

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №9
«Регуляторы с заданной степенью устойчивости»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

1	Регулятор с заданной степенью устойчивости	2
2	Регулятор с ограниченным управлением	4
3	Наблюдатель с заданной степенью устойчивости	7
4	Совместный синтез регулятора и наблюдателя	9
5	Выводы	12

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать [Python Control Systems Library](#). Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в [jupyter notebook](#) на GitHub.

1 Регулятор с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

Матрицы A и B из ЛР №8:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Напомним, что все собственные числа, кроме -1 являются управляемыми. Это значит, что мы не сможем получить степень устойчивости выше 1. Зададимся набором желаемых степеней устойчивости: $\{0.1, 0.3, 0.7, 1\}$.

Для синтеза регулятора с заданной степенью устойчивости α необходимо найти матрицы P и Y , удовлетворяющие неравенствам:

$$P \succ 0, PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0 \quad (2)$$

Затем, получим матрицу K :

$$K = YP^{-1} \quad (3)$$

α	K	$\sigma(A + BK)$
0.1	$\begin{bmatrix} 0 & -1.63 & -2.79 & -0.22 \end{bmatrix}$	$\{-0.47 + 6.89i, -0.47 - 6.89i, -0.59, -1\}$
0.3	$\begin{bmatrix} 0 & -1.95 & -3.22 & -0.07 \end{bmatrix}$	$\{-0.70 + 7.19i, -0.704 - 7.19i, -0.81, -1\}$
0.7	$\begin{bmatrix} 0 & -2.57 & -3.99 & 0.25 \end{bmatrix}$	$\{-1.08 + 7.71i, -1.082 - 7.71i, -1.17, -1\}$
1	$\begin{bmatrix} 0 & -3.15 & -4.66 & 0.59 \end{bmatrix}$	$\{-1.37 + 8, 14i, -1.378 - 8, 14i, -1.46, -1\}$

Таблица 1: Результаты синтеза регулятора с заданными степенями устойчивости.

Выполним моделирование системы с входным воздействием $u = Kx$ при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$.

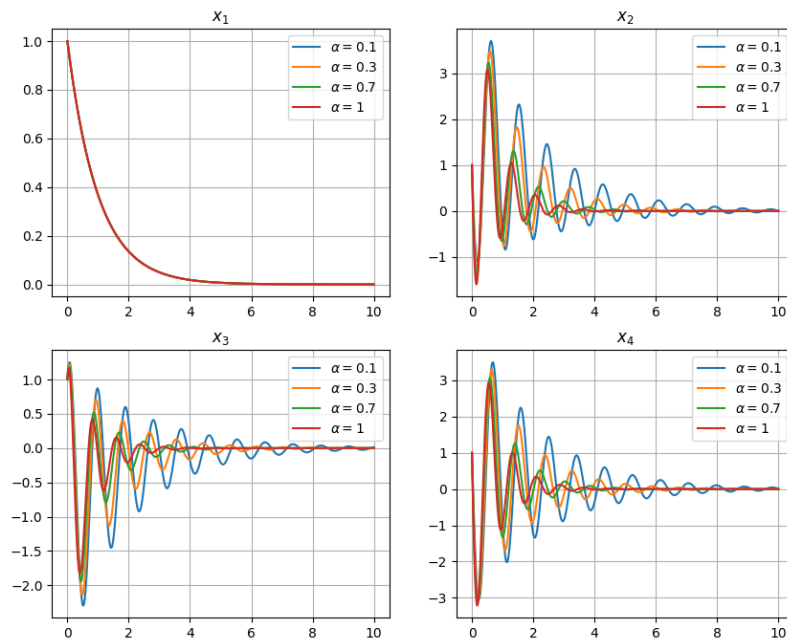


Рис. 1: Задание 1. Компоненты вектора состояний при различных степенях устойчивости регулятора.

