Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №8

«Модальные регуляторы и наблюдатели»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 8

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать Python Control Systems Library. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в jupyter notebook на GitHub.

1 Модальный регулятор

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

Матрицы A и B:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Матрица A представлена в Жордановой форме, значит ее спектр:

$$\sigma(A) = \{-1, 2, 3-4i, 3+4i\}$$

Заметим, что все собственные числа, кроме -1 являются управляемыми. Следовательно система – частично управляема и стабилизируема.

Для задания желаемого спектра матрице $A + B \cdot K$ необходимо выбрать K, таким образом, чтобы она была подобна задаваемой матрице G (имеющей желаемый спектр).

$$A + BK = PGP^{-1} \implies AP - PG = -BKP \tag{2}$$

$$Y = -KP \implies AP - PG = BY$$

Задав матрицу Y, можем решить уравнение Сильвестра и найти P. Затем, выразим K:

$$K = -YP^{-1} \tag{3}$$

Согласно варианту, желаемые спектры имеют вид:

$$\sigma_1 = \{-1, -1, -1, -1\}, \sigma_2 = \{-1, -10, -100, -100\},$$

$$\sigma_3 = \{-1, -10, 4i, -4i\}, \sigma_4 = \{-1, -10, -3+4i, -3-4i\}$$

Соответствующие им матрицы:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -100 \end{bmatrix},$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Матрицу Y выберем следующим образом (первое собственное число не управляемо):

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Для каждого желаемого спектра найдем матрицу K и выполним моделирование системы с входным воздействием $u = Kx$ при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$.

