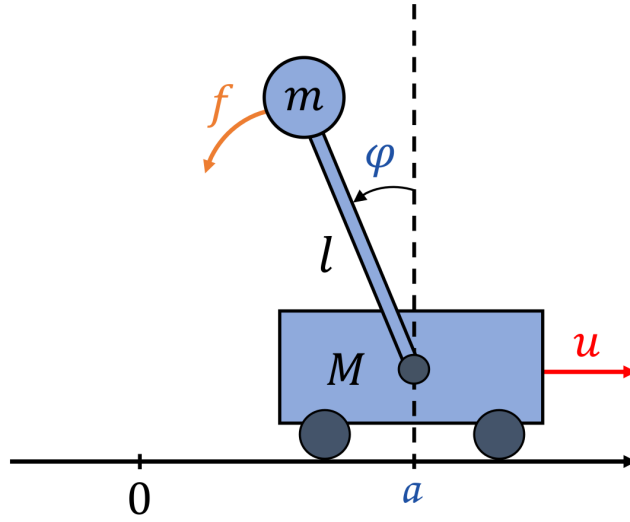


Рис. 1: Перевернутый маятник на тележке.

## 1 Построение математической модели объекта

### 1.1 Вывод уравнений

Рассмотрим систему перевернутого маятника на тележке (рис. 1). Введем следующие обозначения физических величин:

- $a$  – линейная координата тележки;
- $\dot{a}$  – линейная скорость тележки;
- $\varphi$  – угол отклонения маятника от вертикали;
- $\dot{\varphi}$  – угловая скорость маятника;
- $f$  – вращающий внешний момент, действующий на маятник;
- $u$  – сила действующая на тележку;
- $M, m$  – массы тележки и маятника соответственно;
- $l$  – длина маятника.

В качестве вектора состояния  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  выберем набор  $a, \dot{a}, \varphi, \dot{\varphi}$ . В роли управляющего воздействия примем  $u$ , в роли внешнего возмущения –  $f$ . Измеряемыми сигналами  $y = [y_1 \ y_2]^T$  будем считать  $a$  и  $\varphi$ .

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = \dot{a} \\ x_3 = \varphi \\ x_4 = \dot{\varphi} \\ y_1 = a \\ y_2 = \varphi \end{cases} \quad (1)$$

Для вывода математической модели данной физической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial T}{\partial a} = u \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = f + mgl \sin(\varphi) \end{cases}, \quad (2)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы.

$$T(t) = M \frac{\dot{a}^2}{2} + m \frac{(\frac{d}{dt}(l \cos(\varphi)))^2 + (-\frac{d}{dt}(l \sin(\varphi)) + \dot{a})^2}{2} = (M + m) \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} - ml \cos(\varphi) \dot{\varphi} \quad (3)$$

Подставив выражение для  $T$  в уравнения 2, получим уравнения математической модели системы:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{a} + ml(\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi)\ddot{\varphi}) = u \\ ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{a} \cos \varphi = f + mgl \sin(\varphi) \end{cases} \quad (4)$$

Тогда, выразив  $\ddot{a}$  и  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{ml}{M+m} \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{ml}{M+m} \cos(\varphi) \ddot{\varphi} + \frac{1}{M+m} u \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{l} \ddot{a} \cos(\varphi) + \frac{g}{l} \sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2} f \end{cases} \quad (5)$$

Решив данную систему уравнений 5 относительно  $\ddot{a}$  и  $\ddot{\varphi}$ :

$$\begin{cases} \ddot{a} = \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-ml \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2 + mg \cos(\varphi) \sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l} f + u) \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M+m \sin(\varphi)^2} (-m \sin(\varphi) \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l} \sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2} f + \frac{\cos(\varphi)}{l} u) \end{cases} \quad (6)$$

Представим математическую модель в терминах вектора состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M+m \sin(x_3)^2} (-ml \sin(x_3) x_4^2 + mg \cos(x_3) \sin(x_3) + \frac{\cos(x_3)}{l} f + u) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{M+m \sin(x_3)^2} (-m \sin(x_3) \cos(x_3) x_4^2 + \frac{(M+m)g}{l} \sin(x_3) + \frac{M+m}{ml^2} f + \frac{\cos(x_3)}{l} u) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (7)$$

## 1.2 Точки равновесия

В точках равновесия все компоненты производной вектора состояния по времени равны 0. Следовательно, полагая  $u, f \equiv 0$  необходимо:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{1}{M+m \sin(x_3)^2} (-ml \sin(x_3) x_4^2 + mg \cos(x_3) \sin(x_3)) = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{1}{M+m \sin(x_3)^2} (-m \sin(x_3) \cos(x_3) x_4^2 + \frac{(M+m)g}{l} \sin(x_3)) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Учитывая  $x_4 = 0$  и  $M + m \sin(x_3)^2 > 0$ :

$$\begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Заметим, однако, что с физической точки зрения условие  $x_3 = \pi n$  эквивалентно  $x_3 = 0$  (верхнее положение маятника) или  $x_3 = \pi$  (нижнее положение маятника). В дальнейшем нас будет интересовать стабилизация системы около верхнего положения равновесия.

### 1.3 Линеаризация

Для линеаризации системы около векторной точки равновесия ( $x = [a_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ) представим некоторые функции от компонент вектора состояния в виде ряда Тейлора в данной точке:

$$\sin(x_3) = x_3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_3^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x_3) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_3^{2n}}{(2n)!}$$

Приняв величины вектора состояния достаточно малыми ( $x_3^2 \ll x_3$ ,  $x_4^2 \ll x_4$ ), можем записать линеаризованные уравнения динамики системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mg}{M}x_3 + \frac{1}{Ml}f + \frac{1}{M}u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(m+m)g}{Ml}x_3 + \frac{M+m}{Mml^2}f + \frac{1}{Ml}u \end{cases} \quad (10)$$

Можем представить линеаризованную систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases}, \quad (11)$$

где матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{M+m}{Mml^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Выберем значения параметров системы:

$$M = 10, m = 1, l = 1, g = 9.8$$

Тогда, матрицы системы примут следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 10.78 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \\ 0 \\ 1.1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2 Анализ математической модели

### 2.1 Анализ матриц

Найдем собственные числа и собственные вектора матрицы  $A$ :

$$\sigma(A) = \{0, 0, 3.28, -3.28\}; \nu(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.026 \\ 0.087 \\ 0.29 \\ 0.953 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.026 \\ 0.087 \\ -0.29 \\ 0.953 \end{bmatrix} \right\}$$

Заметим, что первые два собственных вектора линейно зависимы и соответствуют нулевым собственным числам. Можем сделать вывод, что первая компонента вектора состояния не влияет на динамику системы (от координаты тележки не зависят другие параметры и их производные).

Имея кратные нулевые корни, а также положительное собственное число, система является неустойчивой. Проведем анализ на управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость и обнаруживаемость приведя систему в Жорданов базис:

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.03 & 0.03 \\ 0 & 1 & 0.09 & 0.09 \\ 0 & 0 & -0.31 & 0.31 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.03 & 0.03 \\ 0 & 1 & 0.09 & 0.09 \\ 0 & 0 & -0.31 & 0.31 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.09 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{bmatrix}, CP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.03 & 0.03 \\ 0 & 0 & -0.31 & 0.31 \end{bmatrix}$$

Можем сделать вывод, что система является полностью управляемой и наблюдаемой (соответственно стабилизируемой и обнаруживаемой).

### 2.2 Передаточные функции

Найдем передаточные матрицы системы от входа к выходу и от внешнего возмущения к выходу:

$$W_{u \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.1s^2 - 0.98}{s^4 - 10.78s^2} \\ \frac{0.1}{s^2 - 10.78} \end{bmatrix}, W_{f \rightarrow y}(s) = \begin{bmatrix} \frac{0.1}{s^2 - 10.78} \\ \frac{1.1}{s^2 - 10.78} \end{bmatrix}$$

Динамический порядок функции  $\frac{0.1s^2 - 0.98}{s^4 - 10.78s^2}$  равен 4, для остальных – 2. Относительный динамический порядок всех функций равен 2. Нули присутствуют только у функции  $\frac{0.1s^2 - 0.98}{s^4 - 10.78s^2}$  и равны  $\pm 3.13$ . Полюса передаточных функций соответствуют собственным числам матрицы динамики системы.

Все функции описывают расходящийся переходный процесс при нулевом входном (внешнем) воздействии, т.к. имеют кратные нулевые или положительный полюса.

### 2.3 Линейное моделирование

Выполним моделирование линеаризованной системы, заданной уравнениями 11. Ниже приведены графики, демонстрирующие динамику вектора состояния при различных начальных условиях.

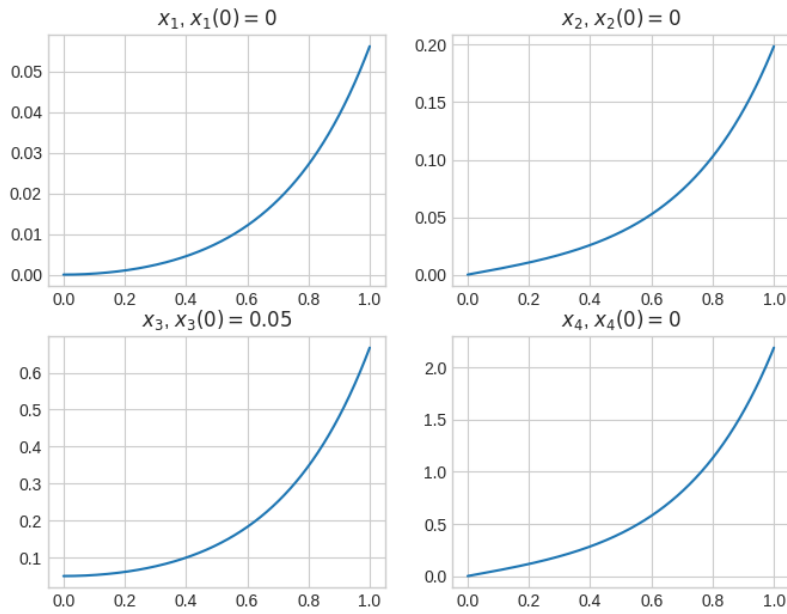


Рис. 2: Моделирование линейризованной системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0.05 \ 0]^T)$ .

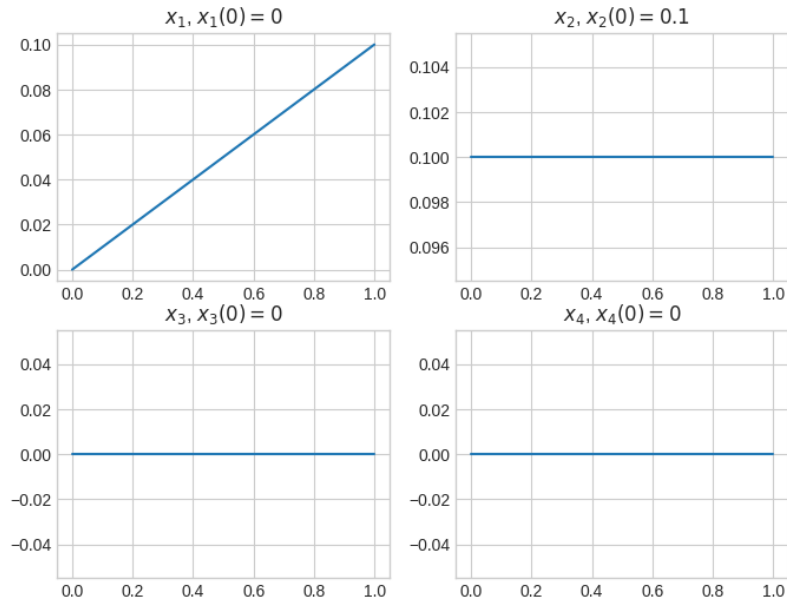


Рис. 3: Моделирование линейризованной системы  $(x(0) = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T)$ .

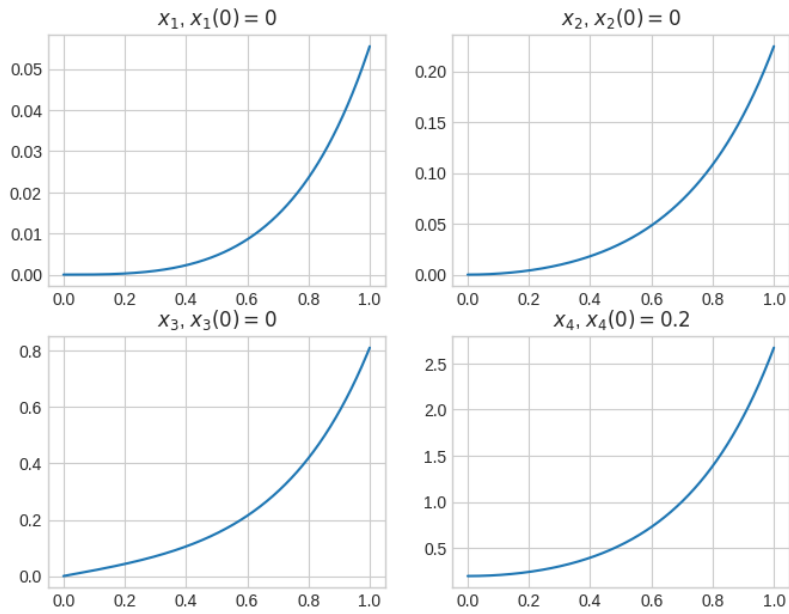


Рис. 4: Моделирование линейризованной системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2]^T)$ .

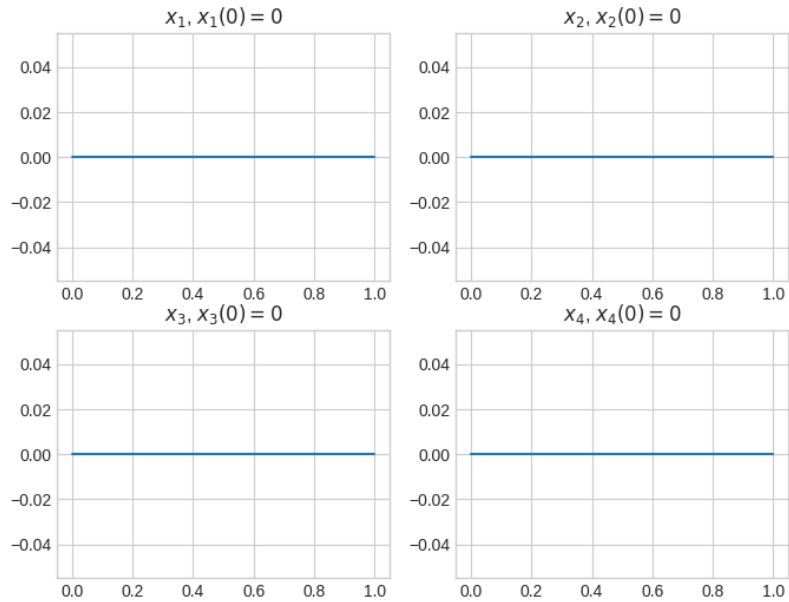


Рис. 5: Моделирование линейризованной системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T)$ .



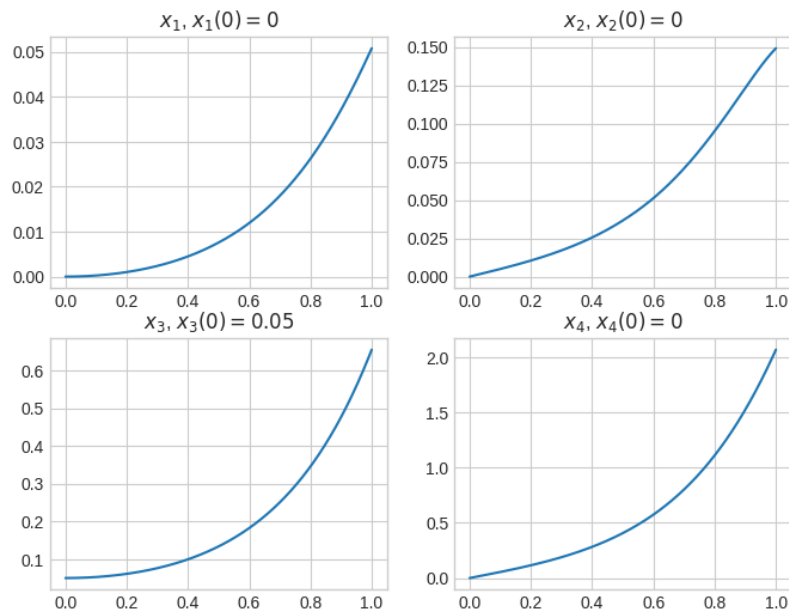
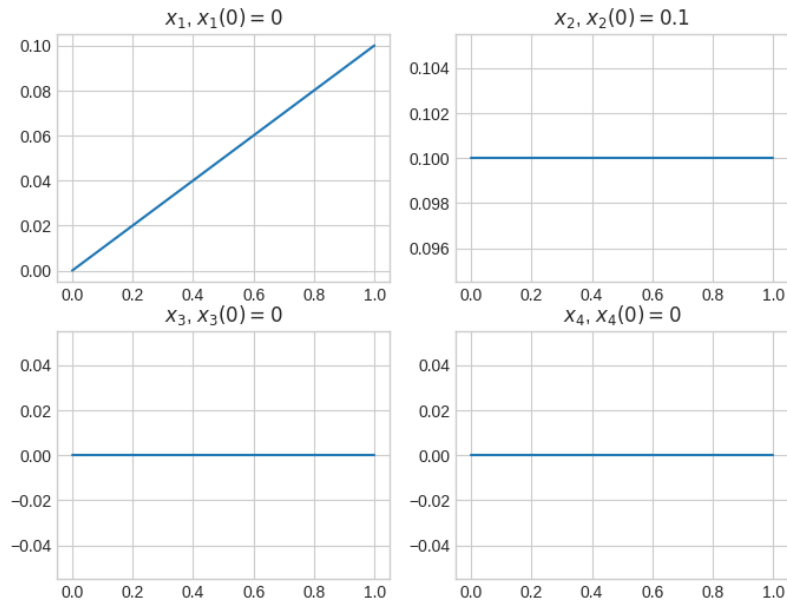
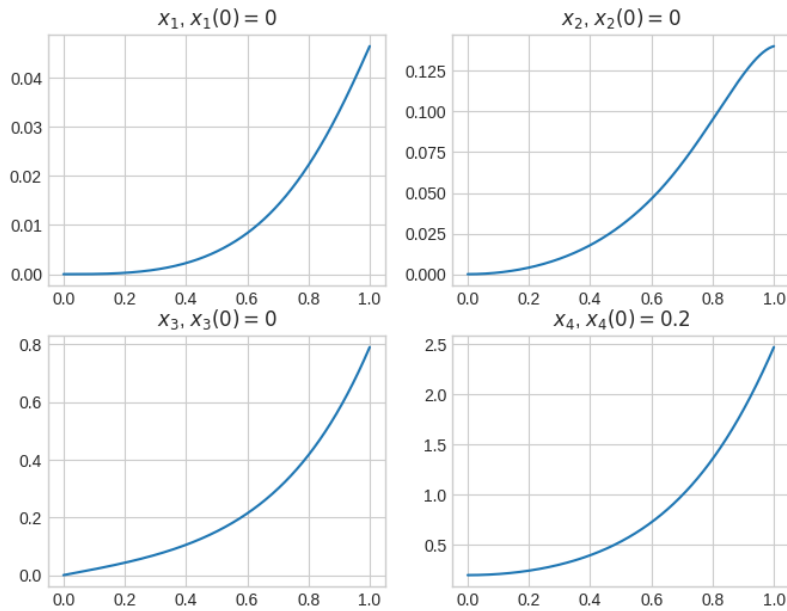


Рис. 6: Моделирование исходной системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0.05 \ 0]^T)$ .

## 2.4 Нелинейное моделирование

Выполним моделирование исходной системы, заданной уравнениями 7. Ниже приведены графики, демонстрирующие динамику вектора состояния при различных начальных условиях.

Рис. 7: Моделирование исходной системы  $(x(0) = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T)$ .Рис. 8: Моделирование исходной системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2]^T)$ .

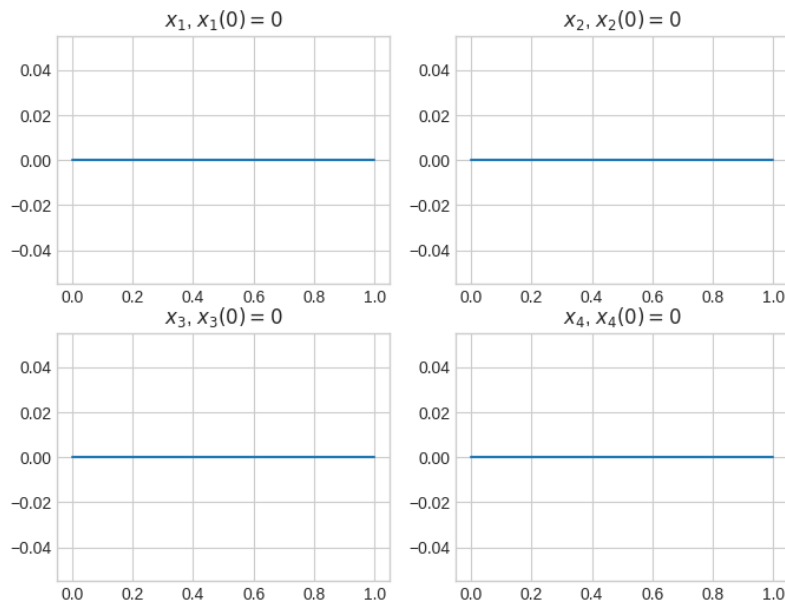


Рис. 9: Моделирование исходной системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T)$ .

Заметим, что при малом времени моделирования динамика систем очень схожая. Построим сравнительные графики при большем времени переходного процесса.

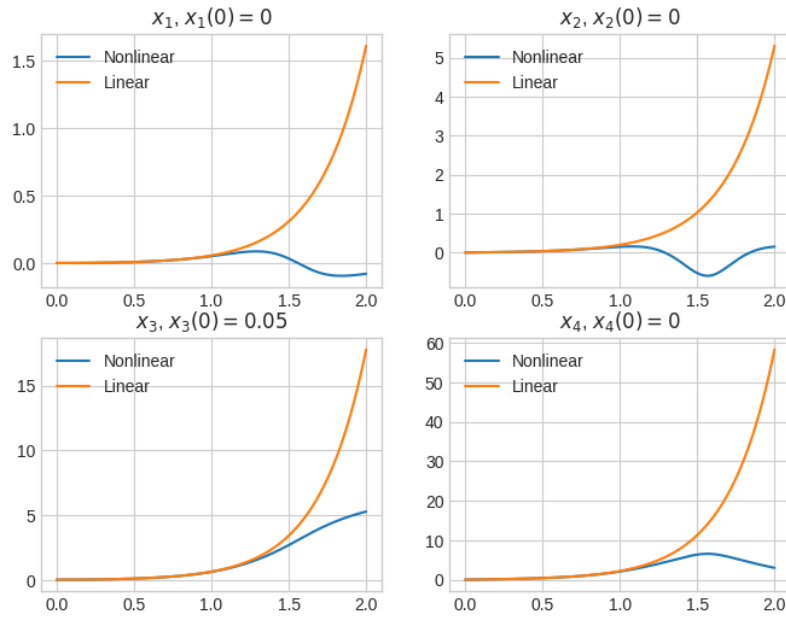


Рис. 10: Сравнительное моделирование систем  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0.05 \ 0]^T)$ .

