Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №7

«Управляемость и наблюдаемость»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать Python Control Systems Library. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в jupyter notebook на GitHub.

1 Полностью управляемая система

Рассмотрим система, заданную матрицами A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -7 & 8 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 4 & -7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

1.1 Матрица управляемости

Запишем матрицй управляемости системы:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 18 & -40 \\ -2 & 10 & -14 \\ 4 & -12 & 16 \end{bmatrix}$$

Заметим, что ранг данной матрицы равен 3, следовательно, система - полностью управляема.

1.2 Жорданова форма

Представим систему в Жордановом базисе:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}AP\hat{x} + P^{-1}Bu \\ y = CP\hat{x} \end{cases} \tag{1}$$

где P - матрица обобщенных векторов. ЖНФ матрицы A:

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-3i & 0 \\ 0 & 0 & -2+3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{3}{2} + \frac{i}{2} & -\frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Матрица входных воздействий в Жордановом базисе:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1-i \\ 1+i \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки матрицы J соответсвуют разным собственным числам и элементы матрицы входных воздействий соответствующие концам клеток не равны нулю. Следовательно: все собственные чила - управляемы.

Также, заметим:

$$\begin{cases} rank(\begin{bmatrix} A - (-1) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-2-3i) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \\ rank(\begin{bmatrix} A - (-2+3i) \cdot I & B \end{bmatrix}) = 3 \end{cases}$$

что подтверждает управляемость всех собственных чисел.

1.3 Управляемое подпространство

Т.к. система - полностью управляема, управляемое подпространство совпадает с $\mathcal{R}^3$ и любой вектор принадлежит ему, в том числе x_1:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

1.4 Грамиан управляемости

Расчитаем грамиан управляемости системы:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \tag{2}$$

$$P(3) = \begin{bmatrix} 1.777 & 0.654 & -1.982 \\ 0.654 & 0.538 & -0.538 \\ -1.982 & -0.539 & 2.534 \end{bmatrix}$$

Собственные числа грамиана:

$$\lambda_1 = 0.055, \lambda_2 = 0.439, \lambda_3 = 4.355$$

1.5 Расчет управления

Расчитаем управление, необходимое для перехода из нулевого состояния в состояние x_1 за t_1 секунд:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} (P(t_1))^{-1} x_1 \tag{3}$$

Искомое управление:

$$u(t) = B^T e^{A^T(3-t)} (P(3))^{-1} x_1 = -9.196e^{t-3} - 32.765e^{2t-6} sin(3t-9) - 5.244e^{2t-6} cos(3t-9)$$

1.6 Моделирование