Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2

«Переходные процессы, свободное движение, устойчивость»
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант: 16

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

Предисловие

При выполнении данной лабораторной работы было решено использовать Python Control Systems Library. Данный инструмент является альтернативой Matlab, адаптированной для использования на языке Python и предоставляет широкий функционал для анализа и моделирования систем, а также синтеза регуляторов для управления.

Полный листинг моделирования систем представлен в jupyter notebook на GitHub.

1 Свободное движение

Рассмотрим систему второго порядка в форме В-В:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u \tag{1}$$

Согласно заданию, выберем три набора корней (λ_1, λ_2), удовлетворяющих модам из задания (2,3,8) и найдем небходимы пары коэффициентов (a_1, a_0):

1. Нейтральная и устойчивая апериодическая: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$; $a_1 = 1, a_0 = 0$
2. Нейтральная и неустойчивая апериодическая: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.3$; $a_1 = -0.3, a_0 = 0$
3. Пара неусточивых колебательных мод: $\lambda_1 = 0.4 + 2i, \lambda_2 = 0.4 - 2i$; $a_1 = -0.8, a_0 = 4.16$

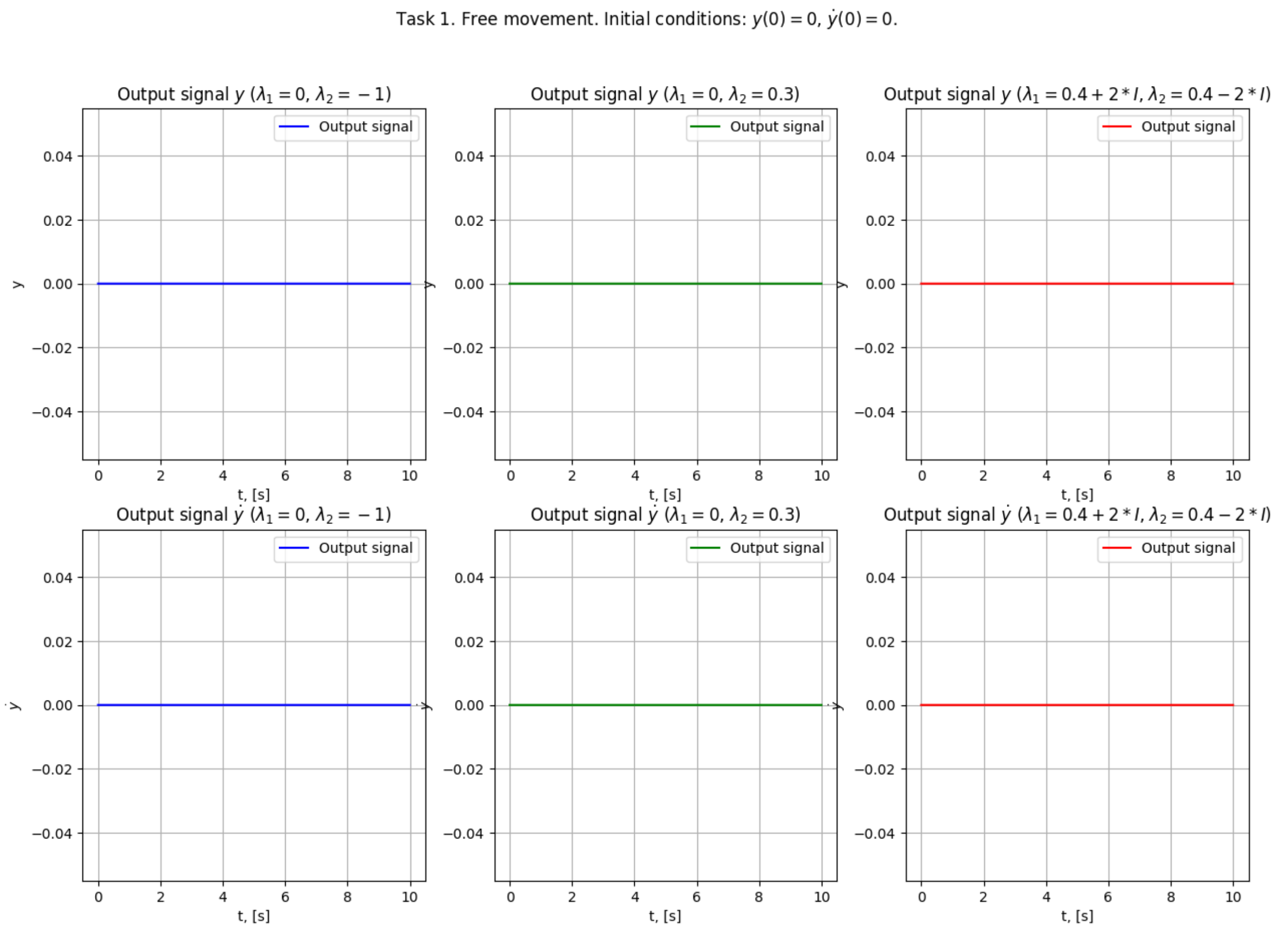


Рис. 1: Входные и выходные сигналы систем при нулевых начальных условиях (задание 1)

Вычисления пары (a_1, a_0) проведем, воспользовавшись теоремой Виета:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -a_1 \\ \lambda_1\lambda_2 = a_0 \end{cases}$$

Согласно корневому критерию, первый набор корней соответствует апериодической системе на границе устойчивости (оба корня действительные, неотрицательны и не кратные), второй - неустойчивой апериодической системе (корни действительные, один из корней имеет положительную действительную часть), третий - неустойчивой колебательной системе (пара комплексно сопряженных корней с положительной действительной частью).

Проведем моделирование поведения систем с нулевыми начальными условиями и при $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1$ (рис. 1 и рис. 2 соответственно).

