Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №12

«Слежение и компенсация»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать Python Control Systems Library. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в jupyter notebook на GitHub.

1 Компенсирующий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ z = C_2 x \end{cases}, \tag{1}$$

где w:

$$\dot{w} = A_2 w \tag{2}$$

Для данной системы можем синтезировать регулятор вида $u = K_1 x + K_2 w$, гарантирующий:

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$$

K_1 можем выбрать как матрицу регулятора, синтезированного любым способом. Матрицу K_2 найдем следующим образом:

$$\begin{cases} PA_2 - A_1 P = B_1 Y + B_2 \\ C_2 P + D_2 = 0 \\ K_2 = Y - K_1 P \end{cases} \tag{3}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученные матрицы регулятора (K_1 – LQR, где Q=id, r=id):

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3.96 & -9.34 & -8.28 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -2.25 & -1.98 & -2.21 & -1.32 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование системы:

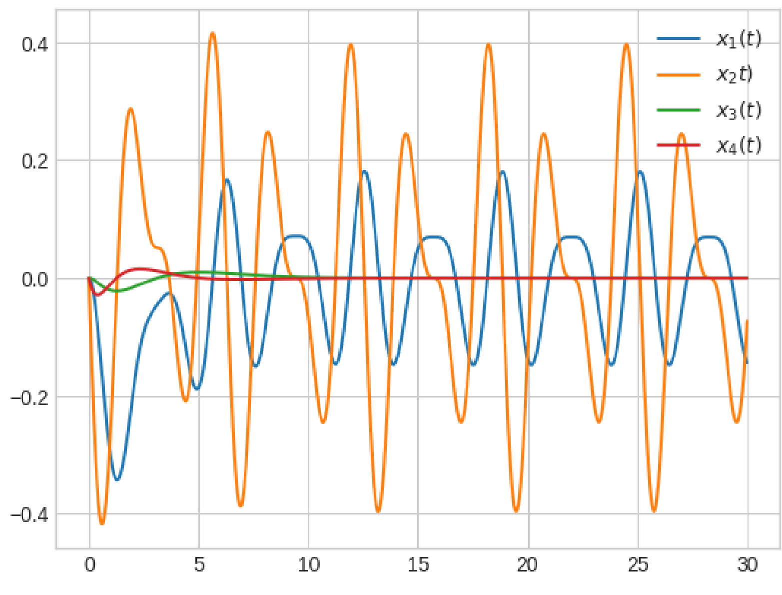

Рис. 1: Задание 1. Вектор состояния.

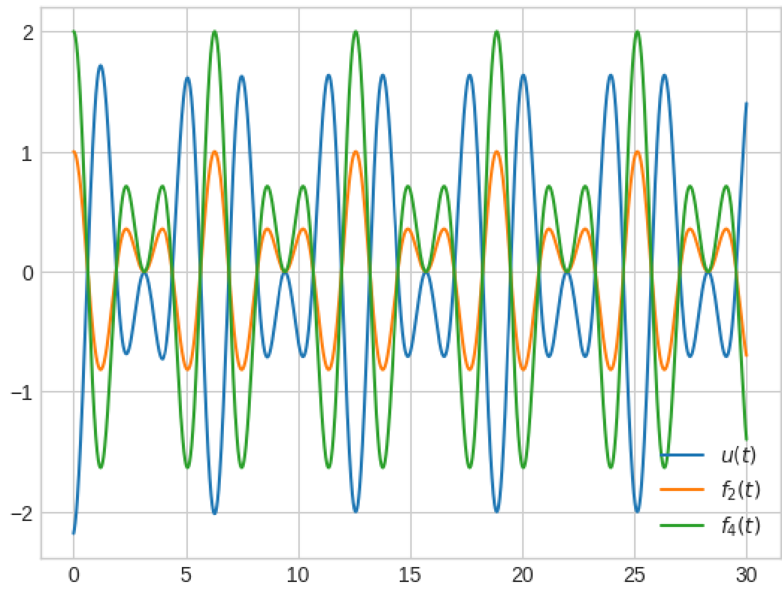

Рис. 2: Задание 1. Управляющее воздействие и внешние возмущения.