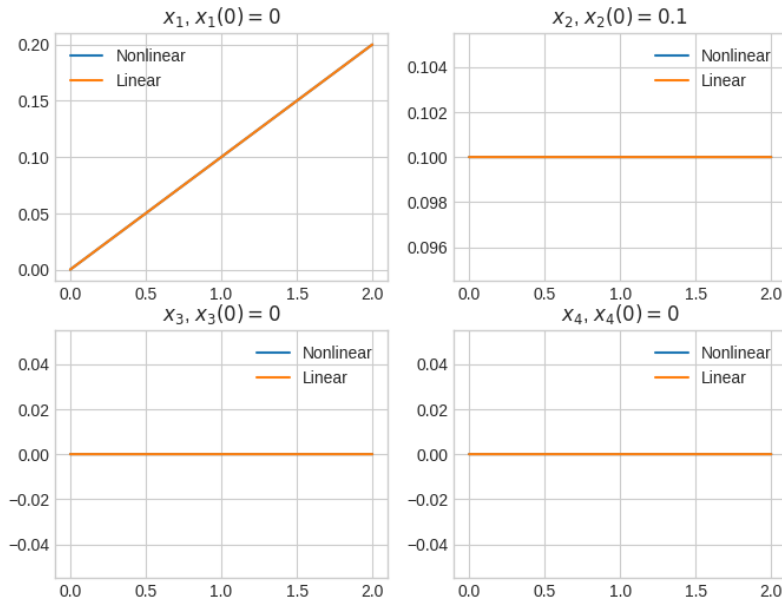
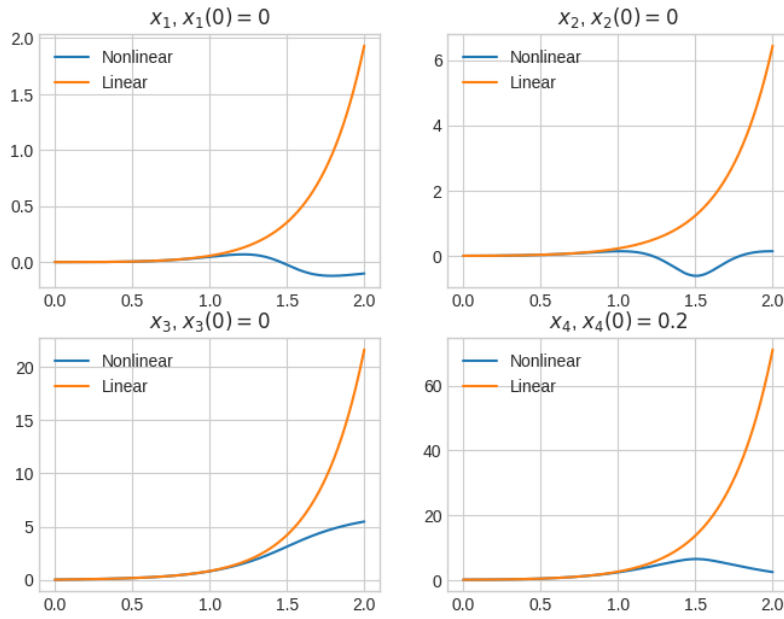
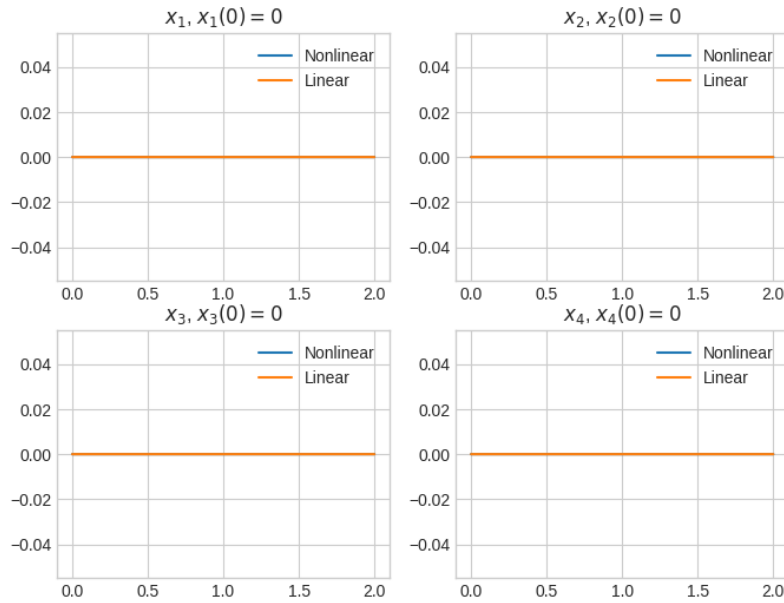


Рис. 11: Сравнительное моделирование систем  $(x(0) = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T)$ .

Рис. 12: Сравнительное моделирование систем  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.2]^T)$ .Рис. 13: Сравнительное моделирование систем  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T)$ .

При увеличении времени моделирования расхождения становятся явно заметными.

### 3 Модальное управление

#### 3.1 Синтез регулятора по состоянию

В этом задании выводится модальный регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Kx \end{cases} \quad (12)$$

Выберем матрицу  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с желаемым спектром. Найдём  $K$  такое, что  $A + BK = P\Gamma P^{-1}$ . Для этого выберем  $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , такую что пара  $(Y, \Gamma)$  – наблюдаема. Синтезируем регулятор:

$$\begin{cases} AP - P\Gamma = BY \\ K = -YP^{-1} \end{cases} \quad (13)$$

Получен регулятор:

$$K = [7.65 \quad 19.64 \quad -292.95 \quad -89.64]$$

$$\sigma(A + BK) = [-2.50 \quad -2.00 \quad -1.50 \quad -1.00]$$

При малых значениях вектора состояния система замкнутая регулятором ведет себя стабильно. При отклонениях работоспособность нарушается. Данные замечания видны на графиках, приведенных ниже.

#### 3.2 Исследование регулятора по состоянию

$\sigma G$	$\max x$	$\max \varphi$	$\max u$
$\begin{bmatrix} -1.00 & -2.00 & -1.50 & -2.50 \\ -0.10 & -0.20 & -0.15 & -0.25 \end{bmatrix}$	7.4	2.7	293.0
$\begin{bmatrix} -1.00 + 1.00j & -1.00 + -1.00j & -2.00 + 2.00j & -2.00 + -2.00j \end{bmatrix}$	115.7	13.1	723.0
	34887.2	201.4	2938438.6

В зависимости от спектра меняется возможность регулятора стабилизировать систему.

#### 3.3 Синтез наблюдателя

Рассмотрим систему наблюдателя:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases} \quad (14)$$

Для синтеза наблюдателя подбирается матрица  $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  с желаемым спектром и матрица  $Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ , такая что пара  $(\Gamma, Y)$  управляема.

$$L = [7.65 \quad 19.64 \quad -292.95 \quad -89.64]$$

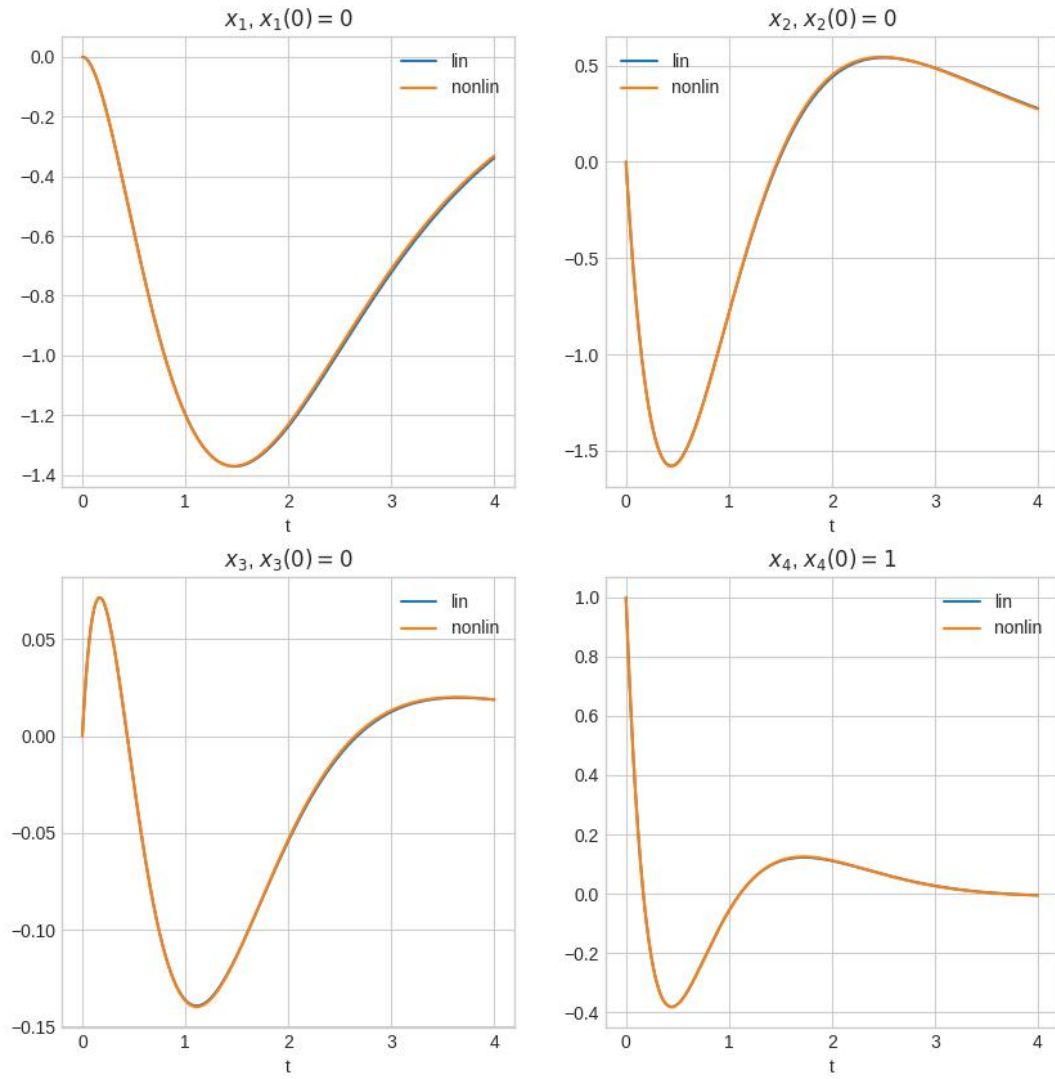


Рис. 14: Задание 3.1. Динамика системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1])$ .

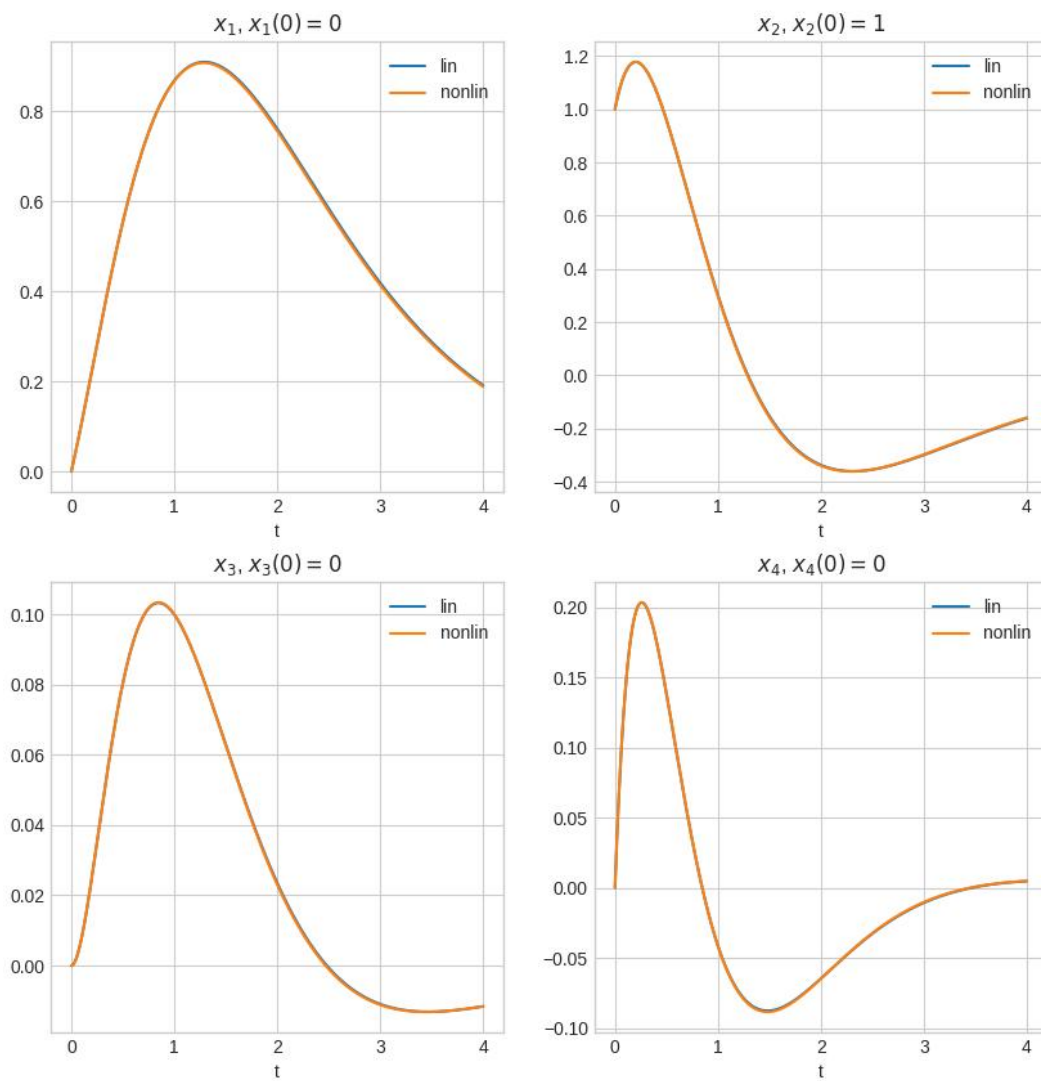


Рис. 15: Задание 3.1. Динамика системы  $(x(0) = [0 \ 1 \ 0 \ 0])$ .



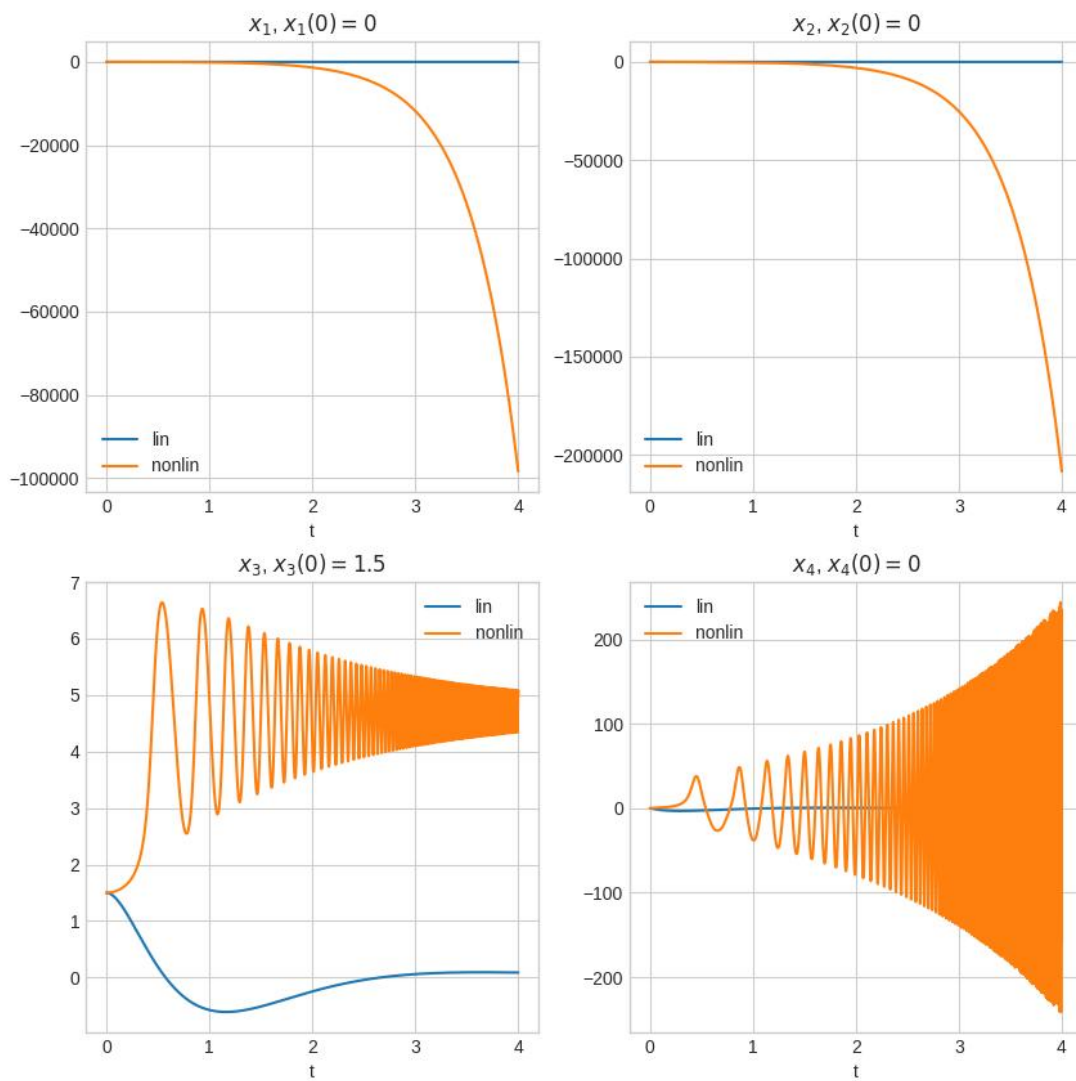


Рис. 16: Задание 3.1. Динамика системы  $(x(0) = [0 \ 0 \ 1.5 \ 0])$ .

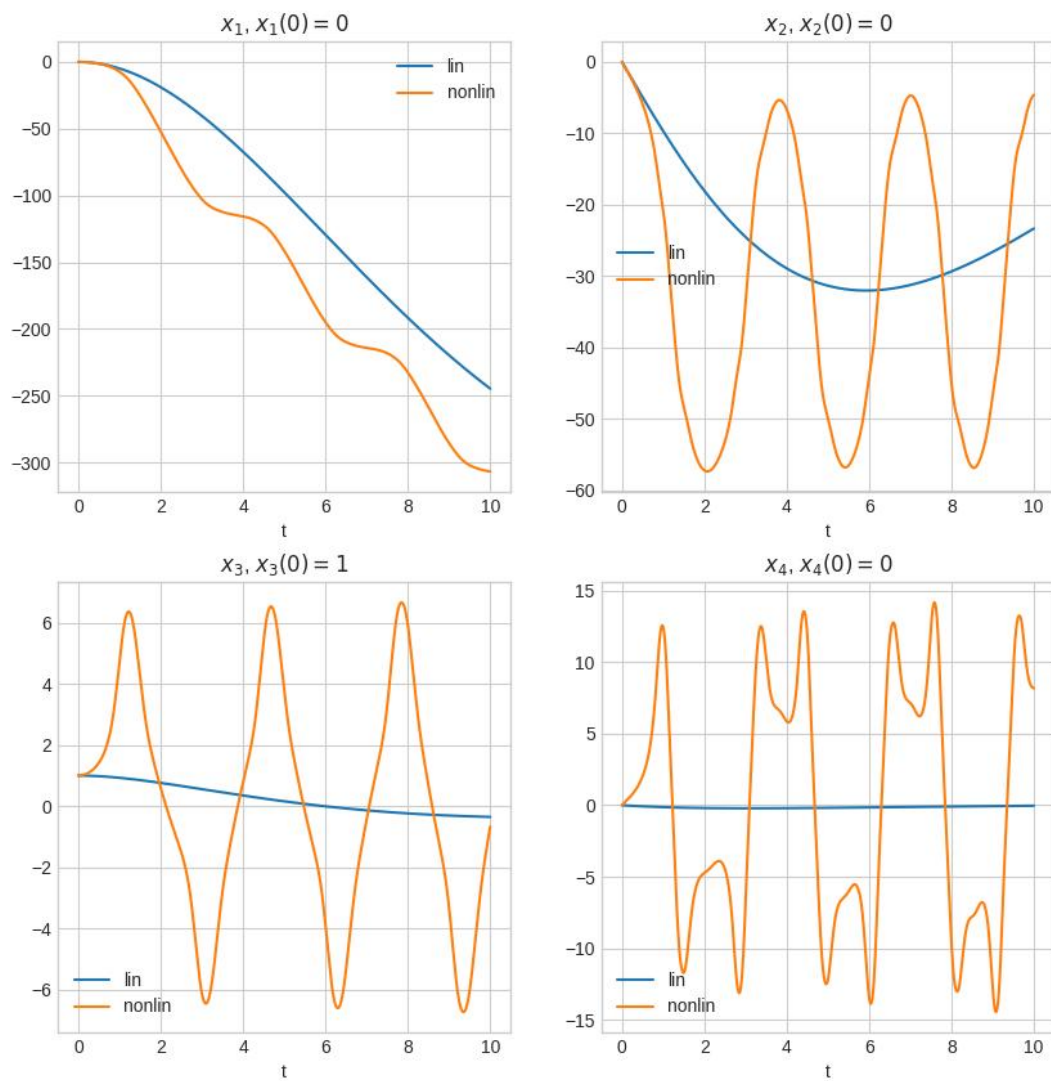


Рис. 17: Задание 3.2. Динамика системы  $(\sigma(G) = [-0.10 \quad -0.20 \quad -0.15 \quad -0.25])$ .

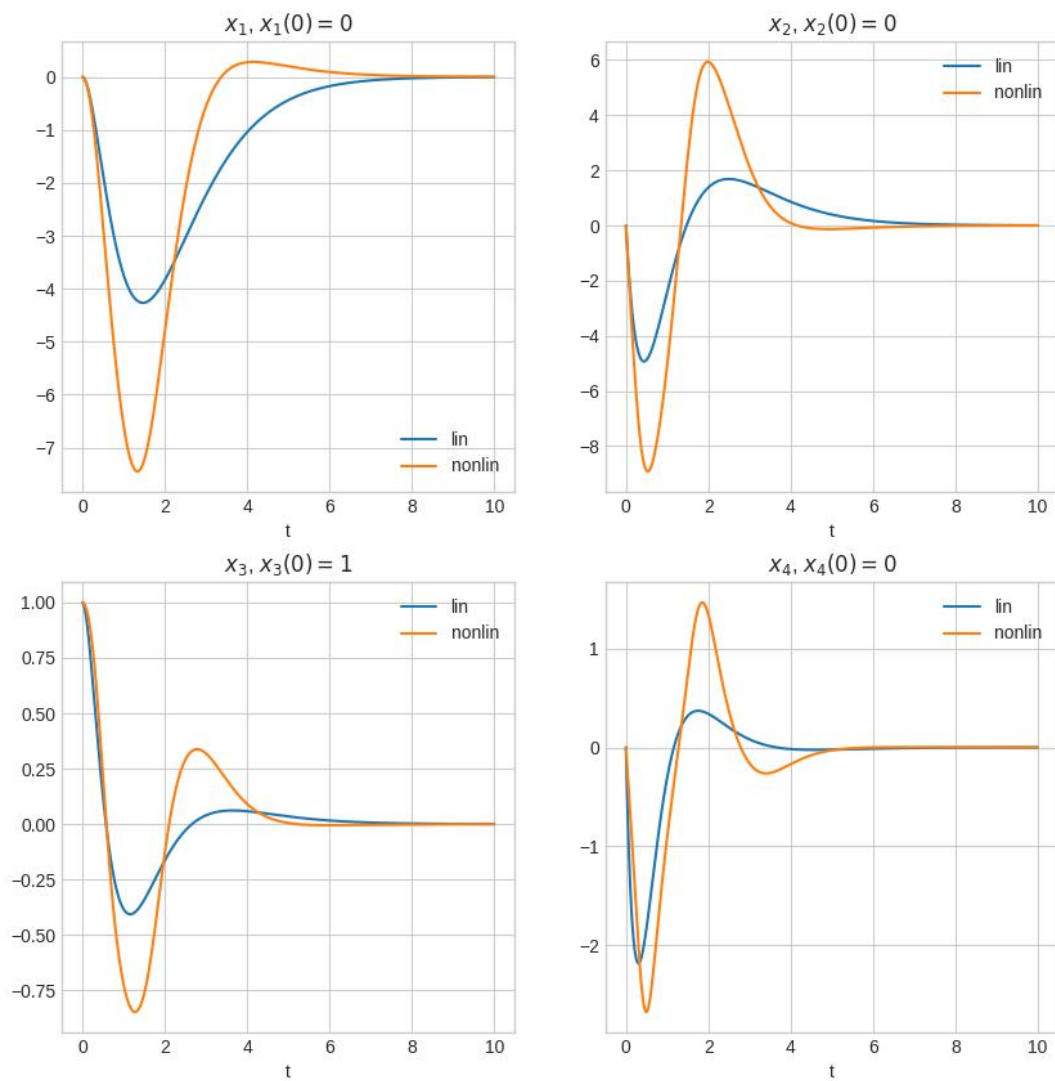


Рис. 18: Задание 3.2. Динамика системы  $(\sigma(G) = [-1.00 \quad -2.00 \quad -1.50 \quad -2.50])$ .