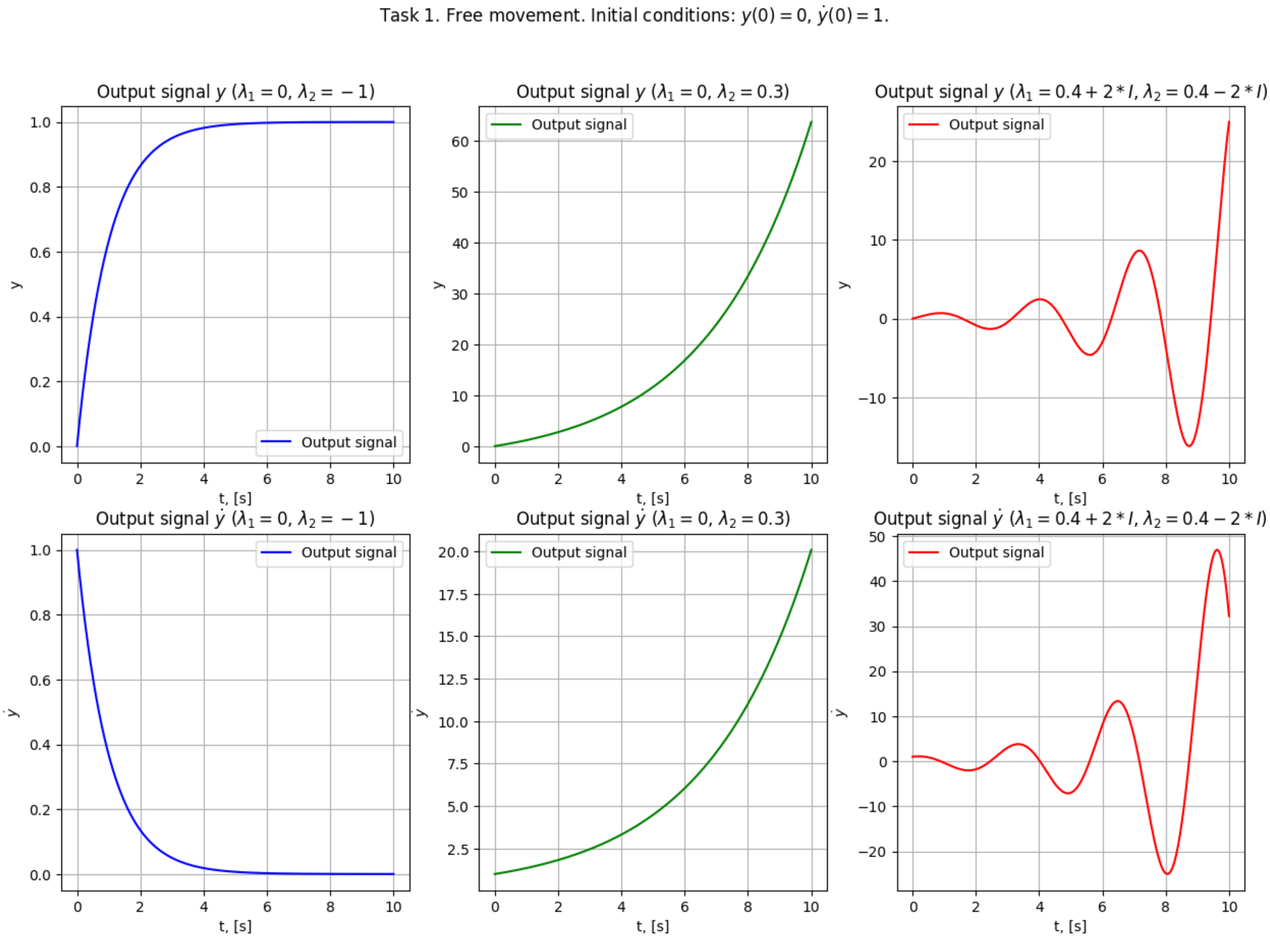


Рис. 2: Входные и выходные сигналы систем при ненулевых начальных условиях (задание 1)

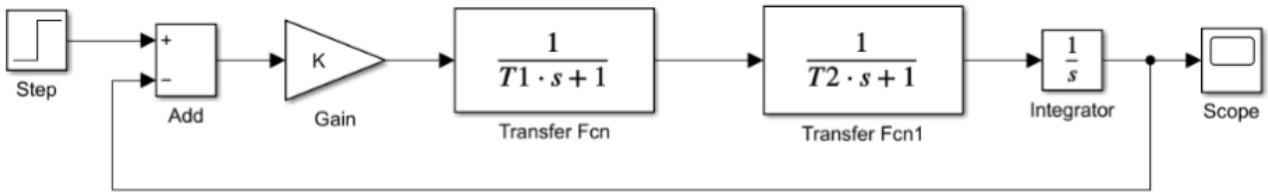
Заметим, что все системы ведут себя одинаково при задании нулевых начальных условий и подаче нулевого управляющего воздействия (они статичны в 0). При задании начальных условий системы ведут себя согласно аналитически предсказанному корневым критерием.

Аналитическое решение поведения системы (при свободном движении):

1. $y(t) = C_1 + C_2 e^{-t}$
2. $y(t) = C_1 + C_2 e^{0.3t}$
3. $y(t) = (C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t) e^{0.4t}$

2 Область устойчивости

Рассмотрим систему, заданную следующей блок-схемой:



Можем представить систему передаточной функцией:

$$W_0(s) = K, W_1(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}, W_2(s) = \frac{1}{T_2 s + 1}, W_3(s) = \frac{1}{s}$$

$$y = W_0 W_1 W_2 W_3(s)[u - y] \implies y = \frac{W_0 W_1 W_2 W_3}{1 + W_0 W_1 W_2 W_3}(s)[u], y = W(s)[u]$$

$$W(s) = \frac{\frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}}{1 + \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}} = \frac{K}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + K} = \frac{K}{T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + K} \tag{2}$$