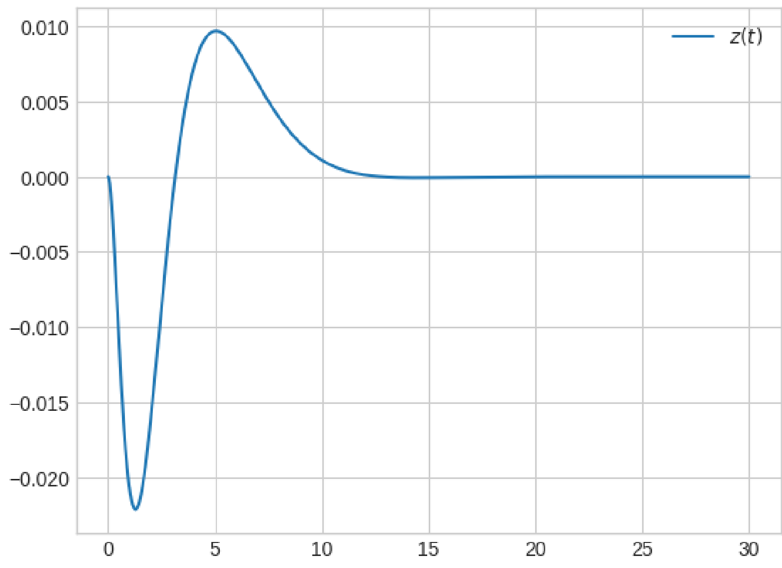

Рис. 3: Задание 1. Регулируемый выход.

2 Следящий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u \\ z = C_2 x + D_2 w \end{cases} \tag{4}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученные матрицы регулятора (K_1 – LQR, где Q=id, r=id):

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3.96 & -9.34 & -8.28 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 2.09 & 6.66 & 8.68 & 0.72 \end{bmatrix}$$

Проведем моделирование системы:

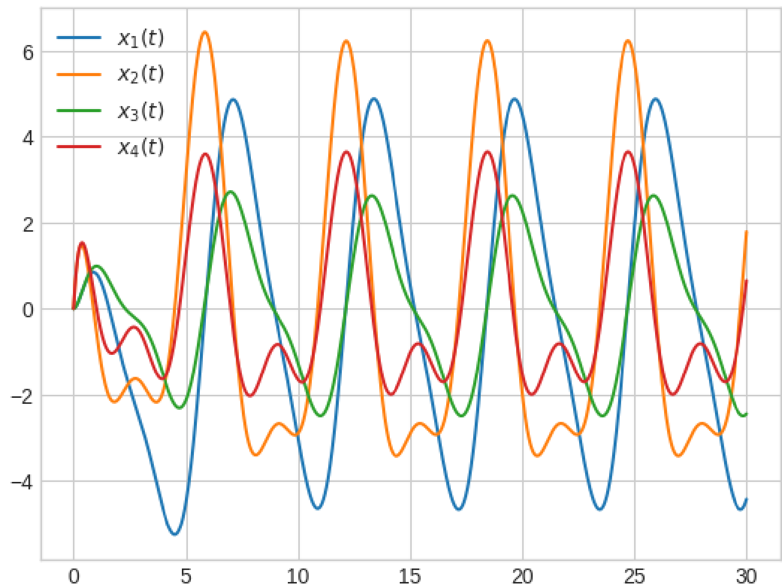

Рис. 4: Задание 2. Вектор состояния.