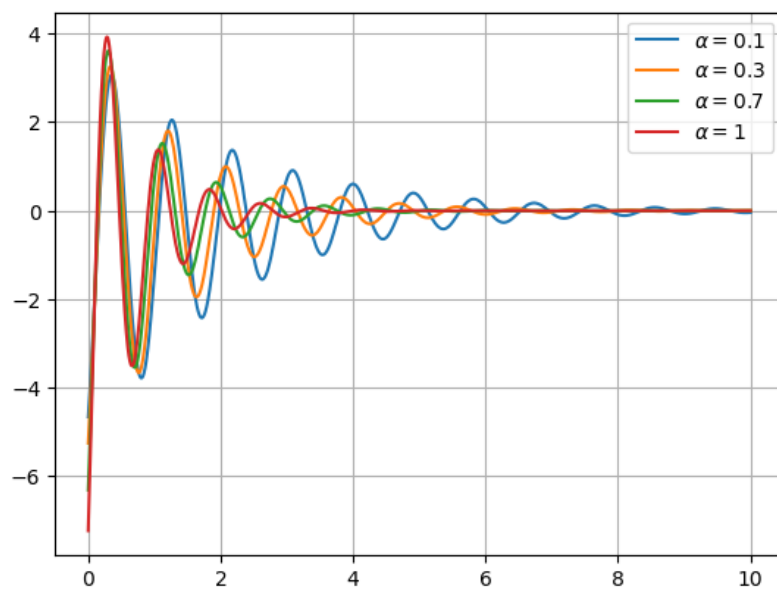


Рис. 2: Задание 1. Управляющий сигнал при различных степенях устойчивости регулятора.

2 Регулятор с ограниченным управлением

Зададимся набором ограничений для управляющего воздействия (μ) при начальных условиях $x(0)$: $\{9, 8, 7, 6\}$. Для синтеза регулятора с ограничением на управляющее воздействие к неравенствам (2) добавляются следующие:

$$\begin{bmatrix} P & x(0) \\ x(0)^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 \end{bmatrix} \succ 0 \quad (4)$$

Зафиксируем $\alpha = 0.7$.

μ	K	$\sigma(A + BK)$
9	$\begin{bmatrix} 0 & -1.52 & -2.62 & -0.58 \end{bmatrix}$	$\{-1.04 + 5.79i, -1.04 - 5.79i, -1.017, -1\}$
8	$\begin{bmatrix} 0 & -1.34 & -2.37 & -0.71 \end{bmatrix}$	$\{-0.99 + 5.44i, -0.99 - 5.44i, -0.97, -1\}$
7	$\begin{bmatrix} 0 & -1.48 & -2.55 & -0.54 \end{bmatrix}$	$\{-0.89 + 5.92i, -0.89 - 5.92i, -0.91, -1\}$
6	$\begin{bmatrix} 0 & -1.34 & -2.35 & -0.59 \end{bmatrix}$	$\{-0.76 + 5.79i, -0.76 - 5.79i, -0.77, -1\}$

Таблица 2: Результаты синтеза регулятора с заданными ограничениями управляющего воздействия.

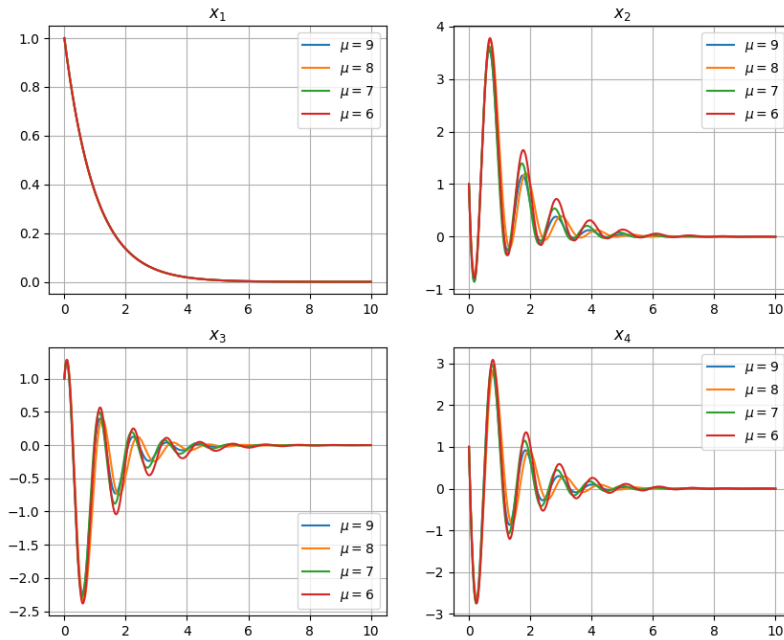


Рис. 3: Задание 2. Компоненты вектора состояний при различных ограничениях.