Первый набор корней из первого задания: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Таким образом, мы не можем выбрать T_1. Система с передаточной функцией $\frac{\frac{K}{T_2}}{s^3 + \frac{1}{T_2} s^2 + \frac{K}{T_2}}$ не может быть асимптотически устойчивой согласно критерию Гурвица т.к. условие $a_1 = 0 > 0$ не может быть выполнено. Граница устойчивости достигается при любом $T_2 \geq 0$ и $K = 0$. Для анализа системы на устойчивость возьмем $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, тогда $T_1 = -1, T_2 = 1$.

Зафиксируем $T_2 = 1$. Запишем критерий Гурвица:

$$W(s) = \frac{\frac{K}{T_1}}{s^3 + \frac{T_1+1}{T_1} s^2 + \frac{1}{T_1} s + \frac{K}{T_1}} \implies \begin{cases} \frac{T_1+1}{T_1} > 0 \\ \frac{1}{T_1} > 0 \\ \frac{K}{T_1} > 0 \\ \frac{T_1+1}{T_1^2} > \frac{K}{T_1} \end{cases} \implies \begin{cases} T_1 > 0 \\ K > 0 \\ K < 1 + \frac{1}{T_1} \end{cases}$$

Таким образом, зона устойчивости ограничена прямыми $K = 0$, $T_1 = 0$ и гиперболой $K = 1 + \frac{1}{T_1}$ (рис. 3).

