

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5
«Типовые динамические звенья»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 16

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

1	Исследование типовых звеньев	2
2	Исследование остальных типовых звеньев	6
3	Выводы	12

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать [Python Control Systems Library](#). Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в [jupyter notebook](#) на GitHub.

1 Исследование типовых звеньев

Рассмотрим несколько систем из приведенных заданий. Выведем дифференциальные уравнения, описывающие данные системы и найдем аналитические выражения для временных и частотных характеристик. Получение аналитических решений представлено в листинге программы.

Brushed DC motor 2.0

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e \omega, \varepsilon_s = -L\dot{I} \quad (1)$$

Путем преобразований можем получить дифференциальное уравнение (апериодическое звено второго порядка):

$$\ddot{\omega} + \frac{R}{L}\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JL}\omega = \frac{k_m}{JL}U, W(s) = \frac{k_m}{JLs^2 + JRs + k_m k_e}$$

Временные характеристики:

$$y_{i.r.} = \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = \frac{2k_m e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\left(\frac{t\sqrt{-\frac{R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}{2}\right)\theta(t)}{JL\sqrt{-\frac{R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}$$

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}W(s)\right) = \frac{\theta(t)}{k_e} - \frac{e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos\left(\frac{t\sqrt{-\frac{R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}{2}\right)\theta(t)}{k_e} - \frac{Re^{-\frac{Rt}{2L}} \sin\left(\frac{t\sqrt{-\frac{R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}{2}\right)\theta(t)}{Lk_e\sqrt{-\frac{R^2}{L} + \frac{4k_e k_m}{J}}}$$

Проведем моделирование системы и сравним с аналитически полученным поведением:

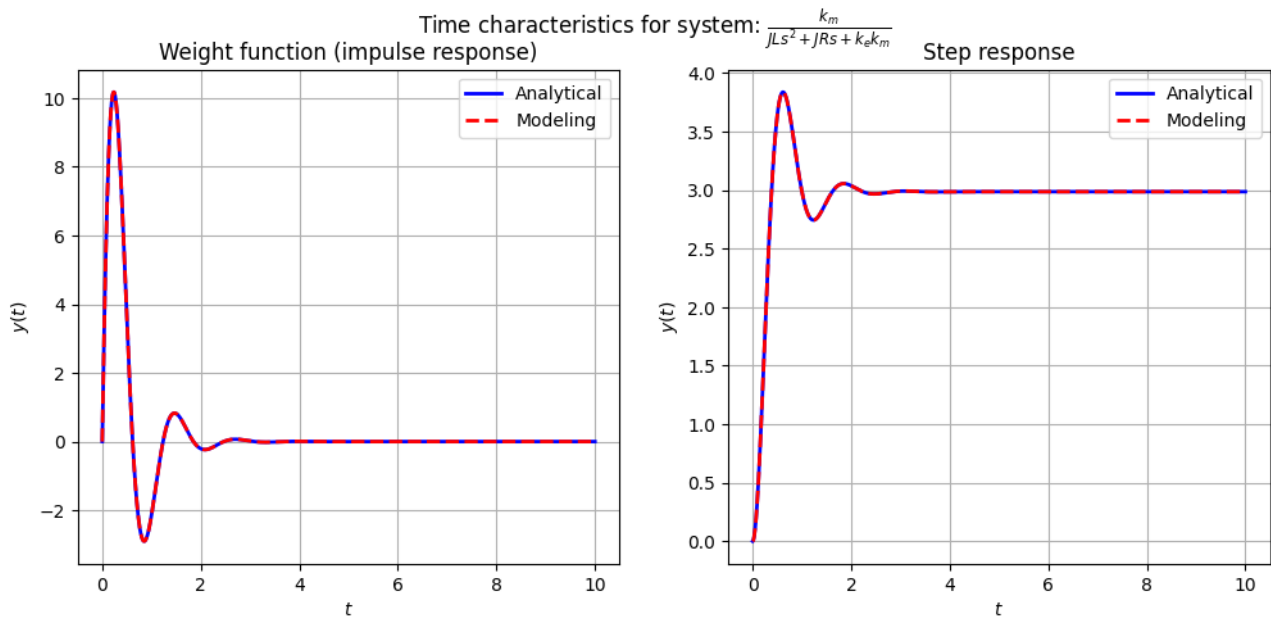


Рис. 1: Временные характеристики системы 2 (подвариант 7)

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{\|k_m\|}{\sqrt{J^2 L^2 \omega^4 + J^2 R^2 \omega^2 - 2JLk_e k_m \omega^2 + k_e^2 k_m^2}}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \text{atan}_2\left(-\frac{J R k_m \omega}{J^2 R^2 \omega^2 + (J L \omega^2 - k_e k_m)^2}, -\frac{k_m (J L \omega^2 - k_e k_m)}{J^2 R^2 \omega^2 + (J L \omega^2 - k_e k_m)^2}\right)$$

Воспользуемся функцией **bode** для численного моделирования частотных характеристик:

