

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №11

« H_2 и H_∞ »

по дисциплине «Теория автоматического управления»

Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич

Группа: R33353

Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

1	Синтез H_2-регулятора по состоянию	2
1.1	1 вариант	2
1.2	2 вариант	2
1.3	Графики	2
2	Синтез H_2-регулятора по выходу	7
2.1	1 вариант	7
2.2	2 вариант	7
2.3	Графики	10
3	Синтез H_∞-регулятора по состоянию	12
4	Синтез H_∞-регулятора по выходу	17
5	Выводы	22

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать [Python Control Systems Library](#). Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в [jupyter notebook](#) на GitHub.

1 Синтез H_2 -регулятора по состоянию

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 u \end{cases} \quad (1)$$

Можем синтезировать H_2 -регулятор по состоянию ($u = Kx$) следующим образом:

$$\begin{cases} A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases} \quad (2)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_1 = [1 \quad 0] \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Моделирование систем проведем при $w = [\sin(t), \sin(2t), 1]^T$. Зададимся двумя вариантами регулируемого выхода z :

1.1 1 вариант

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$$

Матрица передаточных функций:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{2s+4}{s^2+2s+2} & \frac{2}{s^2+2s+2} & 0 \\ \frac{-2s}{s^2+2s+2} & \frac{-2s-2}{s^2+2s+2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|W(j\omega)\|_{H_2} = 2.45, \|W(j\omega)\|_{H_\infty} = 2.58$$

Графики анализа данной системы представлены на рисунках 1, 2, 3, 4.

1.2 2 вариант

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 \end{bmatrix}$$

Матрица передаточных функций:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{3}{s^2+1.5s+1} & \frac{-3s}{s^2+1.5s+1} & 0 \\ \frac{-1}{s^2+1.5s+1} & \frac{s}{s^2+1.5s+1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|W(j\omega)\|_{H_2} = 2.58, \|W(j\omega)\|_{H_\infty} = 3.32$$

Графики анализа данной системы представлены на рисунках 5, 6, 7, 8.

1.3 Графики

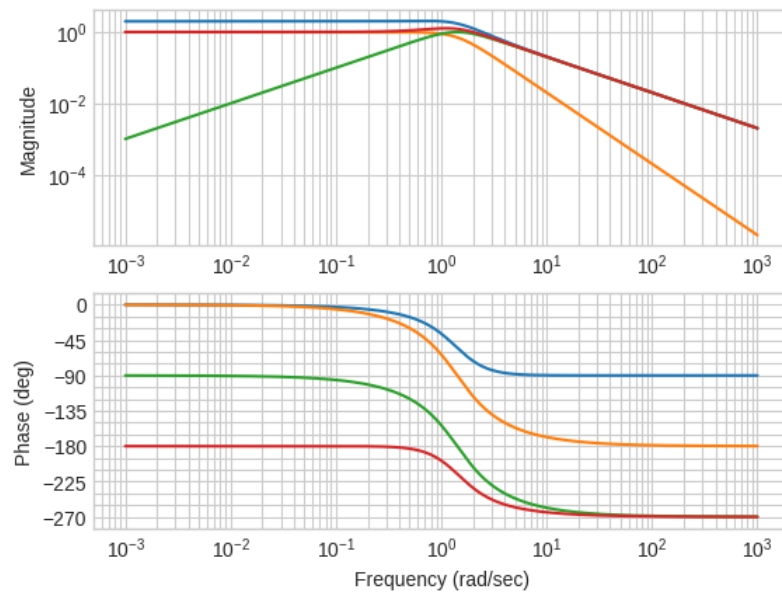


Рис. 1: Задание 1. Вариант 1. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

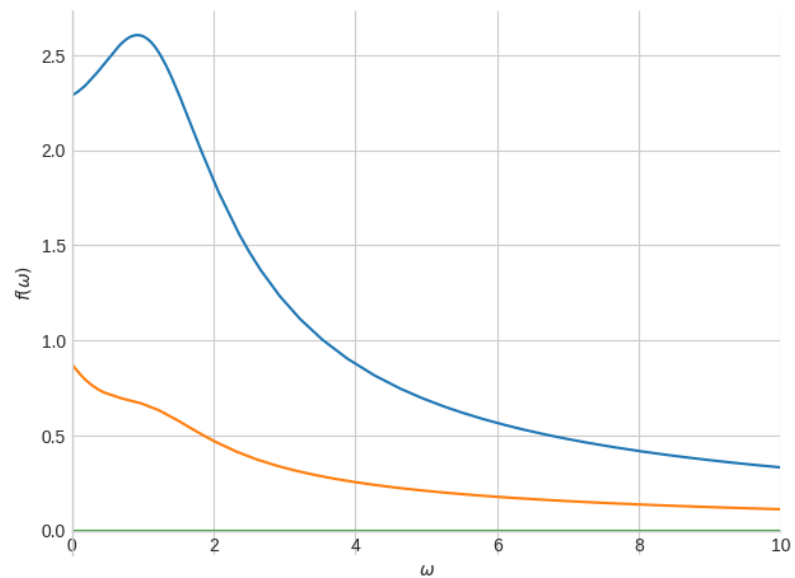


Рис. 2: Задание 1. Вариант 1. Сингулярные числа.

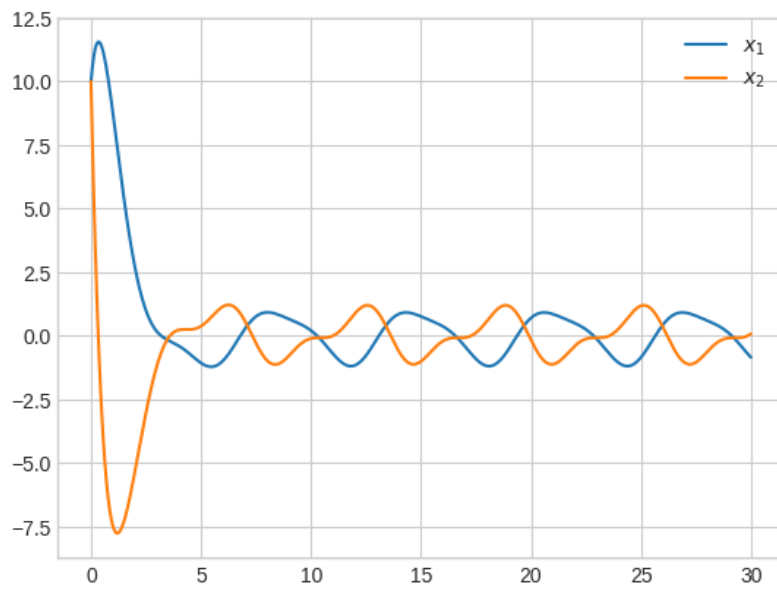


Рис. 3: Задание 1. Вариант 1. Вектор состояния системы.