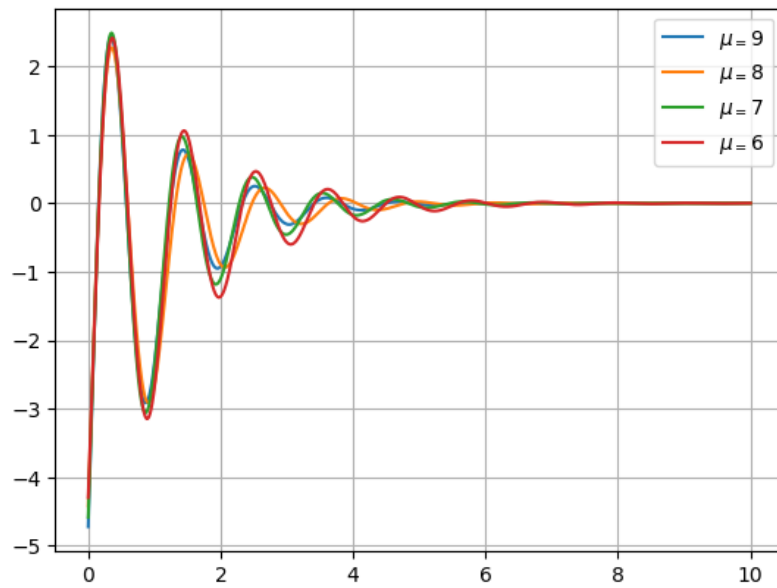


Рис. 4: Задание 2. Управляющий сигнал при различных ограничениях.

Добавим к условиям (2) и (4) необходимость минимизации μ .

α	μ_{min}	K	$\sigma(A + BK)$
0.1	4.24	$\begin{bmatrix} 0 & -0.86 & -1.64 & -0.66 \end{bmatrix}$	$\{-0.099 + 5.525i, -0.099 - 5.525i, -0.104, -1\}$
0.3	4.79	$\begin{bmatrix} 0 & -1.03 & -1.91 & -0.62 \end{bmatrix}$	$\{-0.299 + 5.725i, -0.299 - 5.725i, -0.301, -1\}$
0.7	6.02	$\begin{bmatrix} 0 & -1.43 & -2.49 & -0.49 \end{bmatrix}$	$\{-0.701 + 6.137i, -0.701 - 6.137i, -0.705, -0.91, -1\}$
1	7.05	$\begin{bmatrix} 0 & -1.78 & -2.98 & -0.34 \end{bmatrix}$	$\{-1 + 6.458i, -1 - 6.458i, -1, -1\}$

Таблица 3: Результаты синтеза регулятора с минимизации ограничений управляющего воздействия.

Проведем моделирование систем с полученными коэффициентами регулятора.

