Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №10

«Линейно-квадратичные радости»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать Python Control Systems Library. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в jupyter notebook на GitHub.

1 Исследование LQR

В лабораторной работе будем использовать следующие матрицы системы:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 26 & 4 & 17 \\ 0 & 9 & 0 & 6 \\ -10 & -35 & -6 & -25 \\ 0 & -15 & 0 & -9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 0 \\ -10 & 0 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

Для синтеза регуляторов зададимся набором матриц Q и R:

$$Q_1 = diag(\begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 & 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}), R_1 = diag(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix})$$

$$Q_2 = diag(\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}), R_2 = diag(\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix})$$

$$Q_3 = diag(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}), R_3 = diag(\begin{bmatrix} 0.01 & 0.01 \end{bmatrix})$$

Путем решения следующих уравнение найдем матрицу регулятора:

$$\begin{cases} A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \\ K = -R^{-1}B^T P \end{cases} \tag{2}$$

Полученные матрицы:

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.28 & -1.06 & -0.27 & -0.74 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -3.83 & -14.73 & -3.2 & -9.68 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -42.81 & -159.25 & -33.85 & -102.91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Данный метод синтеза позволяет минимизировать функционал:

$$J = \int_0^{\inf} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \tag{3}$$

Получив матрицу P можем найти его значение аналитически:

$$J_{an} = x_0^T P x_0 \tag{4}$$

Проведем моделирование и сравним значения функционалов:

$$J_1 = 14.2, J_{an1} = 14.21$$

$$J_2 = 54.21, J_{an2} = 54.16$$

$$J_3 = 467.1, J_{an3} = 466.2$$

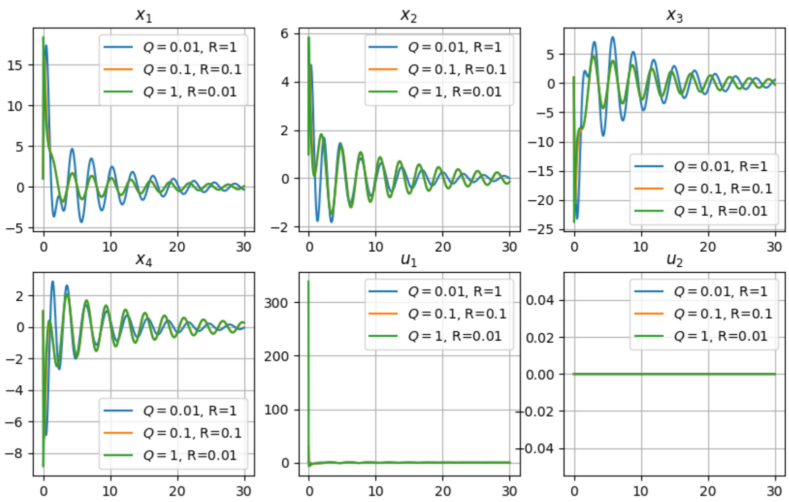

Рис. 1: Задание 1. Компоненты вектора состояний при различных матрицах Q и R регулятора.

2 Сравнение LQR с не-LQR

Возьмем регулятор, соответствующий второй паре матриц Q и R. Также синтезируем модальный регулятор (со спетром $-1, -1, -1, -1$) и регулятор методом LMI (степени устойчивости $\alpha = 0.1$)

Проведем моделирование систем, замкнутых данными регуляторами:

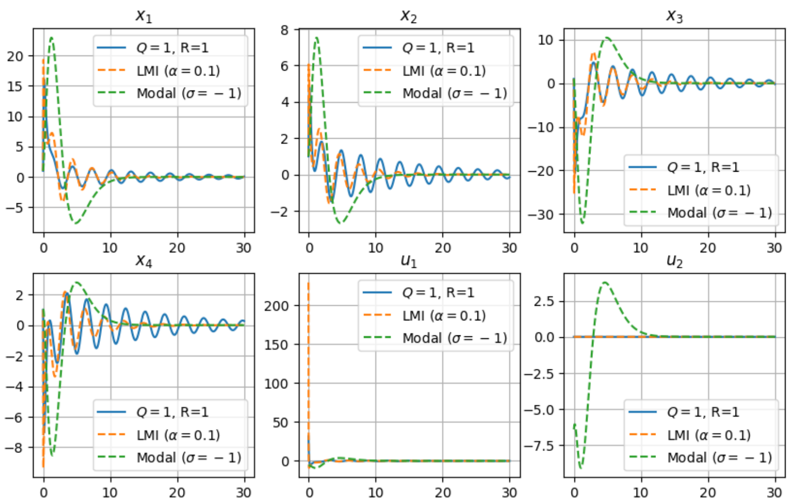

Рис. 2: Задание 2. Компоненты вектора состояний систем, замкнутых различными регуляторами.