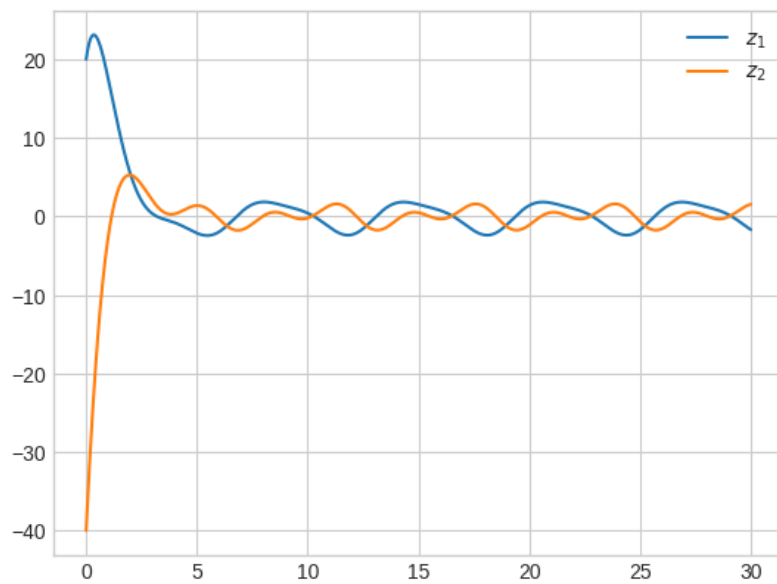


Рис. 4: Задание 1. Вариант 1. Регулируемый выход системы.

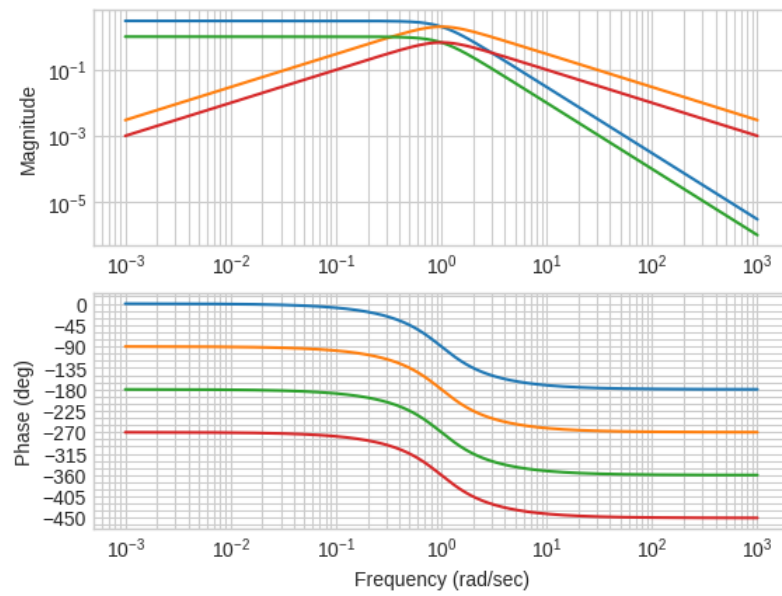


Рис. 5: Задание 1. Вариант 2. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

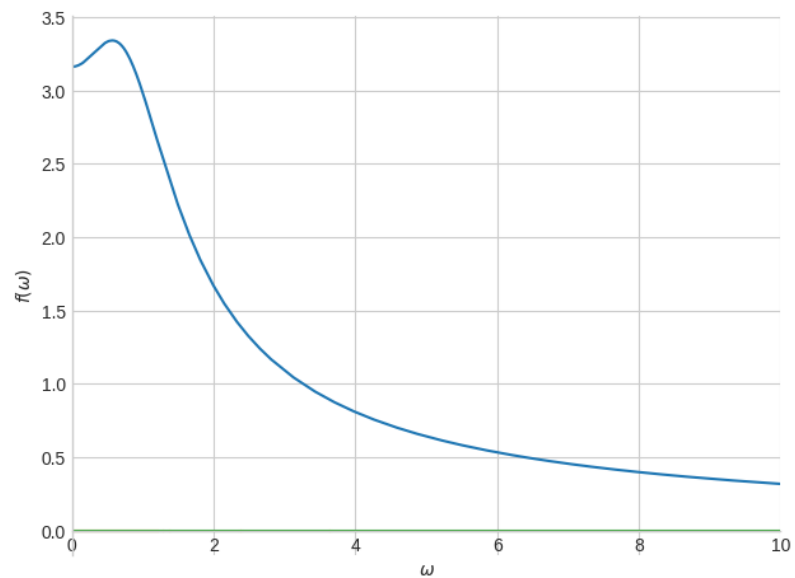


Рис. 6: Задание 1. Вариант 2. Сингулярные числа.

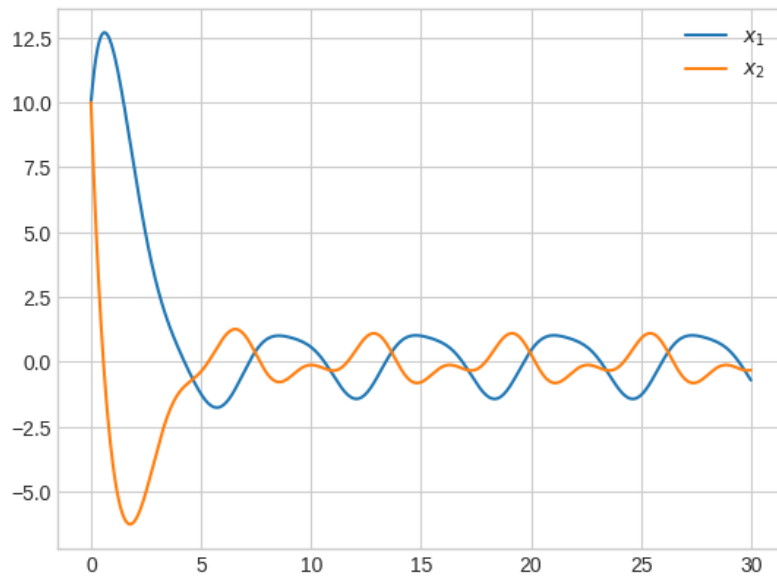


Рис. 7: Задание 1. Вариант 2. Вектор состояния системы.

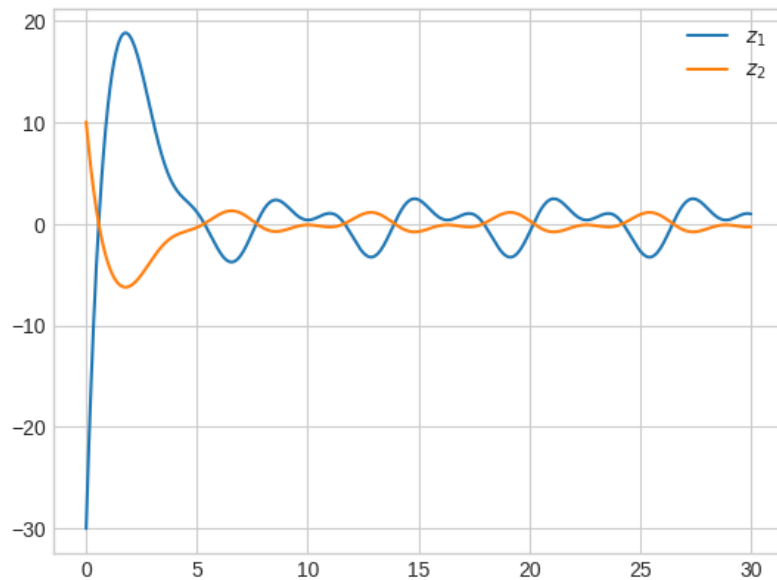


Рис. 8: Задание 1. Вариант 2. Регулируемый выход системы.