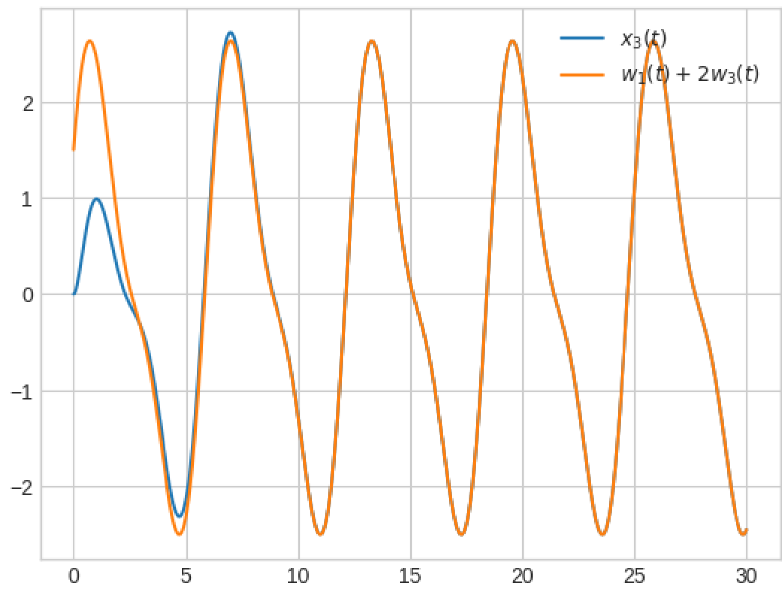

Рис. 5: Задание 2. Слежение.

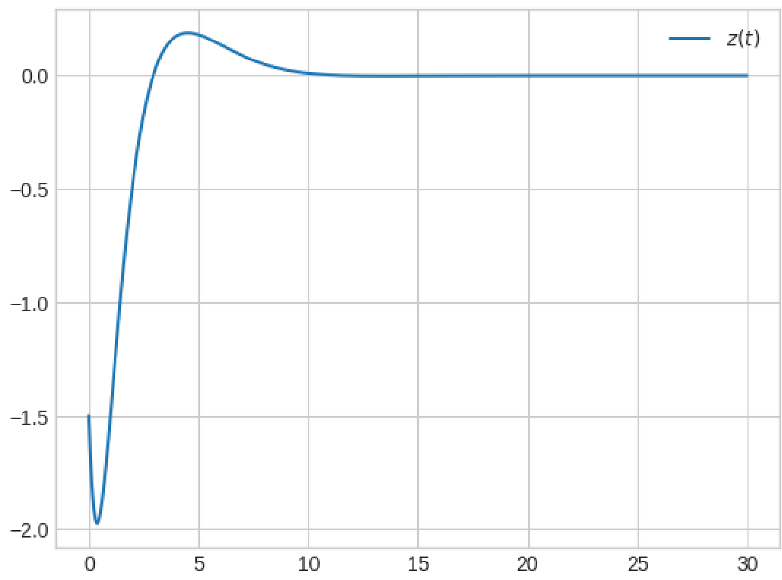

Рис. 6: Задание 2. Регулируемый выход.

3 Регулятор по выходу при различных y и z

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 x + B_1 u + B_2 w \\ y = C_1 x + D_1 w \\ z = C_2 x + D_2 w \\ \dot{\hat{x}} = A_1 \hat{x} + B_1 u + B_2 \hat{w} + L_1(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C_1 \hat{x} + D_1 \hat{w} \\ \dot{\hat{w}} = A_2 \hat{w} + L_2(\hat{y} - y) \end{cases}, \tag{5}$$

где $u = K_1\hat{x} + K_2\hat{w}$. Убедившись, что матрица $\begin{bmatrix} A_1 + L_1C_1 & B_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix}$ – гурвицева, можем синтезировать регулятор (матрицы K_1 и K_2) аналогично предыдущим разделам.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученные матрицы регулятора (K_1 – LQR, где Q=id, r=id) и наблюдателей (L_1, L_2 – LQE, где Q=id, r=id):

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3.96 & -9.34 & -8.28 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 1.67 & 1.18 & -1.83 & -2.48 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -2.01 & -1.86 & -0.88 & -1.83 \\ -0.84 & -2.56 & -4.03 & -6.32 \end{bmatrix}^T, L_2 = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.49 & 0.25 & 0.55 \\ 1.06 & 0.78 & 0.16 & 1.26 \end{bmatrix}^T.$$

Можем записать регулятор в форме В-С-В, с матрицей системы:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y, u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Найдем спектр марицы динамики системы регулятора:

$\sigma(R) = \{-.49 \pm 4.09i, \pm 3.01i, -0.66 \pm 0.39i, 0.08 \pm 1.88i\}$.