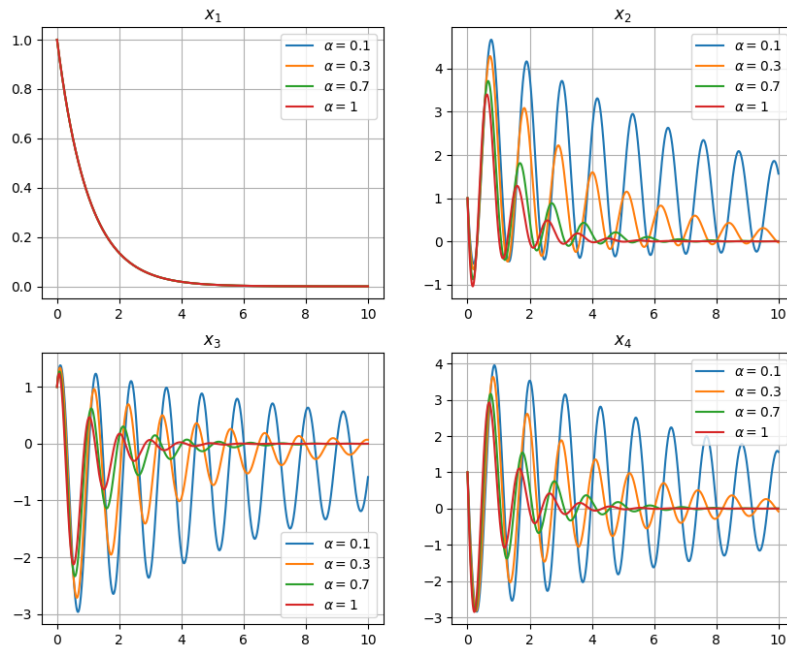


Рис. 5: Задание 2. Компоненты вектора состояний при минимальных ограничениях.

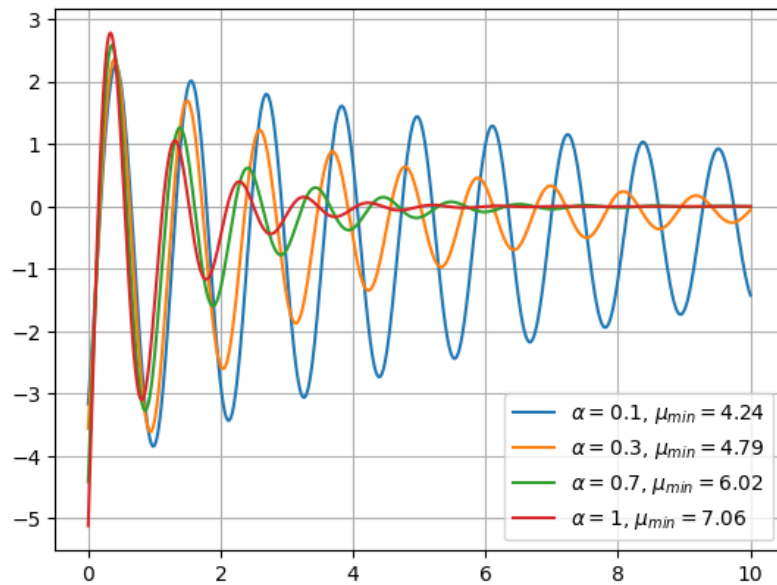


Рис. 6: Задание 2. Управляющий сигнал при минимальных ограничениях.

3 Наблюдатель с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax, y = Cx \quad (5)$$

Матрицы A и C (как показано в ЛР №8, пара – полностью наблюдаема):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 3]$$

Зададимся набором желаемых степеней устойчивости: $\{1, 3, 6, 9\}$.

Для синтеза наблюдателя с заданной степенью устойчивости α необходимо найти матрицы Q и Y , удовлетворяющие неравенствам:

$$Q \succ 0, A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \prec 0 \quad (6)$$

Затем, получим матрицу L :

$$L = Q^{-1}Y \quad (7)$$

α	L	$\sigma(A + LC)$
1	$[1.31 \quad -2.69 \quad 2.17 \quad -2.72]^T$	$\{-1.33 + 4.39i, -1.33 - 4.39i, -1.43 + 1.39i, -1.43 - 1.39i\}$
3	$[43.51 \quad 1.9 \quad 58.26 \quad -34.21]^T$	$\{-4.17 + 8.89i, -4.17 - 8.89i, -3.63 + 1.76i, -3.63 - 1.76i\}$
6	$[430.24 \quad 412.21 \quad 1064.31 \quad -297.3]^T$	$\{-8.48 + 18.71i, -8.48 - 18.71i, -7.24 + 3.13i, -7.24 - 3.13i\}$
9	$[1404.68 \quad 2235.75 \quad 4998.16 \quad -952.19]^T$	$\{-12.8 + 27.2i, -12.8 - 27.2i, -10.8 + 4.3i, -10.8 - 4.3i\}$

Таблица 4: Результаты синтеза наблюдателя с заданными степенями устойчивости.