2 Синтез H_2 -регулятора по выходу

Дополним систему наблюдателем:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2u + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1\hat{x} \\ \hat{z} = C_2\hat{x} \end{cases} \quad (3)$$

Можем синтезировать H_2 -наблюдатель следующим образом:

$$\begin{cases} AP + PA^T + B_1B_1^T - PC_1^T(D_1D_1^T)^{-1}C_1P = 0 \\ L = -PC_1^T(D_1D_1^T)^{-1} \end{cases} \quad (4)$$

Представим систему в виде:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2K & -B_2K \\ 0 & A + LC_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ LD_1 + B_1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} C_2 + D_2K & -D_2K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5)$$

Моделирование систем проведем при $w = [\sin(t), \sin(2t), 0.5\sin(t)]^T$. Зададимся двумя вариантами регулируемого выхода z :

2.1 1 вариант

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -1.73 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Матрица передаточных функций:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{2s^3+7.46s^2+12.93s}{s^4+3.73s^3+6.64s^2+5.46s+2} & \frac{2s^2+7.46s+12.93}{s^4+3.73s^3+6.64s^2+5.46s+2} & \frac{-10.93s-4}{s^4+3.73s^3+6.64s^2+5.46s+2} \\ \frac{-5.46s^2-2s}{s^4+3.73s^3+6.64s^2+5.46s+2} & \frac{-5.46s-2}{s^4+3.73s^3+6.64s^2+5.46s+2} & \frac{-5.46s^3-2s^2}{s^4+3.73s^3+6.64s^2+5.46s+2} \end{bmatrix}$$

$$\|W(j\omega)\|_{H_2} = 5.27, \|W(j\omega)\|_{H_\infty} = 7.21$$

Графики анализа данной системы представленные на рисунках [9](#), [10](#), [11](#), [12](#).

2.2 2 вариант

$$C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} -1.41 & -2.19 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} -1.73 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Матрица передаточных функций:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{2s^3+3.12s^2+11.03s}{s^4+3.92s^3+6.22s^2+4.64s+1.41} & \frac{2s^2+3.21s+11.03}{s^4+3.92s^3+6.22s^2+4.64s+1.41} & \frac{-4.64s^3-1.41s^2-9.29s-2.82}{s^4+3.92s^3+6.22s^2+4.64s+1.41} \\ \frac{-4.64s^2-10.71s-2.82}{s^4+3.92s^3+6.22s^2+4.64s+1.41} & \frac{2s^3+7.85s^2+7.79s-1.41}{s^4+3.92s^3+6.22s^2+4.64s+1.41} & \frac{-4.46s^3-10.71s^2-2.82s}{s^4+3.92s^3+6.22s^2+4.64s+1.41} \end{bmatrix}$$

$$\|W(j\omega)\|_{H_2} = 5.74, \|W(j\omega)\|_{H_\infty} = 8.43$$

Графики анализа данной системы представленные на рисунках [13](#), [14](#), [15](#), [16](#).

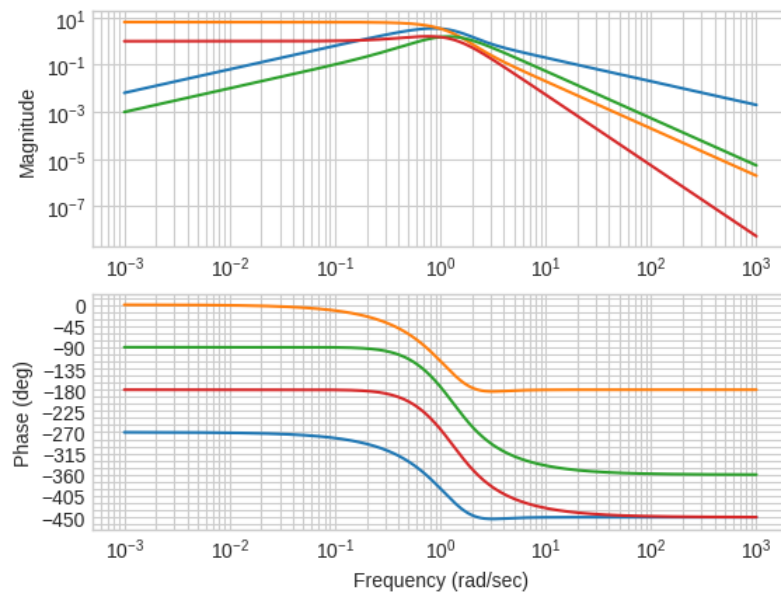


Рис. 9: Задание 2. Вариант 1. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

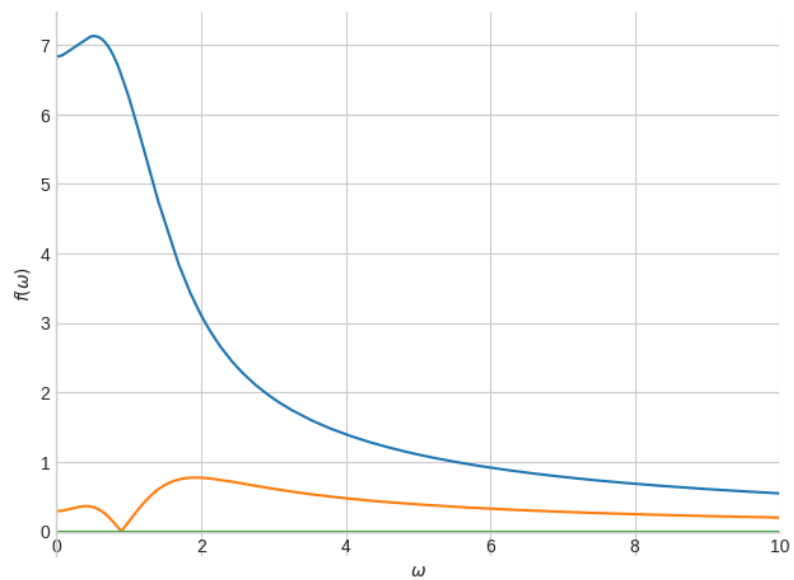


Рис. 10: Задание 2. Вариант 1. Сингулярные числа.

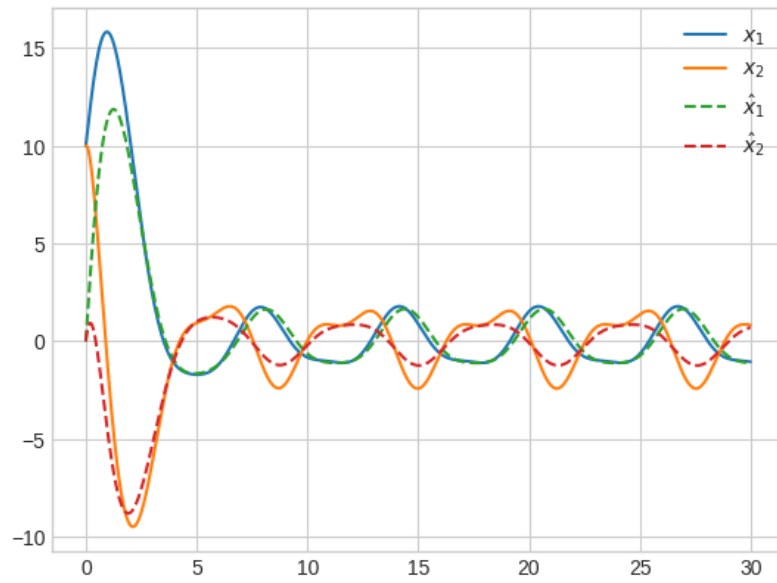


Рис. 11: Задание 2. Вариант 1. Вектор состояния системы.