Проведем моделирование системы:

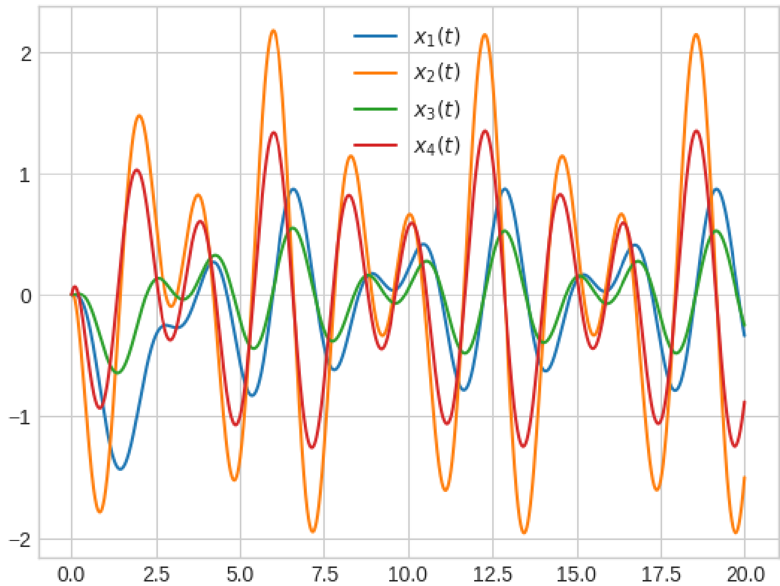

Рис. 7: Задание 3. Вектор состояния.

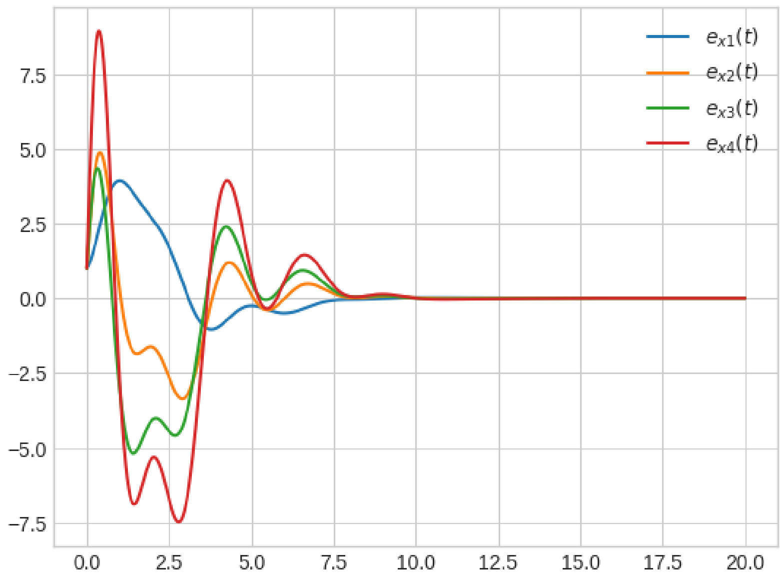

Рис. 8: Задание 3. Ошибка слежения за x.