Проведем моделирование систем с полученными коэффициентами наблюдателя.

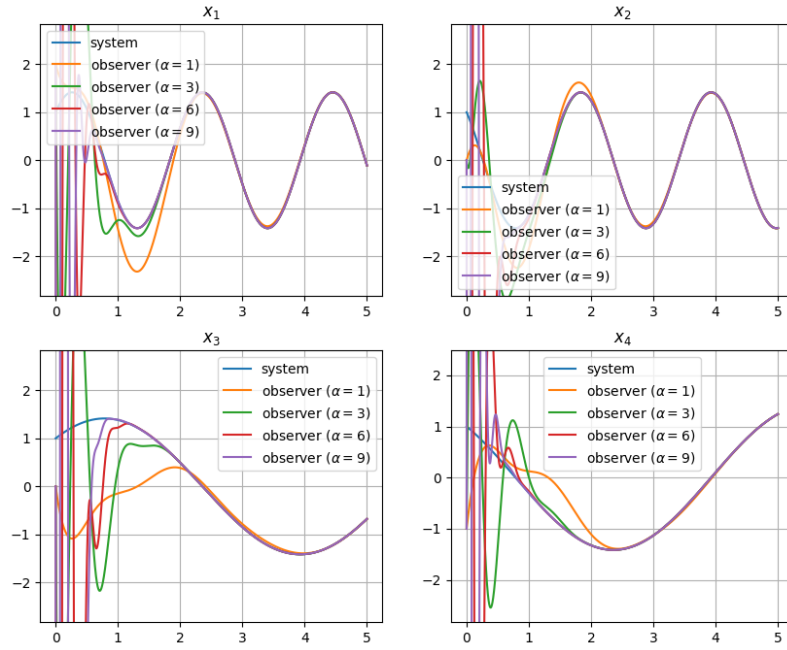


Рис. 7: Задание 3. Компоненты вектора состояний системы и наблюдателей разных степеней устойчивости.

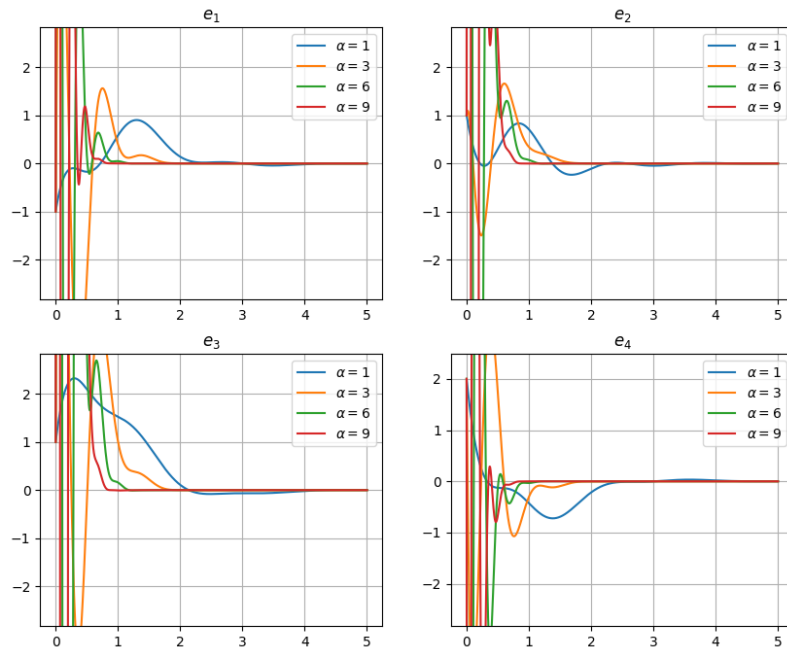


Рис. 8: Задание 3. Ошибки наблюдателей разных степеней устойчивости.