Frequency characteristics for system: $\frac{k_m}{jLs^2 + jRs + k_e k_m}$

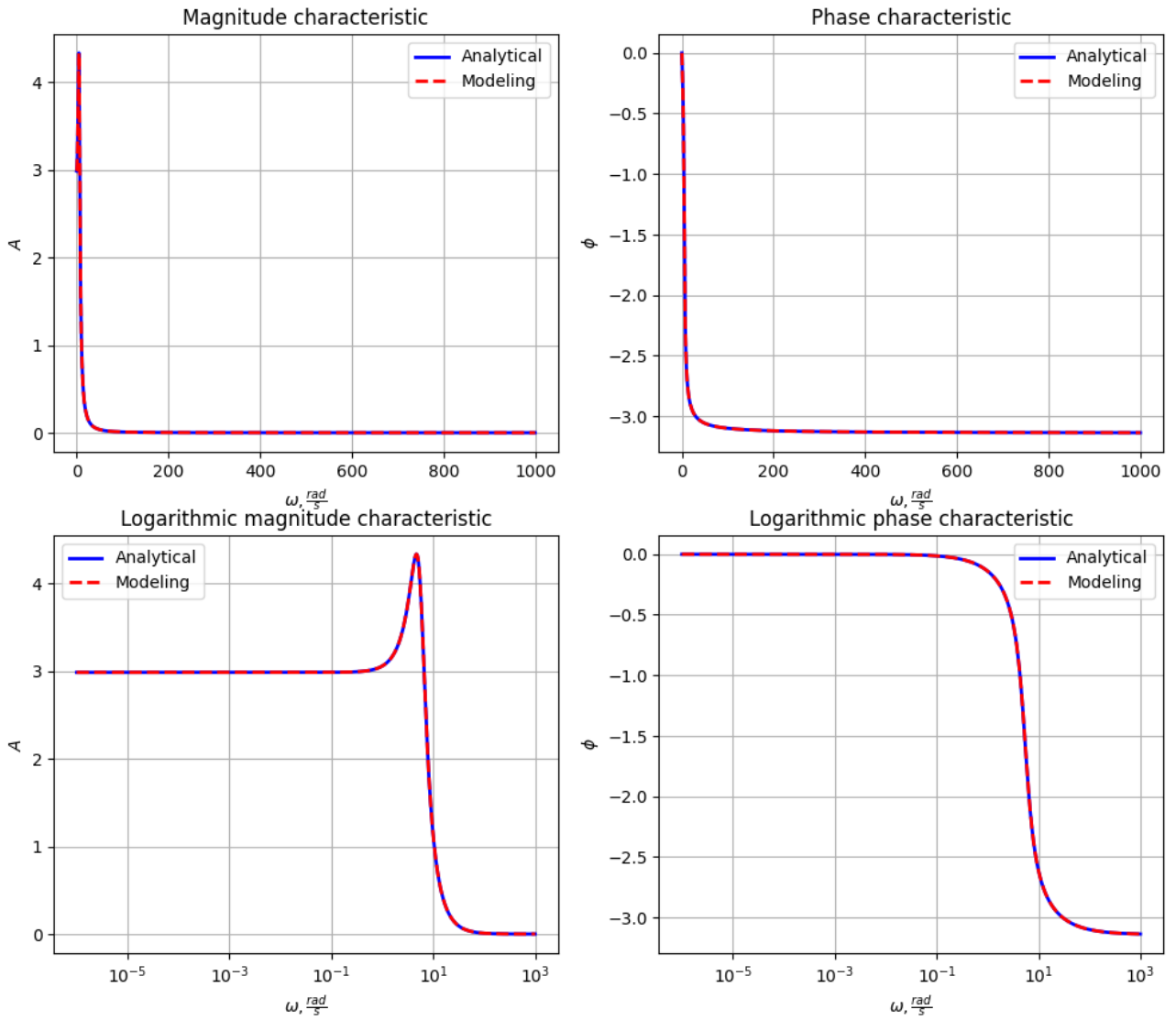


Рис. 2: Частотные характеристики системы 2 (подвариант 7)

Конденсируй. Интегрируй. Умножай

$$I = C \frac{dU}{dt} \quad (2)$$

Путем преобразований можем получить дифференциальное уравнение (идеальное интегрирующее):

$$\dot{U}C = I, W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Временные характеристики:

$$y_{i.r.} = \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = \frac{\theta(t)}{C}$$

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}W(s)\right) = \frac{\theta(t)t}{C}$$

Проведем моделирование системы и сравним с аналитически полученным поведением:

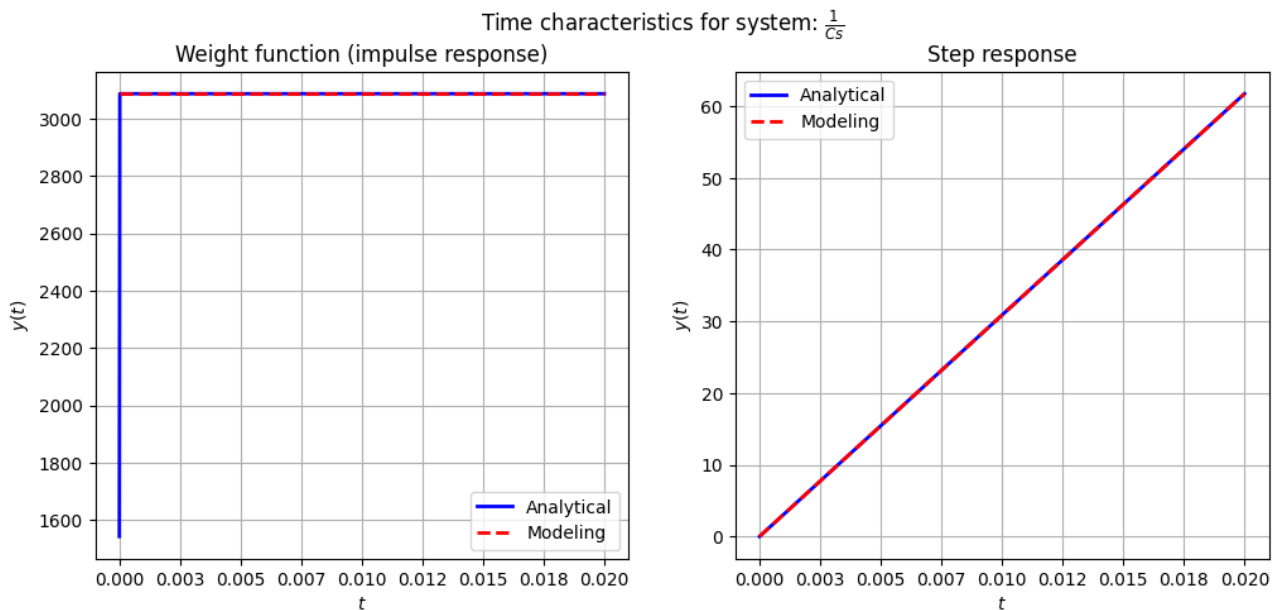


Рис. 3: Временные характеристики системы 3 (подвариант 7)

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{|C\omega|}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \text{atan}_2\left(-\frac{1}{C\omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Воспользуемся функцией **bode** для численного моделирования частотных характеристик:

Frequency characteristics for system: $\frac{1}{Cs}$

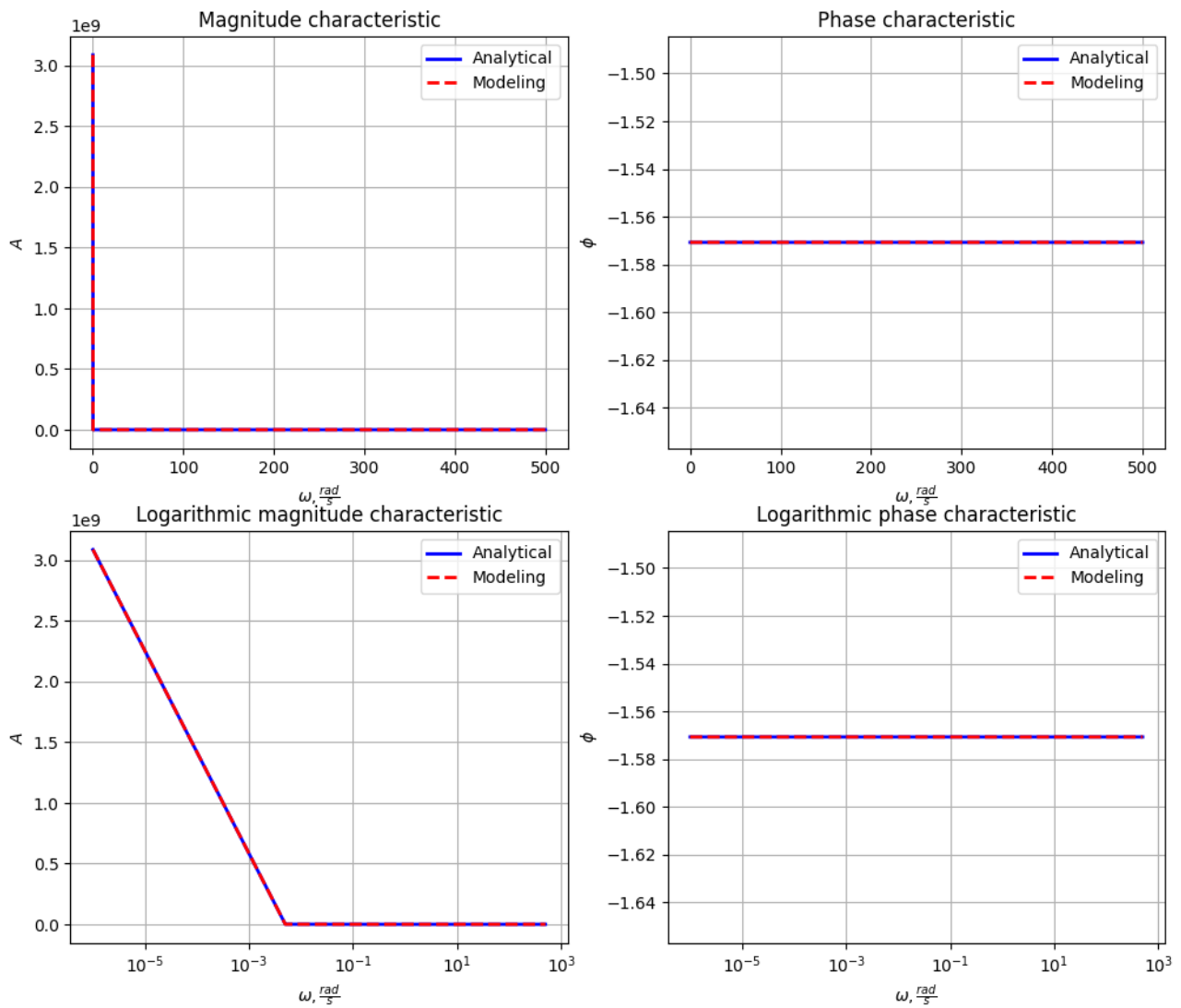


Рис. 4: Частотные характеристики системы 3 (подвариант 7)

2 Исследование остальных типовых звеньев

Brushed DC motor

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \varepsilon_i = -k_e \omega \quad (3)$$

Путем преобразований можем получить дифференциальное уравнение (апериодическое звено первого порядка):

$$\dot{\omega} + \frac{k_m k_e}{JR} \omega = \frac{k_m}{RJ} U, W(s) = \frac{k_m}{RJ s + k_m k_e}$$

Временные характеристики:

$$y_{i.r.} = \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = \frac{k_m e^{-\frac{k_e k_m t}{JR}} \theta(t)}{JR}$$

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} W(s)\right) = \frac{\theta(t)}{k_e} - \frac{e^{-\frac{k_e k_m t}{JR}} \theta(t)}{k_e}$$

Проведем моделирование системы и сравним с аналитически полученным поведением:

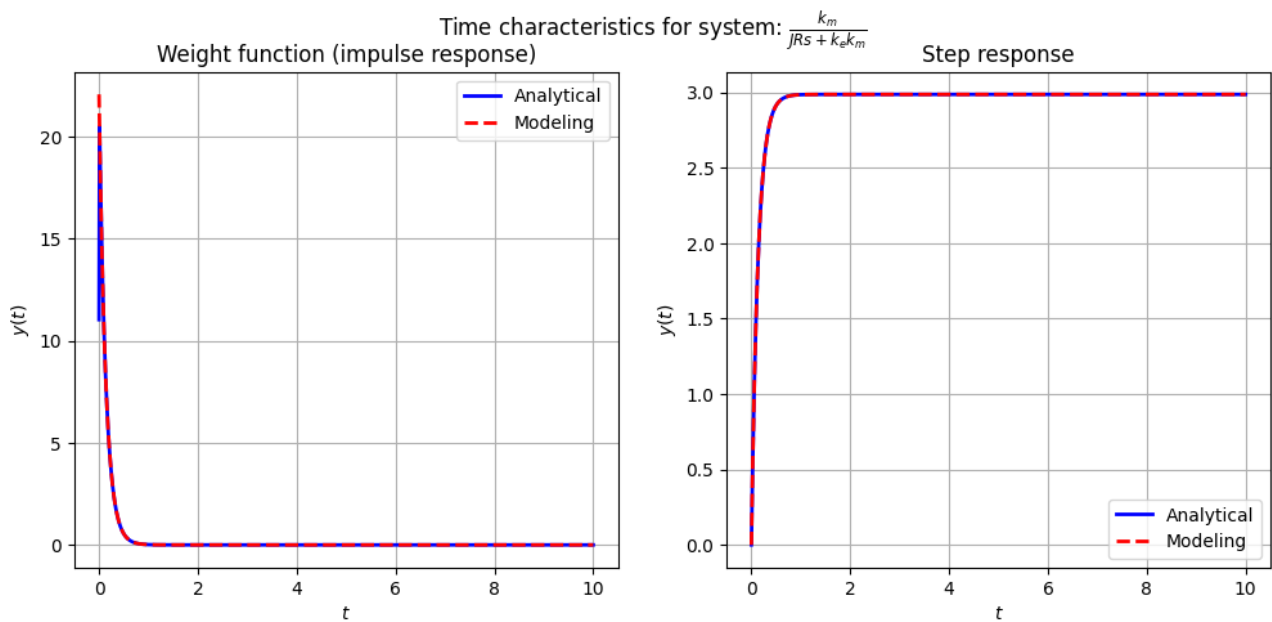


Рис. 5: Временные характеристики системы 1 (подвариант 7)

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{|k_m|}{\sqrt{J^2 R^2 \omega^2 + k_e^2 k_m^2}}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \text{atan}_2\left(-\frac{JR k_m \omega}{J^2 R^2 \omega^2 + k_e^2 k_m^2}, \frac{k_e k_m^2}{J^2 R^2 \omega^2 + k_e^2 k_m^2}\right)$$

Воспользуемся функцией **bold** для численного моделирования частотных характеристик:

Frequency characteristics for system: $\frac{k_m}{jRs + k_e k_m}$

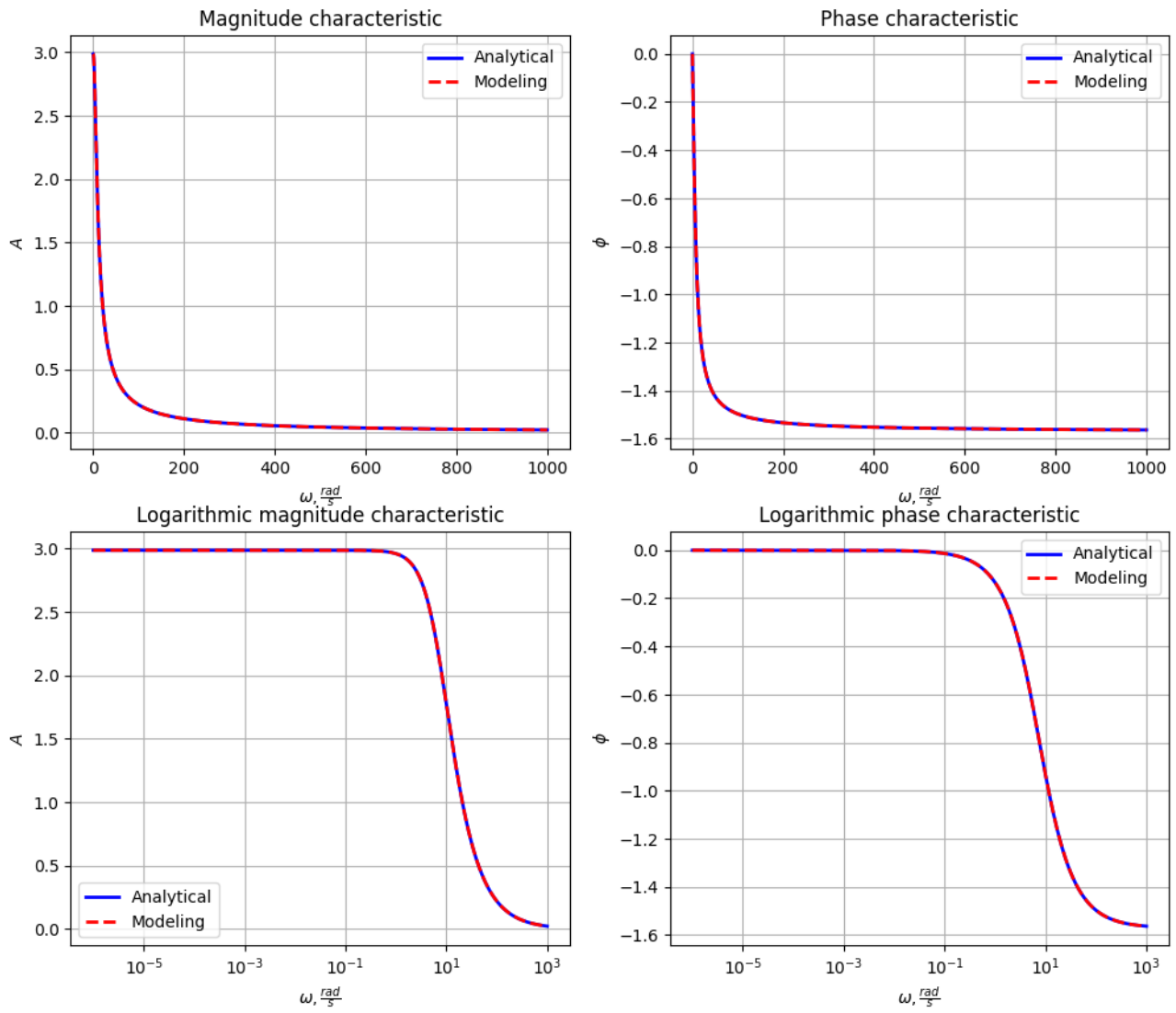


Рис. 6: Частотные характеристики системы 1 (подвариант 7)

Tachogenerator

$$I = \frac{\varepsilon - U_{out}}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = k_e \omega, \varepsilon_s = -L \dot{I}, I = \frac{U_{out}}{R_l} \quad (4)$$

Путем преобразований можем получить дифференциальное уравнение (апериодическое звено первого порядка):

$$\frac{L}{R_l} \dot{U}_{out} + U_{out} \frac{R_l + R}{R_l} = k_e \omega, W(s) = \frac{\frac{R_l k_e}{L}}{s + \frac{R + R_l}{L}}$$

Временные характеристики:

$$y_{i.r.} = \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = \frac{R_l k_e e^{-\frac{t(R+R_l)}{L}} \theta(t)}{L}$$

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} W(s)\right) = \frac{R_l k_e \left(e^{\frac{t(R^2+2RR_l+R_l^2)}{L(R+R_l)}} - 1\right) e^{-\frac{t(R^2+2RR_l+R_l^2)}{L(R+R_l)}} \theta(t)}{R + R_l}$$