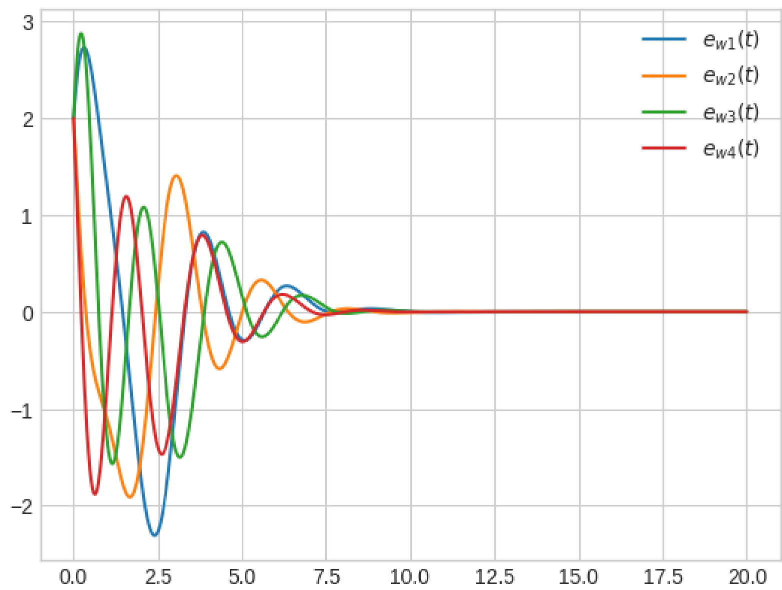

Рис. 9: Задание 3. Ошибка слежения за w.

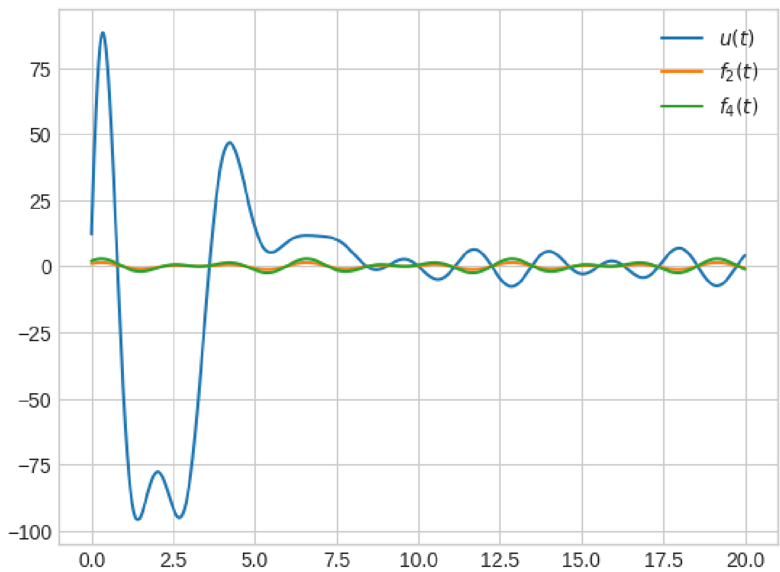

Рис. 10: Задание 3. Управляющее воздействие и внешние возмущения.

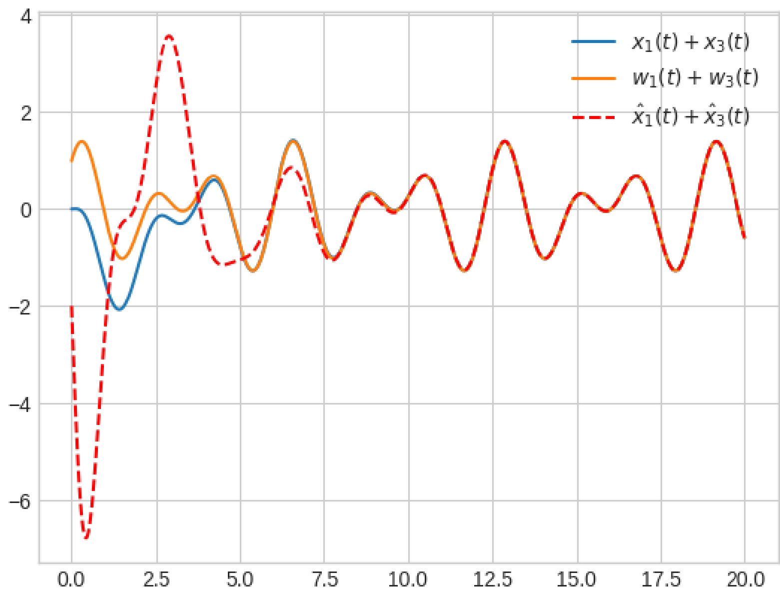

Рис. 11: Задание 3. Слежение.