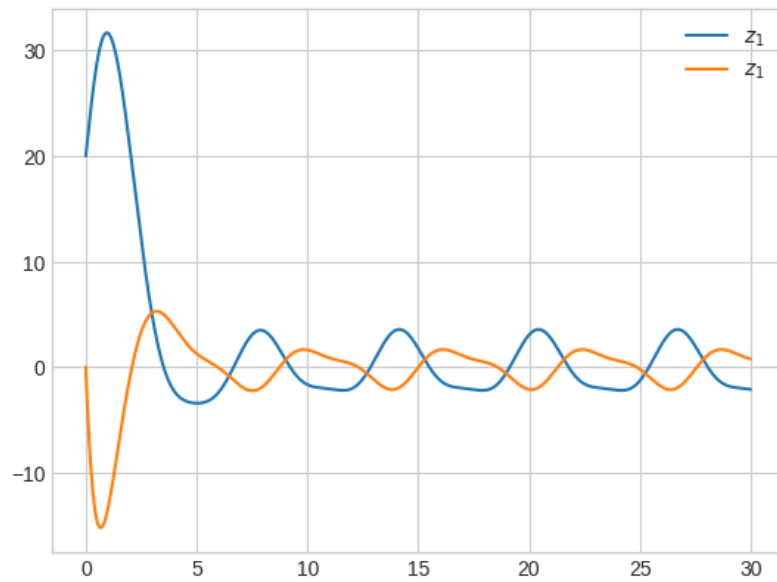


Рис. 12: Задание 2. Вариант 1. Регулируемый выход системы.

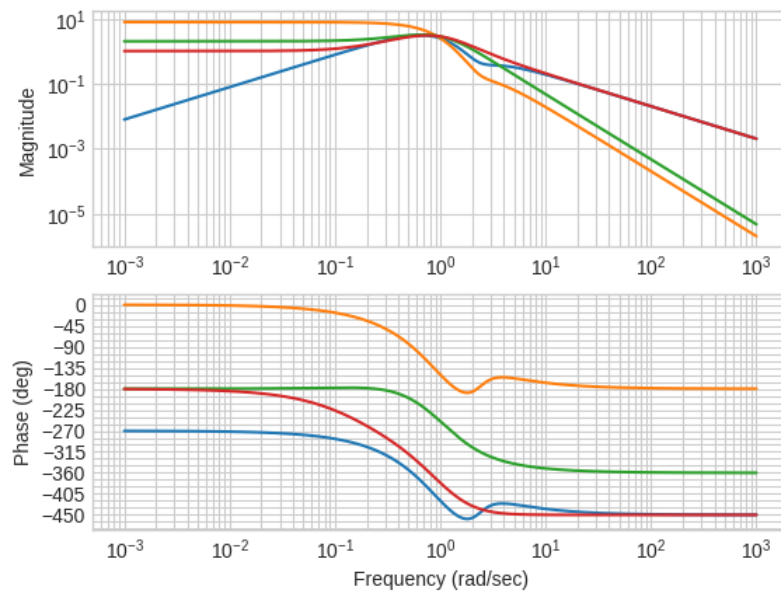


Рис. 13: Задание 2. Вариант 2. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

2.3 Графики

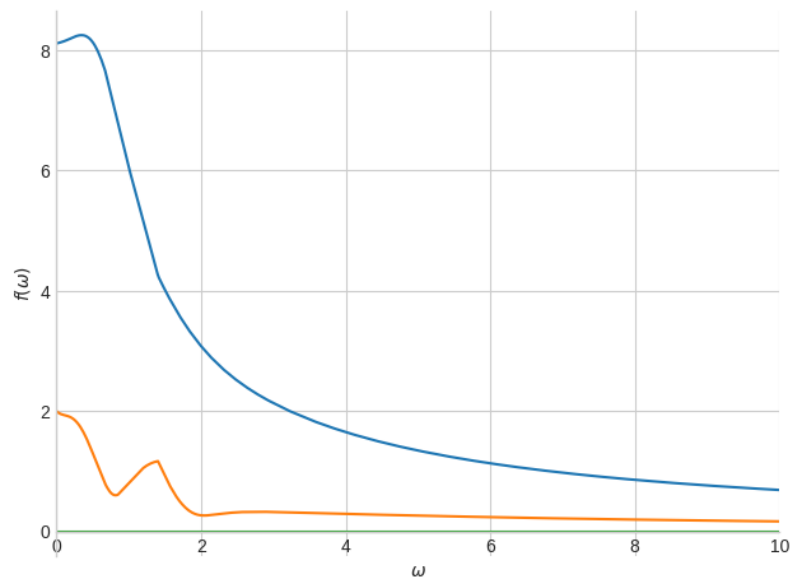


Рис. 14: Задание 2. Вариант 2. Сингулярные числа.

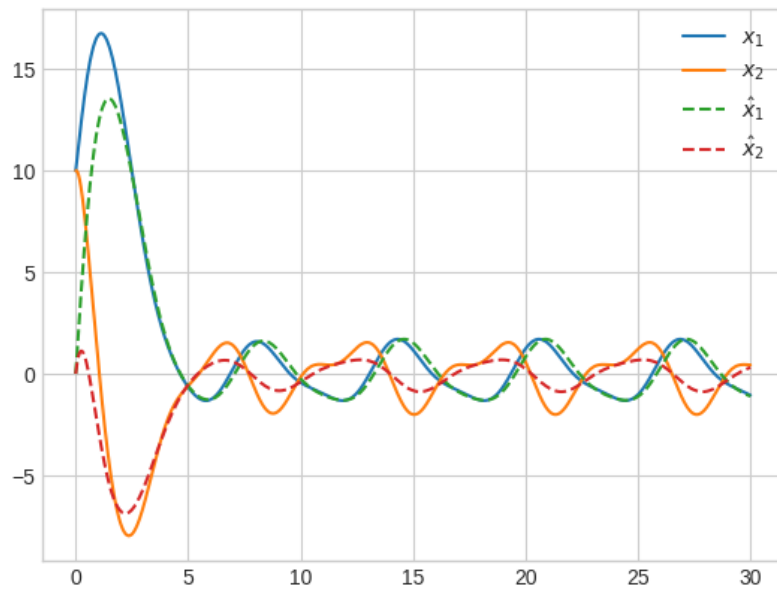


Рис. 15: Задание 2. Вариант 2. Вектор состояния системы.

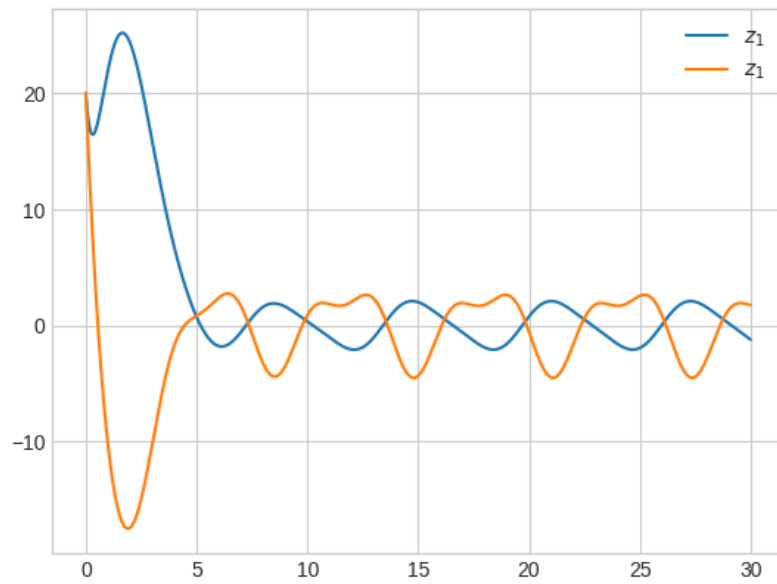


Рис. 16: Задание 2. Вариант 2. Регулируемый выход системы.