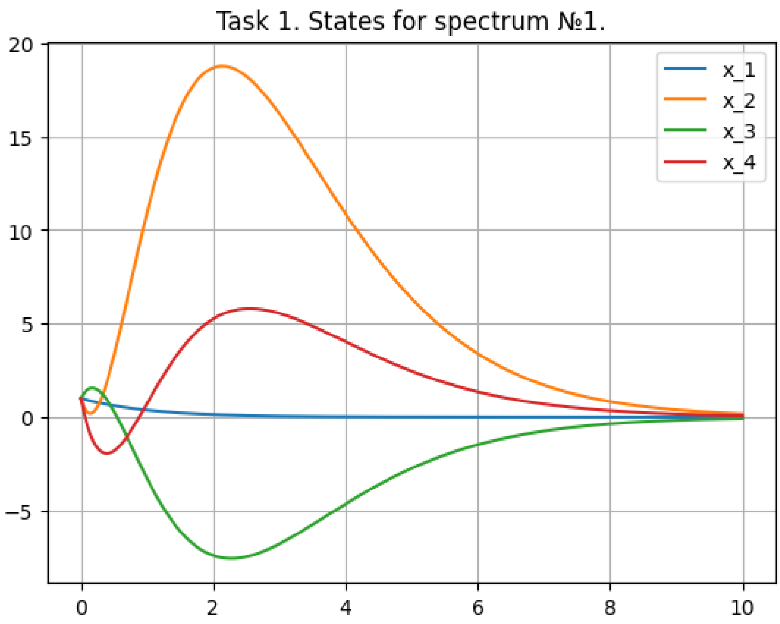

Рис. 1: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №1

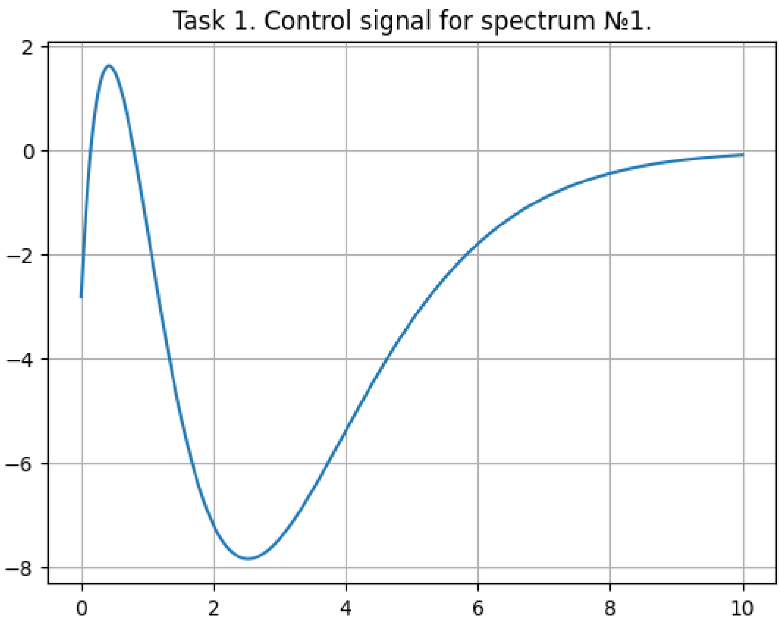

Рис. 2: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №1

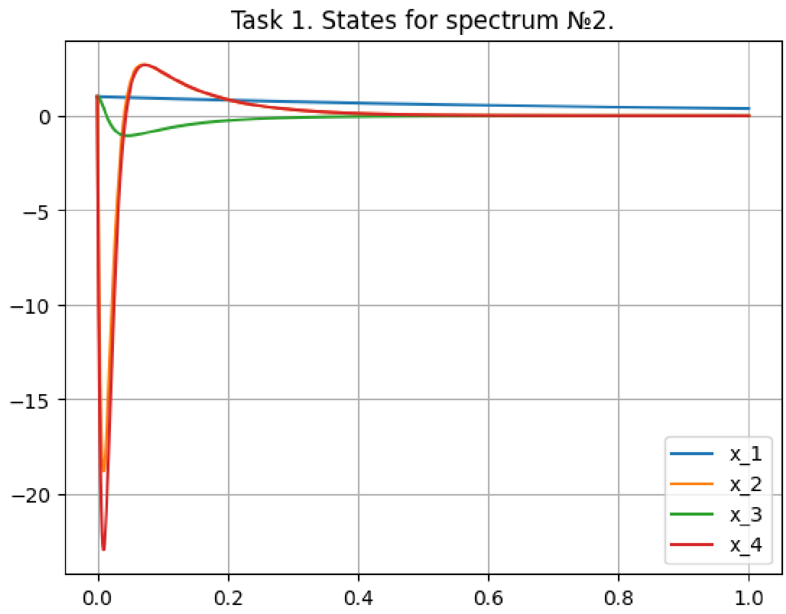

Рис. 3: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №2

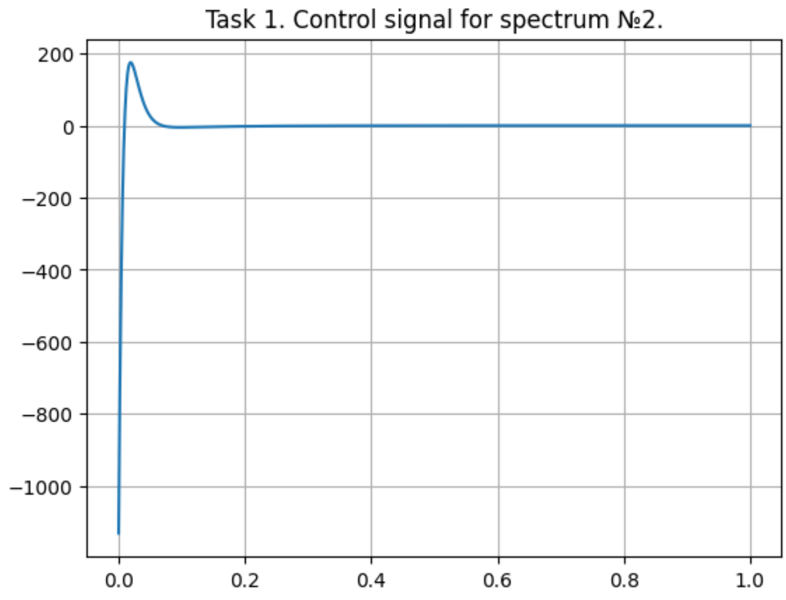

Рис. 4: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №2

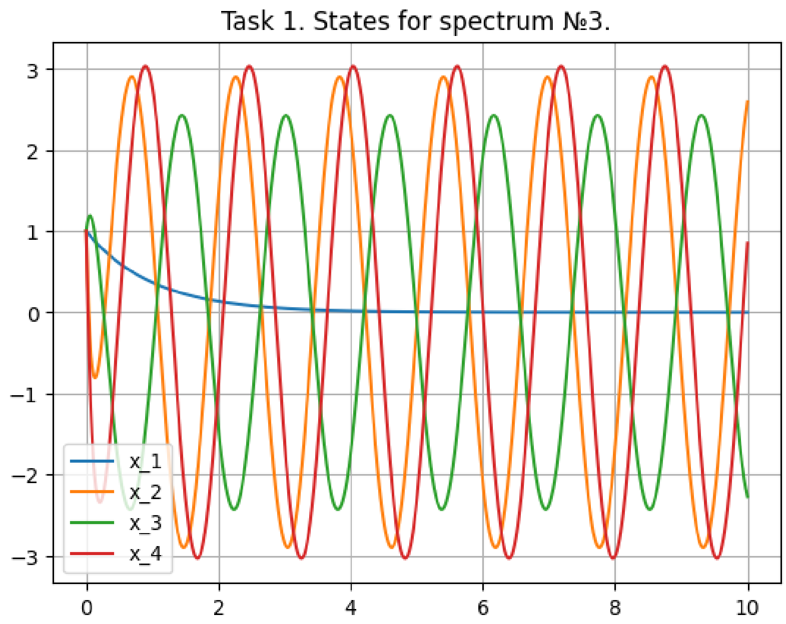

Рис. 5: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №3

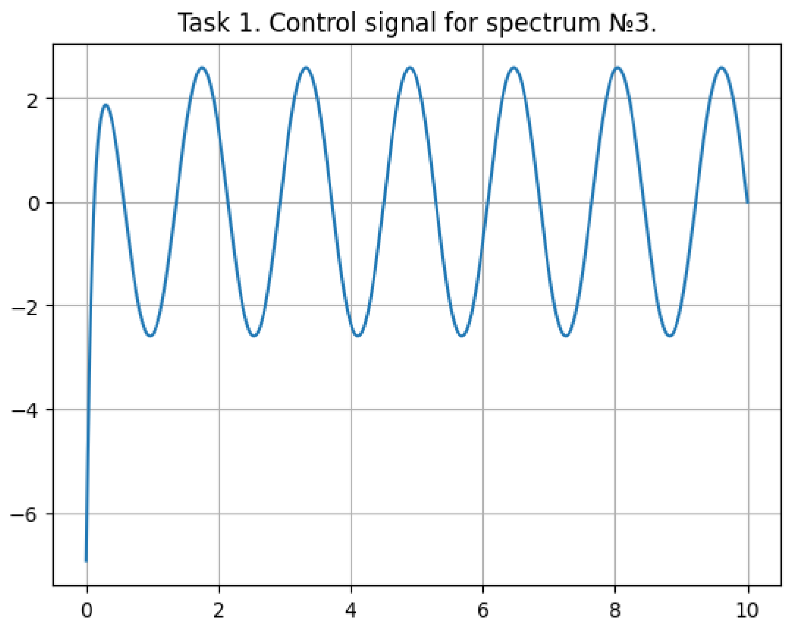