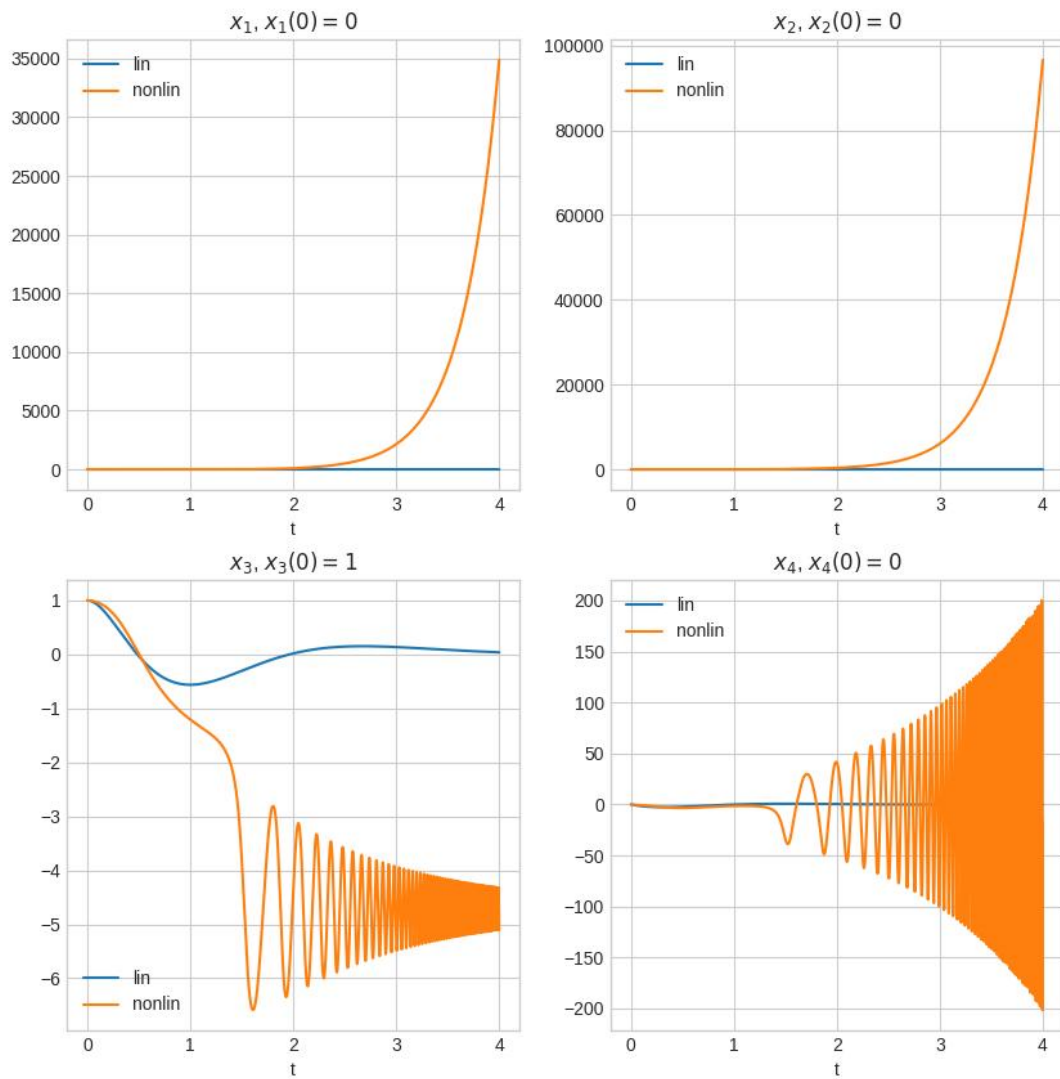


Рис. 19: Задание 3.2. Динамика системы  $(\sigma(G) = [-1.00 + 1.00j \quad -1.00 + -1.00j \quad -2.00 + 2.00j \quad -2.00 + -2.00j])$

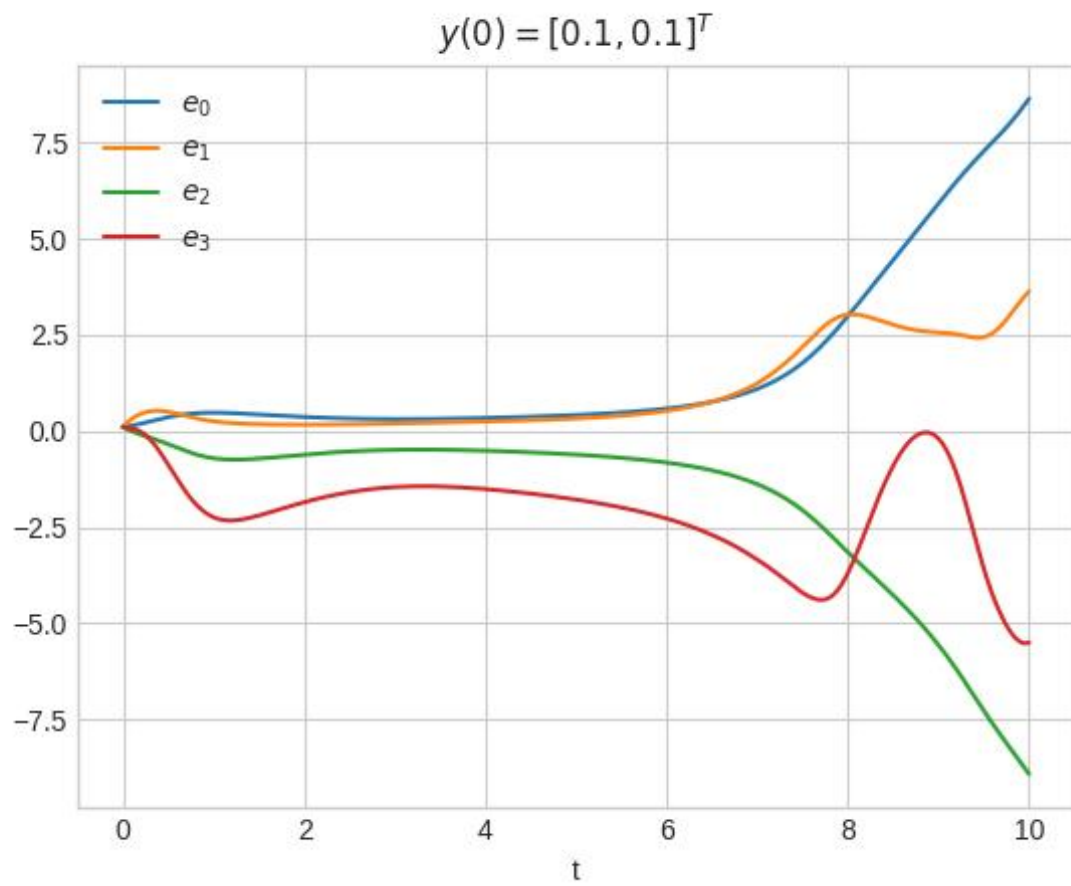


Рис. 20: Задание 3.3. Динамика ошибки.

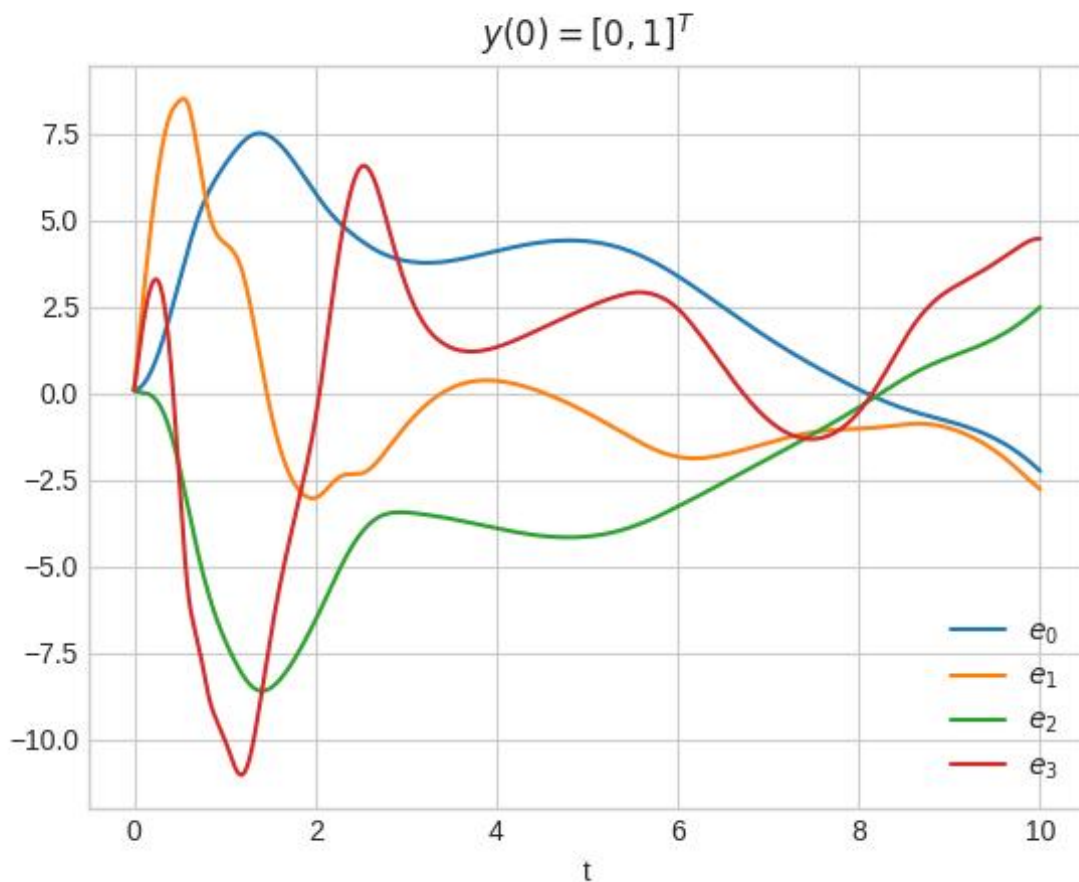


Рис. 21: Задание 3.3. Динамика ошибки.

$$\sigma(A + LC) = [-2.50 \quad -2.00 \quad -1.50 \quad -1.00]$$

На графиках видно, что не при любых начальных условиях наблюдатель сходится.

### 3.4 Исследование наблюдателя

Не при любом устойчивом спектре наблюдатель устойчив.

$$L = [7.65 \quad 19.64 \quad -292.95 \quad -89.64]$$

$$\Gamma = \text{diag}(-1, -2, -1.5, -2.5)$$

$$L = [7.65 \quad 19.64 \quad -292.95 \quad -89.64]$$

$$\Gamma = \text{diag}(-0.1, -0.2, -0.15, -0.25)$$

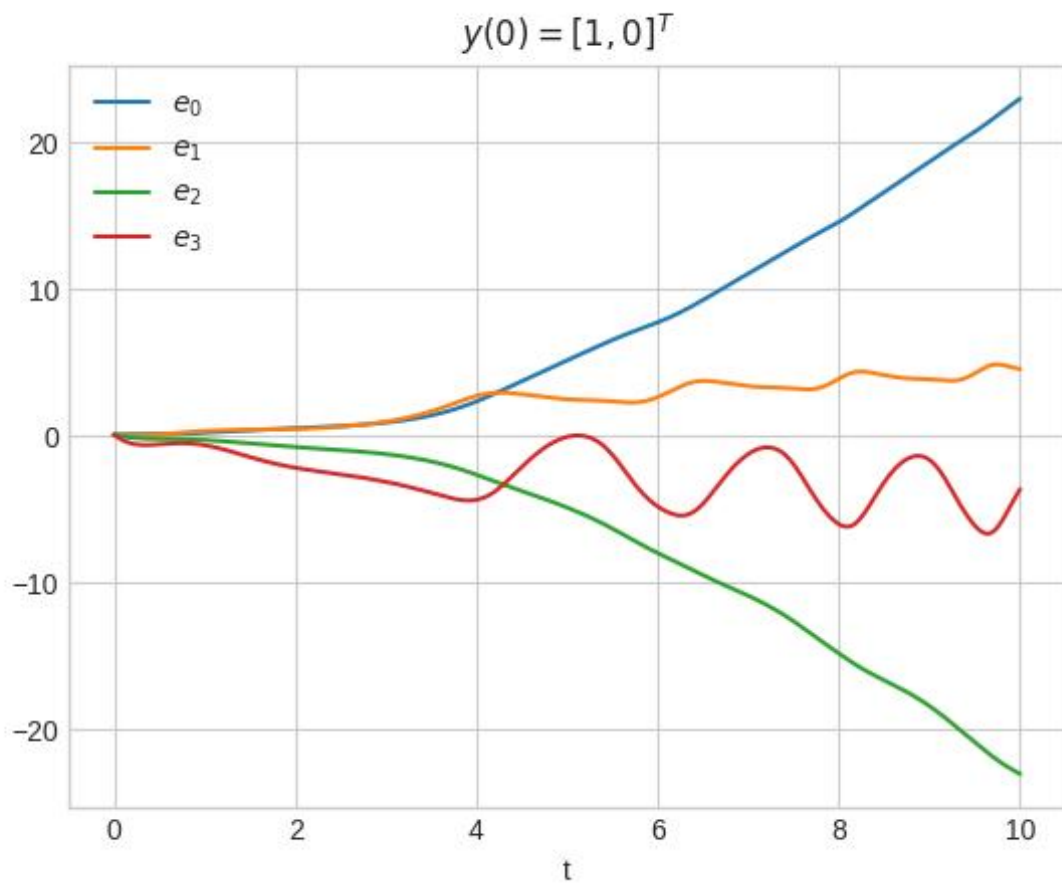


Рис. 22: Задание 3.3. Динамика ошибки.

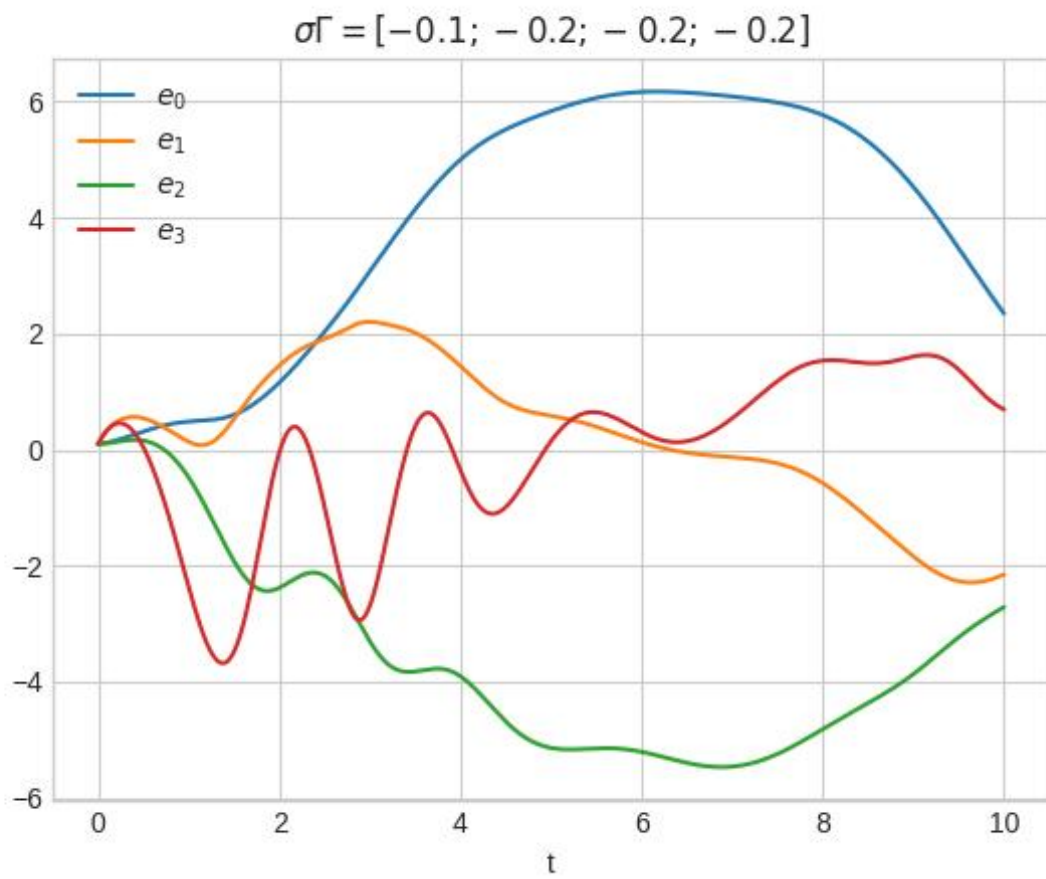


Рис. 23: Задание 3.4. Динамика ошибки.



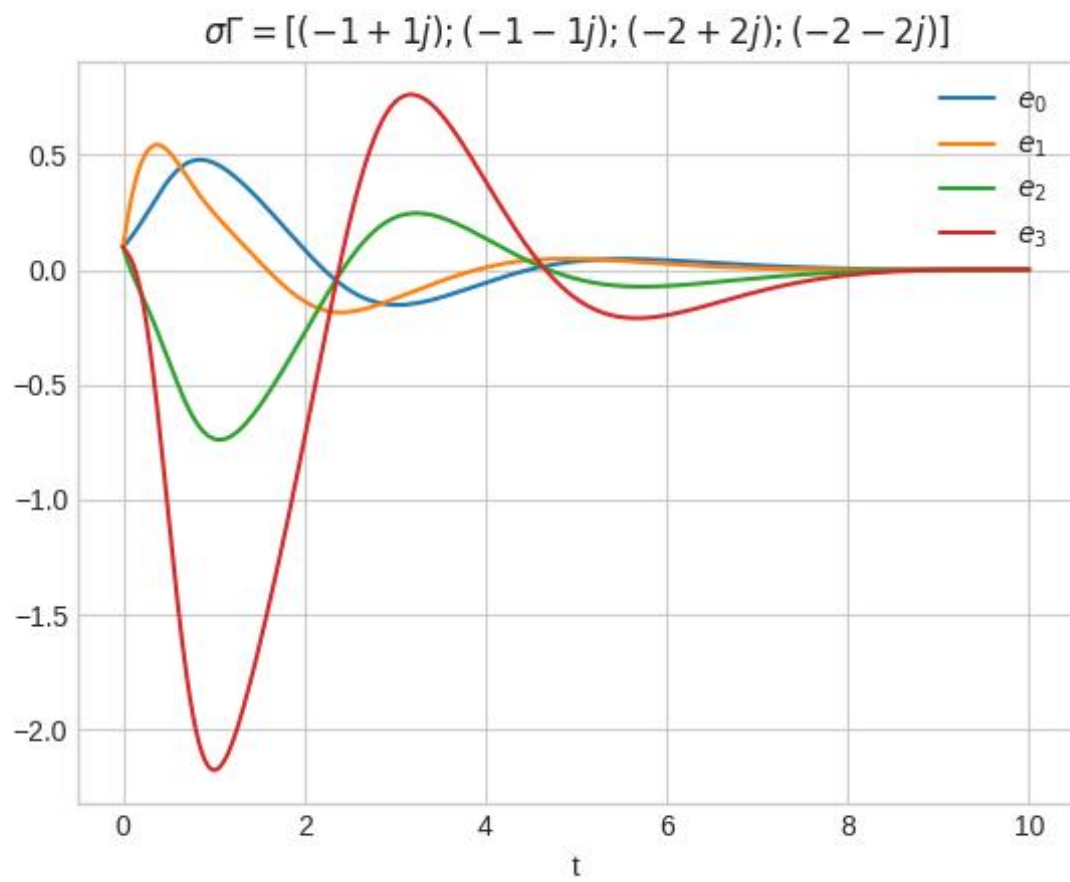


Рис. 24: Задание 3.4. Динамика ошибки.

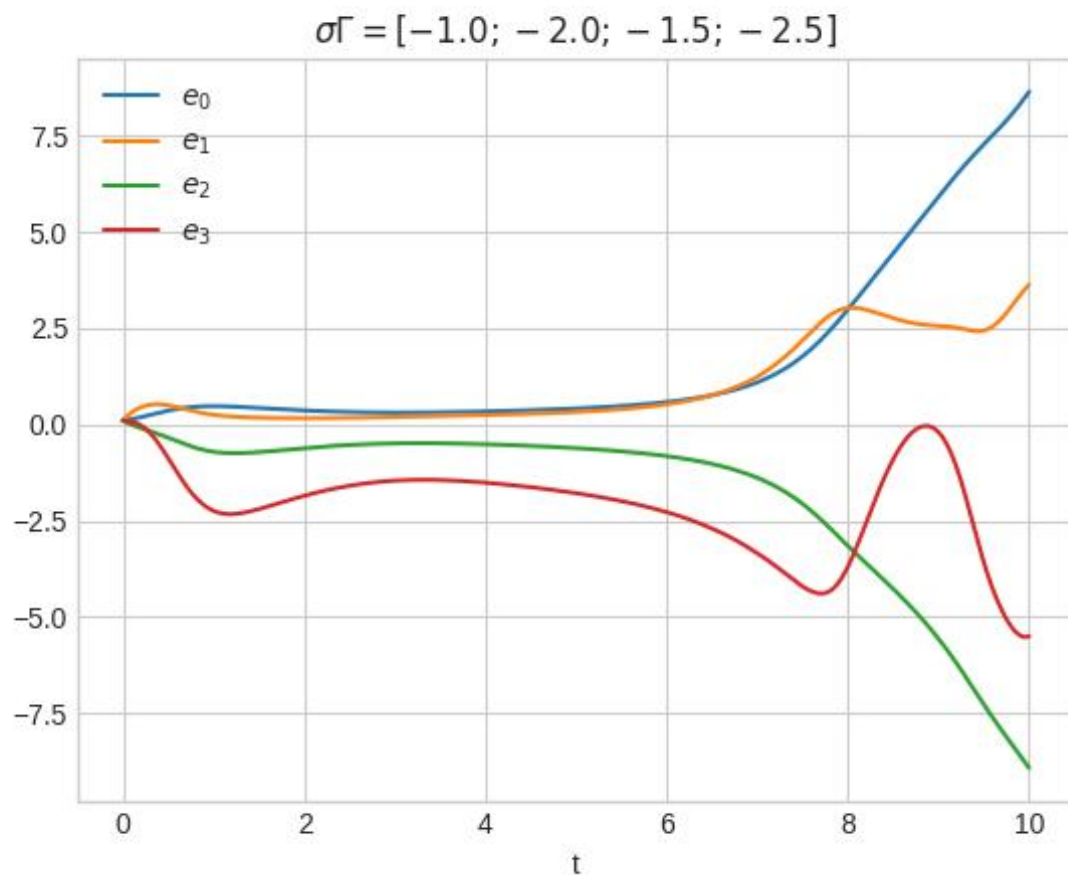


Рис. 25: Задание 3.4. Динамика ошибки.

$$L = [7.65 \quad 19.64 \quad -292.95 \quad -89.64]$$

$$\Gamma = \text{diag}(-1 \pm j, -2 \pm j)$$

### 3.5 Синтез регулятора по выходу

На основе двух предыдущих пунктов получен регулятор по выходу.

$$L = \begin{bmatrix} 1.05 & 1.05 \\ -1.74 & -1.74 \\ -8.05 & -8.05 \\ -26.79 & -26.79 \end{bmatrix}$$

$$K = [7.65 \quad 19.64 \quad -292.95 \quad -89.64]$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 1.00 & -1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & -2.00 & -2.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.00 & -2.00 \end{bmatrix}$$

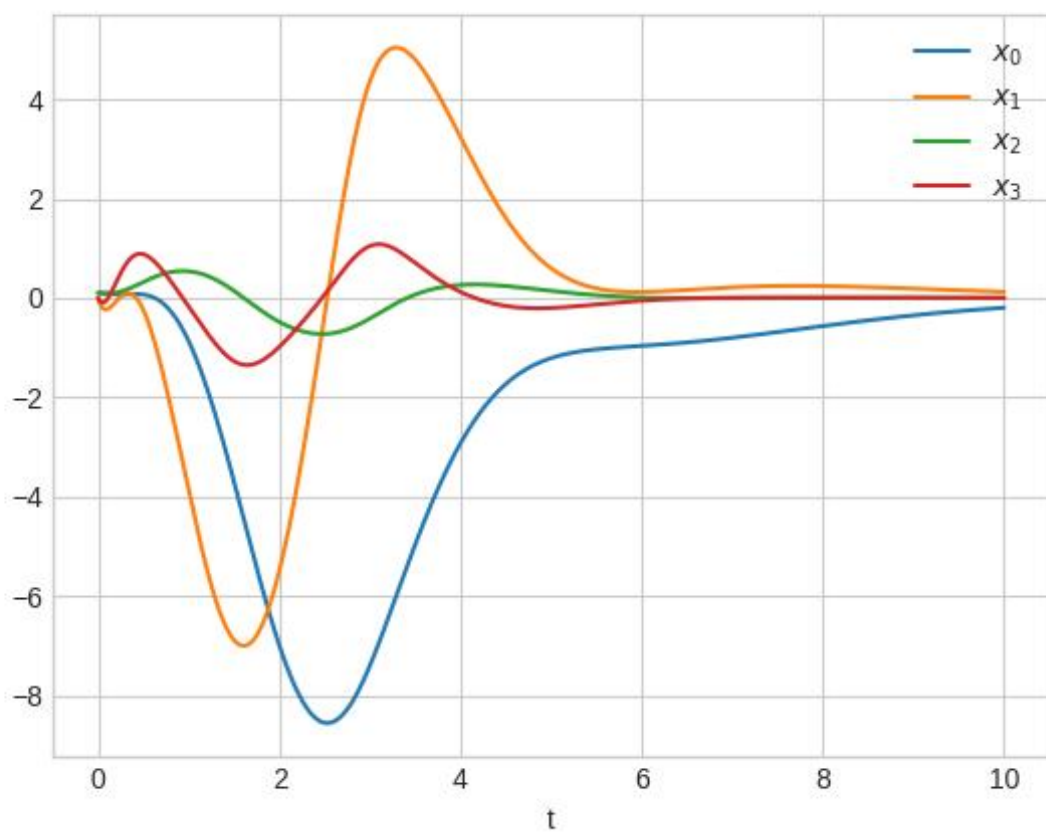


Рис. 26: Задание 3.5. Динамика компонент системы.