3 Синтез H_∞ -регулятора по состоянию

Рассмотрев систему (1) можем синтезировать H_∞ -регулятор по состоянию:

$$\begin{cases} A^T Q + Q A + C_2^T C_2 - Q B_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q + \gamma^{-2} Q B_1 B_1^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases} \quad (6)$$

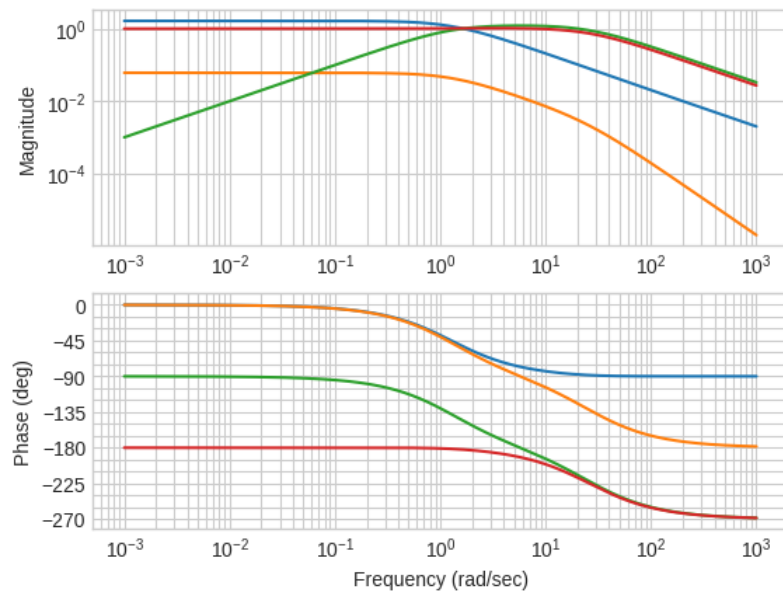
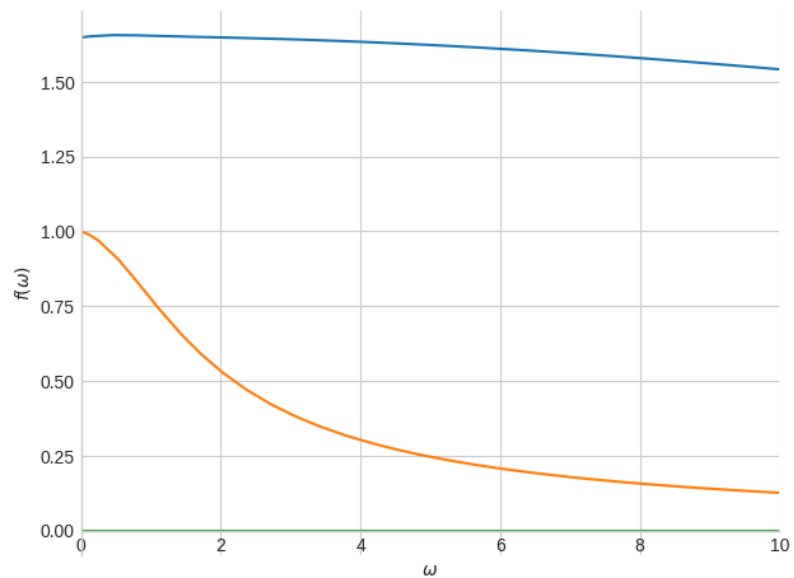
Изменим матрицы системы следующим образом:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

γ	K	$\ W(j\omega)\ _{H_2}$	$\ W(j\omega)\ _{H_\infty}$
1.65	$\begin{bmatrix} -32.89 & -27.05 \end{bmatrix}$	5.98	1.61
3	$\begin{bmatrix} -2.77 & -2.68 \end{bmatrix}$	2.49	2.34
10	$\begin{bmatrix} -2.05 & -2.04 \end{bmatrix}$	2.44	2.64

Таблица 1: Результаты синтеза регулятора с заданными γ .

Графики анализа системы, замкнутой регулятором при различных γ приведены ниже (рис. 17-24):

Рис. 17: Задание 3. $\gamma = 1.65$. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.Рис. 18: Задание 3. $\gamma = 1.65$. Сингулярные числа.

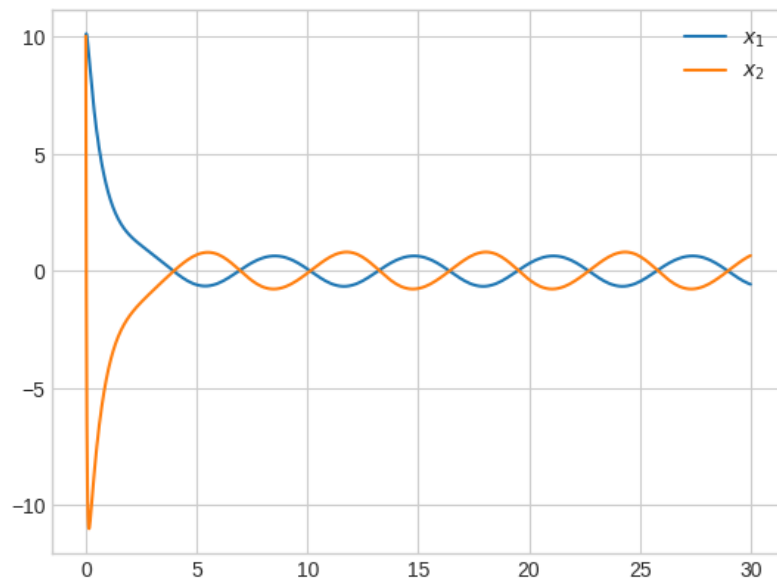


Рис. 19: Задание 3. $\gamma = 1.65$. Вектор состояния системы.

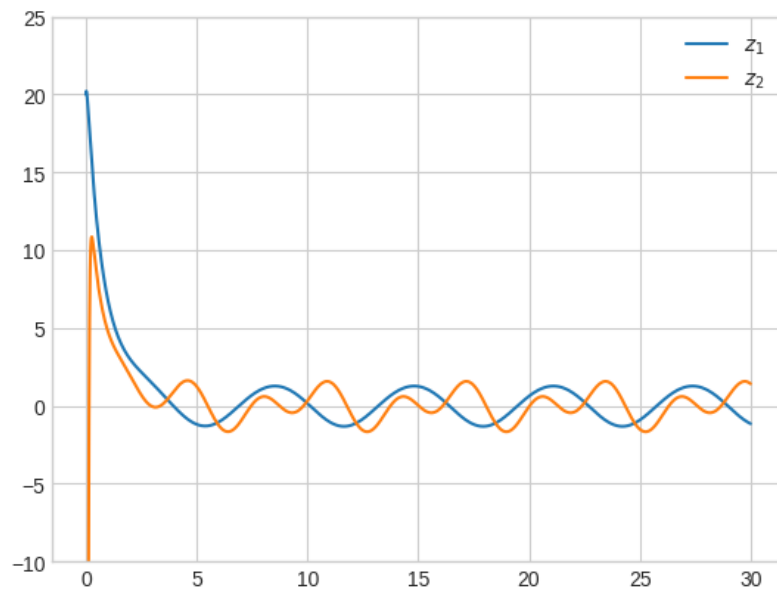


Рис. 20: Задание 3. $\gamma = 1.65$. Регулируемый выход системы.