Простроим график $J(t) = \int_0^t (x^T(\tau)Qx(\tau) + u^T(\tau)Ru(\tau))d\tau$:

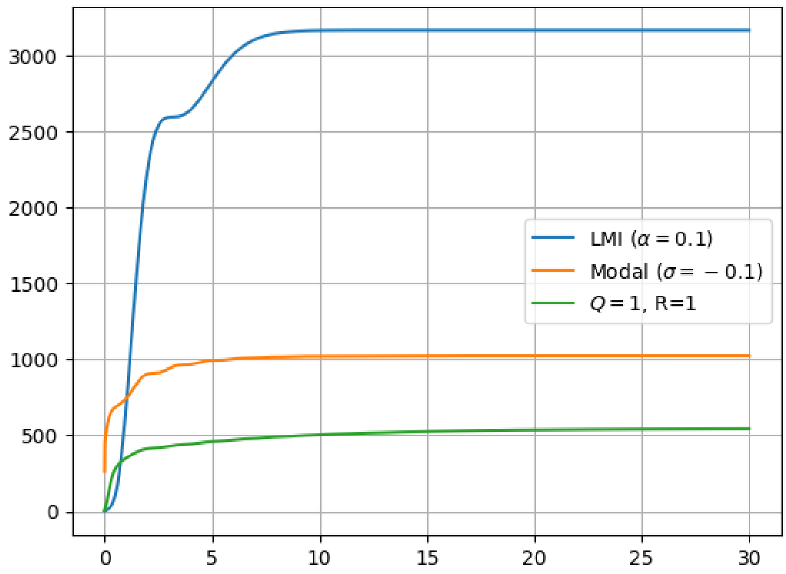

Рис. 3: Задание 2. Значения критерия оптимальности.

3 Исследование LQE (фильтра Калмана)

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + f, y = Cx + \xi \tag{5}$$

Внешние возмущения f и ξ будем считать белым шумам с заданной дисперсией.

Путем решения следующих уравнений найдем матрицу наблюдателя:

$$\begin{cases} AP + PA^T + Q - PC^T R^{-1} CP = 0 \\ L = -PC^T R^{-1} \end{cases} \tag{6}$$

Проведем исследования работы наблюдателя при различных параметрах внешних воздействий и матрицах Q и R:

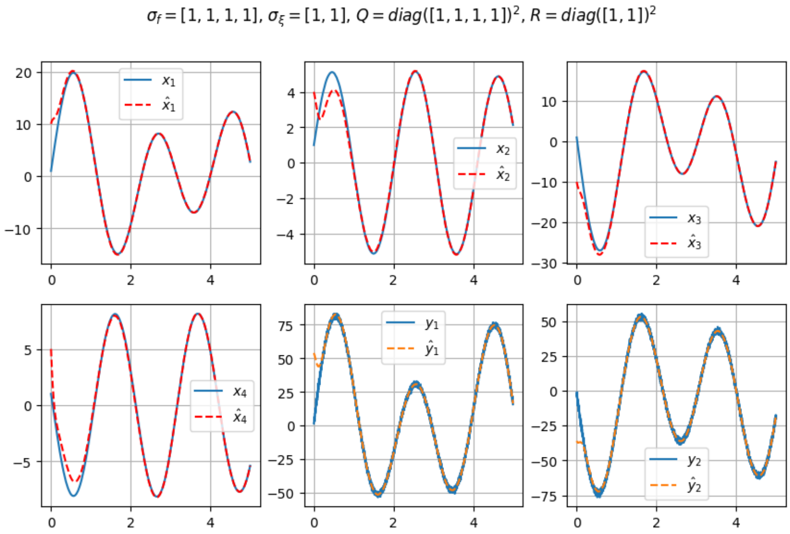

Рис. 4: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

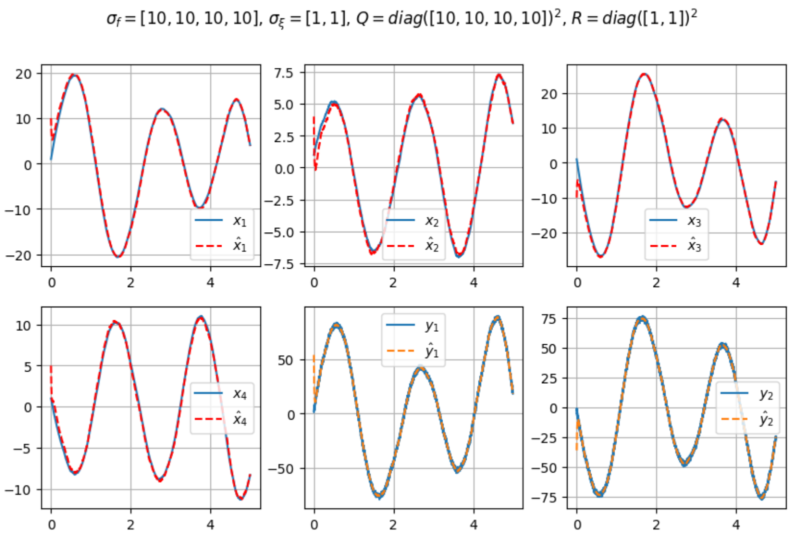

Рис. 5: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

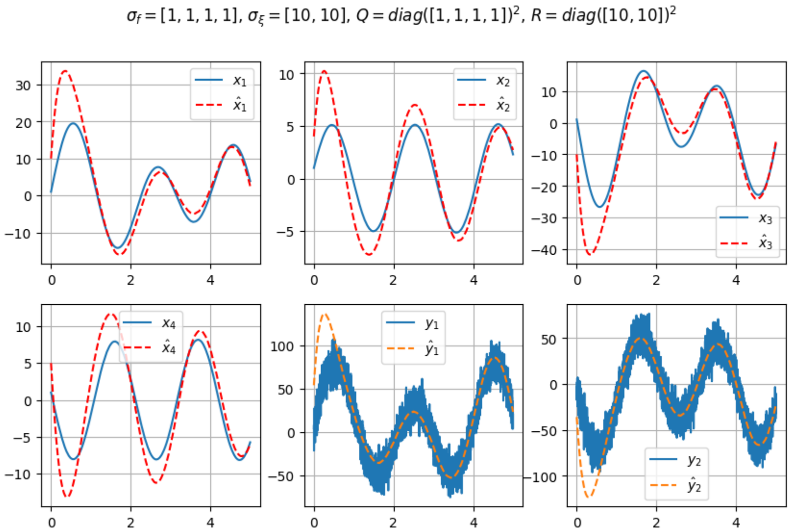

Рис. 6: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

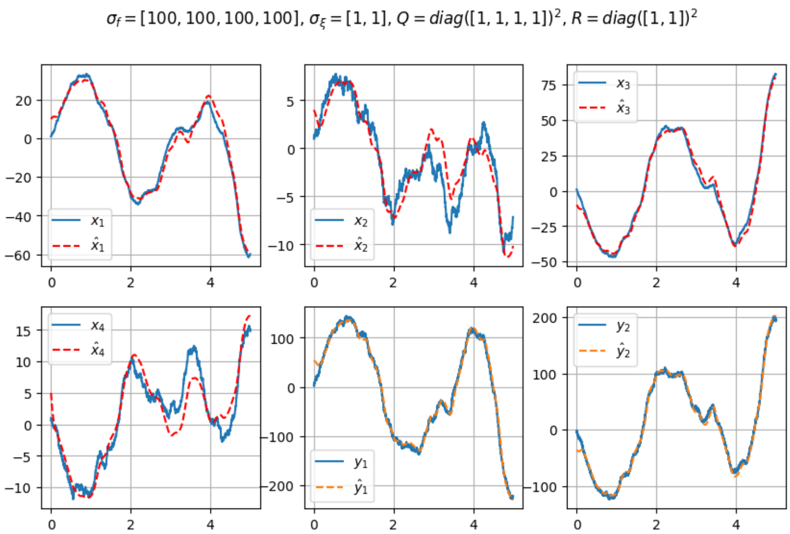

Рис. 7: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