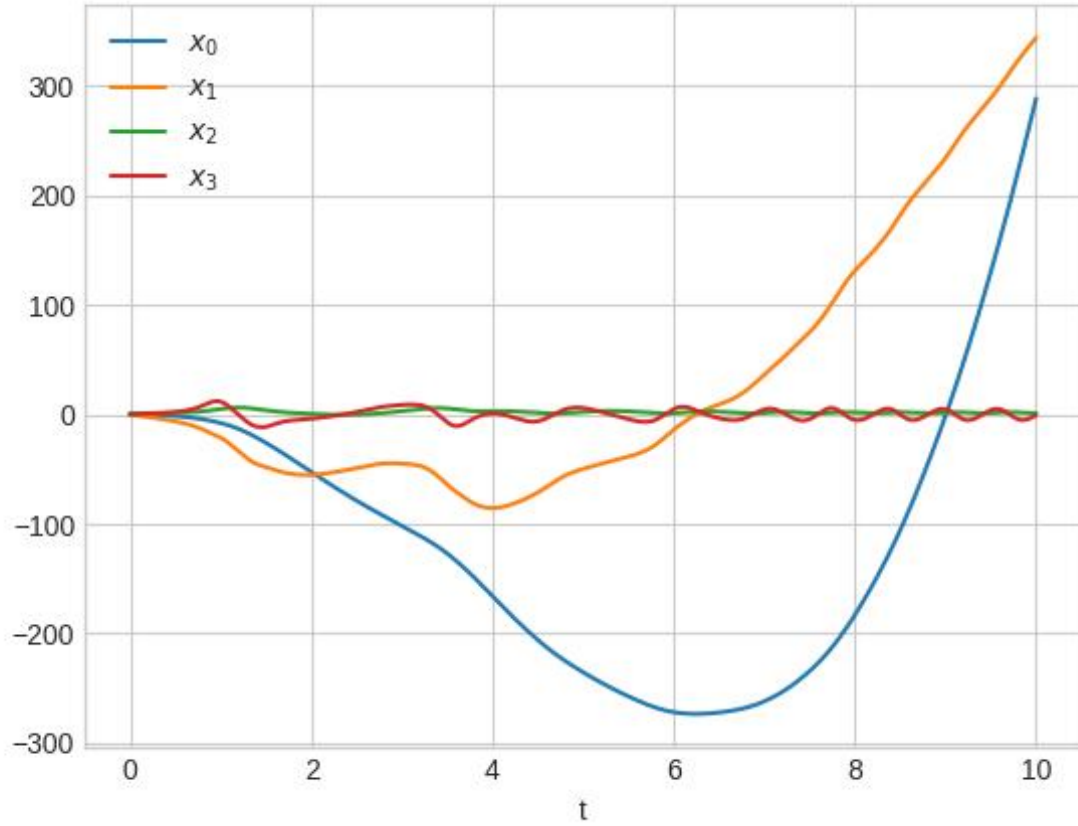


Рис. 27: Задание 3.5. Динамика компонент системы  $(\sigma(G) = [-0.10 \ -0.20 \ -0.15 \ -0.25])$ .

Проведя исследование, можно сделать вывод о том, что диапазон начальных условий системы расширяется при выборе спектра с меньшей действительной частью.

## 4 Регуляторы с заданной степенью устойчивости

### 4.1 Синтез регулятора по состоянию

По сути, целью данного регулятора является изменение управляемых собственных чисел так, чтобы  $\forall \lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$ , где  $\alpha$  – степень устойчивости. Для этого используется LMI критерий экспоненциальной устойчивости:

$$\exists Q \succ 0, \alpha > 0 : A^T Q + Q A + 2\alpha Q \preceq 0 \rightarrow \begin{cases} \forall x(0) \text{ А ассимптотически устойчива} \\ \exists c : \|x(t)\| \leq c e^{-\alpha t} \|x(0)\| \end{cases}$$

Для синтеза регулятора с заданной степенью устойчивости  $\alpha$  необходимо найти матрицы  $P$  и  $Y$ , удовлетворяющие неравенствам:

$$P \succ 0, P A^T + A P + 2\alpha P + Y^T B^T + B Y \prec 0 \quad (15)$$

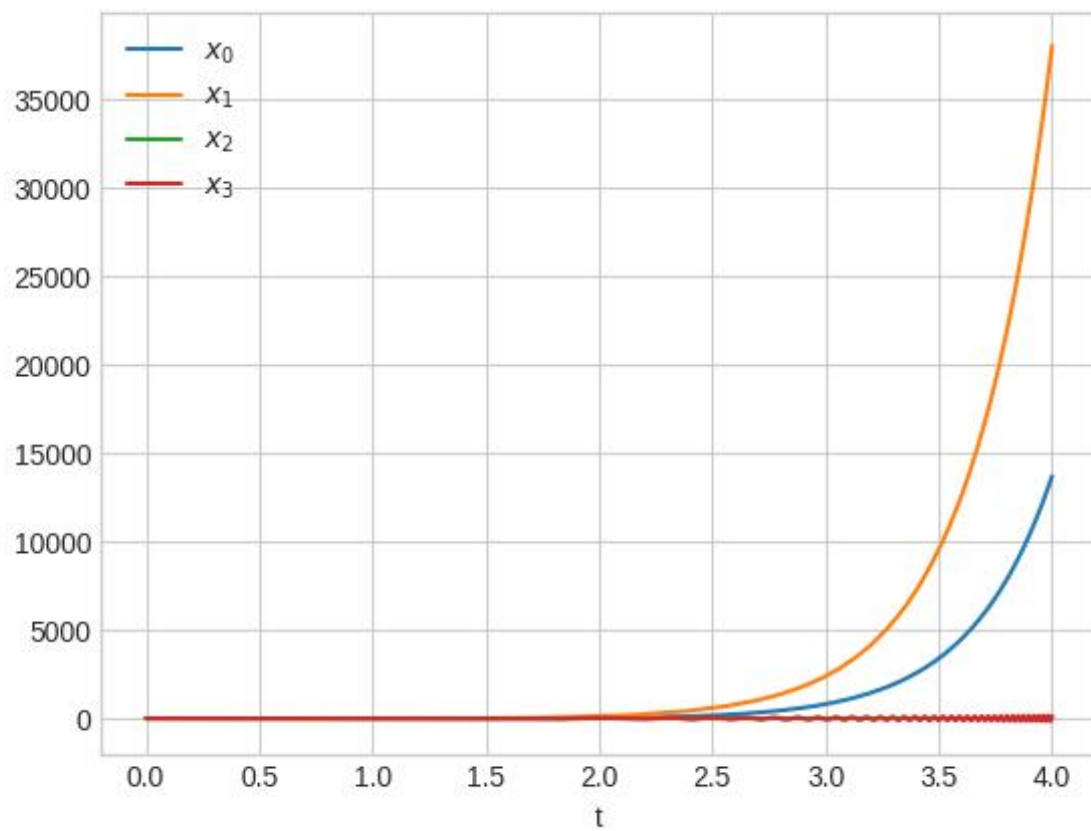


Рис. 28: Задание 3.5. Динамика компонент системы  $(\sigma(G) = [-1.00 + 1.00j \quad -1.00 + -1.00j \quad -2.00 + 2.00j \quad -2.00 + -2.00j])$ .

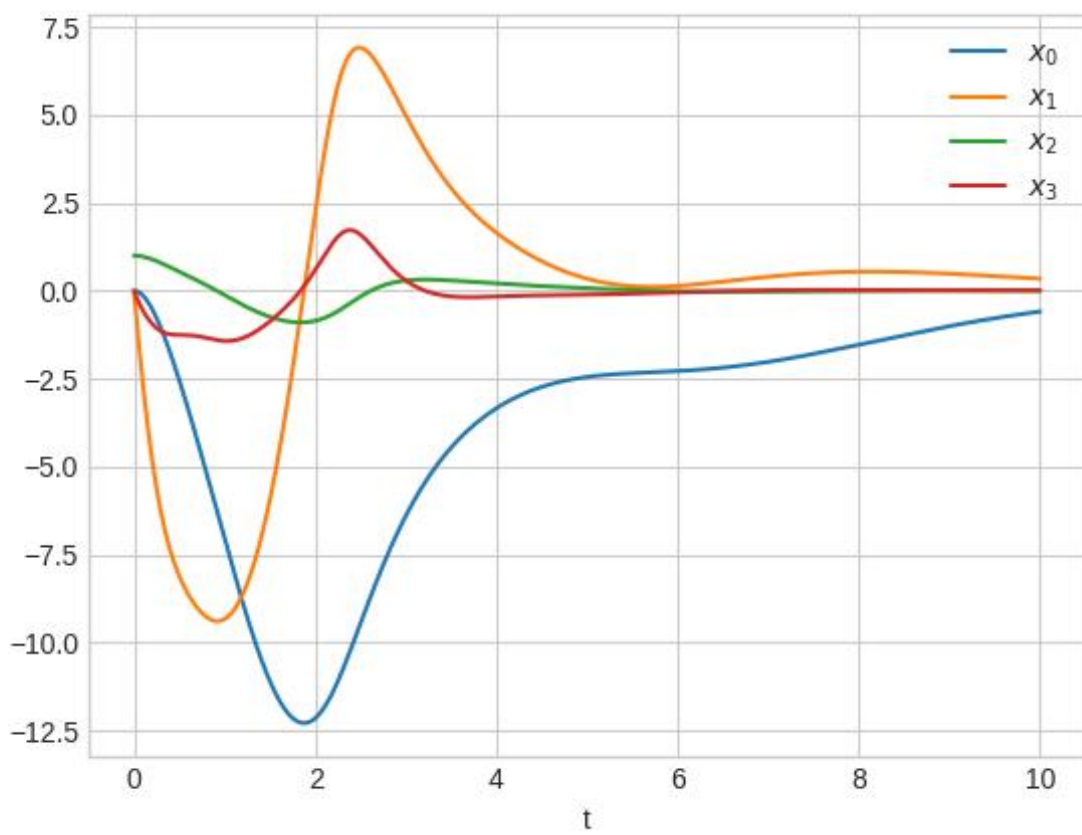


Рис. 29: Задание 3.5. Динамика компонент системы ( $\sigma(G) = [-1 \ -2 \ -1.5 \ -2.5]$ ).

Затем, получим матрицу  $K$ :

$$K = YP^{-1} \quad (16)$$

На практике, довольно часто  $P$  – необратима. Приходится использовать псевдообратную.

$$\alpha = 1$$

$$K = [95.12 \quad 114.09 \quad -732.81 \quad -172.27]$$

$$\text{spec}(A + BK) = [-1.68 + 6.30j \quad -1.68 - 6.30j \quad -1.23 + 0.83j \quad -1.23 - 0.83j]$$

Иногда устойчивость линейной системы нарушается

## 4.2 Исследование регулятора по состоянию

Ниже приведена таблица сравнений при  $x(0) = [0, 0, 0.1, 0]^T$ . Приведено поведение системы при различных начальных условиях.

$\alpha$	$\max x$	$\max \varphi$	$\max u$
0.1	0.27	0.1	20.1
0.8	0.24	0.1	35.5
1.5	0.21	0.1	40.7

Заметим что с увеличением степени устойчивости увеличивается и величина максимального управляющего воздействия.

## 4.3 Синтез регулятора по состоянию с ограничением на управление

В этом задании выводится ограничение на управление  $\|u(t)\| \leq \mu$ . Тогда система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0 \\ P \succ 0 \\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preccurlyeq 0 \\ K = YP^{-1} \end{cases}$$

Проведем моделирование системы при начальных условиях  $x(0) = [0 \quad 0 \quad 0.5 \quad 0]^T$  и различных степенях устойчивости.

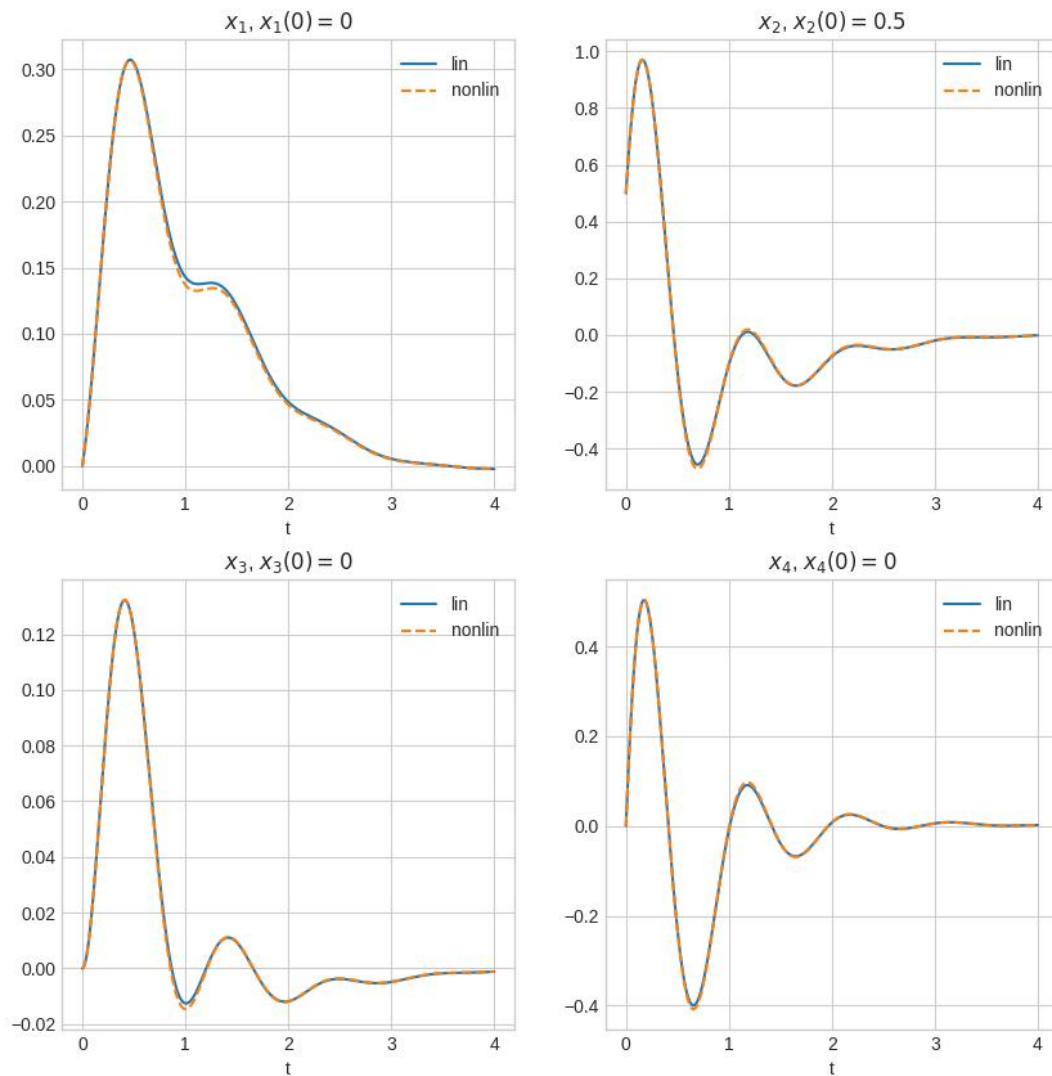


Рис. 30: Задание 4.1. Динамика системы.



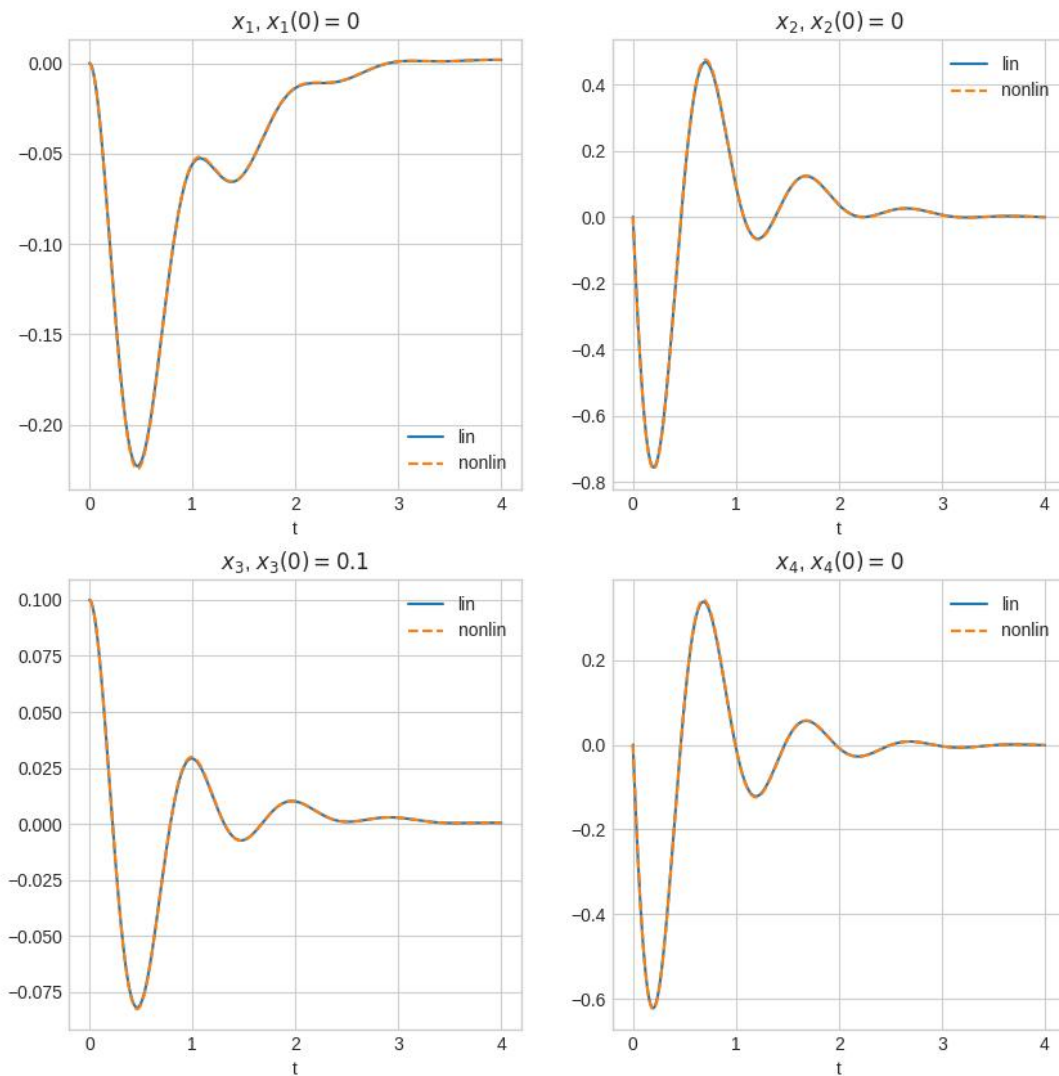


Рис. 31: Задание 4.1. Динамика системы.

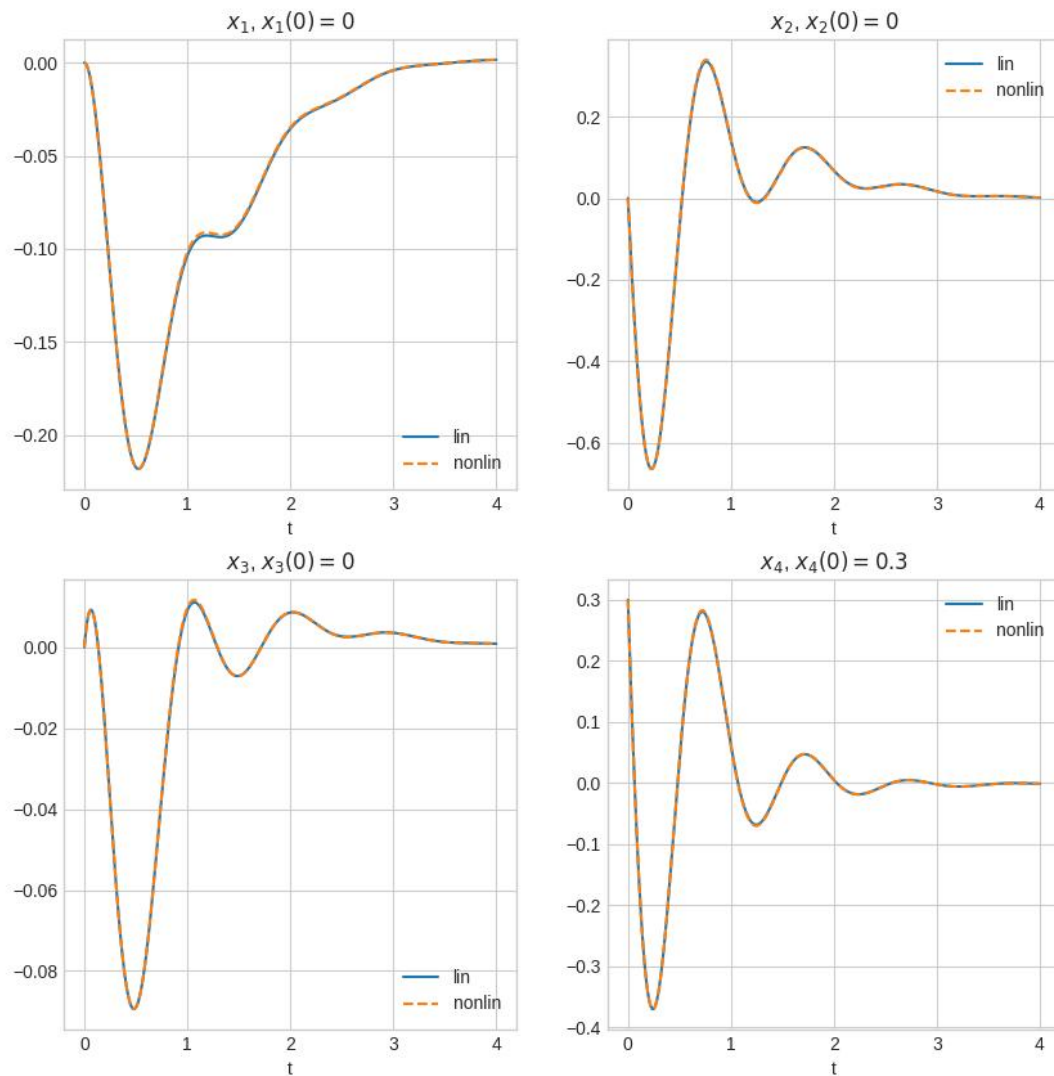


Рис. 32: Задание 4.1. Динамика системы.

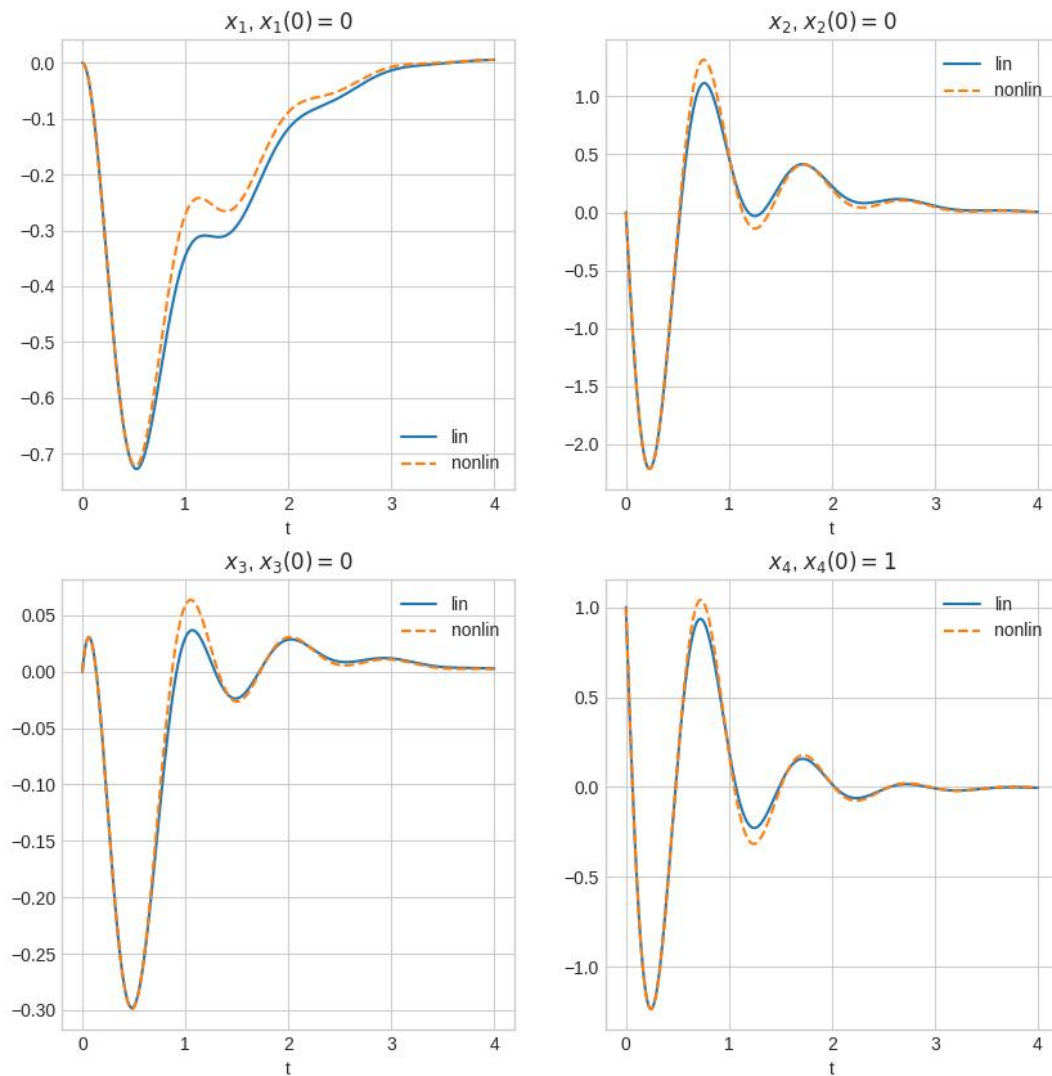


Рис. 33: Задание 4.1. Динамика системы.