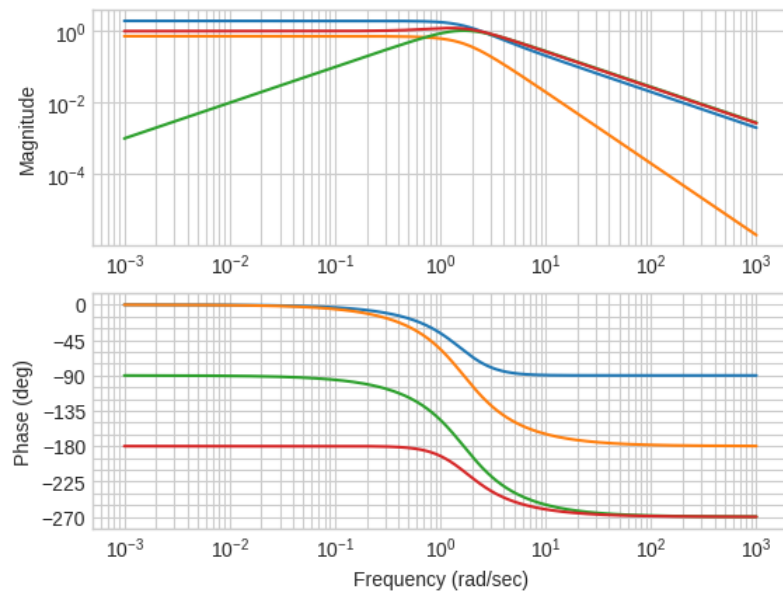


Рис. 21: Задание 3. $\gamma = 3$. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

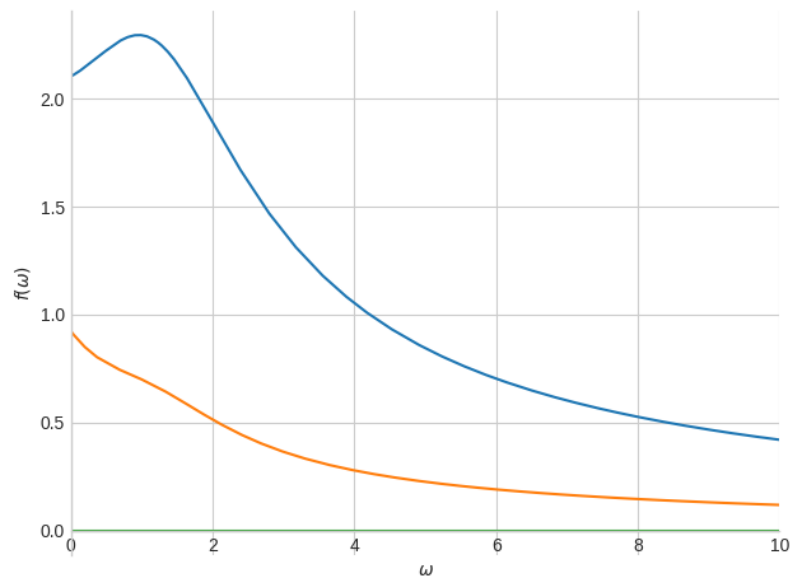


Рис. 22: Задание 3. $\gamma = 3$. Сингулярные числа.

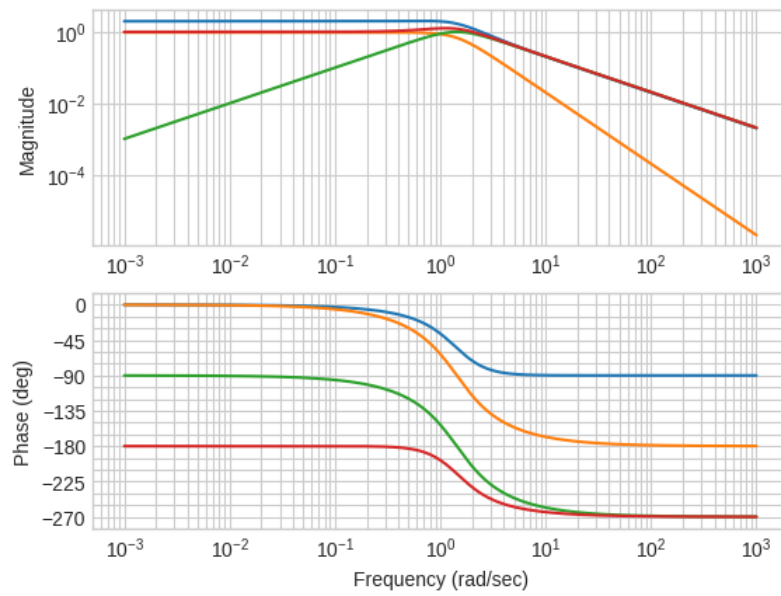


Рис. 23: Задание 3. $\gamma = 10$. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

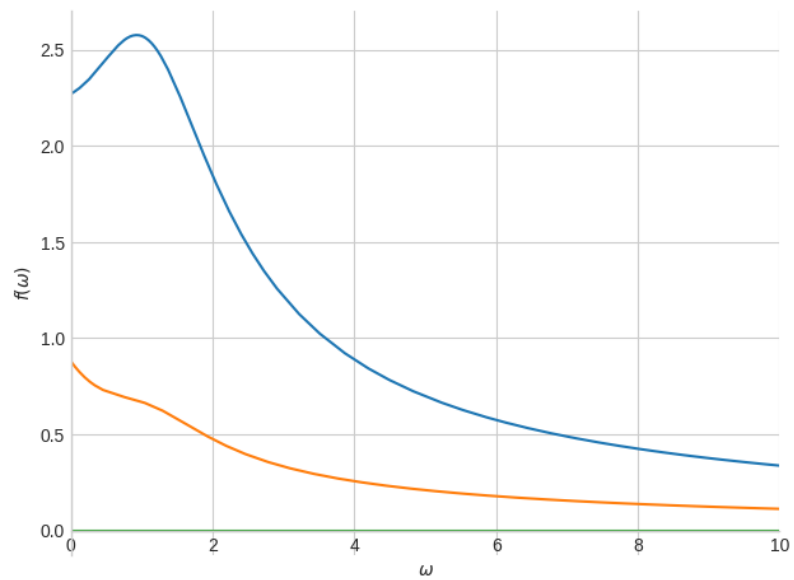
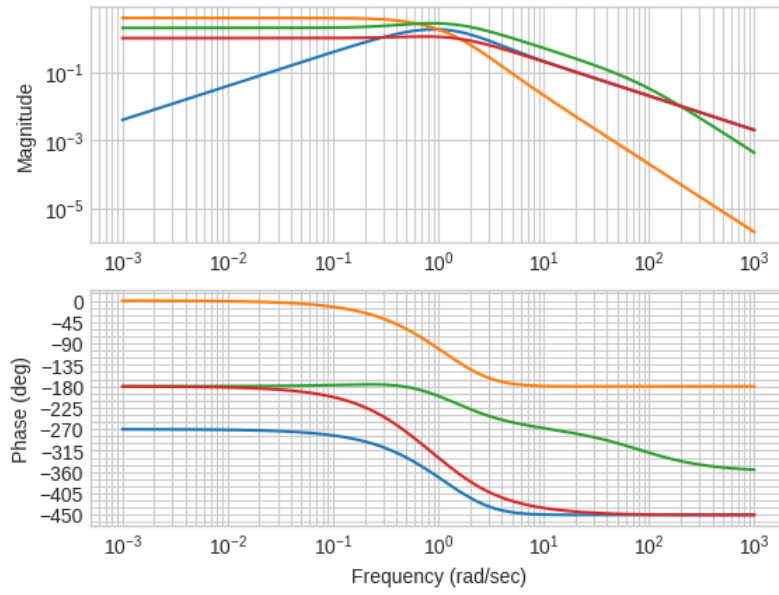


