Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет систем управления и робототехники

Курсовой проект

«Управление перевернутым маятником на тележке»
по дисциплине «Теория автоматического управления»

Подготовил: Дюжев Владислав Дмитриевич
Группа: R33353
Преподаватель: Пашенко А. В.

Санкт-Петербург 2023 г.

Содержание

1 Построение математической модели объекта

1.1 Вывод уравнений

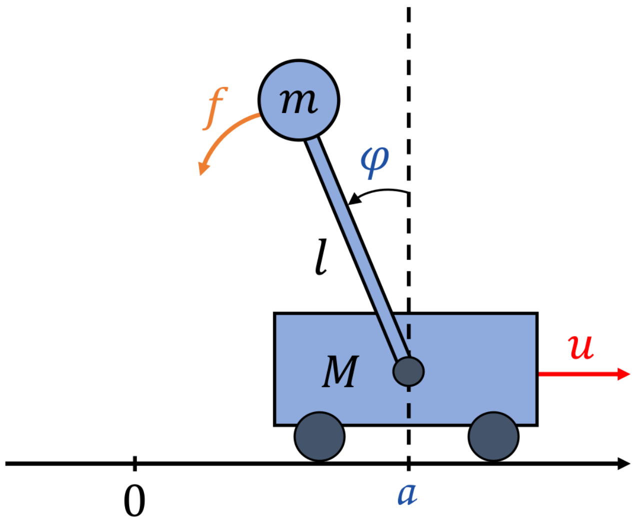

Рис. 1: Перевернутый маятник на тележке.

Рассмотрим систему перевернутого маятника на тележке (рис. 1). Введем следующие обозначения физических величин:

- a – линейная координата тележки;
- $\dot{a}$ – линейная скорость тележки;
- φ – угол отклонения маятника от вертикали;
- $\dot{\varphi}$ – угловая скорость маятника;
- f – вращающий внешний момент, действующий на маятник;
- u – сила действующая на тележку;
- M, m – массы тележки и маятника соответственно;
- l – длина маятника.

В качестве вектора состояния $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ выберем набор $a, \dot{a}, \varphi, \dot{\varphi}$. В роли управляющего воздействия примем u, в роли внешнего возмущения – f. Измеряемыми сигналами $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T$ будем считать a и φ.

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = \dot{a} \\ x_3 = \varphi \\ x_4 = \dot{\varphi} \\ y_1 = a \\ y_2 = \varphi \end{cases} \tag{1}$$

Для вывода математической модели данной физической системы воспользуемся уравнениями Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial T}{\partial a} = u \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = f + mgl\sin(\varphi) \end{cases}, \tag{2}$$

где T – кинетическая энергия системы.

$$T(t) = M\frac{\dot{a}^2}{2} + m\frac{(\frac{d}{dt}(l\cos(\varphi)))^2 + (-\frac{d}{dt}(l\sin(\varphi)) + \dot{a})^2}{2} = (M+m)\frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - ml\cos(\varphi)\dot{a}\dot{\varphi} \tag{3}$$

Подставив выражение для T в уравнения 2, получим уравнения математической модели системы:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{a} + ml(\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 - \cos(\varphi)\ddot{\varphi}) = u \\ ml^2\ddot{\varphi} - ml\ddot{a}\cos\varphi = f + mgl\sin(\varphi) \end{cases} \tag{4}$$

Тогда, выразив $\ddot{a}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \ddot{a} = -\frac{ml}{M+m}\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{ml}{M+m}\cos(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{M+m}u \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{l}\ddot{a}\cos(\varphi) + \frac{g}{l}\sin(\varphi) + \frac{1}{ml^2}f \end{cases} \tag{5}$$

Решив данную систему уравнений 5 относительно $\ddot{a}$ и $\ddot{\varphi}$:

$$\begin{cases} \ddot{a} = \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-ml\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2 + mg\cos(\varphi)\sin(\varphi) + \frac{\cos(\varphi)}{l}f + u) \\ \ddot{\varphi} = \frac{1}{M+m\sin(\varphi)^2}(-m\sin(\varphi)\cos(\varphi)\dot{\varphi}^2 + \frac{(M+m)g}{l}\sin(\varphi) + \frac{M+m}{ml^2}f + \frac{\cos(\varphi)}{l}u) \end{cases} \tag{6}$$

Представим математическую модель в терминах вектора состояния:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{M+m\sin(x_3)^2}(-ml\sin(x_3)x_4^2 + mg\cos(x_3)\sin(x_3) + \frac{\cos(x_3)}{l}f + u) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{M+m\sin(x_3)^2}(-m\sin(x_3)\cos(x_3)x_4^2 + \frac{(M+m)g}{l}\sin(x_3) + \frac{M+m}{ml^2}f + \frac{\cos(x_3)}{l}u) \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \tag{7}$$

1.2 Точки равновесия

В точках равновесия все компоненты производной вектора состояния по времени равны 0. Следовательно, полагая $u, f \equiv 0$ необходимо:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ \frac{1}{M+m\sin(x_3)^2}(-ml\sin(x_3)x_4^2 + mg\cos(x_3)\sin(x_3)) = 0 \\ x_4 = 0 \\ \frac{1}{M+m\sin(x_3)^2}(-m\sin(x_3)\cos(x_3)x_4^2 + \frac{(M+m)g}{l}\sin(x_3)) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Учитывая $x_4 = 0$ и $M + m\sin(x_3)^2 > 0$:

$$\begin{cases} x_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Заметим, однако, что с физической точки зрения условие $x_3 = \pi n$ эквивалентно $x_3 = 0$ (верхнее положение маятника) или $x_3 = \pi$ (нижнее положение маятника). В дальнейшем нас будет интересовать стабилизация системы около верхенего положения равновесия.

1.3 Линеаризация

Для линеаризации системы около векхней точки равновесия ($x = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$) представим некоторые функции от компонент вектора состояния в виде ряда Тейлора в данной точке:

$$\sin(x_3) = x_3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_3^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x_3) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x_3^{2n}}{(2n)!}$$

Приняв величины вектора состояния достаточно малыми ($x_3^2 \ll x_3$, $x_4^2 \ll x_4$), можем записать линеаризованные уравненя динамики системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{mg}{M} x_3 + \frac{1}{Ml} f + \frac{1}{M} u \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{(m+m)g}{Ml} x_3 + \frac{M+m}{Mml^2} f + \frac{1}{Ml} u \end{cases} \tag{10}$$

Можем представить линеаризованную систему в матричном виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Df \\ y = Cx \end{cases}, \tag{11}$$

где матрицы A, B, C, D имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{M+m}{Mml^2} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

2 Анализ математической модели