Рис. 6: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №3

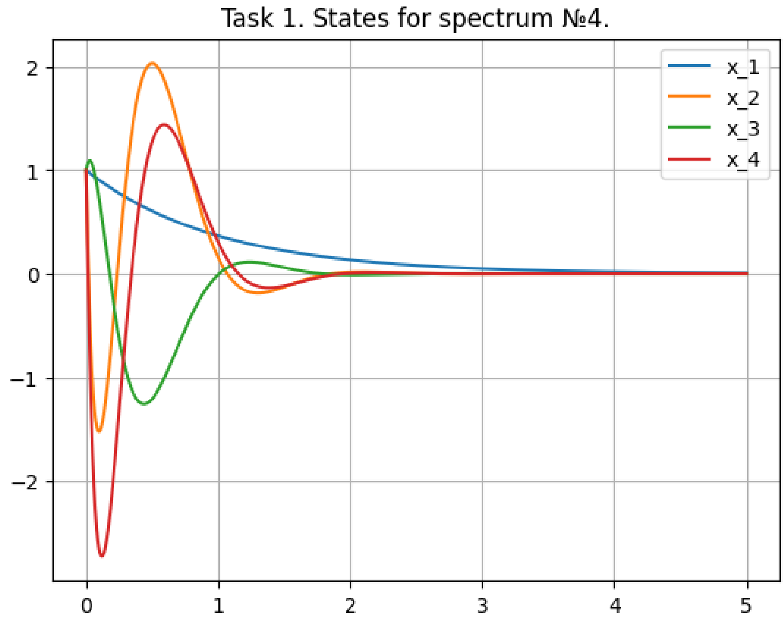

Рис. 7: Задание 1. Компоненты вектора состояний системы со спектром №4

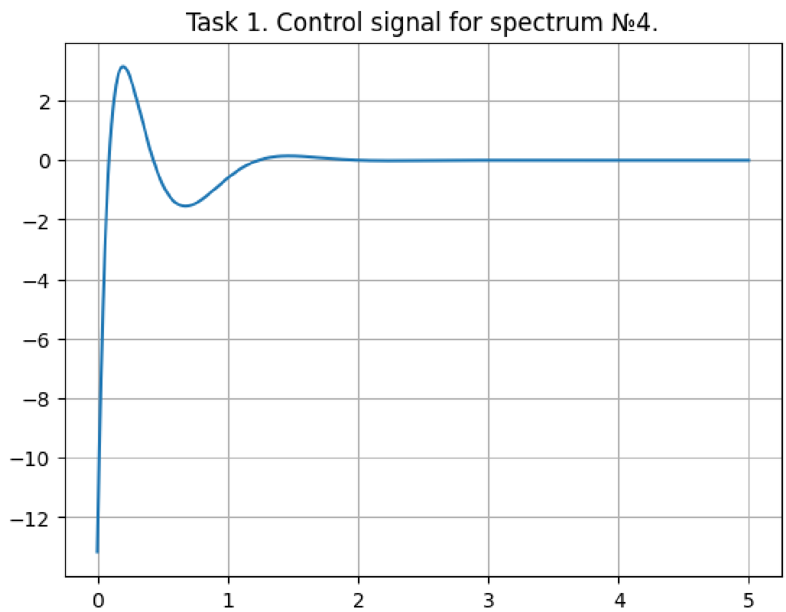

Рис. 8: Задание 1. Управляющий сигнал системы со спектром №4

2 Модальный наблюдатель

Рассмотрим систему:

$$\dot{x} = Ax, y = Cx \tag{4}$$

Матрицы A и B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Матрица A представлена в Жордановой форме, значит ее спектр:

$$\sigma(A) = \{-3i, 3i, -i, i\}$$

Заметим, что все собственные числа являются наблюдаемыми. Следовательно система – наблюдаема.

Рассмотрим систему:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(\hat{y} - y), \hat{y} = C\hat{x} \tag{5}$$

Введем величну ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\dot{e} = Ae + LCe \tag{6}$$

Заметим, что задав спектр матрицы, $A + LC$, представив подобную ей, можем определить тип переходного процесса ошибки наблюдателя.

$$A + LC = Q^{-1}GQ \implies GQ - QA = YC, Y = -QL \tag{7}$$

Выбрав Y и решив уравнение Сильвестра из выражения (7), можем найти матрицу L.