Рис. 24: Задание 3. $\gamma = 10$. Сингулярные числа.

Рис. 25: Задание 4. $\gamma = 5.2$. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

4 Синтез H_∞ -регулятора по выходу

Рассмотрев системы (1) и (3) можем синтезировать H_∞ -регулятор по выходу (совместно с наблюдателем) следующим образом:

$$\begin{cases} AP + PA^T + B_1 B_1^T - PC_1^T (D_1 D_1^T)^{-1} C_1 P = 0 \\ L = -PC_1^T (D_1^T D_1)^{-1} \\ A^T Q + QA + C_2^T C_2 - QB_2 (D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q = 0 \\ K = -(D_2^T D_2)^{-1} B_2^T Q \end{cases} \quad (7)$$

Представим систему в виде:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_2 K & -B_2 K \\ -(LD_1 B_1) \gamma^{-2} B_1^T Q & A + LC_1 + (LD_1 B_1) \gamma^{-2} B_1^T Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ LD_1 + B_1 \end{bmatrix} w \\ z = \begin{bmatrix} C_2 + D_2 K & -D_2 K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{cases} \quad (8)$$

γ	K	L	$\ W(j\omega)\ _{H_2}$	$\ W(j\omega)\ _{H_\infty}$
5.2	$\begin{bmatrix} -2.41 & -3.06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -83.74 & -74.41 \end{bmatrix}^T$	33.37	5.19
7	$\begin{bmatrix} -2.21 & -2.94 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.32 & -2.38 \end{bmatrix}^T$	7.12	6.48
10	$\begin{bmatrix} -2.09 & -2.88 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2.21 & -1.42 \end{bmatrix}^T$	6.37	7.41

Таблица 2: Результаты синтеза полного регулятора с заданными γ .

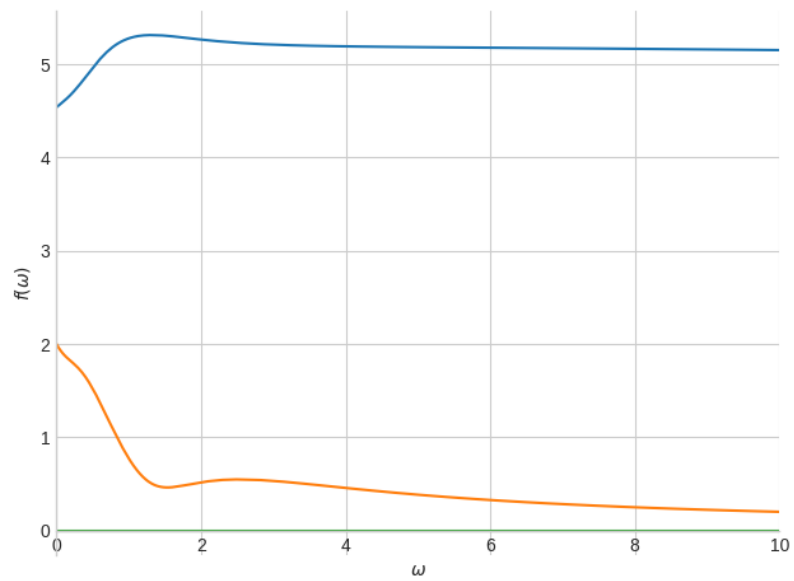


Рис. 26: Задание 4. $\gamma = 5.2$. Сингулярные числа.

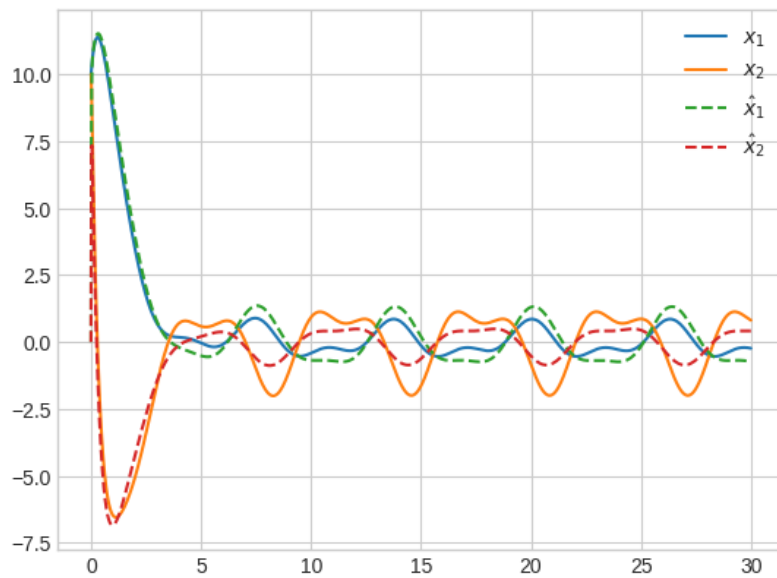


Рис. 27: Задание 4. $\gamma = 5.2$. Вектор состояния системы.

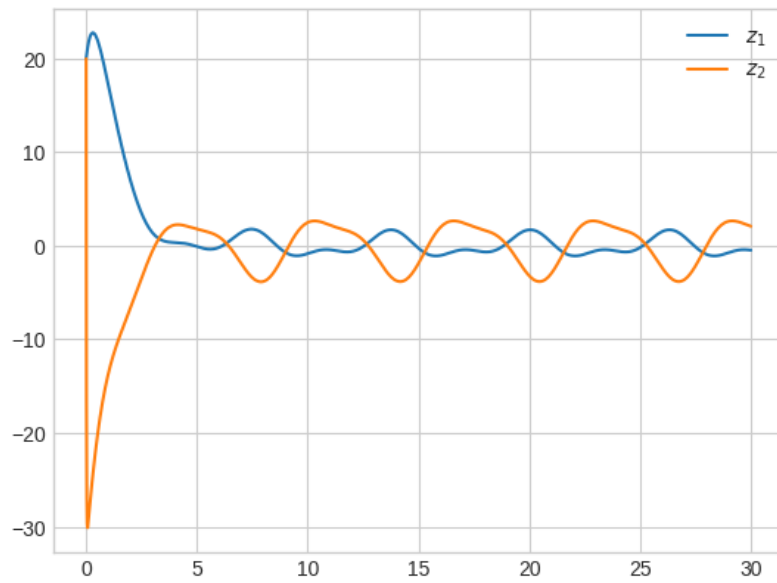


Рис. 28: Задание 4. $\gamma = 5.2$. Регулируемый выход системы.