4 Совместный синтез регулятора и наблюдателя

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (8)$$

Матрицы A , B и C :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

На основании анализа из ЛР №8 система является полностью управляемой, однако частично наблюдаемой (собственное число -20 не является наблюдаемым). Заметим, что нам не удастся синтезировать наблюдатель степени устойчивости выше 20.

Зафиксируем степень устойчивости регулятора $\alpha_{cont} = 2$ и рассмотрим 3 характерных случая:

1. степень устойчивости наблюдателя меньше степени устойчивости регулятора ($\alpha_{obs} = 0.5$)
2. степень устойчивости наблюдателя равна степени устойчивости регулятора ($\alpha_{obs} = 2$)
3. степень устойчивости наблюдателя больше степени устойчивости регулятора ($\alpha_{obs} = 4$)

Выполним моделирование систем.

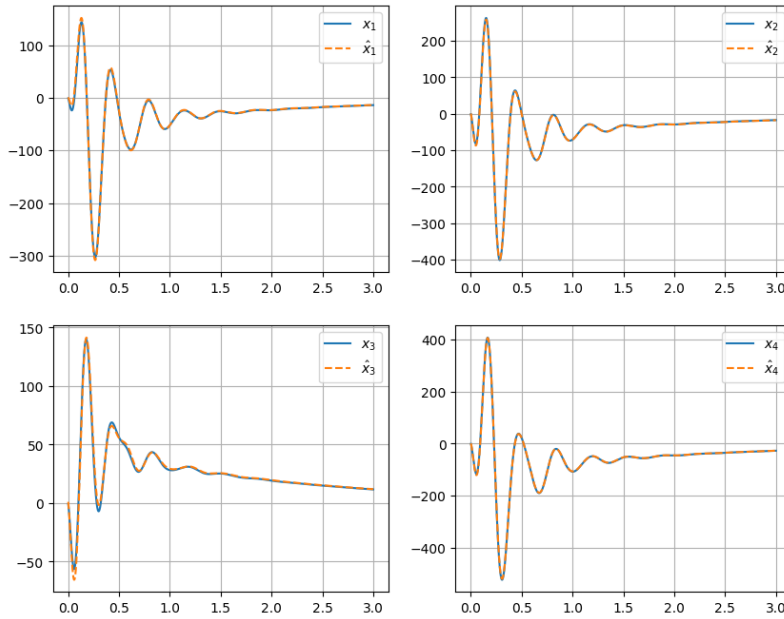


Рис. 9: Задание 4. Компоненты вектора состояний системы и наблюдателя ($\alpha_{cont} > \alpha_{obs}$).

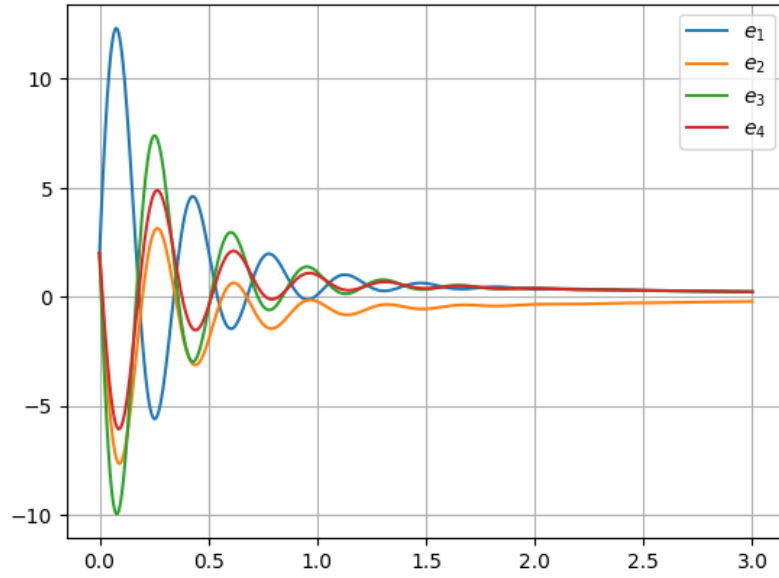


Рис. 10: Задание 4. Ошибки наблюдателя ($\alpha_{cont} > \alpha_{obs}$).