Зафиксируем $T_1 = -1$. Запишем критерий Гурвица:

$$W(s) = \frac{\frac{K}{T_2}}{s^3 + \frac{1-T_2}{T_2} s^2 - \frac{1}{T_2} s - \frac{K}{T_2}} \implies \begin{cases} \frac{1-T_2}{T_2} > 0 \\ -\frac{1}{T_2} > 0 \\ -\frac{K}{T_2} > 0 \\ \frac{T_2-1}{T_2^2} > -\frac{K}{T_2} \end{cases} \implies \begin{cases} T_2 < 0 \\ K > 0 \\ K < -1 + \frac{1}{T_2} \end{cases} \implies \varnothing$$

Таким образом, система не имеет зоны устойчивости.

Выполним моделирование систем, заданных следующими тройками параметров K, T_1, T_2 (рис. 4): (1,1,1) - устойчиваяя , (2,1,1) - на границе устойчивости и (3,2,1) - неустойчивая.

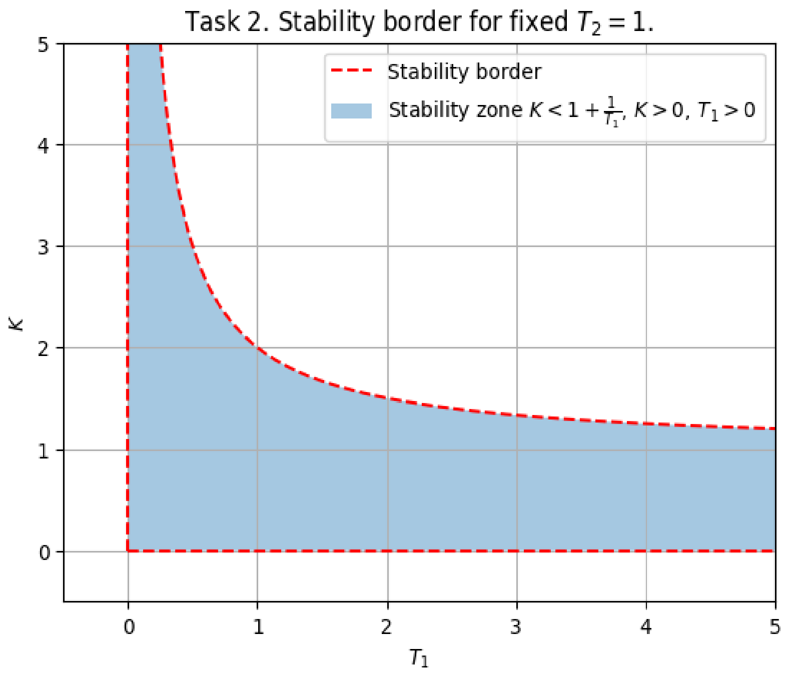


Рис. 3: Зона устойчивости при фиксированном $T_2 = 1$ (задание 2)