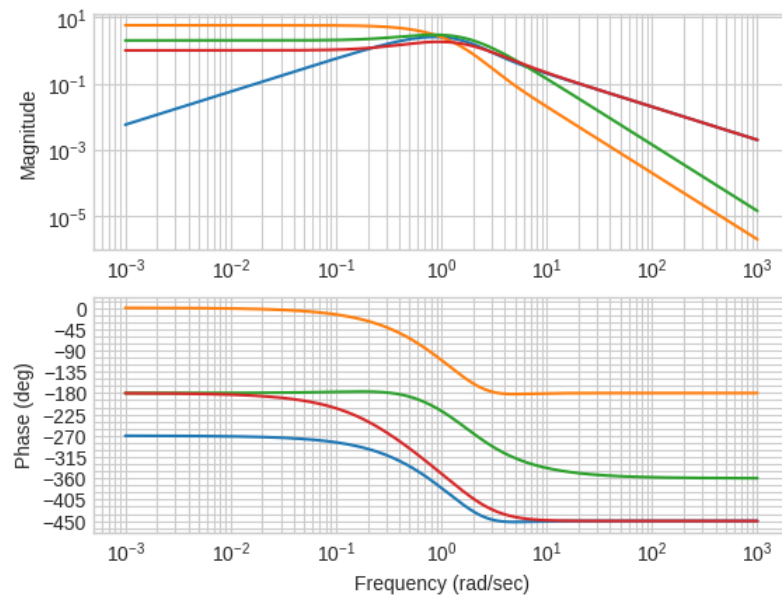


Рис. 29: Задание 4. $\gamma = 7$. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

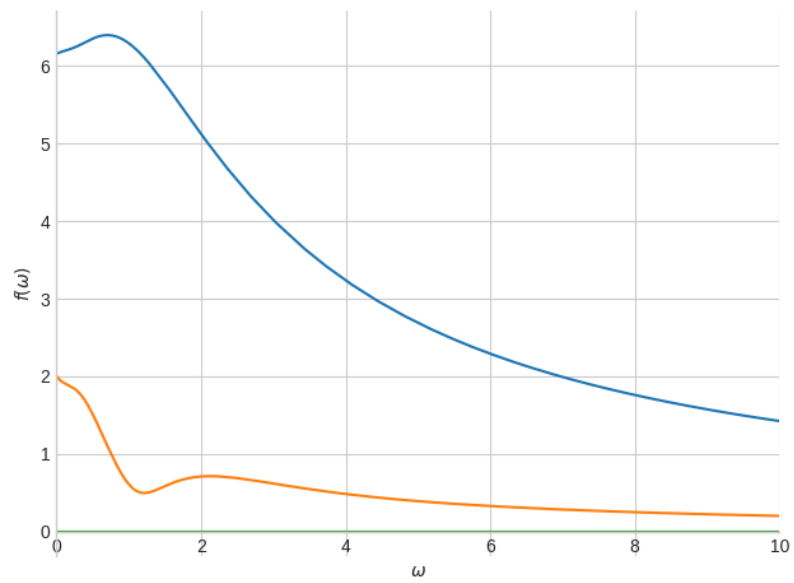


Рис. 30: Задание 4. $\gamma = 7$. Сингулярные числа.

Графики анализа системы, замкнутой регулятором при различных γ приведены на рисунках 25-30:

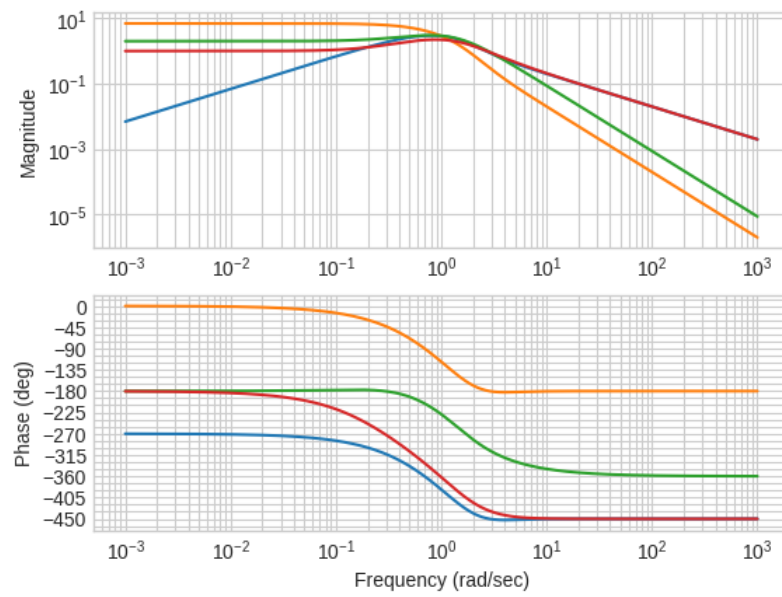


Рис. 31: Задание 4. $\gamma = 10$. Компоненты матрицы АЧХ и ФЧХ.

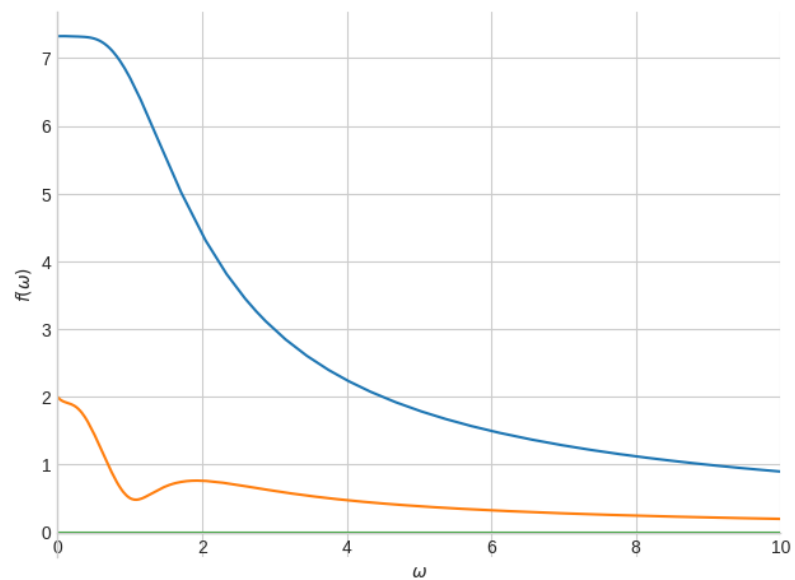


Рис. 32: Задание 4. $\gamma = 10$. Сингулярные числа.

5 Выводы

В ходе выполнения данной работы были получены навыки синтеза и исследования методов оптимального управления (H_2 , H_∞ регуляторов и наблюдателей).

1. Наблюдается тенденция взаимоисключающей оптимизации H_2 и H_∞ нормы системы.
2. H_2 -регуляторы ведут себя в целом жестче (коэффициенты регулирования больше), в то время как для наблюдателей замечена обратная тенденция.
3. При моделировании систем с внешними воздействиями удавалось добиться установившихся колебаний ошибки в определенной области.