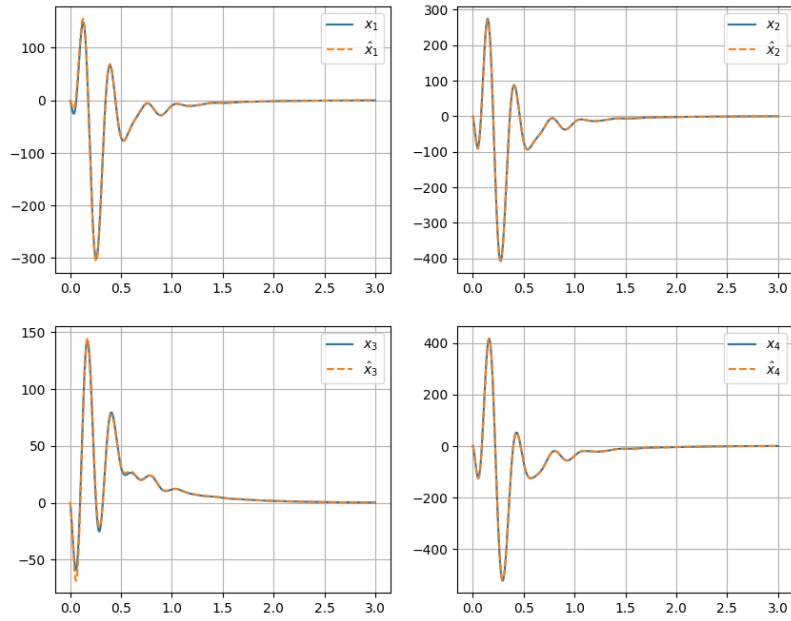


Рис. 11: Задание 4. Компоненты вектора состояний системы и наблюдателя ($\alpha_{cont} = \alpha_{obs}$).

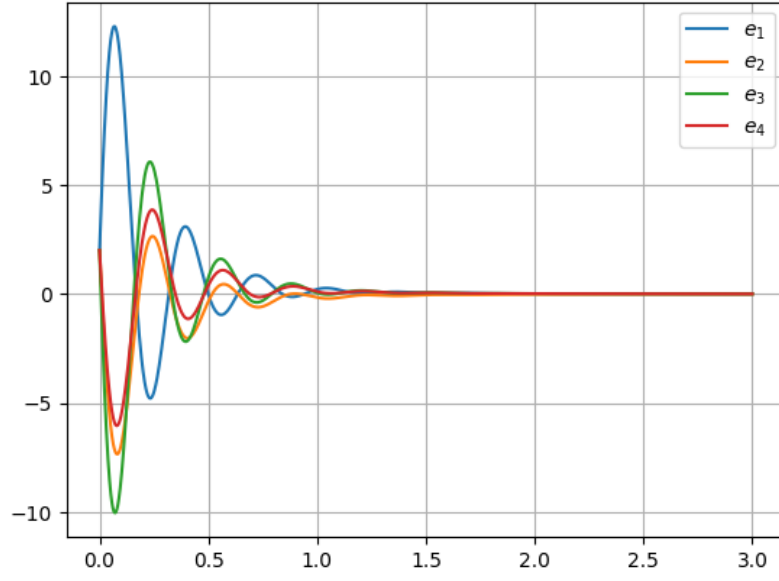


Рис. 12: Задание 4. Ошибки наблюдателя ($\alpha_{cont} = \alpha_{obs}$).