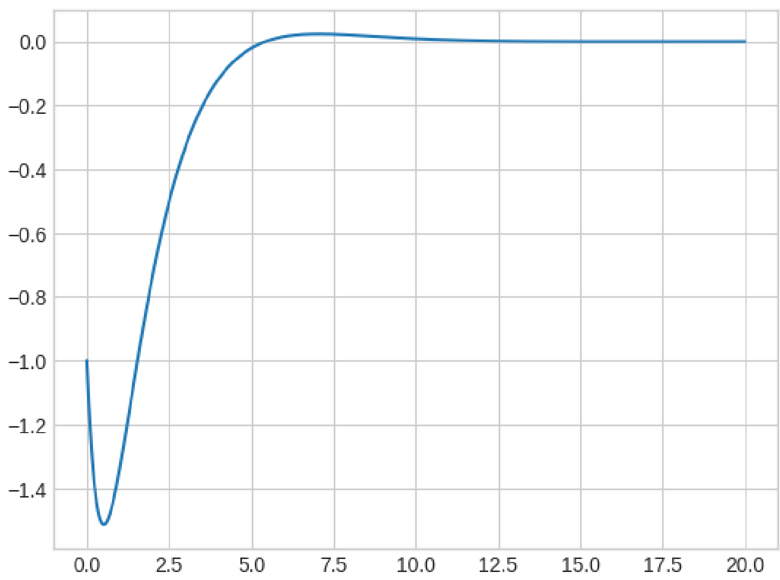

Рис. 12: Задание 3. Регулируемый выход.

4 Регулятор по выходу при одинаковых y и z

Зададим аналогичную систему матрицами:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Синтезируем регулятор и наблюдатели:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3.96 & -9.34 & -8.28 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -1.55 & 0.24 & -3.27 & 3.58 \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.27 & -5.88 & -8.54 & -14.01 \end{bmatrix}^T, L_2 = \begin{bmatrix} -0.47 & 1.33 & -0.87 & 1.11 \end{bmatrix}^T.$$

Можем записать регулятор в форме В-С-В, с матрицей системы:

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 + B_1K_1 + L_1C_1 & B_2 + B_1K_2 + L_1D_1 \\ L_2C_1 & A_2 + L_2D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -L_1 \\ -L_2 \end{bmatrix} y, u = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Найдем спектр марицы динамики системы регулятора: $\sigma(R) = \{-6.68 \pm 6.51i, 2.27, -0.71, \pm 3i, \pm 2i\}$.

Проведем моделирование системы:

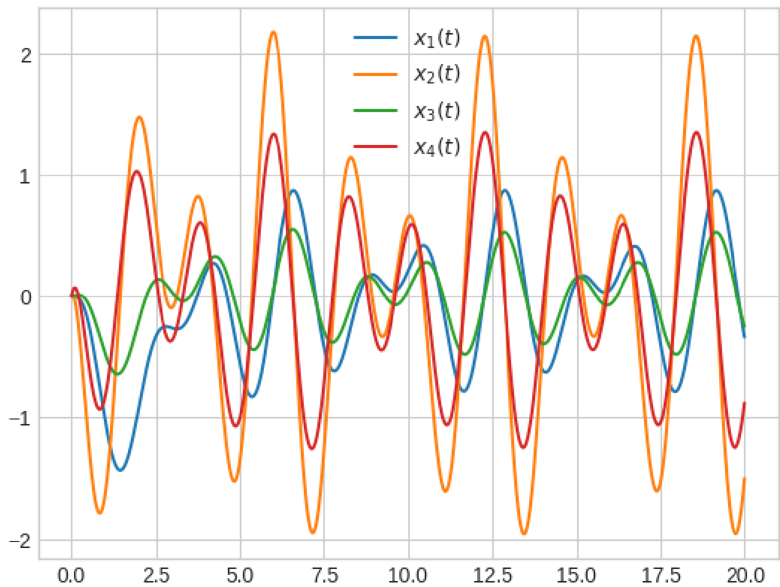

Рис. 13: Задание 4. Вектор состояния.