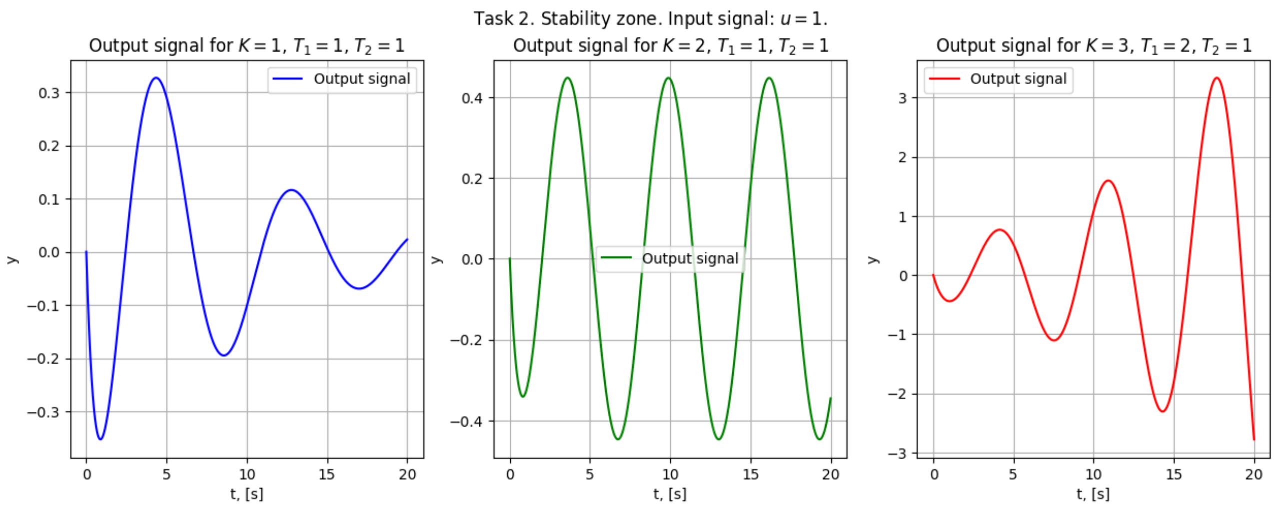


Рис. 4: Моделирование систем с разными типами устойчивости (задание 2)

3 Автономный генератор

Рассмотрим систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \tag{3}$$

Согласно теории однородных дифференциальных уравнений, можем записать решение системы следующим образом:

$$x(t) = e^{At}x(0) \implies y(t) = Ce^{At}x(0) \tag{4}$$

Желаемый вид выходного сигнала согласно условию: $y(t) = -\sin 5t + e^{-7}\sin 9t$. Решение такого вида достигается при следующем наборе корней характеристического полинома матрицы A:
$\lambda_1 = 5i, \lambda_2 = -5i, \lambda_3 = -7+9i, \lambda_4 = -7-9i$.

Представим матрицу A в Жордановой нормальной форме (изменим базис состояний). Тогда, можем записать систему (3) в виде:

$$A = TJT^{-1}, \begin{cases} \dot{x} = TJT^{-1}x \\ y = Cx \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = Te^{Jt}T^{-1}x(0) = Te^{Jt}\widetilde{x}(0) \\ y(t) = CTe^{Jt}T^{-1}x(0) = \widetilde{C}e^{Jt}\widetilde{x}(0) \end{cases}, \widetilde{x} = T^{-1}x, \widetilde{C} = CT \tag{5}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & -7 \end{bmatrix}, e^{Jt} = \begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t & 0 & 0 \\ -\sin 5t & \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7}\cos 9t & e^{-7}\sin 9t \\ 0 & 0 & -e^{-7}\sin 9t & e^{-7}\cos 9t \end{bmatrix}$$

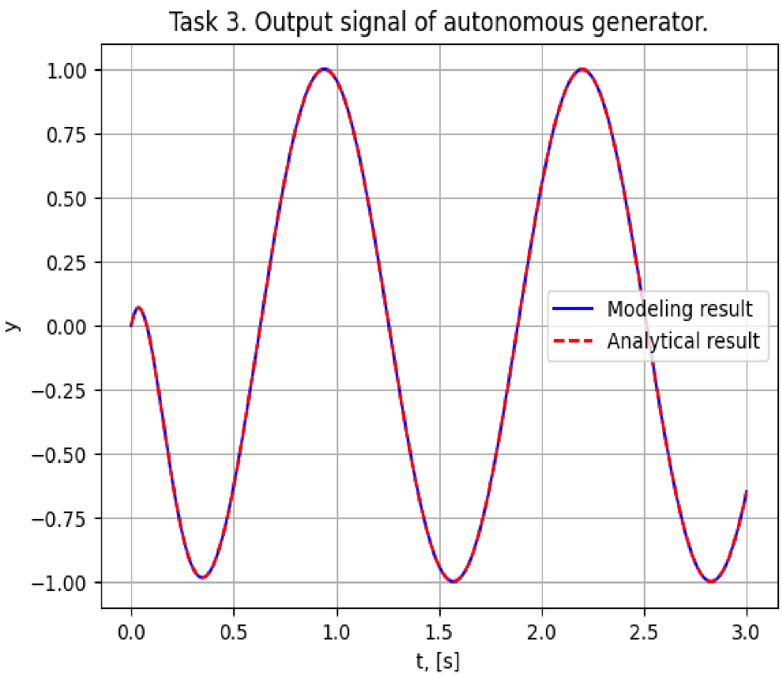


Рис. 5: Выход автономного генератора (задание 3)