Проведем моделирование системы и сравним с аналитически полученным поведением:

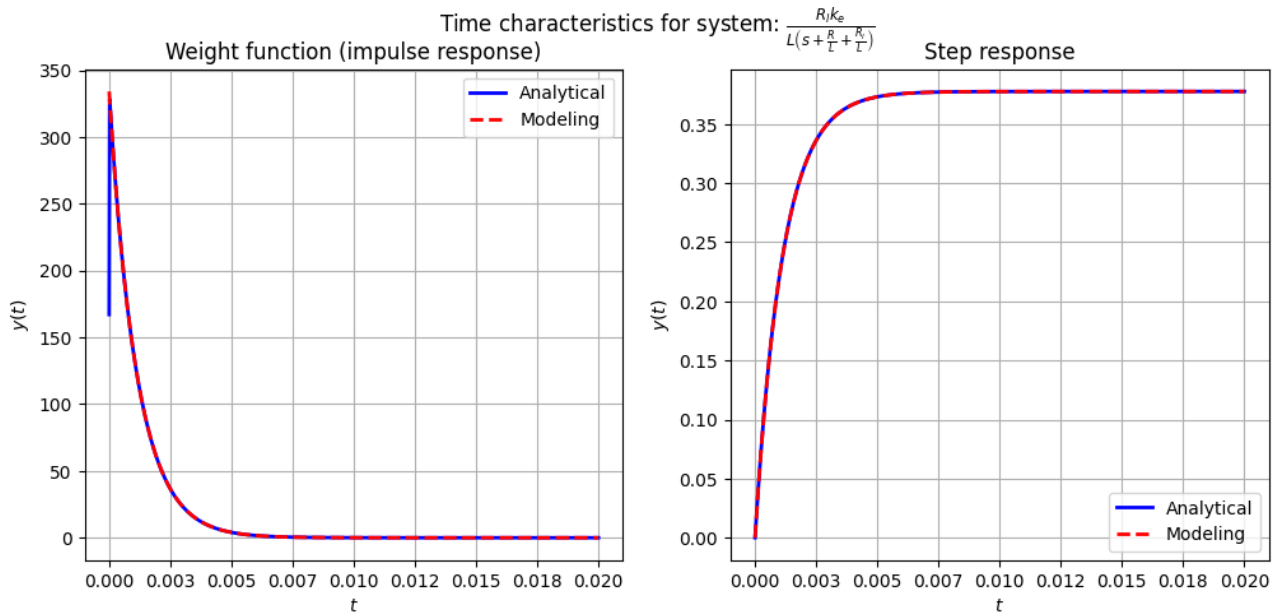


Рис. 7: Временные характеристики системы 4 (подвариант 16)

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{\left| \frac{R_l k_e}{L} \right|}{\sqrt{\frac{L^2 \omega^2 + R^2 + 2RR_l + R_l^2}{L^2}}}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \text{atan}_2 \left(-\frac{LR_l k_e \omega}{L^2 \omega^2 + (R + R_l)^2}, \frac{R_l k_e (R + R_l)}{L^2 \omega^2 + (R + R_l)^2} \right)$$

Воспользуемся функцией **bode** для численного моделирования частотных характеристик:

Frequency characteristics for system: $\frac{R_1 k_e}{L(s + \frac{R_1}{L} + \frac{R_2}{L'})}$