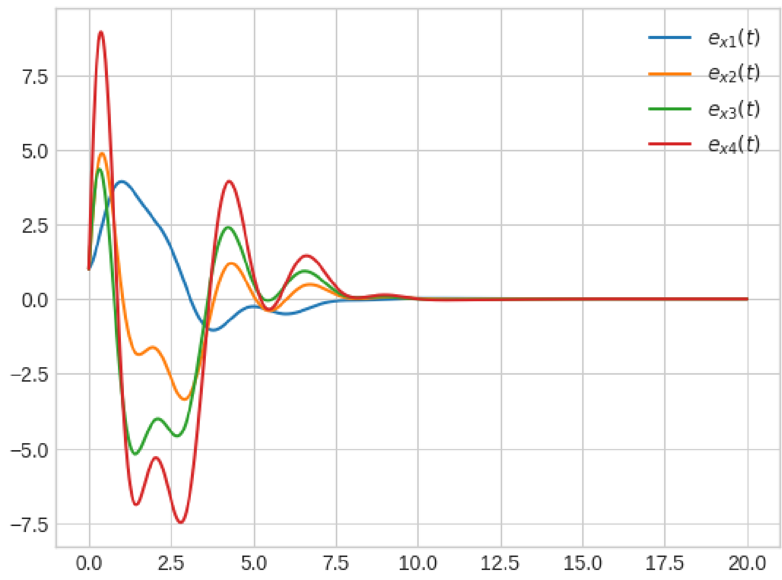

Рис. 14: Задание 4. Ошибка слежения за x.

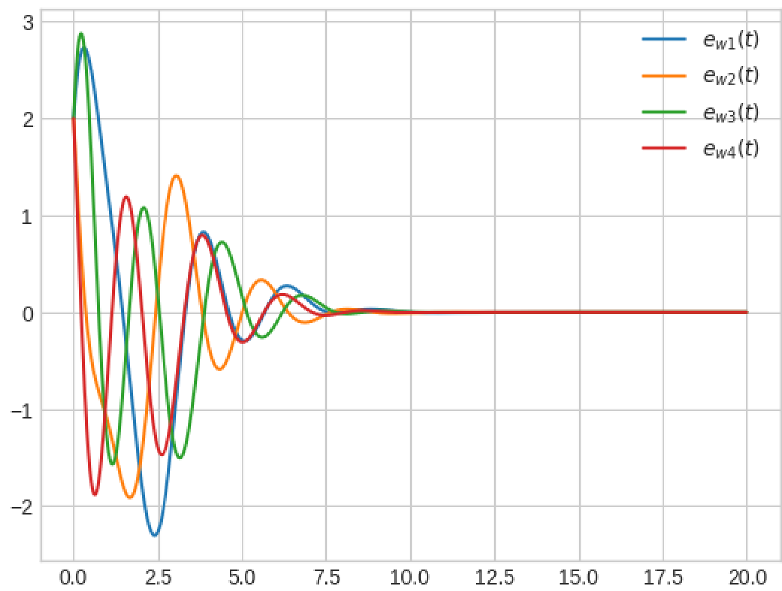

Рис. 15: Задание 4. Ошибка слежения за w.

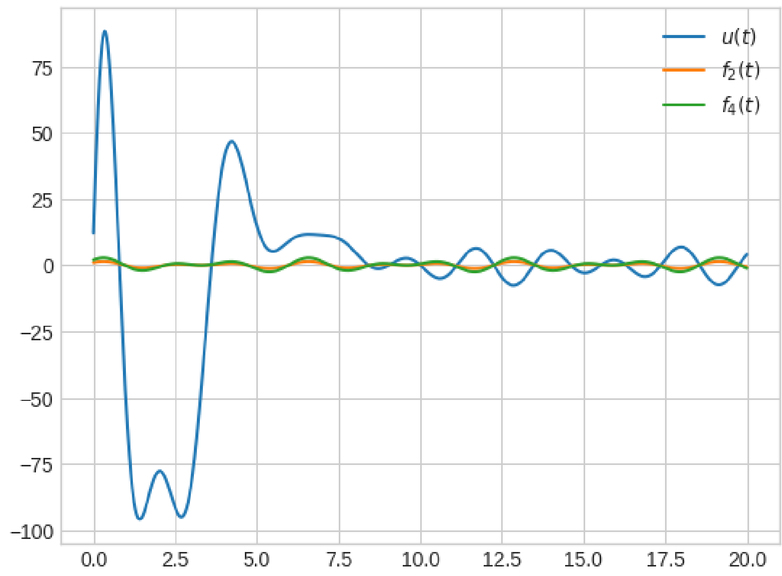

Рис. 16: Задание 4. Управляющее воздействие и внешние возмущения.