Желаемые спектры матрицы $A + LC$ совпадают с указанными в первом задании (матрицы G, соответственно, тоже). Матрицу Y выберем следующим образом:

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для каждого желаемого спектра найдем матрицу L и выполним моделирование при начальных условиях $x(0) = [1, 1, 1, 1]^T$, $\hat{x}(0) = [2, 0, 0, -1]^T$.

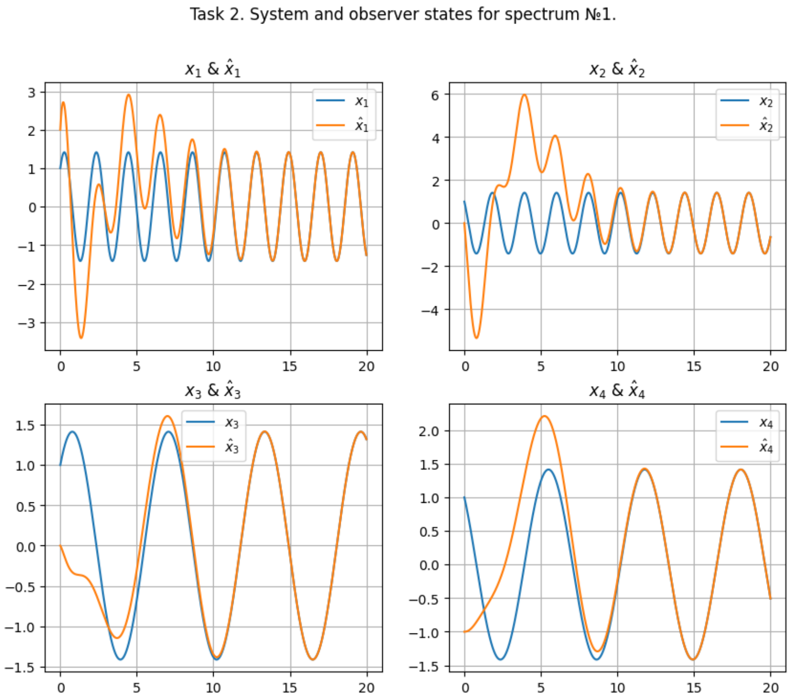

Рис. 9: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №1

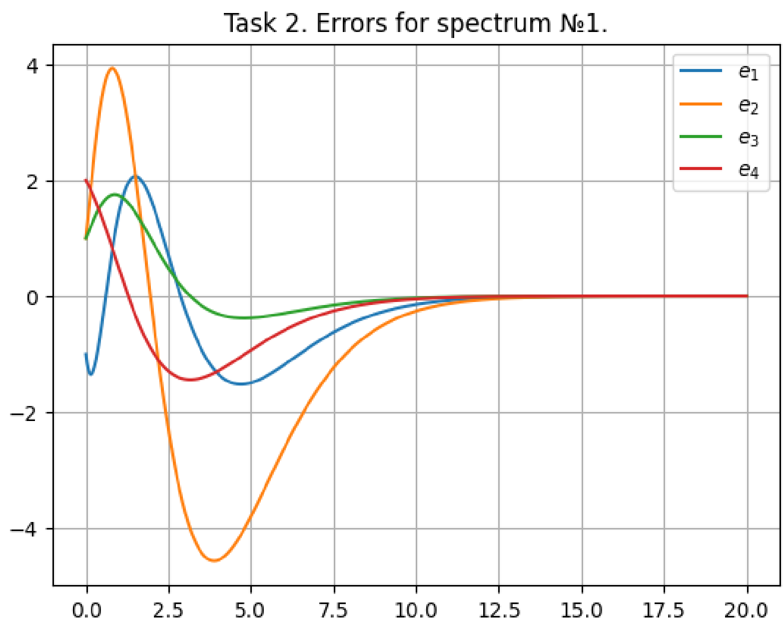

Рис. 10: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №1

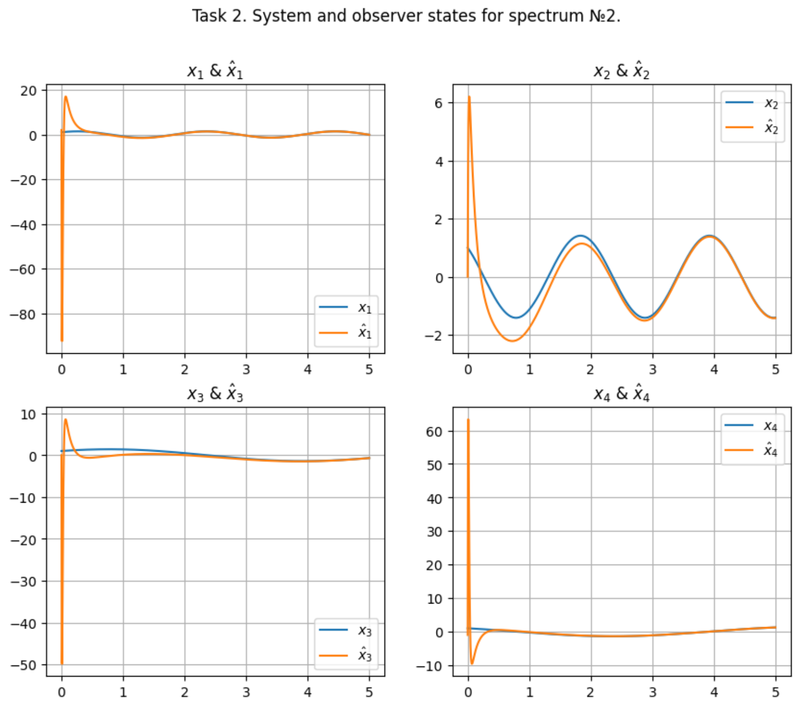