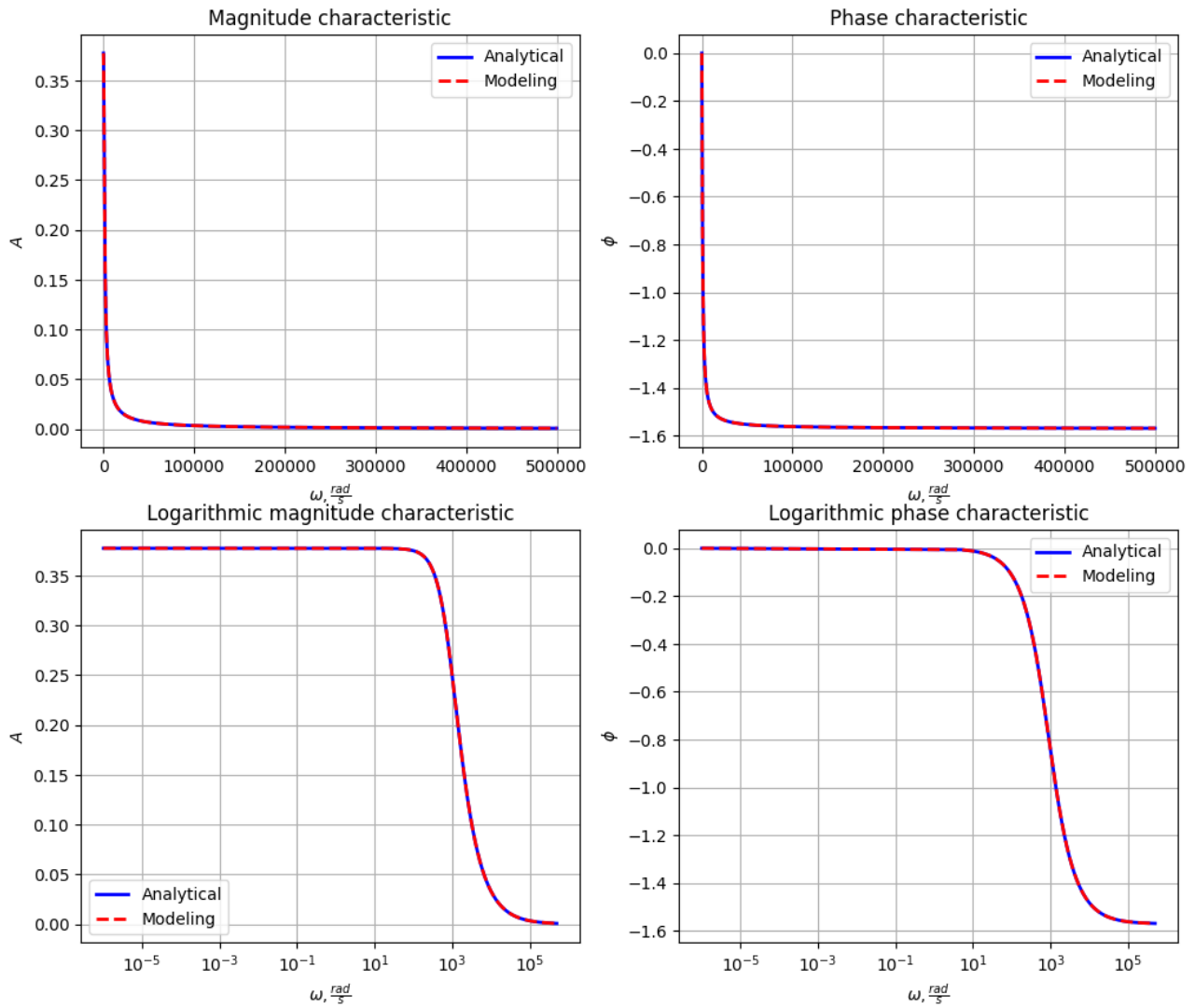


Рис. 8: Частотные характеристики системы 4 (подвариант 16)

Spring-mass system

$$F_{el} = -kx, F = m\ddot{x}, F = F_{ext} + F_{el} \quad (5)$$

Путем преобразований можем получить дифференциальное уравнение (колебательное звено):

$$m\ddot{x} + kx = F_{ext}, W(s) = \frac{1}{ms^2 + k}$$

Временные характеристики:

$$y_{i.r.} = \mathcal{L}^{-1}(W(s)) = \frac{\sin(t\sqrt{\frac{k}{m}})\theta(t)}{m\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s}W(s)) = \frac{(1 - \cos(t\sqrt{\frac{k}{m}}))\theta(t)}{k}$$

Проведем моделирование системы и сравним с аналитически полученным поведением:

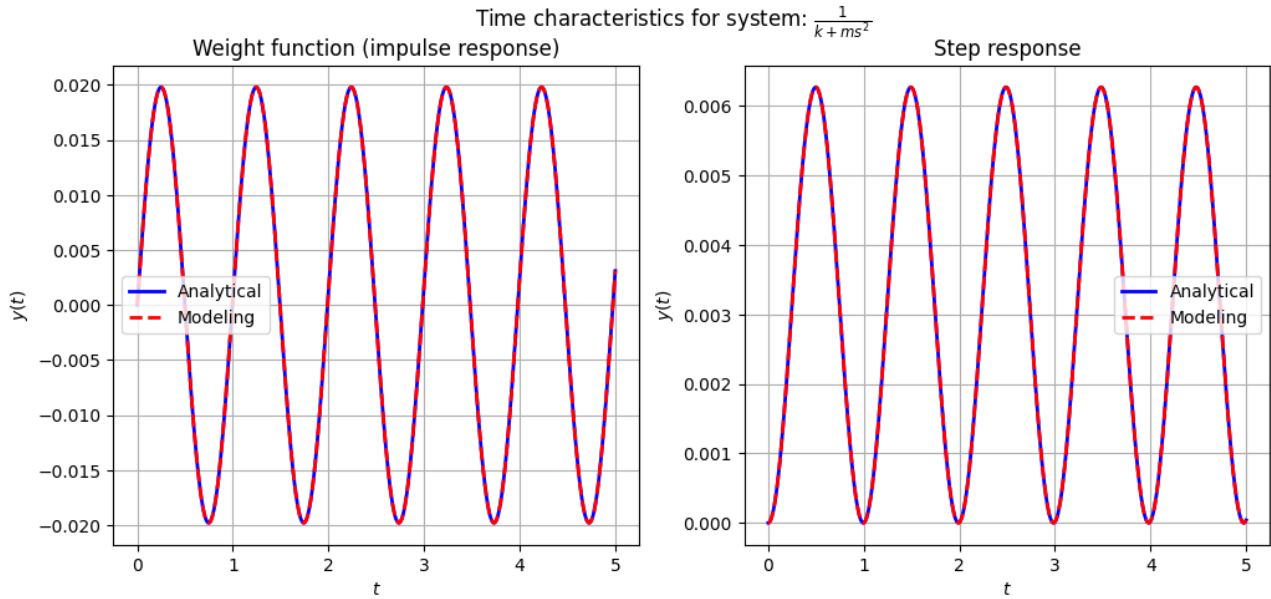


Рис. 9: Временные характеристики системы 5 (подвариант 16)