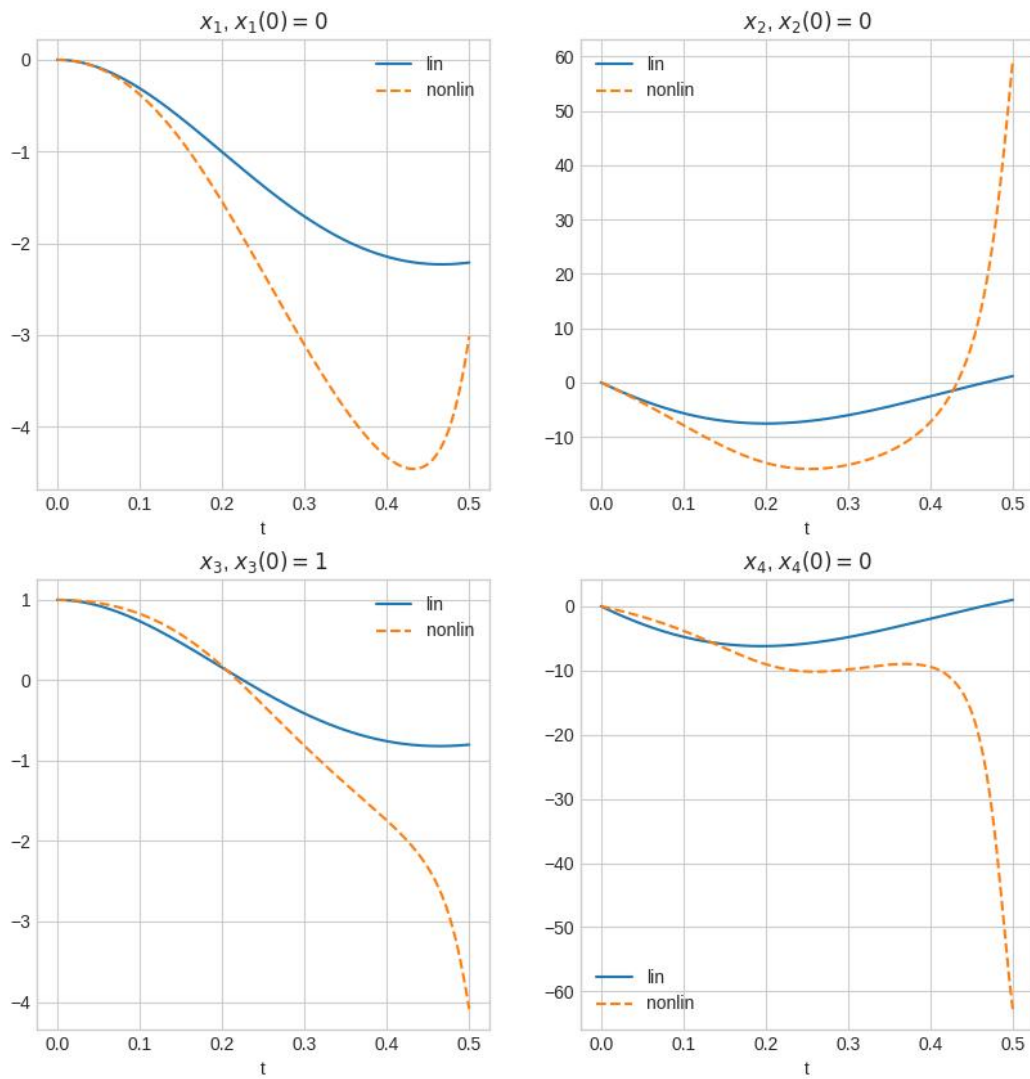


Рис. 34: Задание 4.1. Динамика системы.

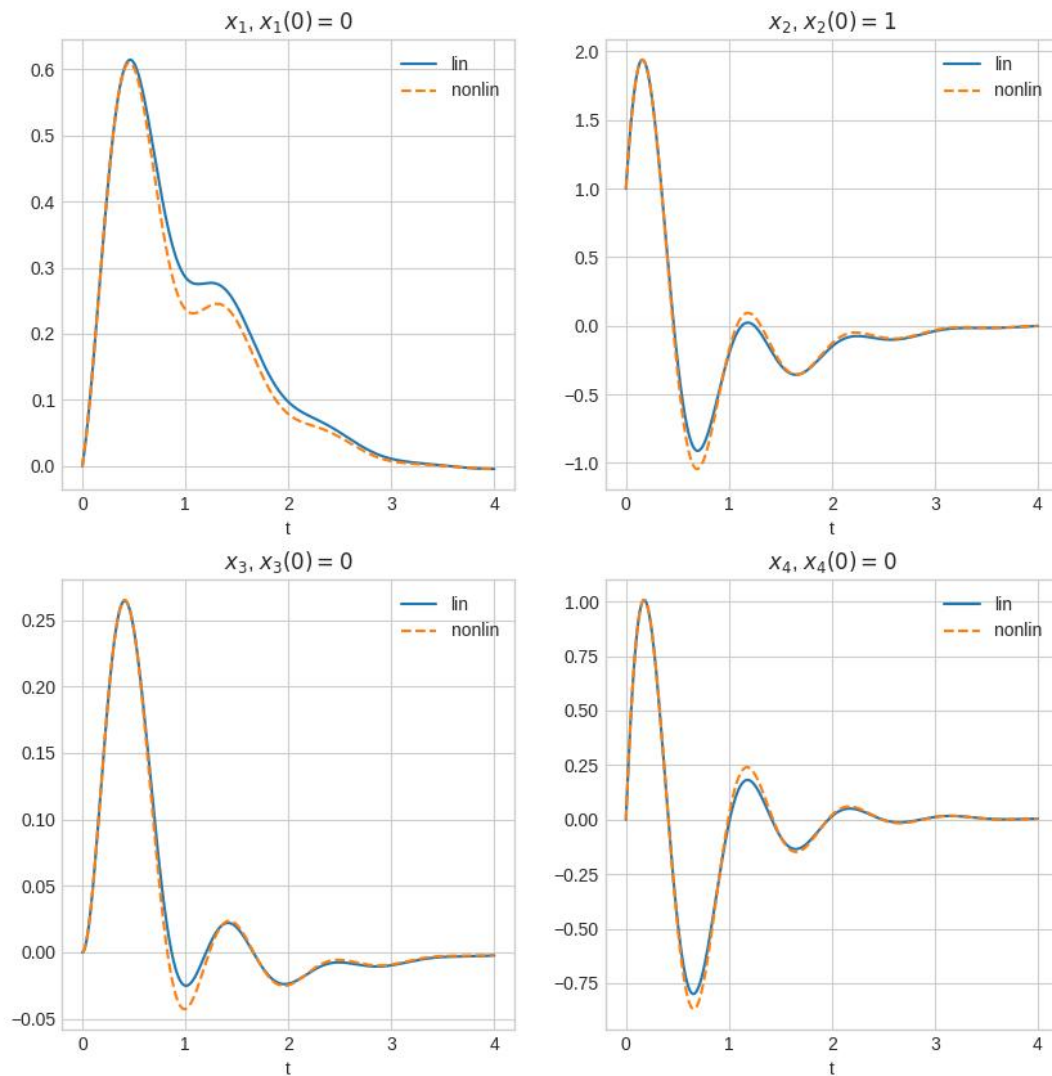


Рис. 35: Задание 4.1. Динамика системы.

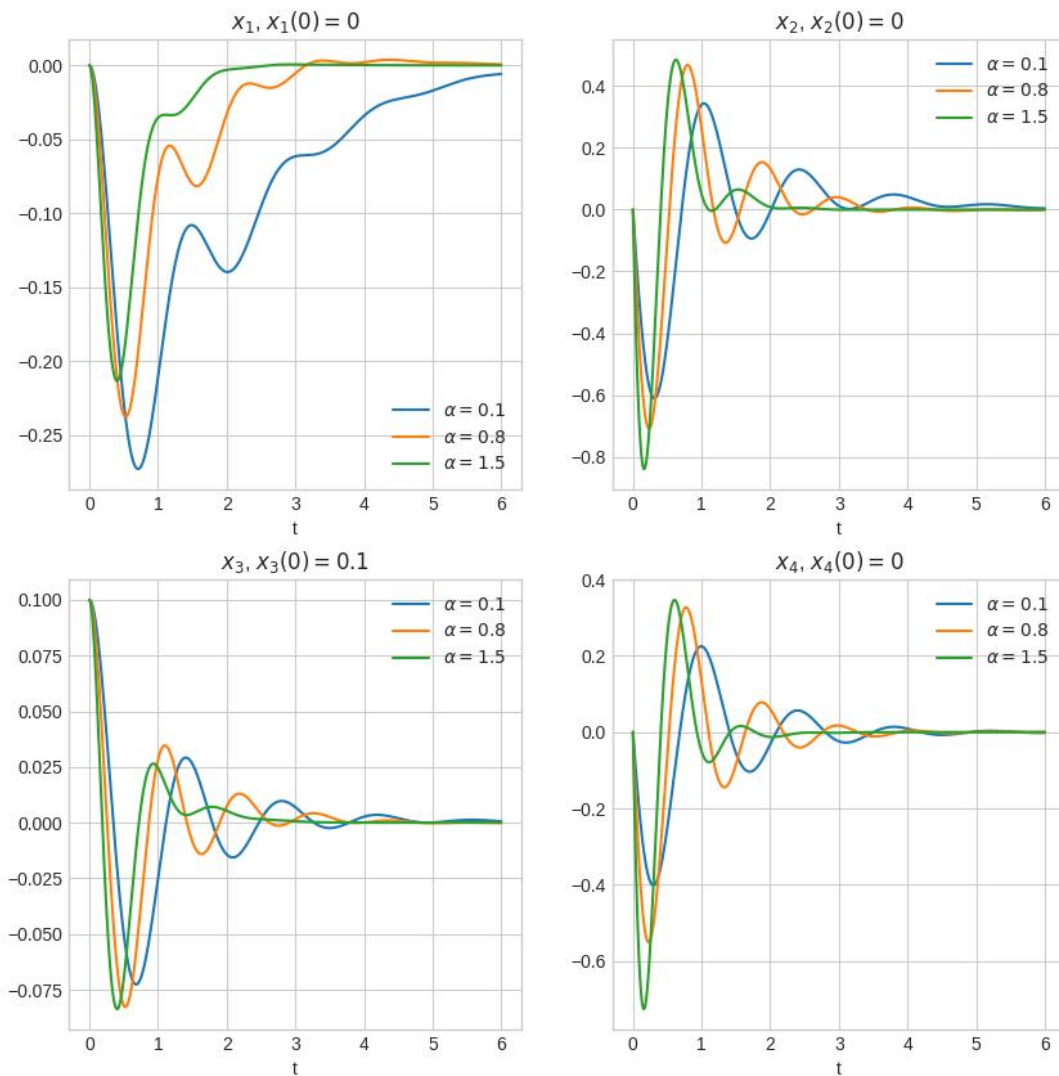


Рис. 36: Задание 4.2. Динамика системы.

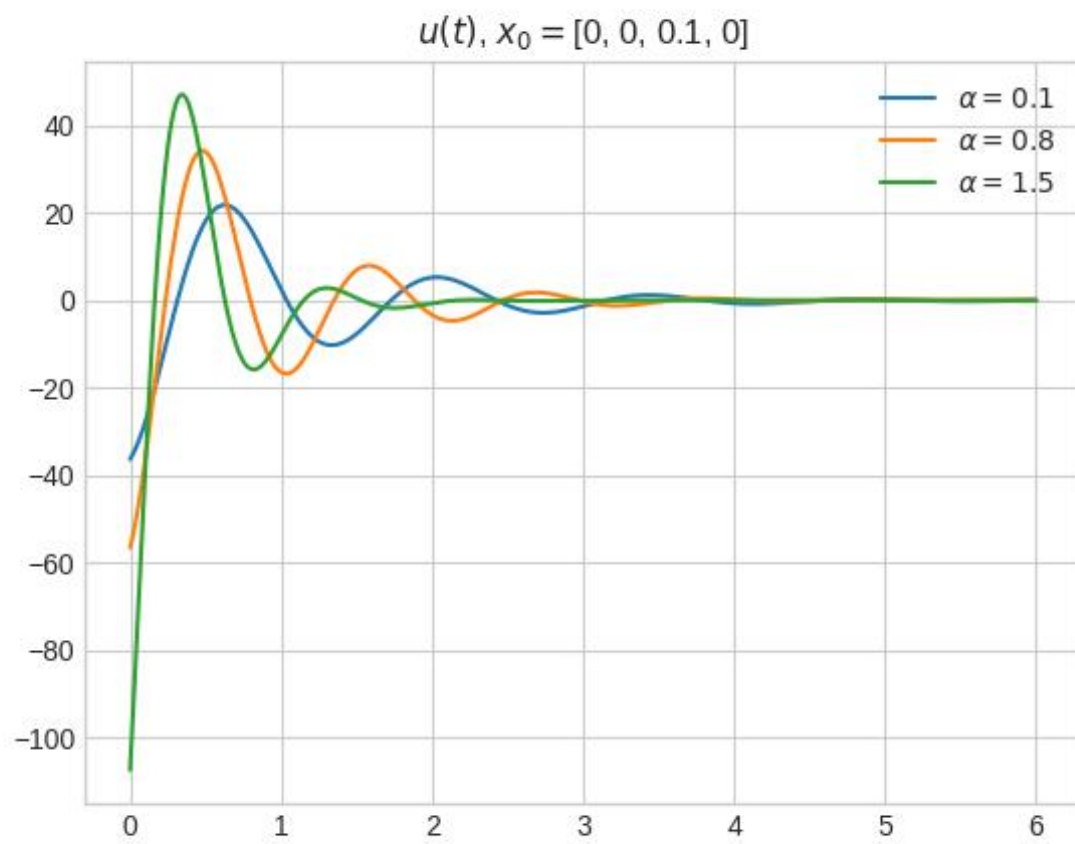


Рис. 37: Задание 4.2. Динамика воздействия.