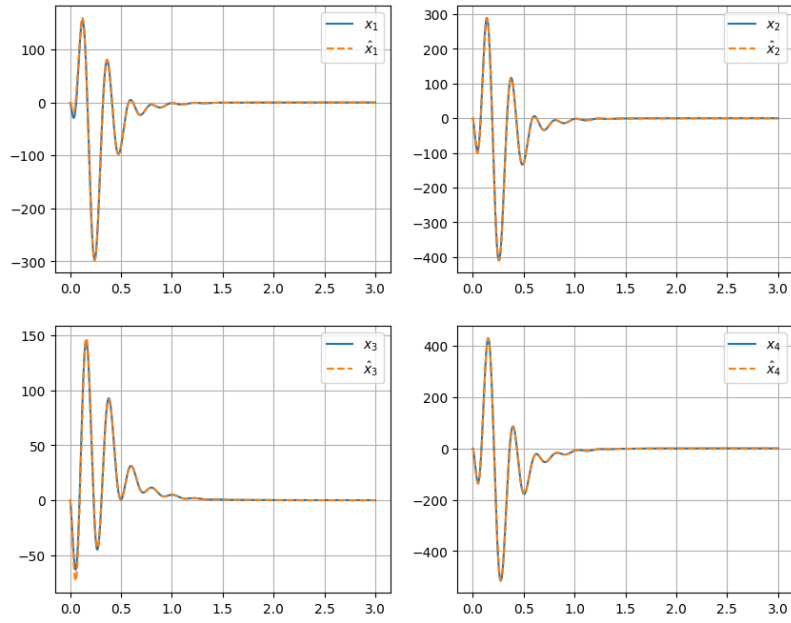


Рис. 13: Задание 4. Компоненты вектора состояний системы и наблюдателя ($\alpha_{cont} < \alpha_{obs}$).

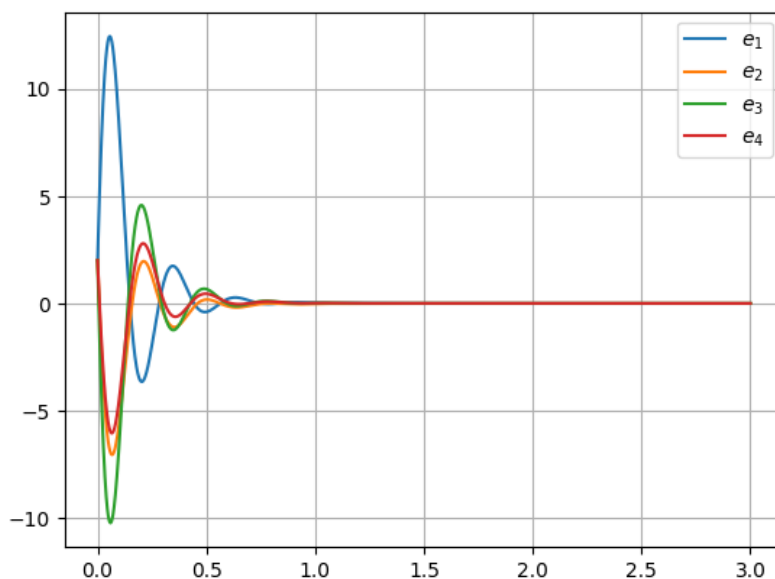


Рис. 14: Задание 4. Ошибки наблюдателя ($\alpha_{cont} < \alpha_{obs}$).

5 Выводы

В ходе выполнения данной лабораторной работы получили навыки синтеза регуляторов и наблюдателей с заданной степенью устойчивости с помощью аппарата линейных матричных неравенств.

1. Ограничение на степень устойчивости регуляторов и наблюдателей обусловлено наличием неуправляемых/ненаблюдаемых собственных чисел матрицы системы.
2. При наложении условия ограниченности входного воздействия при синтезе регулятора можем заметить увеличение действительной части собственных чисел матрицы $A + BK$. При минимизации входного воздействия, данные значения становятся близки к заданной степени устойчивости.
3. Высокие степени устойчивости наблюдателей гарантируют быструю сходимость, однако в начале переходного процесса ошибка наблюдателя может быть существенно больше допустимой в реальных системах.
4. Различные конфигурации степеней устойчивости регуляторов и наблюдателей влияют на сходимость системы ошибки наблюдателя. В случае когда степень устойчивости наблюдателя меньше степени устойчивости регулятора можем наблюдать существенно более длительный переходный процесс системы и ошибки.