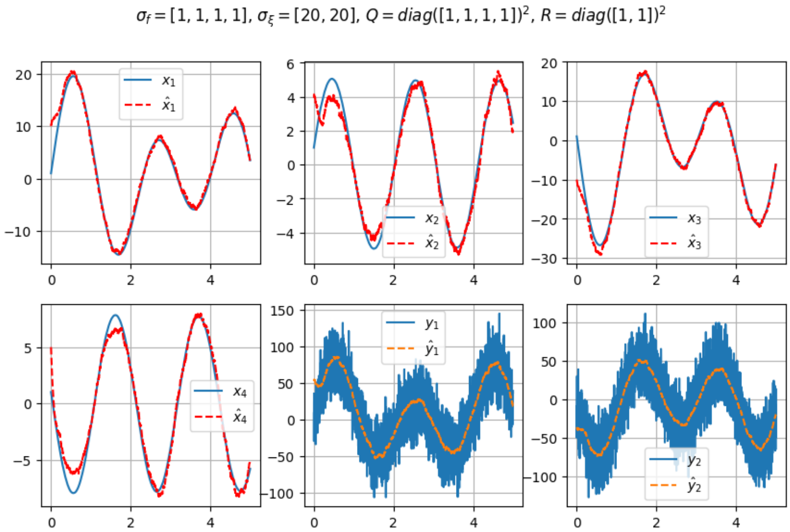

Рис. 8: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

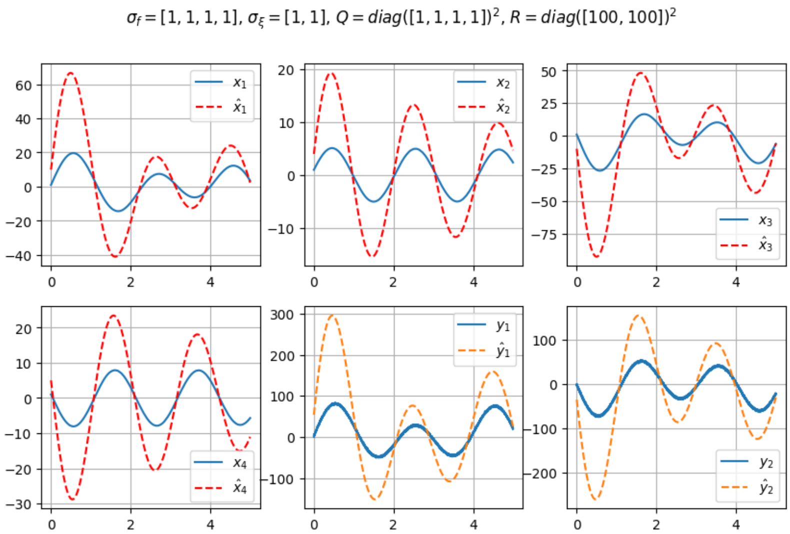

Рис. 9: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

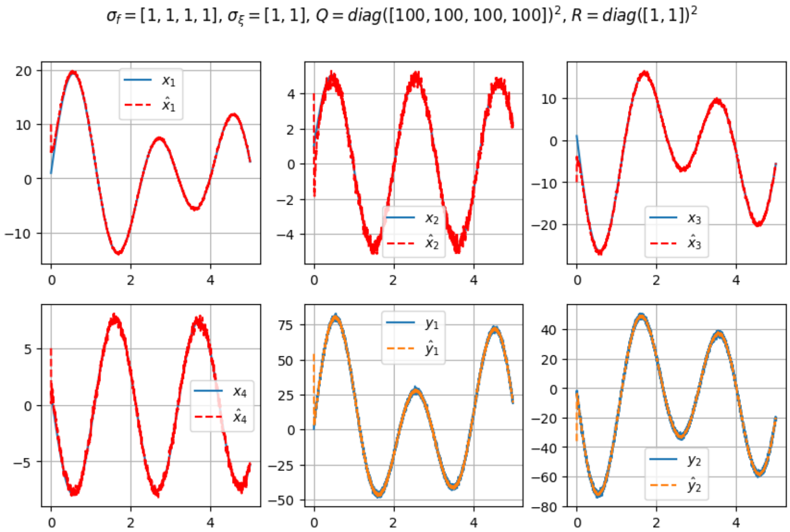

Рис. 10: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

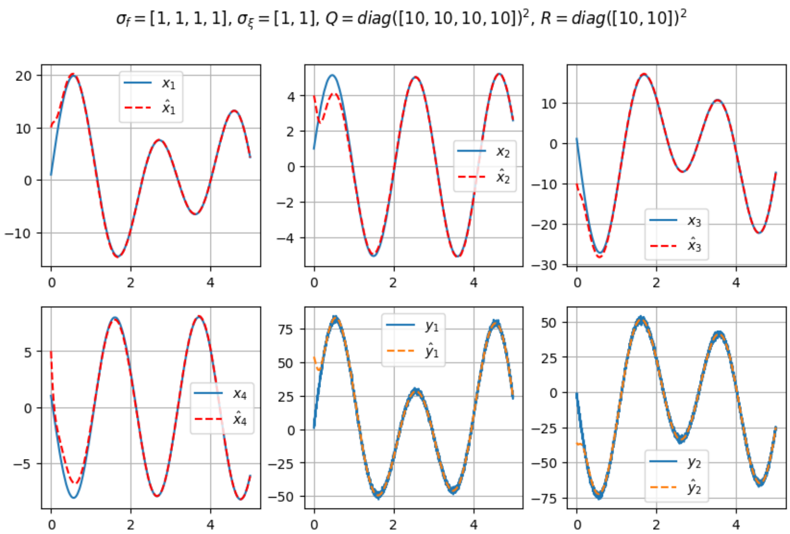

Рис. 11: Задание 3. Компоненты вектора состояний и выход системы наблюдателя.