Рис. 11: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №2

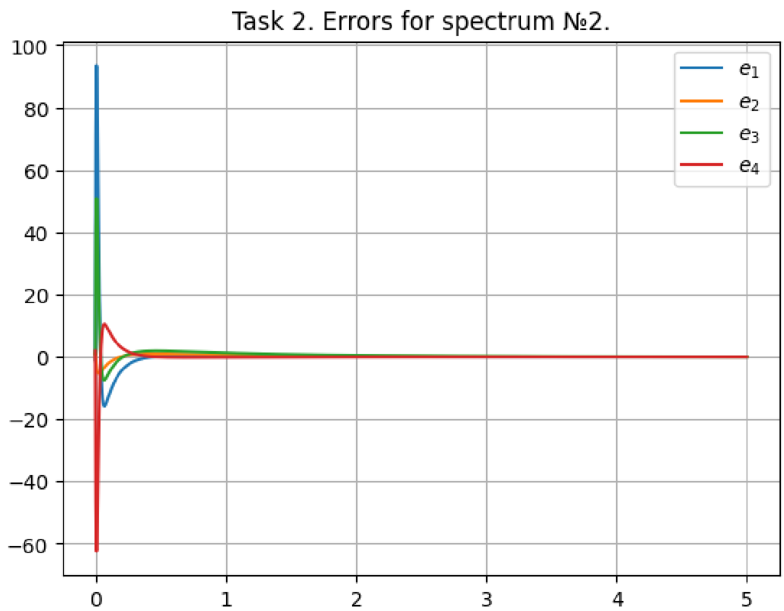

Рис. 12: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №2

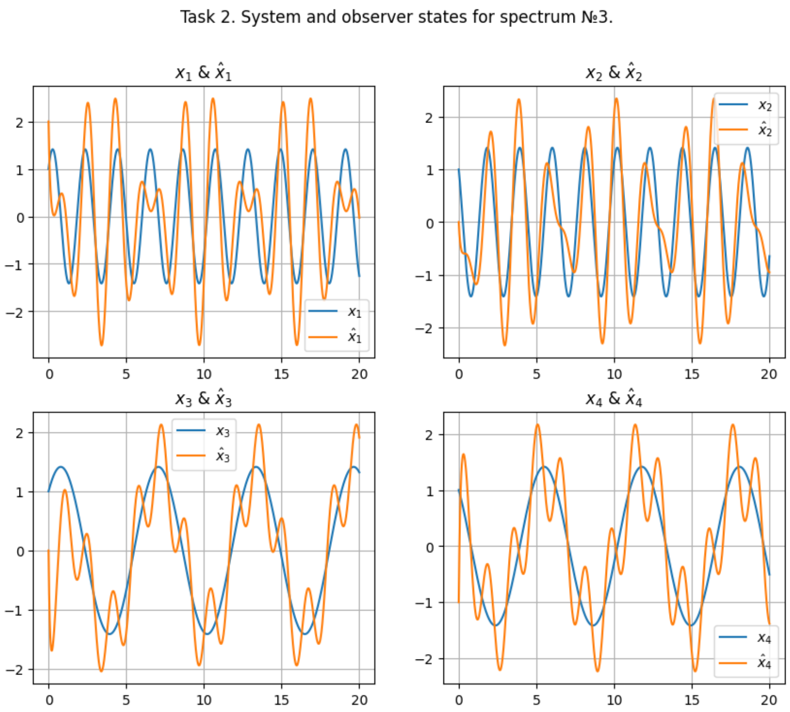

Рис. 13: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №3

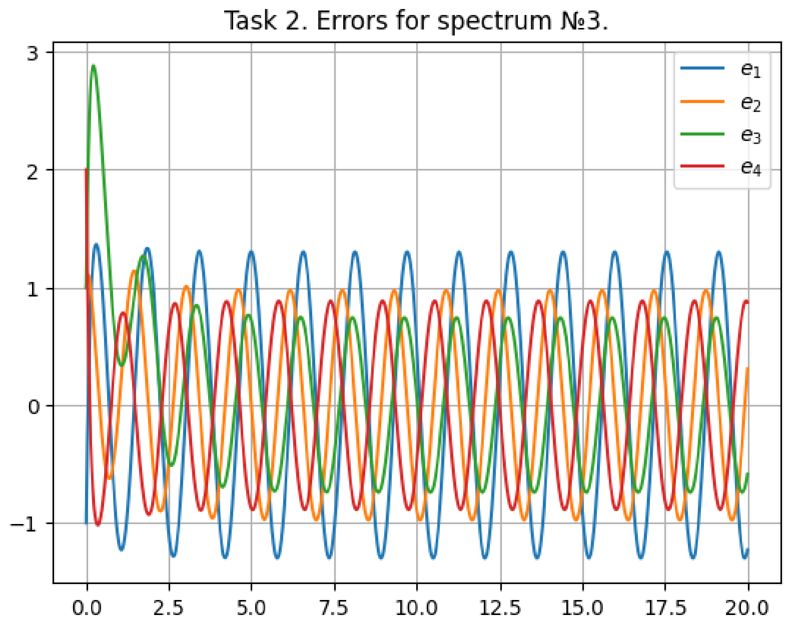

Рис. 14: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №3

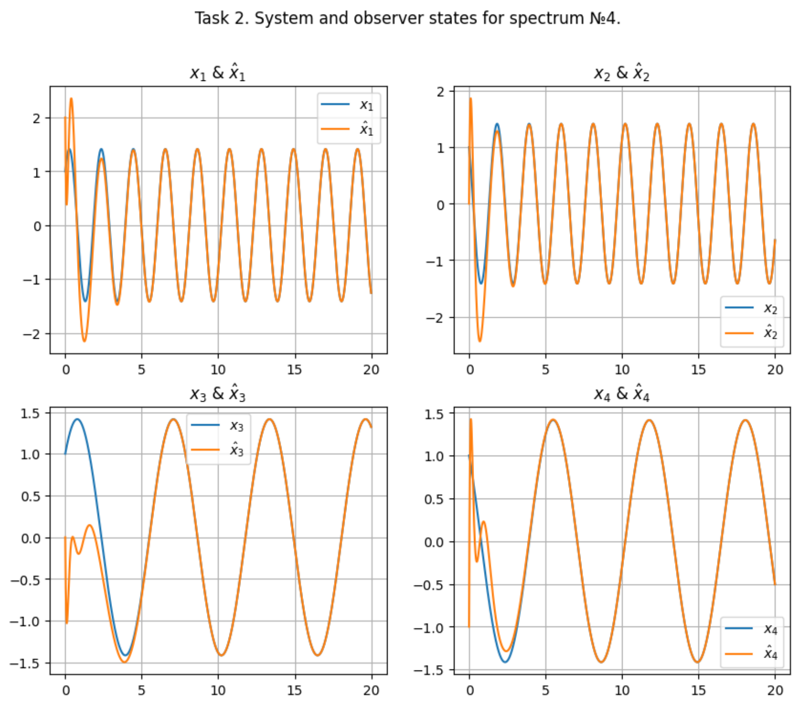

Рис. 15: Задание 2. Компоненты вектора состояний системы со спектром №4

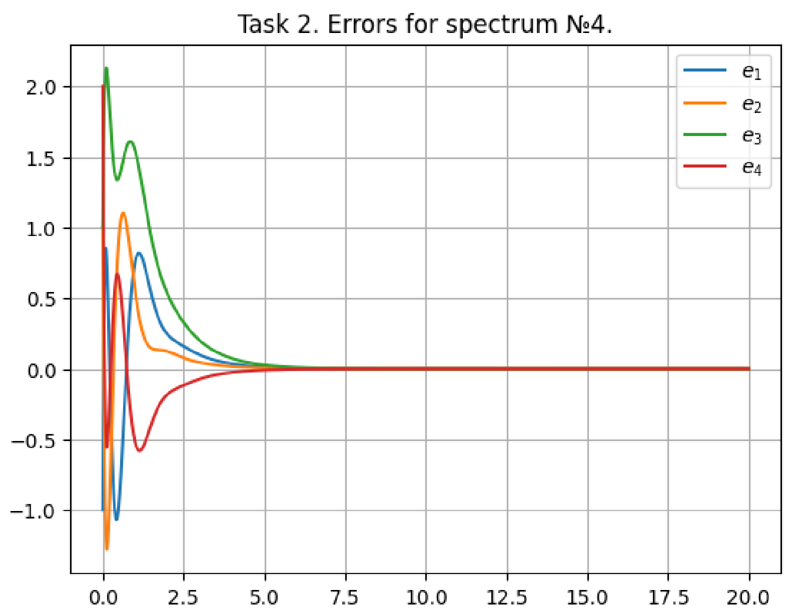

Рис. 16: Задание 2. Ошибка наблюдателя системы со спектром №4

3 Регулятор + наблюдатель

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{8}$$

Матрицы A, B и C:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -11 & -7 & 5 \\ -11 & 3 & -5 & 7 \\ -7 & -5 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 11 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма матрицы A:

$$A = PJP^{-1}, J = diag(\{-20, 4, 12, 16\})$$

При этом:

$$P^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Можем сделать вывод, что система является полностью управляемой, однако частично наблюдаемой (собственное число -20 не является наблюдаемым). При этом система обнаруживаема.

Построим регулятор, состоящий из наблюдателя $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$, где $u = K\hat{x}$. Матрицы K и L можем найти независимо, согласно алгоритмам, рассмотренным в прошлых заданиях. Матрицы Y для этого выберем следующим образом:

$$Y_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, Y_L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Желаемый спектр матриц $A + BK$ и $A + LC$ примем равным $\sigma = \{-10, -11, -12, -13\}$. Соответствующая матрица $G = diag(\sigma)$.

Можем представить систему в виде приведенной матрицы (имеющей блочно-треугольный вид):

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ \Theta & A + LC \end{bmatrix} \tag{9}$$