$$\alpha = 0.1$$

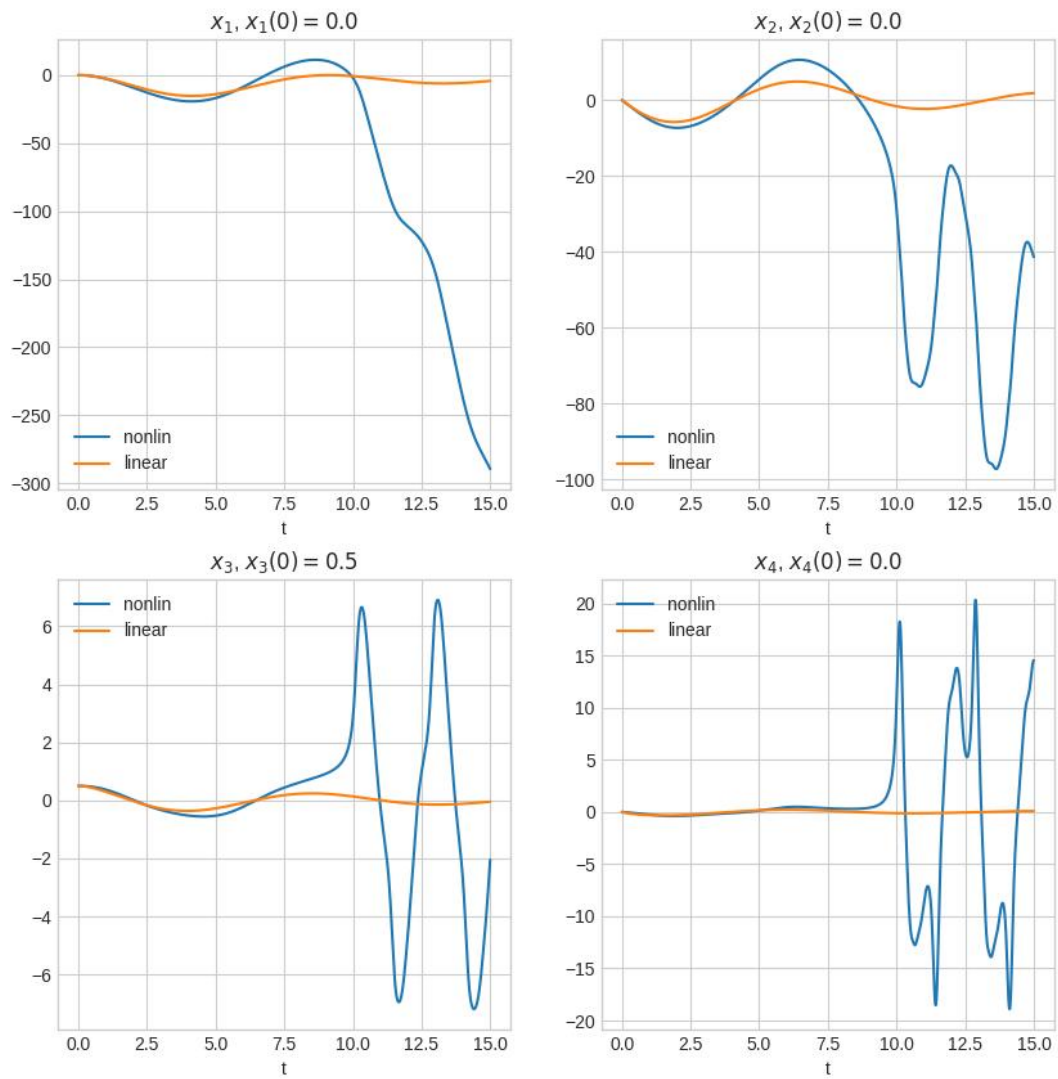


Рис. 38: Задание 4.3. Динамика системы



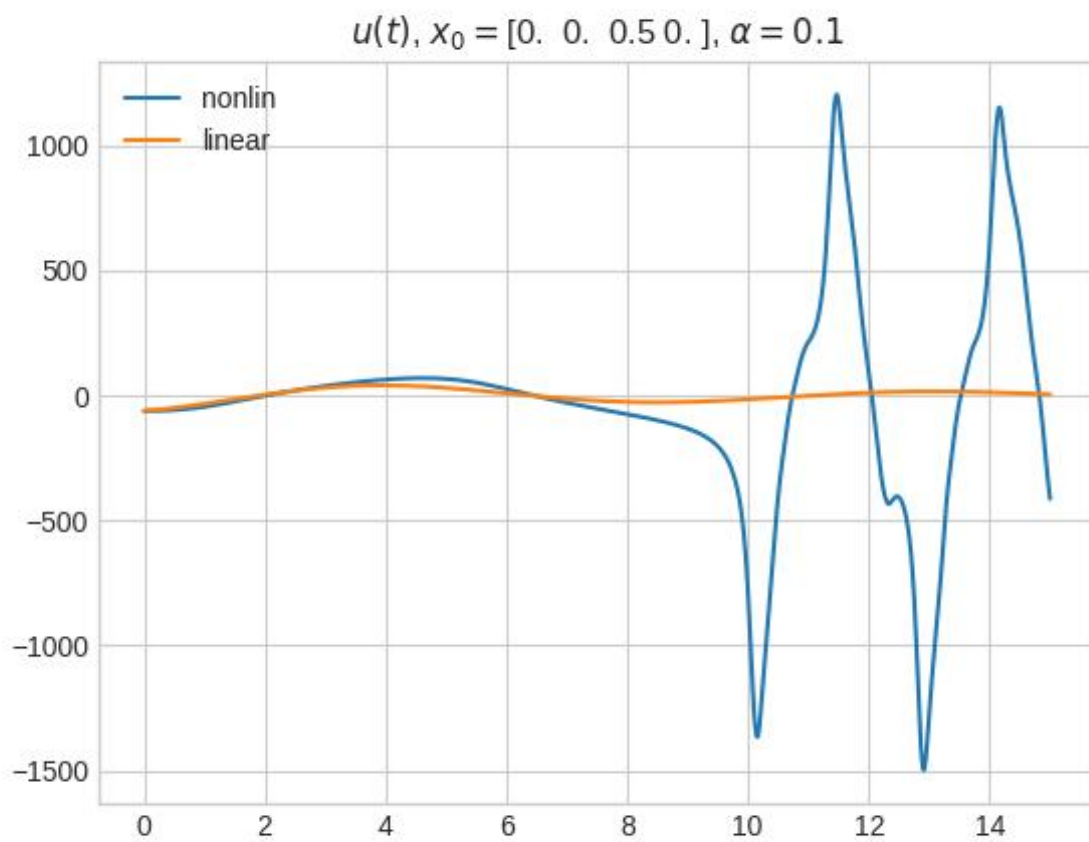


Рис. 39: Задание 4.3. Динамика воздействия

$\alpha = 0.5$

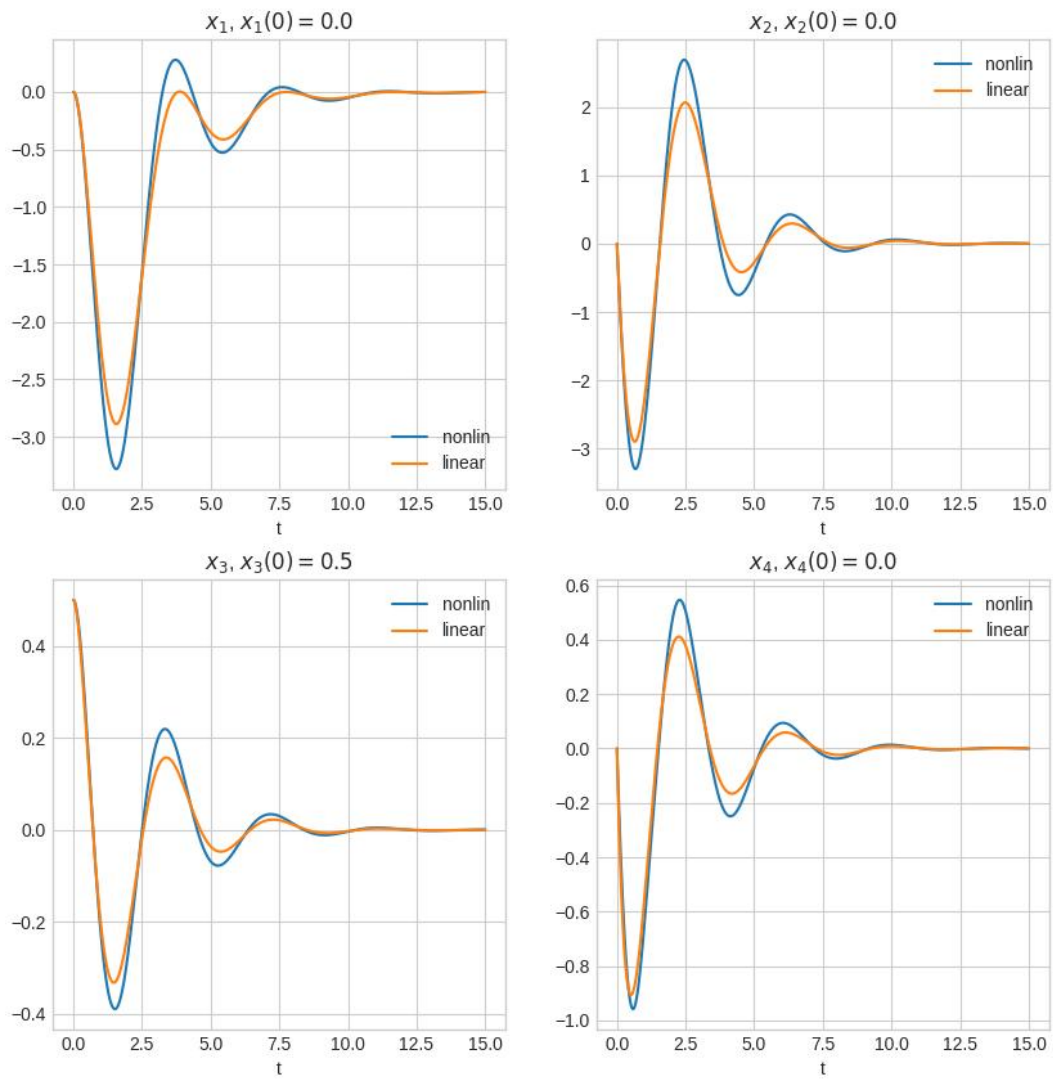


Рис. 40: Задание 4.3. Динамика системы

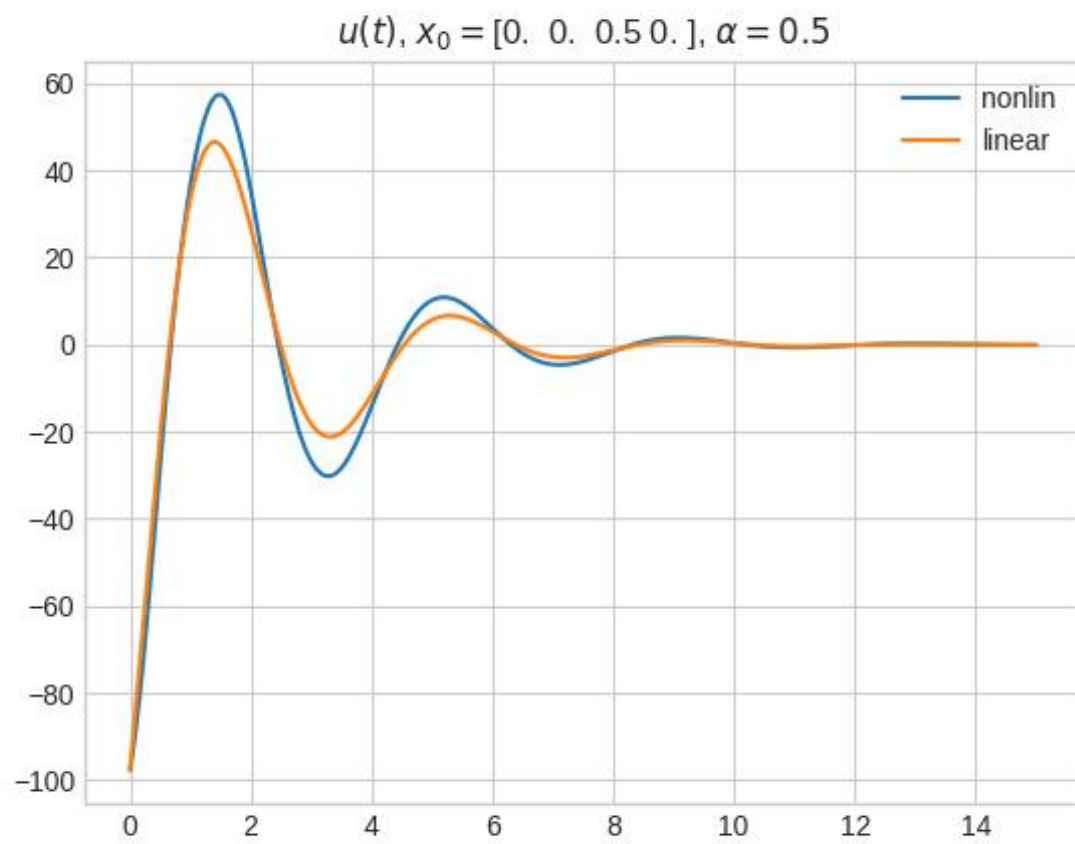


Рис. 41: Задание 4.3. Динамика воздействия

$\alpha = 1$

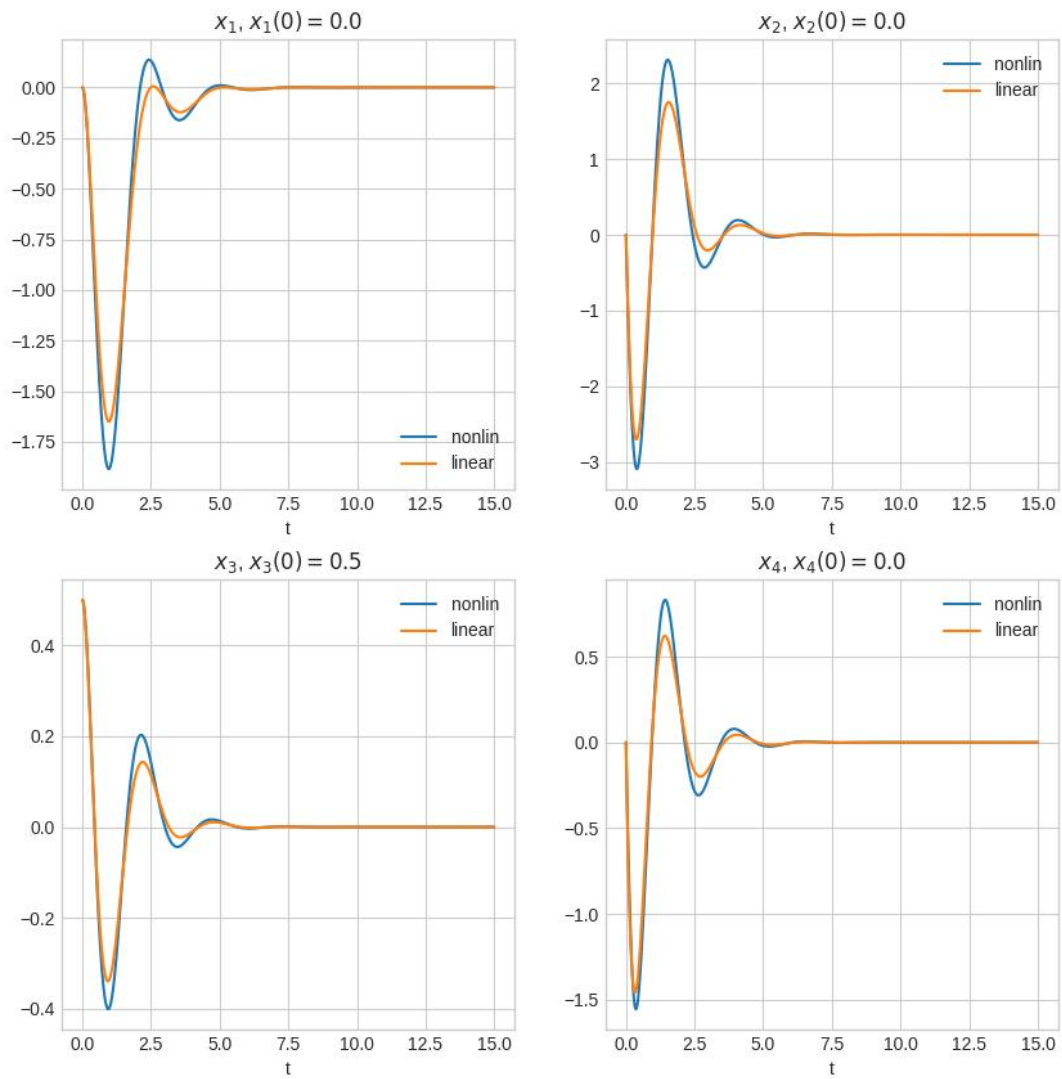


Рис. 42: Задание 4.3. Динамика системы

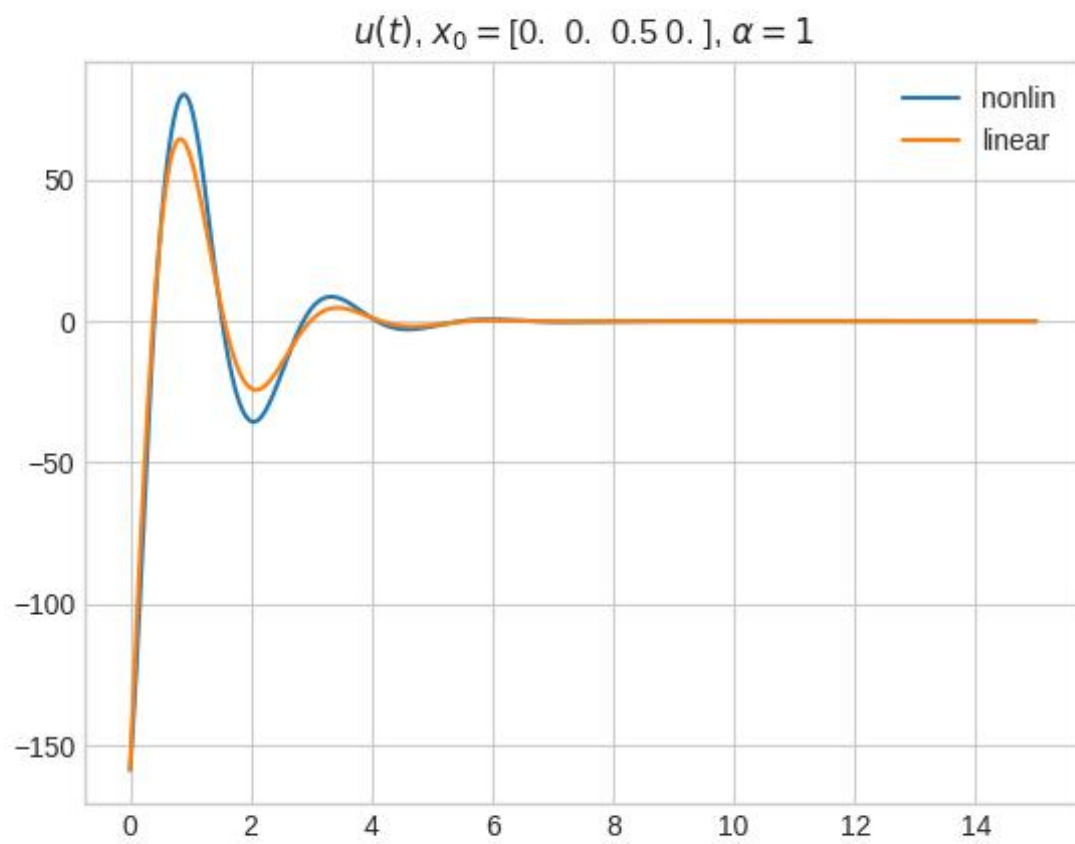


Рис. 43: Задание 4.3. Динамика воздействия

#### 4.4 Синтез наблюдателя

В этом задании выводится наблюдатель заданной степени устойчивости для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Для этого достаточно решить систему:

$$\begin{cases} L = Q^{-1}Y \\ Q \succ 0 \\ A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \preccurlyeq 0 \end{cases}$$

$$\alpha = 1$$

$$L = \begin{bmatrix} -4.48 & -0.63 \\ -8.92 & -2.11 \\ 0.63 & -4.48 \\ 1.11 & -19.92 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + LC) = [-2.31 + 2.32j \quad -2.31 - 2.32j \quad -2.17 + 1.69j \quad -2.17 - 1.69j]$$

#### 4.5 Синтез регулятора по выходу

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы. Так бы это выглядело для линейной системы.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \\ u = K\hat{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \\ \hat{x} = x - e \\ y = Cx \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Удалось стабилизировать нелинейную систему ( $\alpha = 1$ ) [47](#). Проведя исследование, удалось установить, что увеличение степени устойчивости положительно влияет на скорость переходного процесса.

### 5 LQR & фильтр Калмана

#### 5.1 Синтез линейно-квадратичного регулятора

LQR позволяет оптимизировать критерий качества:

$$J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

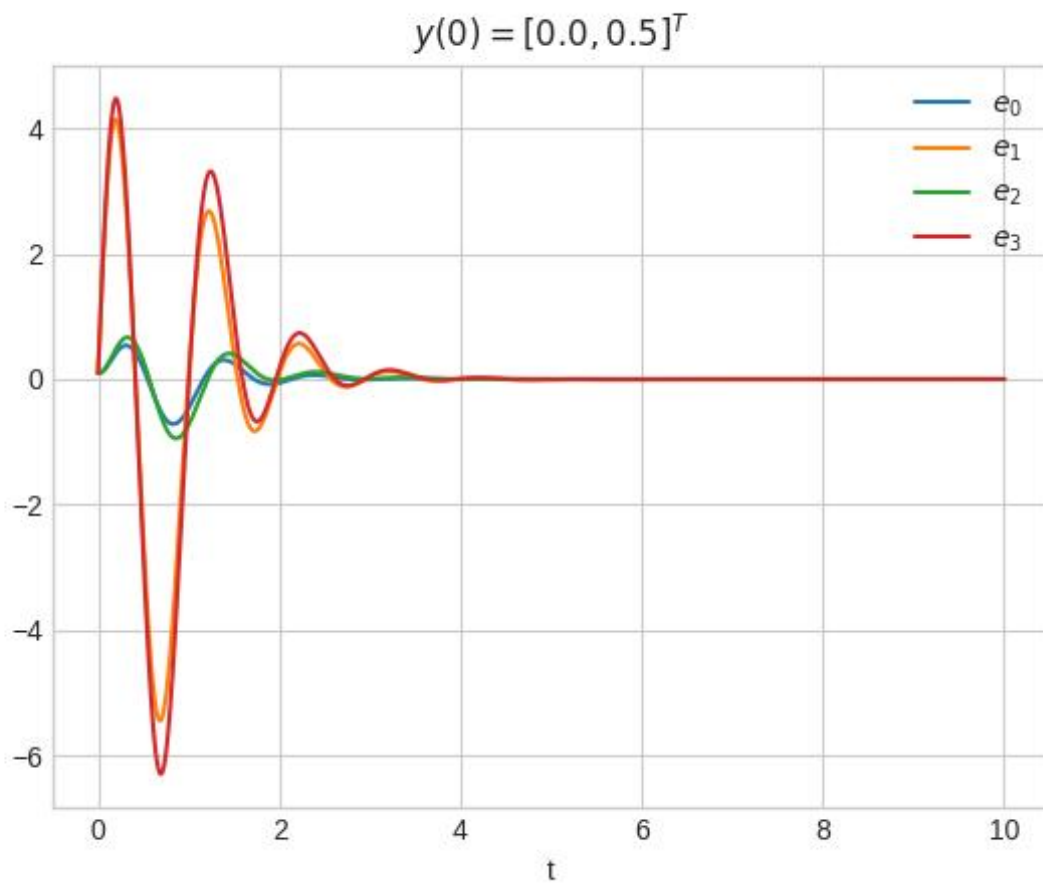


Рис. 44: Задание 4.4. Динамика ошибки наблюдателя

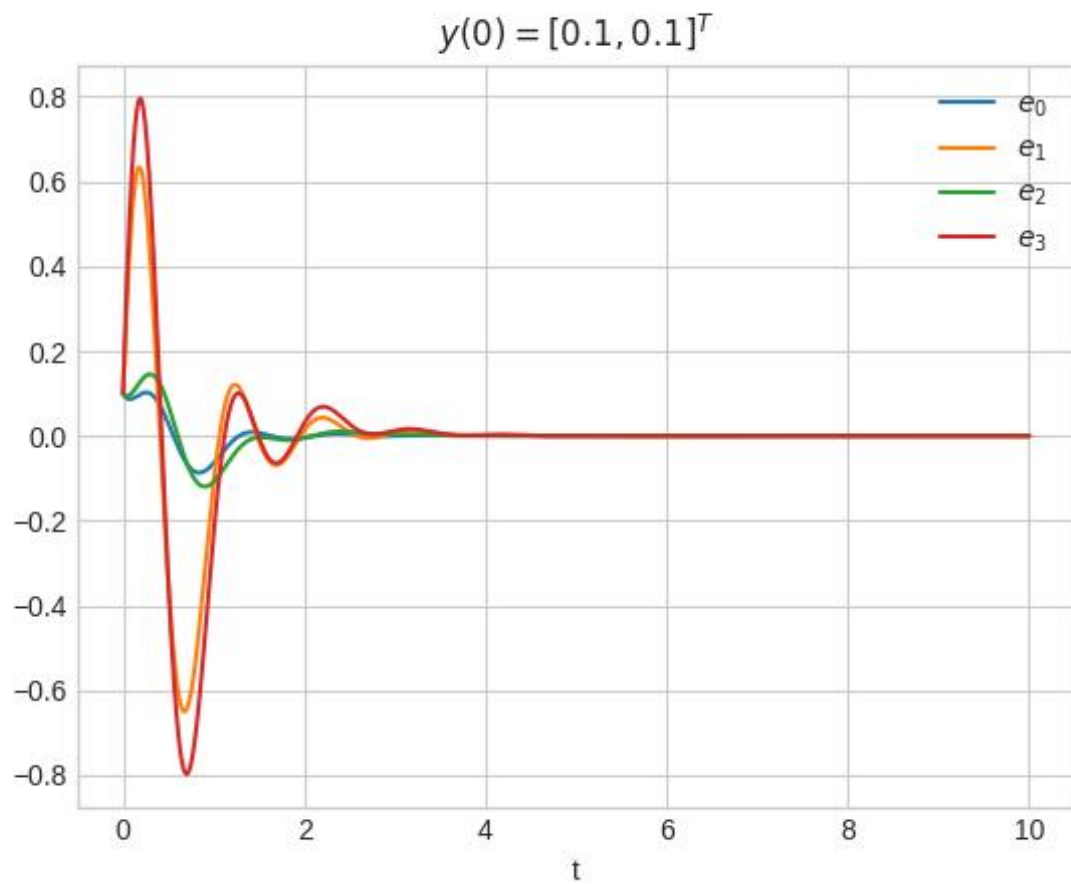


Рис. 45: Задание 4.4. Динамика ошибки наблюдателя



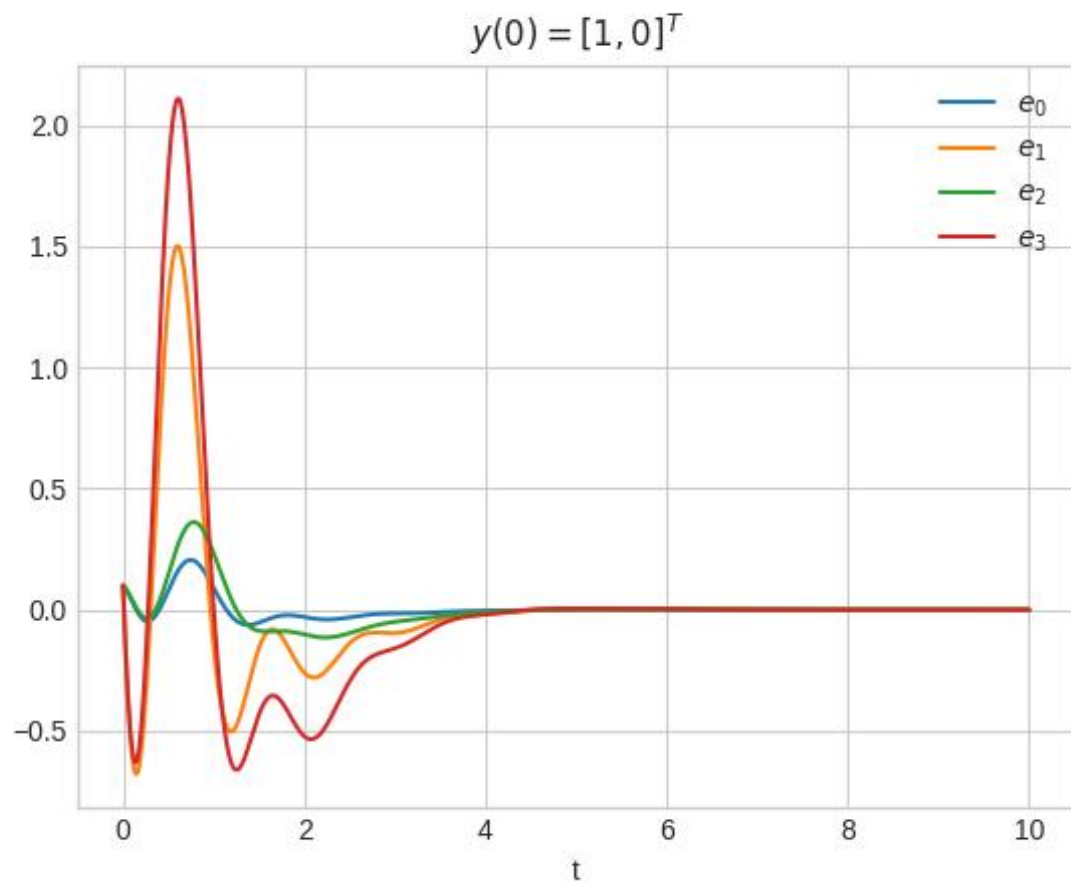


Рис. 46: Задание 4.4. Динамика ошибки наблюдателя

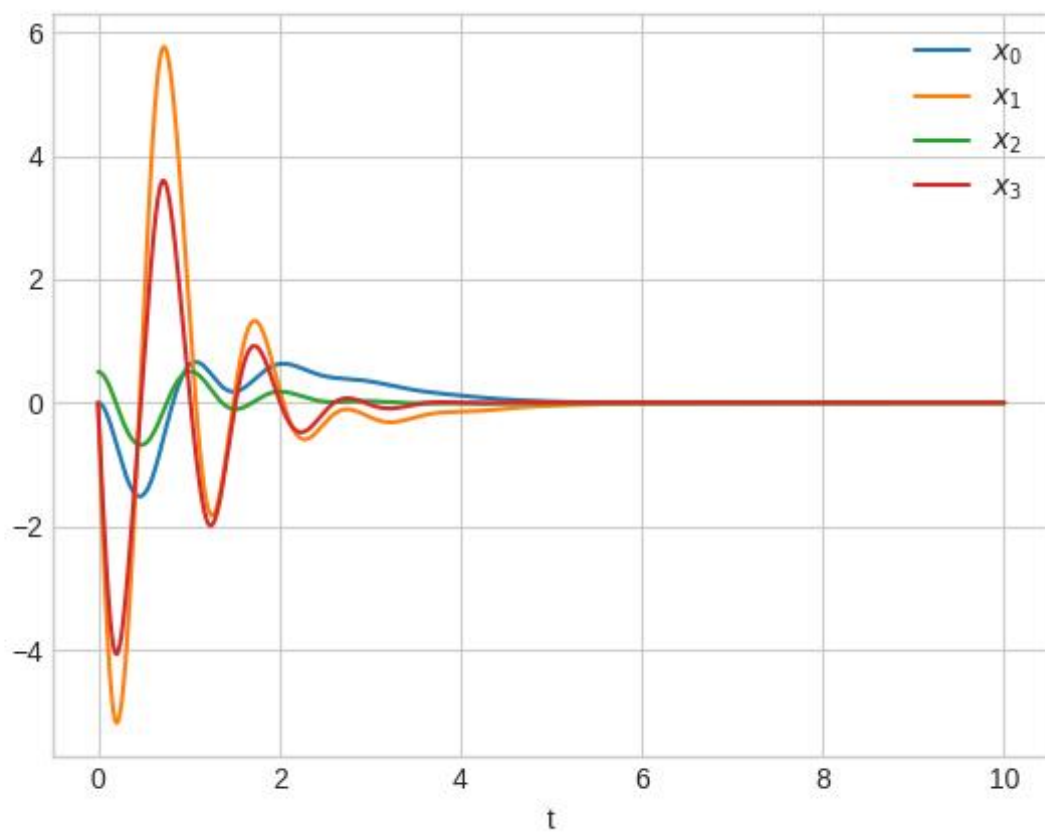
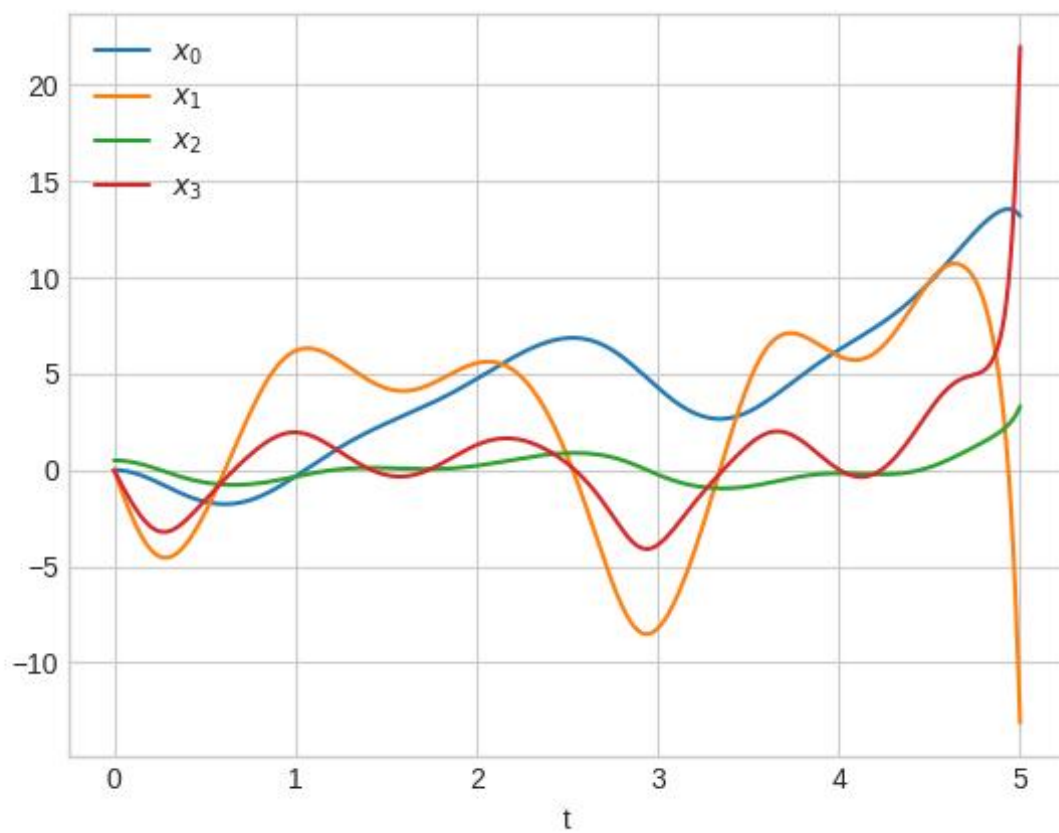
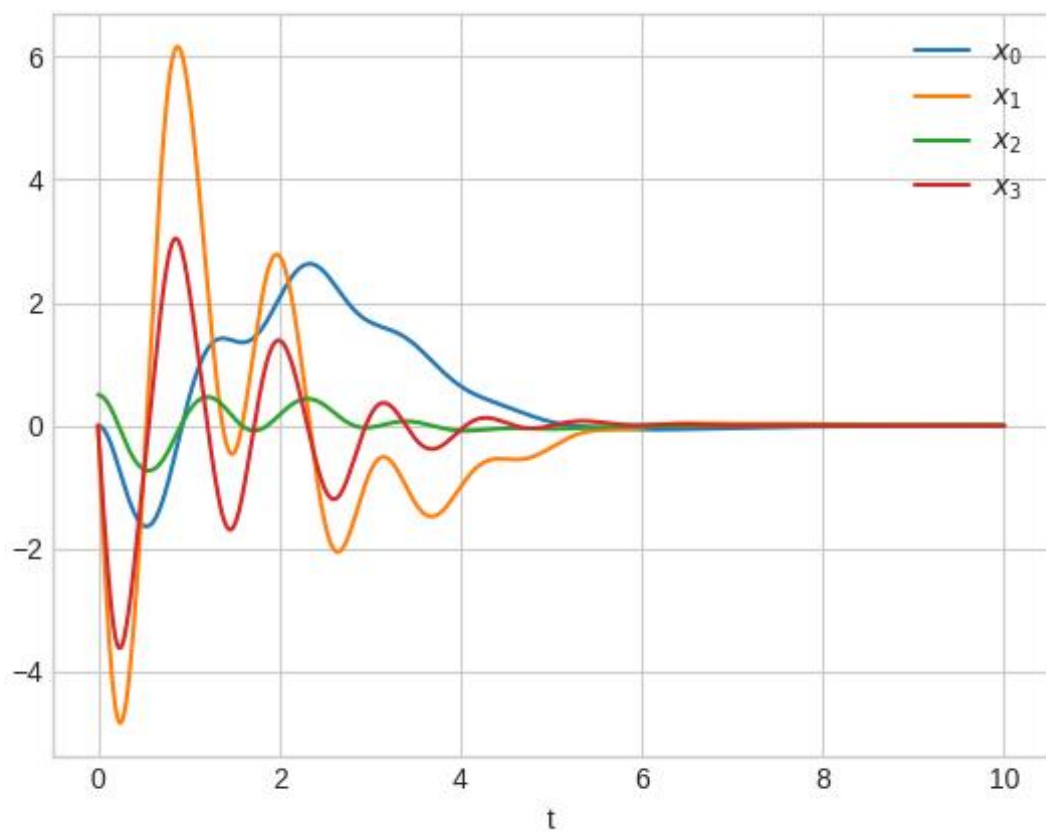
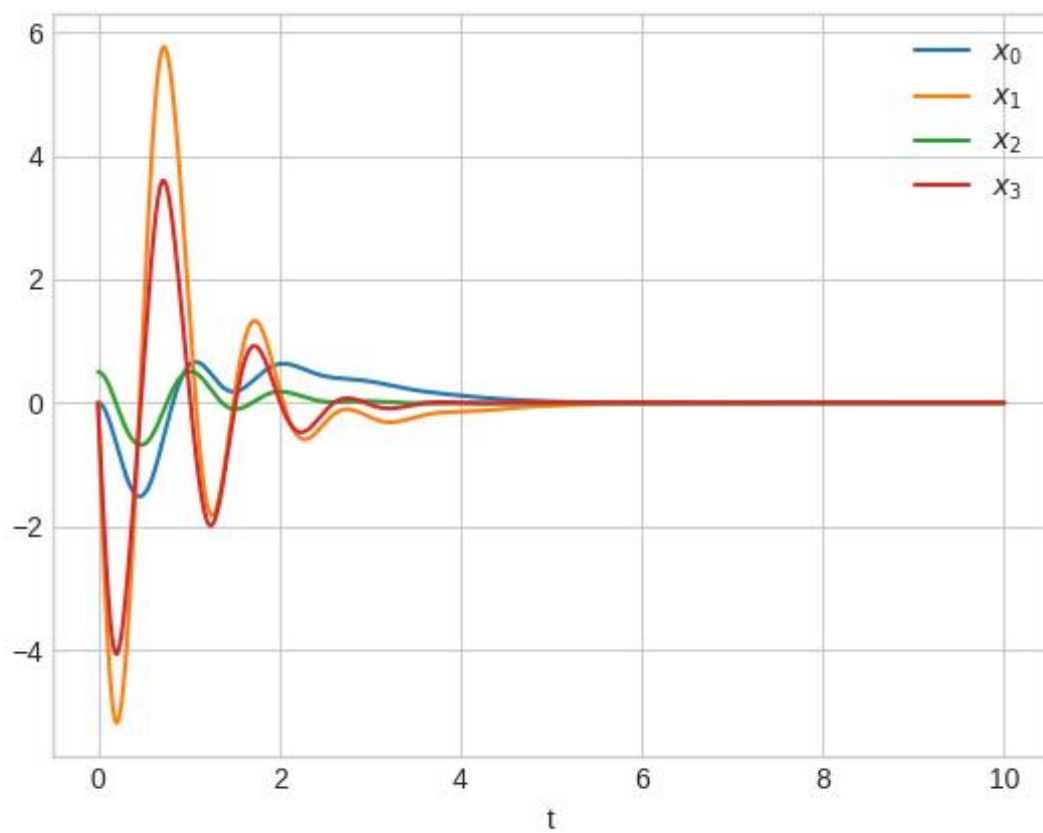