Частотные характеристики:

$$|W(j\omega)| = \frac{1}{|k - m\omega^2|}$$

$$\text{Arg}(W(j\omega)) = \text{atan}_2(0, \frac{1}{k - m\omega^2})$$

Воспользуемся функцией **bode** для численного моделирования частотных характеристик:

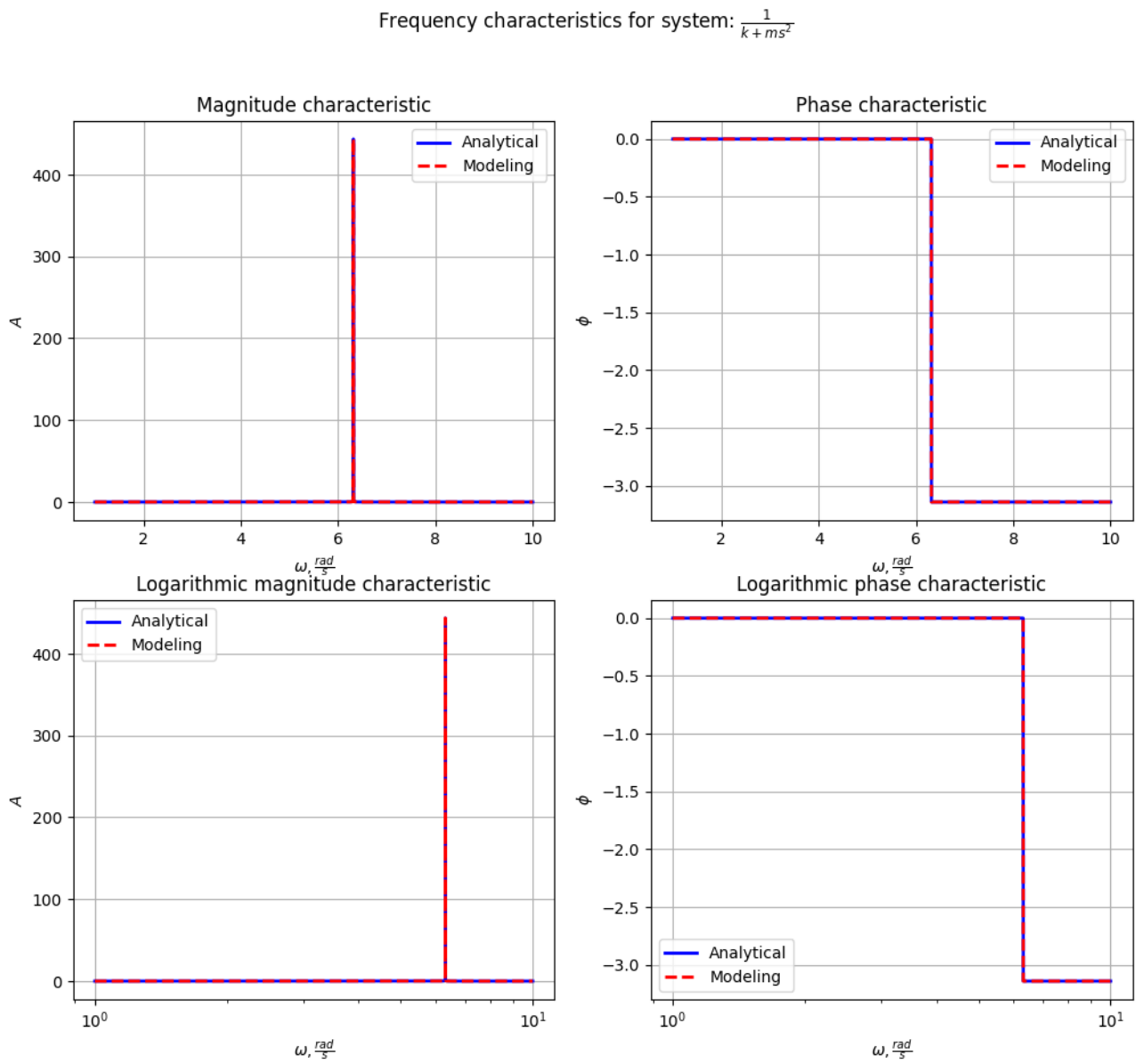


Рис. 10: Частотные характеристики системы 5 (подвариант 16)

3 Выводы

В ходе данной лабораторной работы удалось изучить поведение систем, представляющих собой разные типы динамических звеньев.

1. Во всех случаях аналитические результаты подтвердились моделированием.
2. Поведение систем различных типов динамических звеньев совпало с теоретическими предсказаниями.