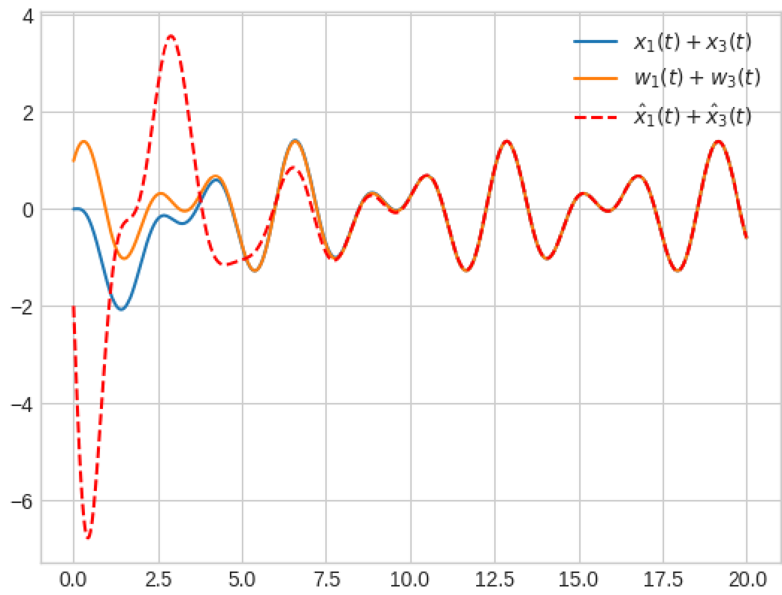

Рис. 17: Задание 4. Слежение.

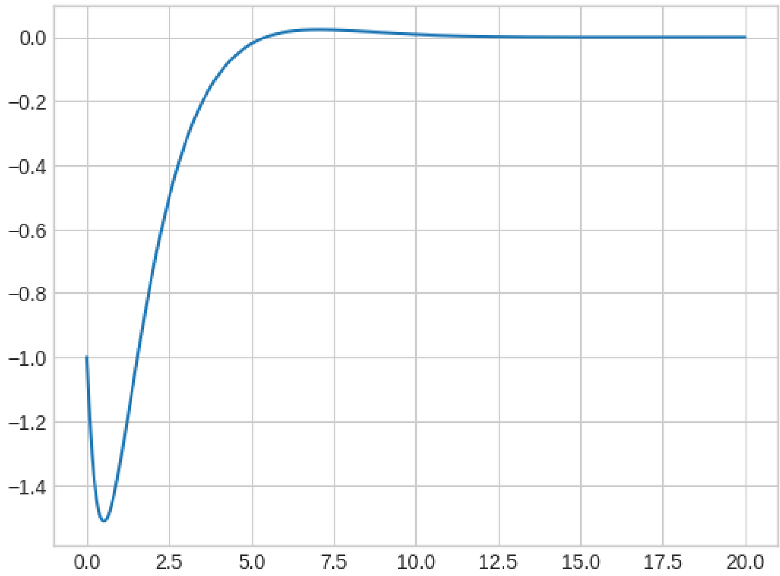

Рис. 18: Задание 4. Регулируемый выход.

5 Выводы

1. Удалось синтезировать регулятор для компенсации внешних воздействий в системе.
2. Удалось синтезировать регулятор для слежения за желаемым эталонным сигналом.
3. Возможно совместить подходы для одновременного решения задачи компенсации и слежения.
4. Возмножно реализовать управление на основе выхода системы (при синтезе наблюдателя для вектора мнешних воздействий и эталонного сигнала).
5. При совпадении наблюдаемого и регулируемого выхода синтезированный регулятор включает в себя внутреннюю модель внешнего сигнала (спектр R включает в себя спектр матрицы генератора A_2).