Рис. 47: Задание 4.5. Динамика системы (подобрана степень устойчивости  $\alpha = 1$ )

Рис. 48: Задание 4.5. Динамика системы ( $\alpha = 0.5$ ).

Рис. 49: Задание 4.5. Динамика системы ( $\alpha = 0.8$ ).

Рис. 50: Задание 4.5. Динамика системы ( $\alpha = 1$ ).

Выбор соотношения матриц  $Q$  и  $R$  позволяет управлять временем сходимости и величиной подаваемого управления: чем больше  $\frac{Q}{R}$ , тем больше управление и быстрее сходимость.

$K$  получается решением следующих уравнений:

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases} \quad (17)$$

Теоретический минимум критерия качества:

$$J_{min} = x_0^T P x_0$$

В следующих заданиях применим регулятор для стабилизации системы.

Проведем синтез регулятора для  $Q = \text{diag}(10)$ ,  $R = \text{diag}(0.1)$  и выполним моделирование: 51.

## 5.2 Исследование линейно-квадратичного регулятора

Проведем исследование при разных матрицах (графики ниже):

$$Q = 0.1; R = 10.0; K_0 = [-0.10 \quad -1.55 \quad 224.67 \quad 68.57]$$

$$\sigma(A + BK_0) = [-0.07 + 0.07j \quad -0.07 + -0.07j \quad -3.29 + 0.00j \quad -3.28 + 0.00j]$$

$$Q = 1.0; R = 1.0; K_1 = [-1.00 \quad -5.41 \quad 246.16 \quad 75.45]$$

$$\sigma(A + BK_1) = [-0.22 + 0.21j \quad -0.22 + -0.21j \quad -3.33 + 0.00j \quad -3.24 + 0.00j]$$

$$Q = 10.0; R = 0.1; K_2 = [-10.00 \quad -24.11 \quad 343.62 \quad 107.01]$$

$$\sigma(A + BK_2) = [-3.83 + 0.00j \quad -2.84 + 0.00j \quad -0.81 + 0.50j \quad -0.81 + -0.50j]$$

## 5.3 Синтез фильтра Калмана

$$\dot{x} = Ax + f, y = Cx + \xi \quad (18)$$

Внешние возмущения  $f$  и  $\xi$  будем считать белым шумом с заданной дисперсией. Матрицы  $Q$  и  $R$  обозначают, насколько сильно мы оцениваем влияние  $f$  и  $\xi$ .

$L$  получается решением следующих уравнений:

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases}$$

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} 1.76 & 0.37 \\ 1.11 & 1.84 \\ 0.37 & 6.63 \\ 1.23 & 21.54 \end{bmatrix}$$

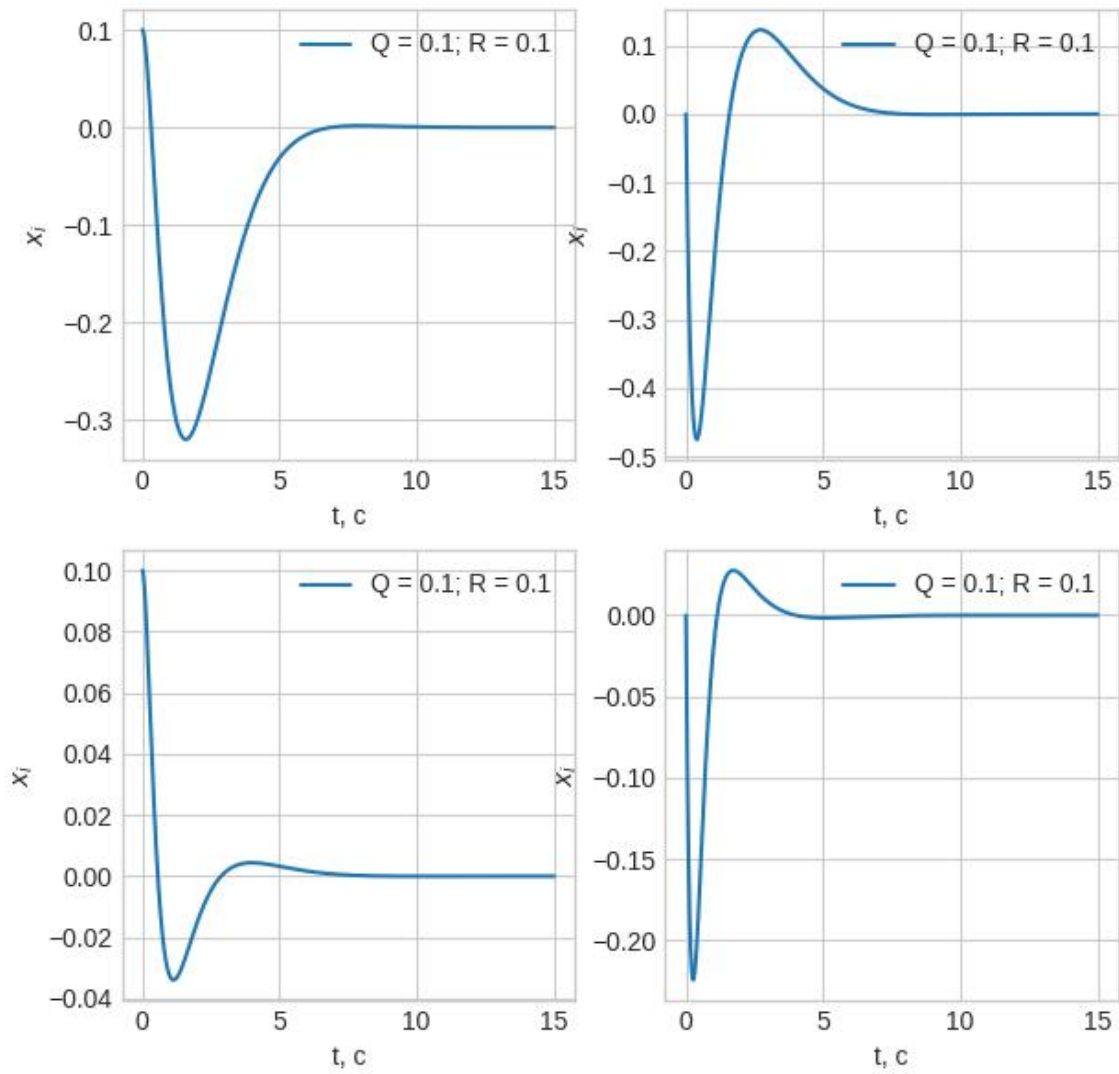


Рис. 51: Задание 5.1. Динамика компонент системы.

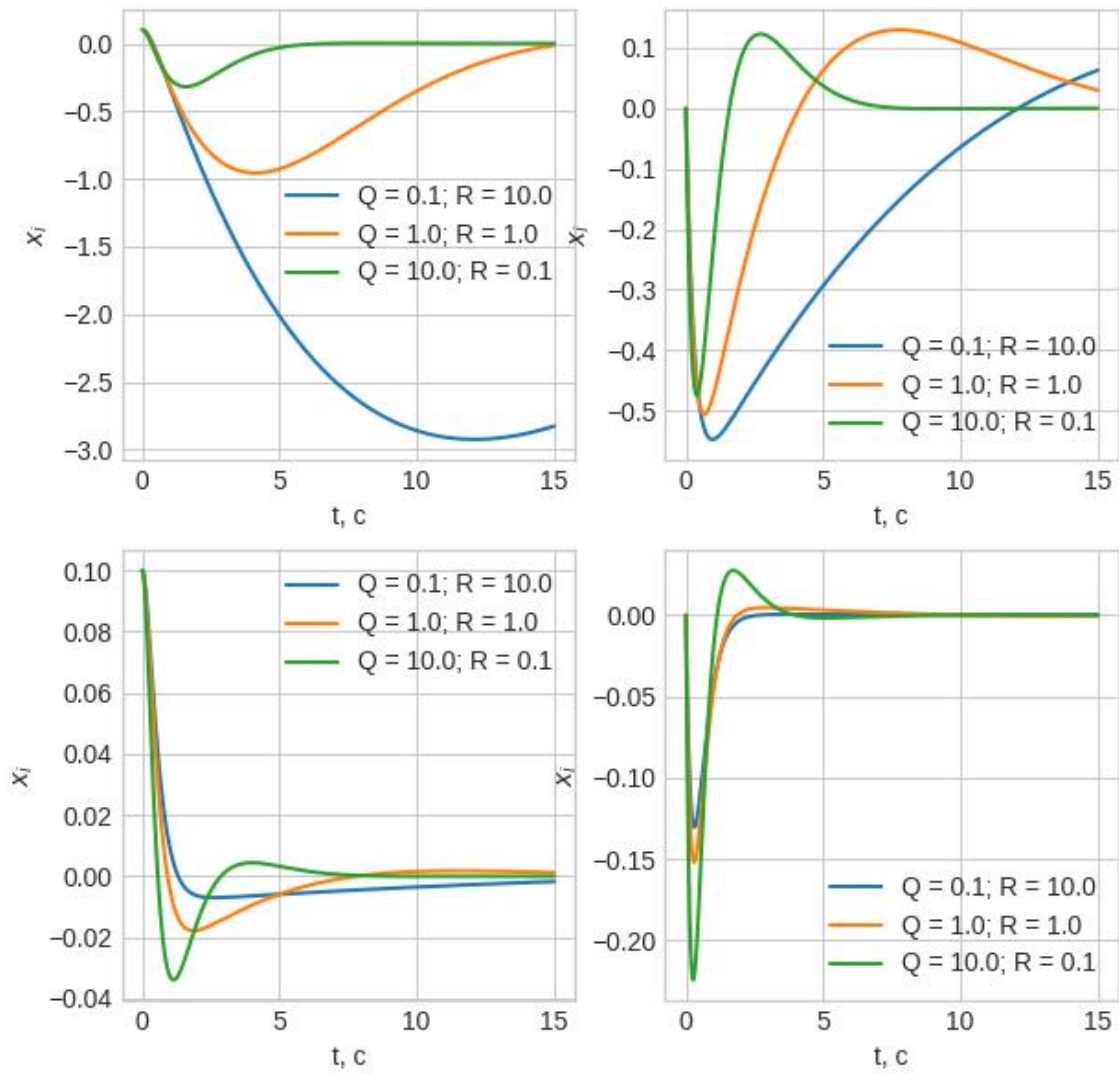


Рис. 52: Задание 5.2. Динамика компонент системы.



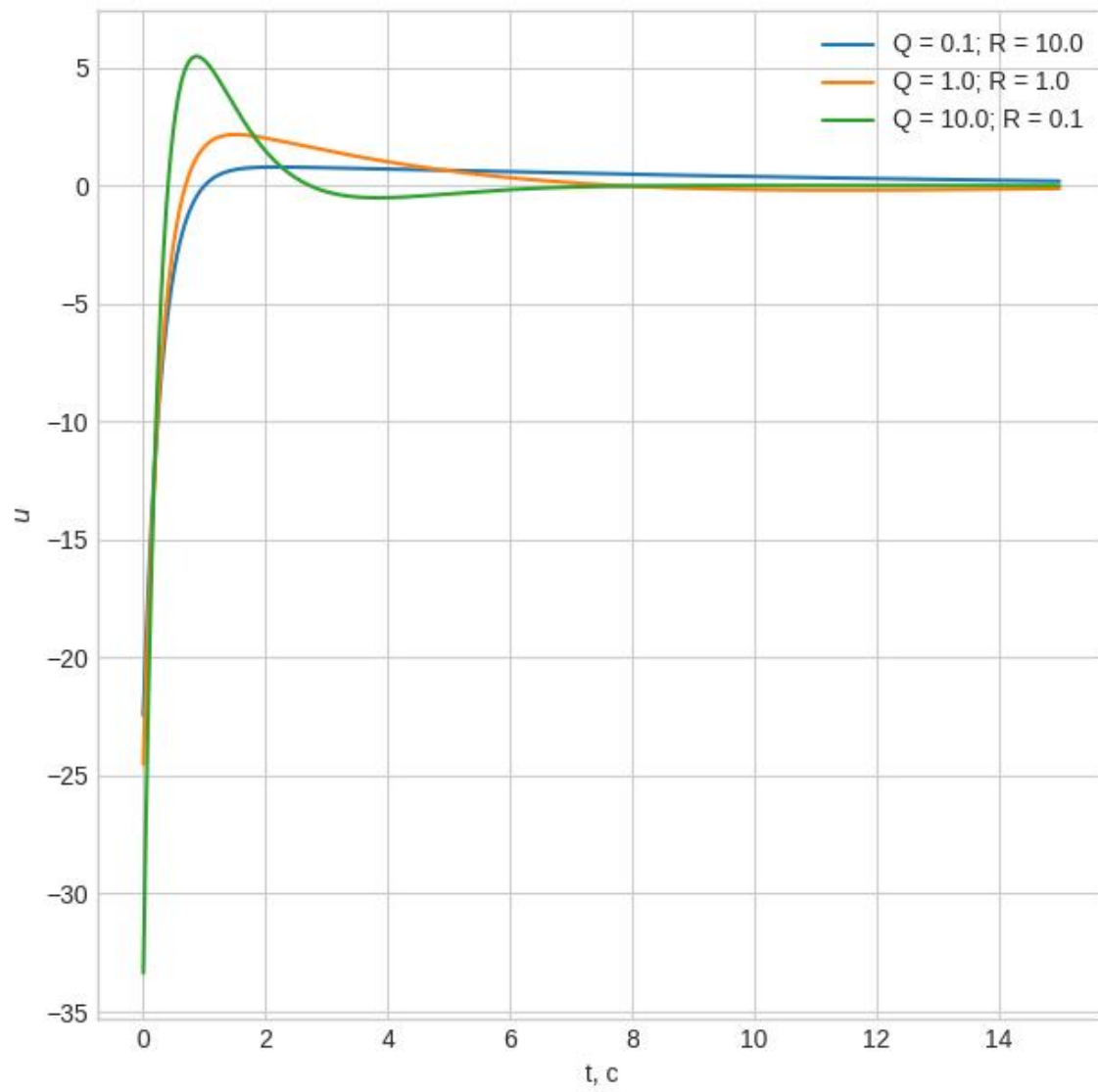


Рис. 53: Задание 5.2. Управление.

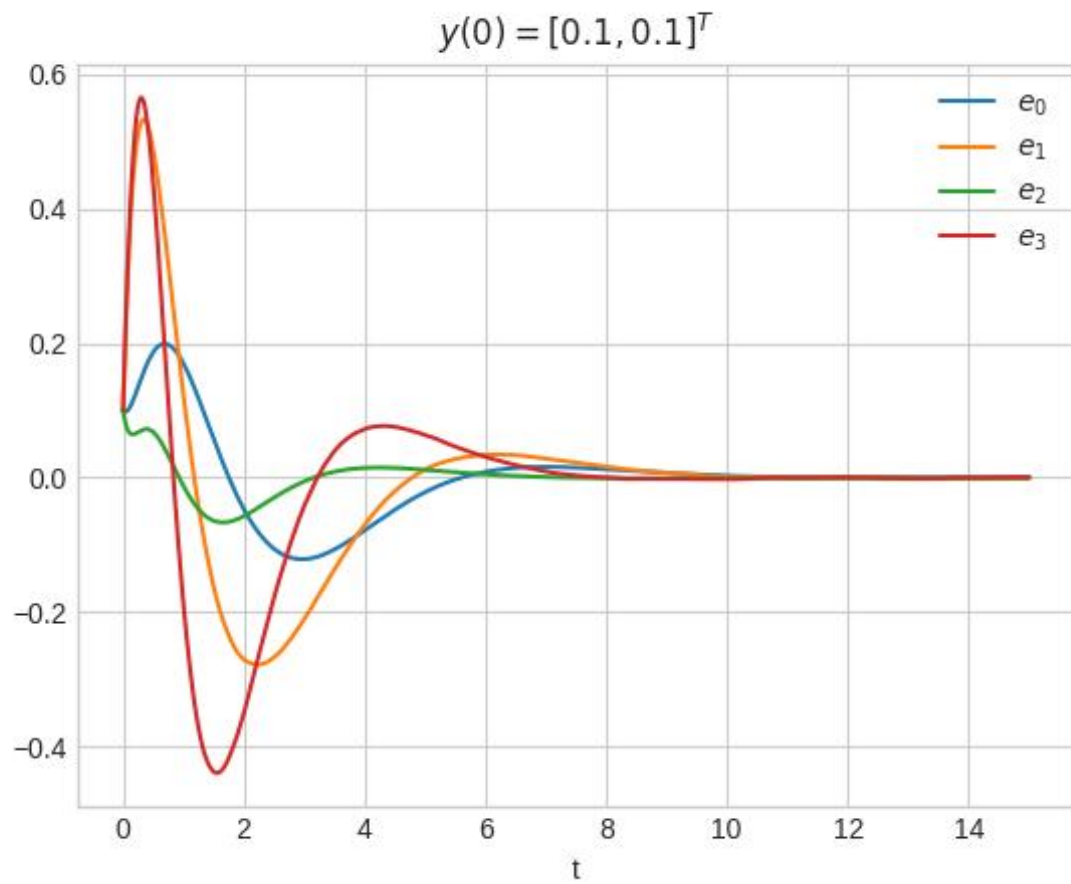


Рис. 54: Задание 5.3. Ошибка.

### 5.4 LQG для линейной модели

В этом задании выводится наблюдатель регулятор для системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + f \\ y = Cx + DK\hat{x} + \xi \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + DK\hat{x} \\ \hat{x} = x - e \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = A_{new} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + B_{new} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} \\ A_{new} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + LC \end{bmatrix} \\ B_{new} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & L \end{bmatrix} \in R^{2n \times (n+m)} \end{cases}$$

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} -1.76 & -0.37 \\ -1.11 & -1.88 \\ -0.37 & -6.69 \\ -1.26 & -21.97 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + LC) = [-0.87 + 0.50j \quad -0.87 + -0.50j \quad -2.88 + 0.00j \quad -3.84 + 0.00j]$$

$$Q = 1; R = 1; K = [1.00 \quad 2.40 \quad -34.91 \quad -10.76]$$

$$\text{spec}(A + BK) = [-3.86 + 0.00j \quad -2.87 + 0.00j \quad -0.81 + 0.50j \quad -0.81 + -0.50j]$$

Моделирование системы: 55.

### 5.5 LQG для нелинейной модели

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} 1.76 & 0.37 \\ 1.11 & 1.88 \\ 0.37 & 6.69 \\ 1.26 & 21.97 \end{bmatrix}$$

$$Q = 0.01; R = 0.01; L = \begin{bmatrix} -1.76 & -0.37 \\ -1.11 & -1.88 \\ -0.37 & -6.69 \\ -1.26 & -21.97 \end{bmatrix}$$

$$\text{spec}(A + LC) = [-0.87 + 0.50j \quad -0.87 + -0.50j \quad -2.88 + 0.00j \quad -3.84 + 0.00j]$$

$$Q = 1; R = 1; K = [1.00 \quad 2.40 \quad -34.91 \quad -10.76]$$

$$\text{spec}(A + BK) = [-3.86 + 0.00j \quad -2.87 + 0.00j \quad -0.81 + 0.50j \quad -0.81 + -0.50j]$$

Моделирование системы: 56.