Найдем подходящие матрицы $\widetilde{C}$ и $\widetilde{x}(0)$ для получения требуемого выходного сигнала:

$$y(t) = \widetilde{C}e^{Jt}\widetilde{x}(0) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 & \tilde{c}_2 & \tilde{c}_3 & \tilde{c}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 5t & \sin 5t & 0 & 0 \\ -\sin 5t & \cos 5t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-7}\cos 9t & e^{-7}\sin 9t \\ 0 & 0 & -e^{-7}\sin 9t & e^{-7}\cos 9t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(0)_1 \\ \tilde{x}(0)_2 \\ \tilde{x}(0)_3 \\ \tilde{x}(0)_4 \end{bmatrix} =$$

$$(\tilde{c}_1\tilde{x}(0)_1 + \tilde{c}_2\tilde{x}(0)_2)\cos 5t + (\tilde{c}_1\tilde{x}(0)_2 - \tilde{c}_2\tilde{x}(0)_1)\sin 5t + (\tilde{c}_3\tilde{x}(0)_3 + \tilde{c}_4\tilde{x}(0)_4)e^{-7t}\cos 9t +$$

$$(\tilde{c}_3\tilde{x}(0)_4 - \tilde{c}_4\tilde{x}(0)_3)e^{-7t}\sin 9t = y(t) = -\sin 5t + e^{-7}\sin 9t \implies$$

$$\implies \begin{cases} (\tilde{c}_1\tilde{x}(0)_1 + \tilde{c}_2\tilde{x}(0)_2) = 0 \\ (\tilde{c}_1\tilde{x}(0)_2 - \tilde{c}_2\tilde{x}(0)_1) = -1 \\ (\tilde{c}_3\tilde{x}(0)_3 + \tilde{c}_4\tilde{x}(0)_4) = 0 \\ (\tilde{c}_3\tilde{x}(0)_4 - \tilde{c}_4\tilde{x}(0)_3) = 1 \end{cases}, \begin{cases} \tilde{c}_2 = \tilde{x}(0)_1 = 0 \\ \tilde{c}_4 = \tilde{x}(0)_3 = 0 \\ \tilde{c}_3 = \tilde{x}(0)_2 = \tilde{x}(0)_4 = 1 \\ \tilde{c}_1 = -1 \end{cases}$$

Таким образом:

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

Проведем моделирование системы (5), зная матрицы $\widetilde{x}(0)$ и $\widetilde{C}$ (рис. 5). Как видно, выход системы, заданной найденными матрицами идентичен желаемому выходу.

4 Изучение канонической управляемой формы: фазовые портреты

Рассмотрим систему второго порядка (1) в свободном движении. Возьмем последний набор корней из 1-го задания: $\lambda_1 = 0.4 + 2i$, $\lambda_1 = 0.4 - 2i$. Данная система неустойчива и при ненулевых начальных условиях расходится. Проведем моделирование в форме В-В и в канонической управляемой форме (рис. 6).