4 Синтез LQG

Рассмотрим систему с регулятором и наблюдателем:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BK\hat{x} + f \\ y = Cx + DK\hat{x} + \xi \\ \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + BK\hat{x} + L(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} + DK\hat{x} \end{cases} \tag{7}$$

Введя величину ошибки наблюдателя ($e = x - \hat{x}$), получим эквивалентную систему:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ \Theta_{n\times n} & A + LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n\times n} & \Theta_{n\times m} \\ I_{n\times n} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ \xi \end{bmatrix} \tag{8}$$

Зададимся значениями стандартных отклонений для распределений внешних воздействий: $f_i \sim N(0, 3^3)$, $\xi \sim N(0, 5^2)$. Соответствующим образом выбрав матрицы Q и R синтезируем LQE и LQR:

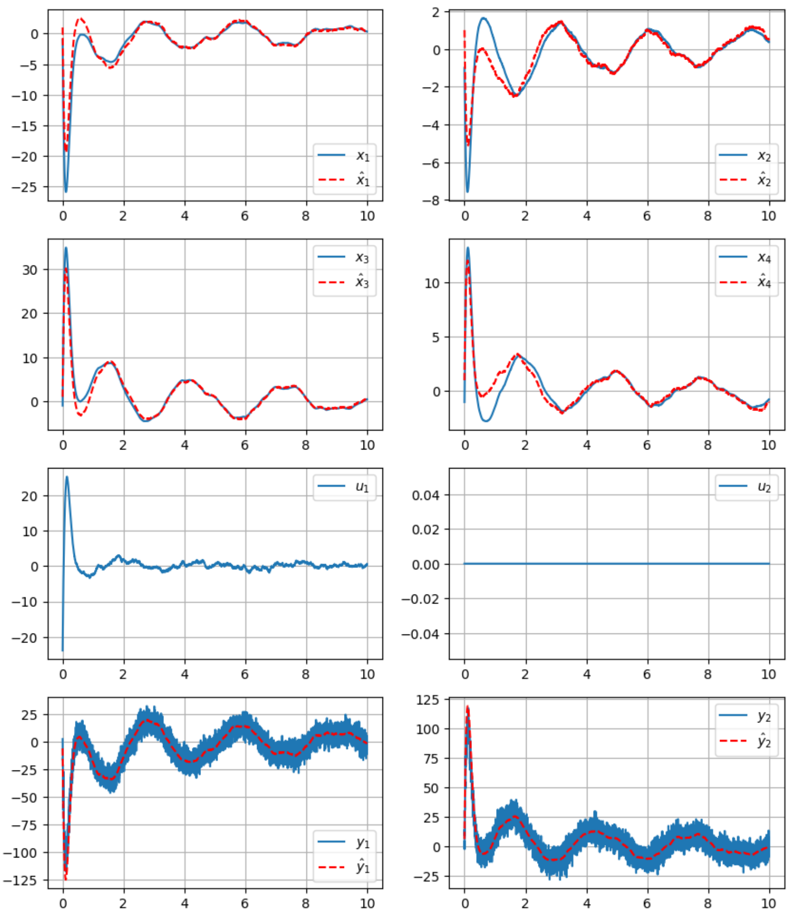

Рис. 12: Задание 4. Компоненты вектора состояний, управление и выход системы с LQG.

5 Выводы

1. Выбирая матрицы параметров Q и R можно задавать оптимальный критерий, который минимизируют при своем исполнении LQE и LGR.

2. Убедились в том, что LQR действительно предоставляет оптимальное значение коэффициентов по сравнению с другими способами синтеза.

3. При правильной настройке параметров наблюдателя, LQE способен сглаживать сигнал и восстанавливать вектор состояний системы с большой точностью не смотря на шумы. Заметим, однако, что при меньших значениях шума наблюдатель демонстрирует лучшую сходимость.

4. Независимо синтезированные LQE и LQR можно объединить в одну систему.