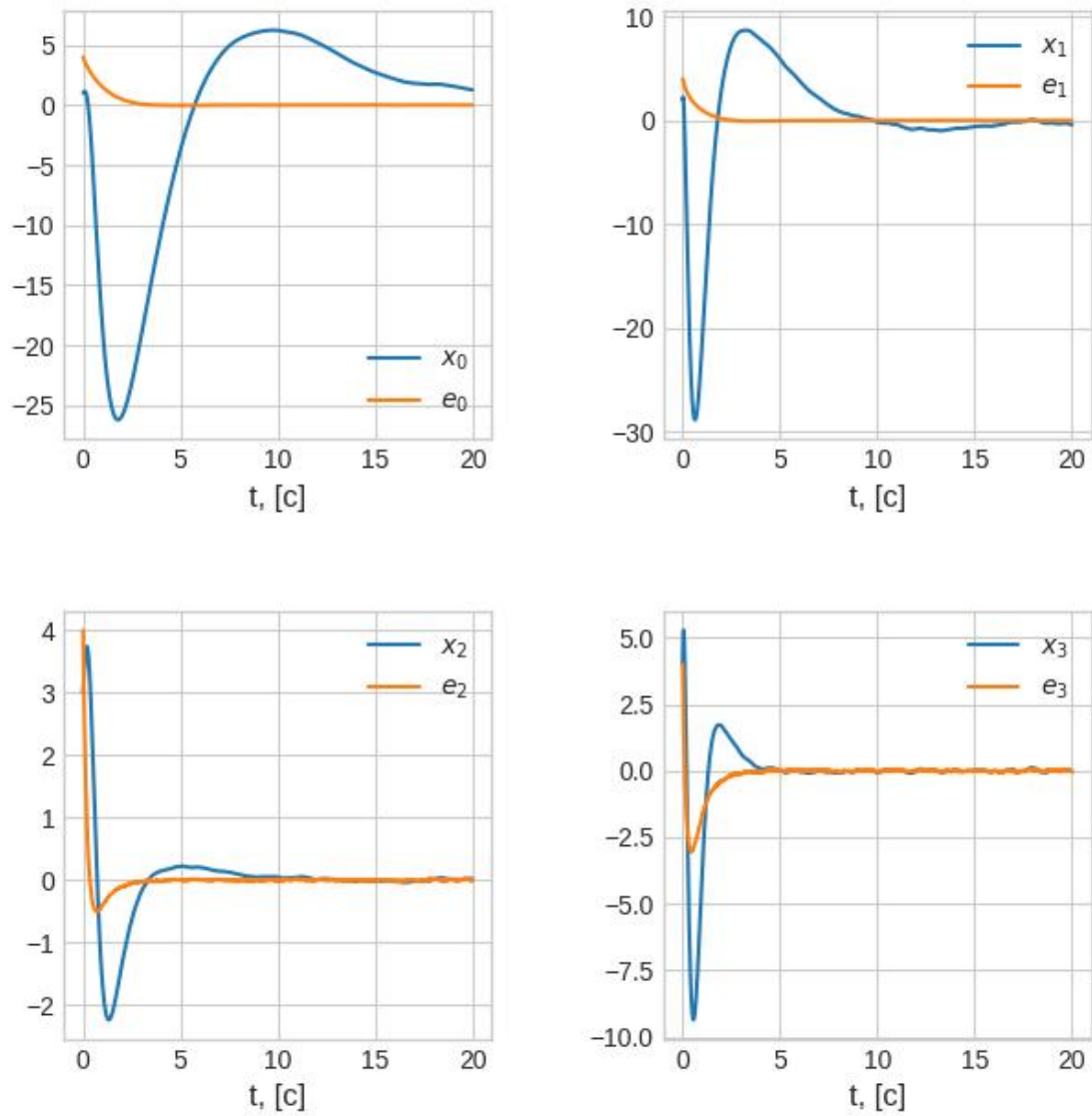


Рис. 55: Задание 5.4. Динамика системы и ошибки линейной системы.

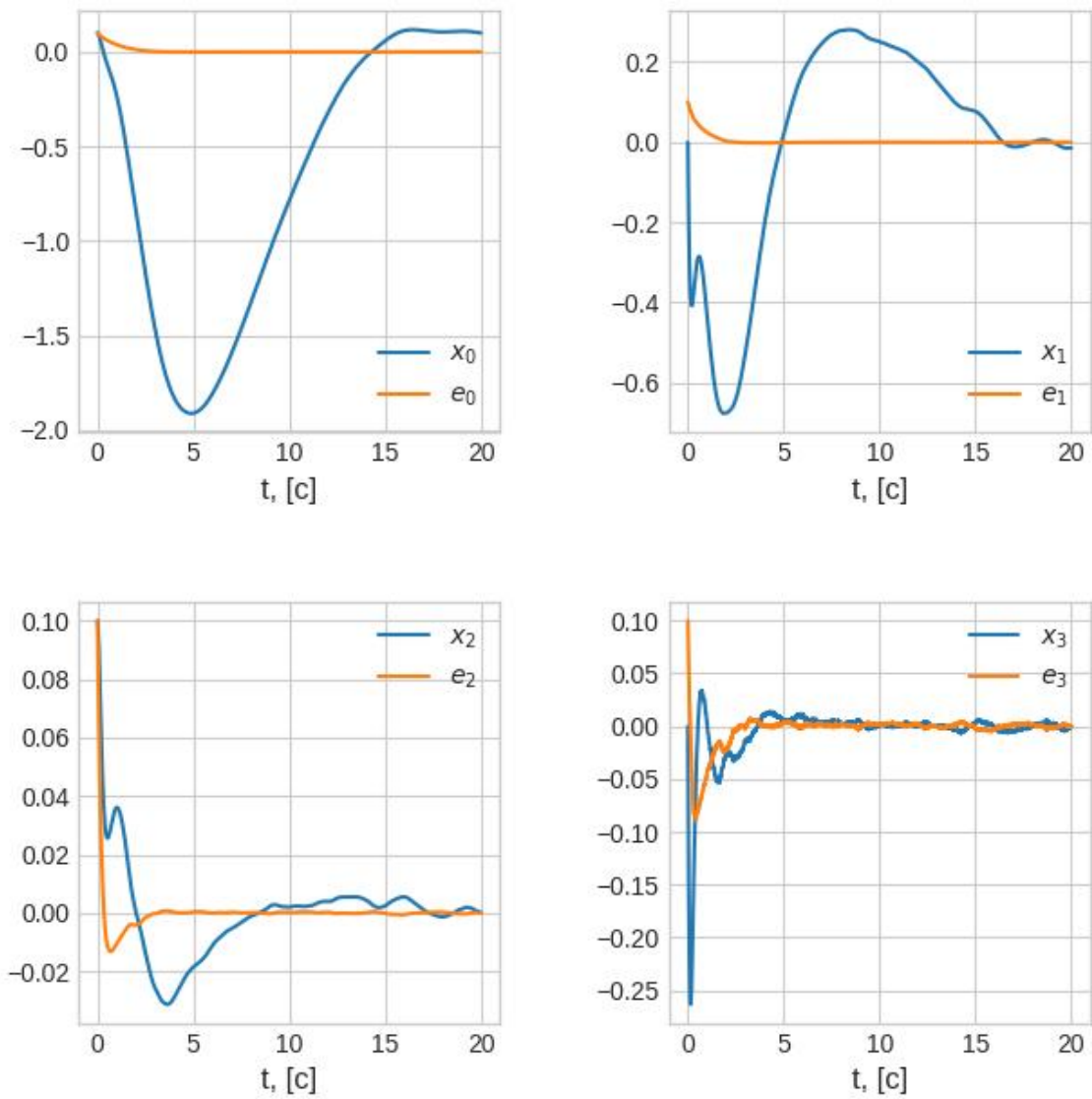


Рис. 56: Задание 5.5. Динамика системы и ошибки нелинейной системы.

## 6 Слежение и компенсация

### 6.1 Компенсация

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u + B_2w \\ z = C_2x \end{cases}, \quad (19)$$

где  $w$ :

$$\dot{w} = A_2w \quad (20)$$

Для данной системы можем синтезировать регулятор вида  $u = K_1x + K_2w$ , гарантирующий:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

$K_1$  можем выбрать как матрицу регулятора, синтезированного любым способом (в данном случае модальное управление). Матрицу  $K_2$  найдем следующим образом:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1P = B_1Y + B_2 \\ C_2P + D_2 = 0 \\ K_2 = Y - K_1P \end{cases} \quad (21)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.033 & 0.066 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.36 & 0.73 & 1.1 \end{bmatrix}, D_2 - \text{нулевая}, B_2w = Df$$

Проведем моделирование с нелинейной системой:

### 6.2 Слежение

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1x + B_1u \\ z = C_2x + D_2w \end{cases} \quad (22)$$

$$C_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0], D_2 = [0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$$

Найдем матрицы регулятора аналогичным способом. Проведем моделирование:

Удалось добиться сходимости угла отклонения к заданному закону.

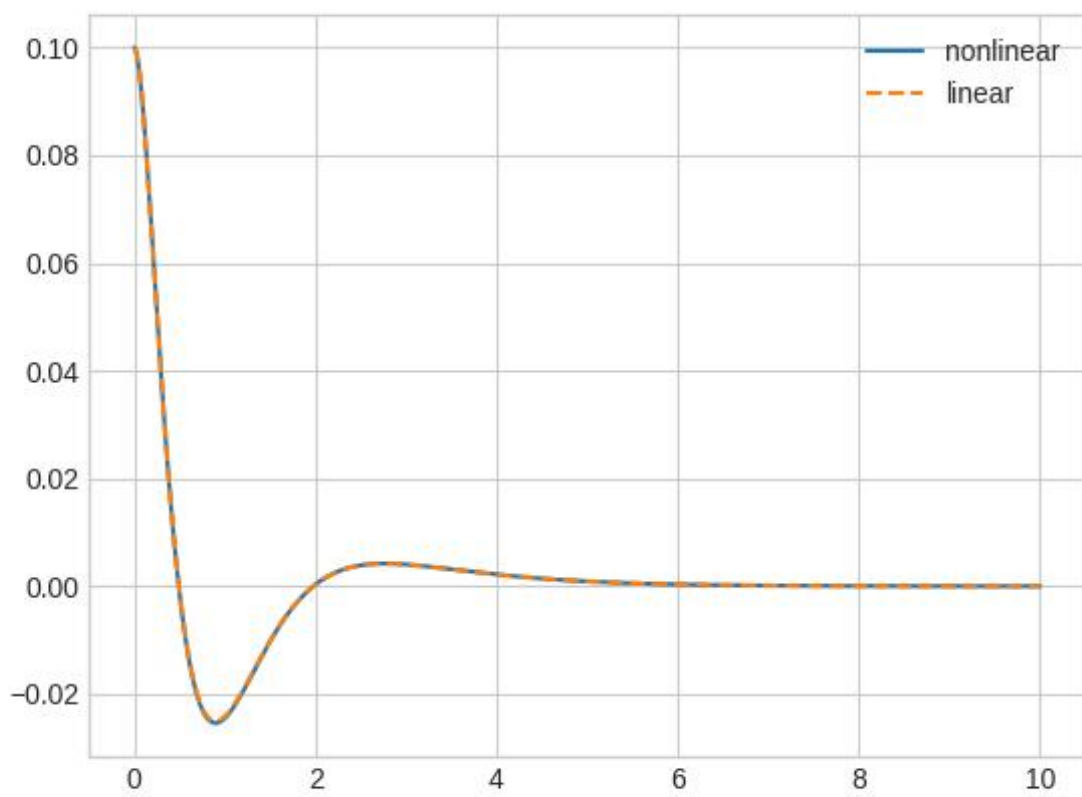


Рис. 57: Задание 6.1. Динамика контролируемого выхода  $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]$ .

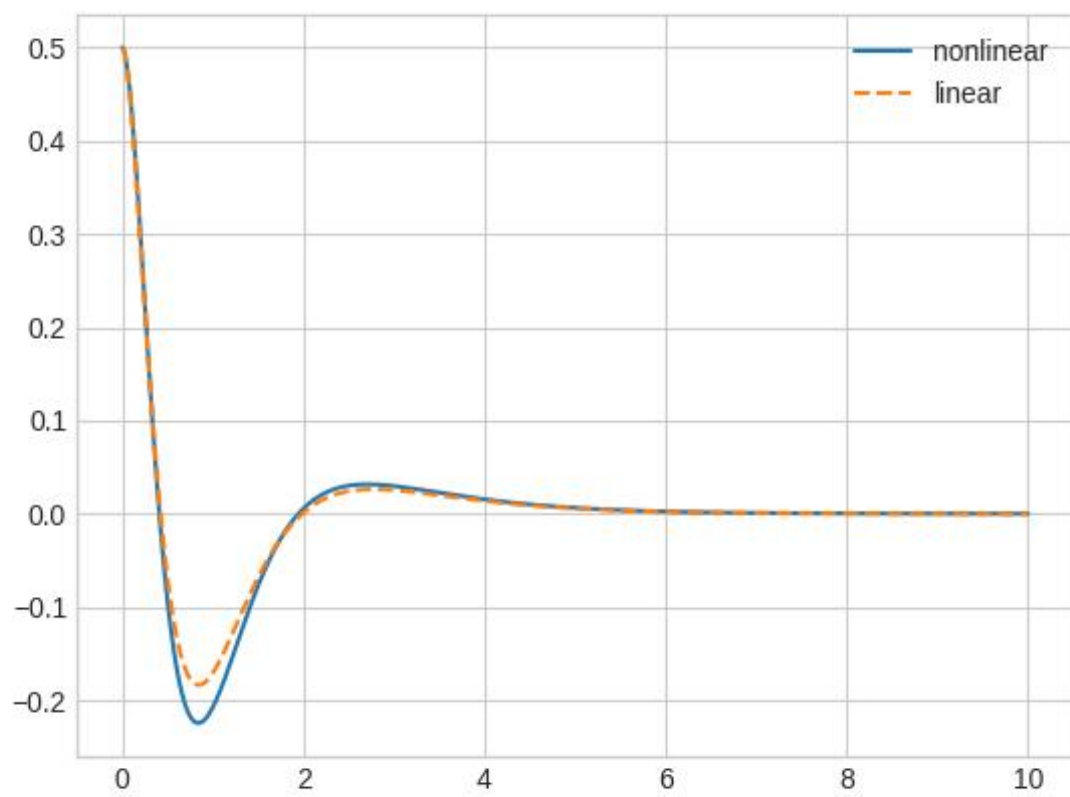


Рис. 58: Задание 6.1. Динамика контролируемого выхода  $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0.5 \ 0]^T$ .



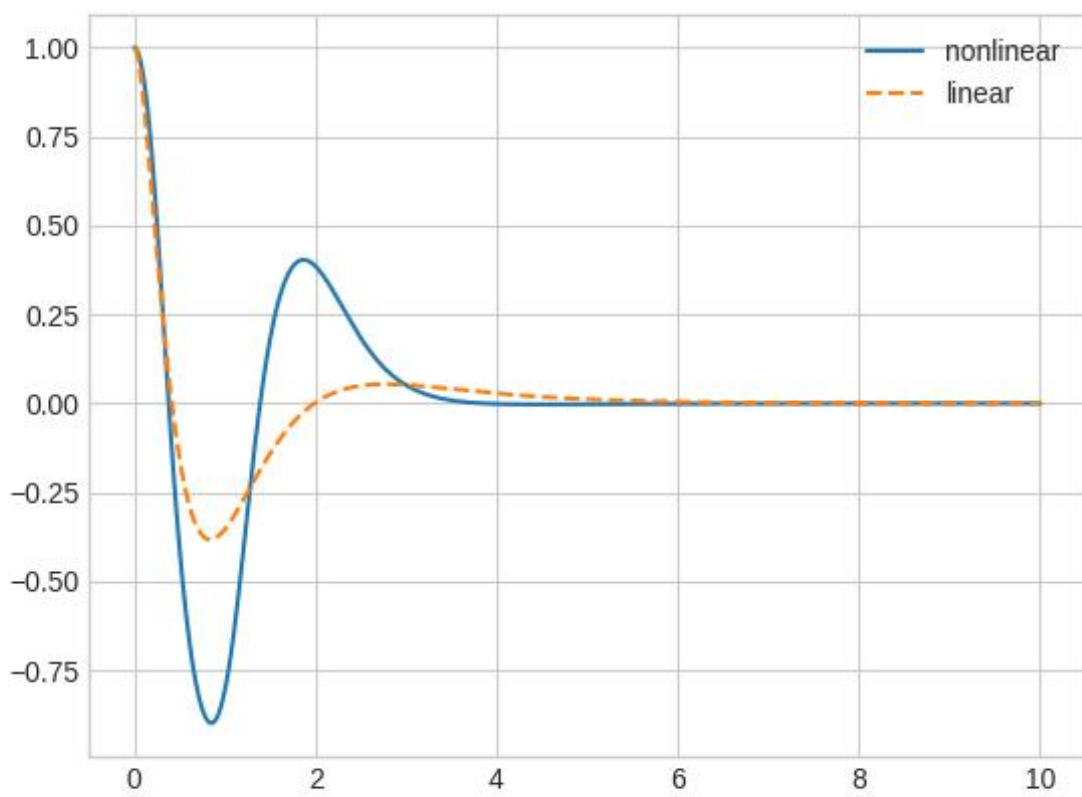


Рис. 59: Задание 6.1. Динамика контролируемого выхода.  $x(0) = [0.1 \ 0 \ 1 \ 0]$

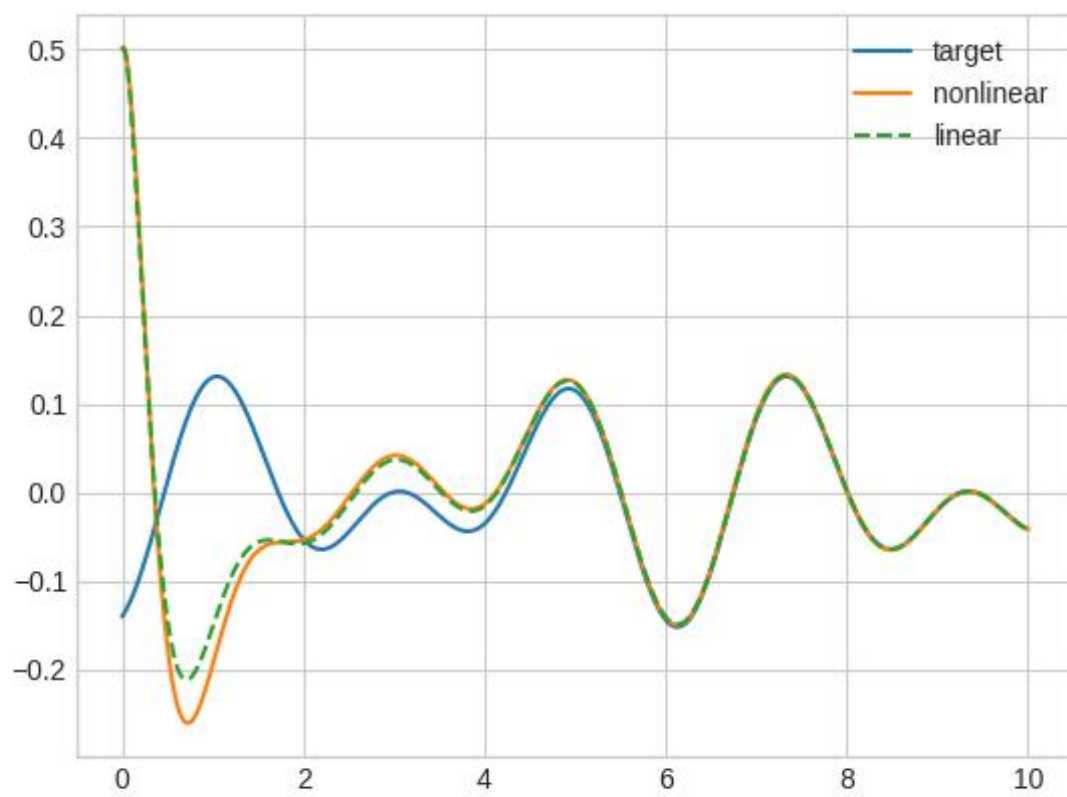


Рис. 60: Задание 6.2. Динамика контролируемого выхода  $x(0) = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0.3]$ .

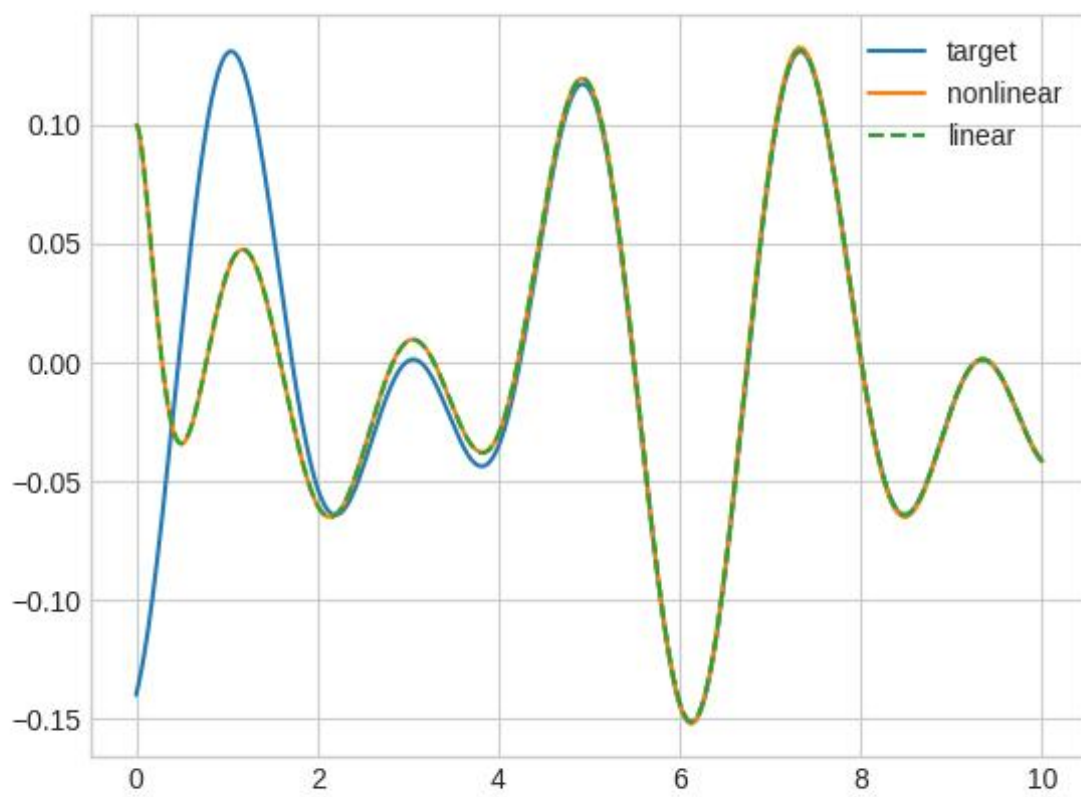


Рис. 61: Задание 6.2. Динамика контролируемого выхода  $x(0) = [0.1 \ 0 \ 0.1 \ 0]$ .

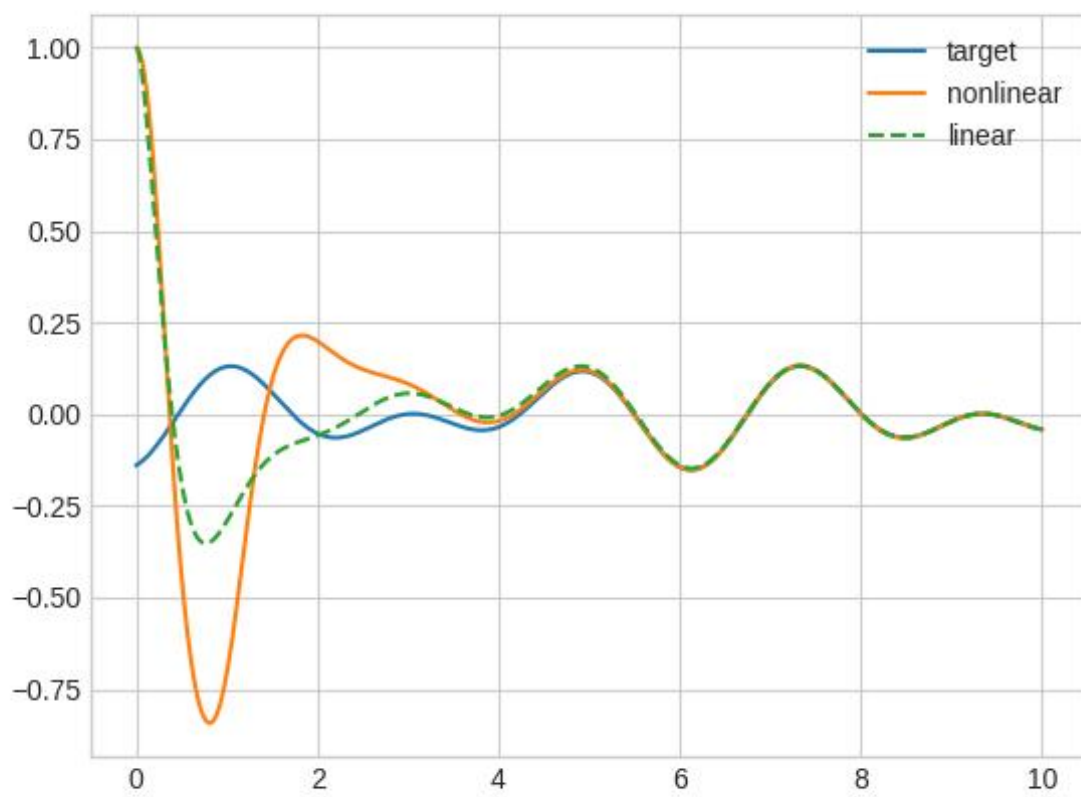


Рис. 62: Задание 6.2. Динамика контролируемого выхода  $x(0) = [0.1 \ 0 \ 1 \ 0]$ .

## 7 Итог

В ходе выполнения проекта были опробованы различные методы управления системами. Каждый имеет свои преимущества и сферы применения. Наиболее универсальным является подход синтеза LQG, т.к. позволяет учесть как внешние возмущения, так и шум датчиков, считая характер помех случайным (что наиболее близко к реальным задачам робототехники).

С помощью линеаризации системы удалось синтезировать и применить ряд методов управления для стабилизации нелинейной системы в окрестности точки равновесия. Размер данной окрестности зависит от метода управления и в первую очередь от итоговой степени устойчивости системы.