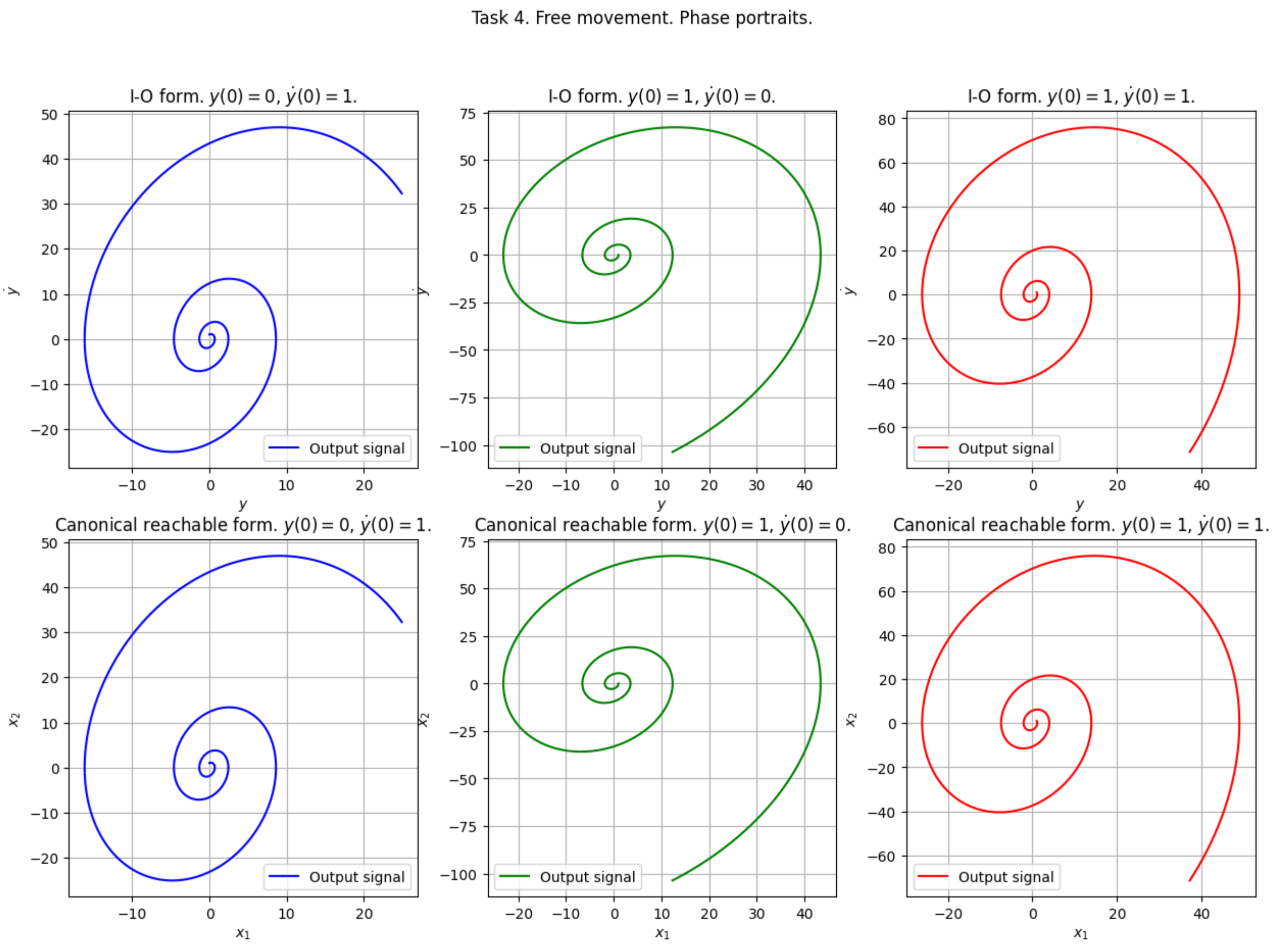


Рис. 6: Сравнение фазовых портретов в форме В-В и в канонической управляемой форме (задание 4)

Можем заметить, что фазовые портреты идентичны. Докажем это, рассмотрев матричное представление системы подробнее:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4.16 & 0.8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \implies y = x_1, \dot{y} = x_2$$

$$\ddot{y} = \dot{x}_2 = -4.16x_1 + 0.8x_2 \implies \ddot{y} - 0.8\dot{y} + 4.16y = 0$$

Как видно, системы эквивалентны и вектор состояния в канонической управляемой форме совпадает с вектором $[y, \dot{y}]^T$.

5 Выводы

В ходе данной лабораторной работы был получен опыт моделирования систем при различных начальных условиях со свободным движением. Также были использованы различные методы анализа систем на устойчивость (в частности корневой критерий и критерий Гурвица). Кроме того была изучена структура канонической управляемой формы и связь ее вектора состояний с выходом системы.

1. В первом задании поведение систем при ненулевых начальных условиях, предсказанное корневым критерием подтвердилось, что можно наблюдать на графиках и при оценке поведения аналитического решания однордного дифференциального уравнения. При нулевых же начальных условиях все системы покоятся в 0 при отсутствии управляющего воздействия (можно показать, что C_1 и C_2 в аналитическом решении для даннх систем равны 0 решением задачи Коши).

2. Во втором задании при анализе зоны устойчивости системы удалось показать, что добавление обратной связи в систему может позволить стабилизировать изначально неустойчивую систему. В то же время не все системы могут быть стабилизированы такким образом. Поведение систем согласовывалось с предсказанным критерием Гурвица.

3. В третьем задании перейдя в базис ЖНФ матрицы A с необходимыми собственными значениями удалось найти подходящие матрицы наблюдения и начальных условий для построения системы с желаемым поведением.

4. В четвертом задании доказана связь канонической управляемой формы и выхода системы.