Tarea 4 - Solución
Matemática Estructural y Lógica

4 de abril de 2017

Esta solución tiene más pasos de los necesarios en pro de que cada resultado sea transparente

1. [1] De un ejemplo de una relación que sea

   a) simétrica y también antisimétrica

   La igualdad: $=$, Veamos que es tanto simétrica como antisimétrica

   Simétrica:

$$
\begin{aligned}
& = \text{ es simétrica} \\
\equiv\ & \langle \text{Def de simetría} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x = y \implies y = x) \\
\equiv\ & \langle \text{La igualdad es conmutativa} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x = y \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{La implicación es reflexiva} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : \texttt{true}) \\
\equiv\ & \langle \text{Identidad del } \wedge \rangle \\
& \texttt{true}
\end{aligned}
$$

   Antisimétrica:

$$
\begin{aligned}
& = \text{ es antisimétrica} \\
\equiv\ & \langle \text{Def de antisimetría} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x = y \wedge y = x \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{La igualdad es conmutativa} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x = y \wedge x = y \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{Idempotencia} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x = y \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{La implicación es reflexiva} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : \texttt{true}) \\
\equiv\ & \langle \text{Identidad del } \wedge \rangle \\
& \texttt{true}
\end{aligned}
$$

   b) antisimétrica pero no sea simétrica

   $\leq$. Veamos que es antisimétrica (mediante demostración) y que no es simétrica (mediante contraejemplo)

   Antisimétrica:

$$
\begin{aligned}
& \leq \text{ es antisimétrica} \\
\equiv\ & \langle \text{Def de antisimetría} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle a \leq b \equiv a < b \vee a = b \rangle \\
& (\forall x, y \mid : (x < y \vee x = y) \wedge (y < x \vee y = x) \\
& \qquad \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle {=}\text{es conmutativa} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : (x < y \vee x = y) \wedge (y < x \vee x = y) \\
& \qquad \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{Distributividad del } \vee \text{ sobre el } \wedge \rangle \\
& (\forall x, y \mid : (x < y \wedge y < x) \vee x = y \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{Por tricotomía solo una de las tres es} \\
& \quad \text{cierta: } a < b,\ b < a,\ a = b \rangle \\
& (\forall x, y \mid : \texttt{false} \vee x = y \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{Identidad del } \vee \rangle \\
& (\forall x, y \mid : x = y \implies x = y) \\
\equiv\ & \langle \text{Implicación es reflexiva} \rangle \\
& (\forall x, y \mid : \texttt{true}) \\
\equiv\ & \langle \text{Identidad del } \wedge \rangle \\
& \texttt{true}
\end{aligned}
$$

   No es simétrica: Contraejemplo $3 \leq 4$ pero $4 \not\leq 3$

2. [2] Sea X un conjunto cualquiera. Sean R y S relaciones de X a X, es decir $R : X \to X$, $S : X \to X$. Demuestre o refute (es decir, de un contraejemplo diciendo claramente quiénes son los conjuntos X, R y S)

   a) Si R y S son reflexivas, $R \cap S$ es reflexiva

$$
\begin{aligned}
& R \text{ y } S \text{ son reflexivas} \\
\equiv\ & \langle \text{Definición de reflexividad} \rangle \\
& (\forall x \in X \mid : xRx) \wedge (\forall x \in X \mid : xSx) \\
\equiv\ & \langle \text{Partir rango} \rangle \\
& (\forall x \in X \mid : xRx \wedge xSx) \\
\equiv\ & \langle \text{Definición de intersección} \rangle \\
& (\forall x \in X \mid : x\,(R \cap S)\,x) \\
\equiv\ & \langle \text{ Definición de reflexividad} \rangle \\
& R \cap S \text{ es reflexiva}
\end{aligned}
$$

b) Si R y S son reflexivas, $R \cup S$ es reflexiva

$$
\begin{aligned}
& R \text{ y } S \text{ son reflexivas,} \\
\equiv & \langle \text{Definición de reflexividad} \rangle \\
& (\forall x \in X \mid: xRx) \wedge (\forall x \in X \mid: xSx) \\
\equiv & \langle \text{Partir rango } \rangle \\
& (\forall x \in X \mid: xRx \wedge xSx) \\
\Rightarrow & \langle \text{Por debilitamiento, } a \wedge b \implies a \vee b \rangle \\
& (\forall x \in X \mid: xRx \vee xSx) \\
\equiv & \langle \text{Definición de unión } \rangle \\
& (\forall x \in X \mid: x\,(R \cup S)\,x) \\
\equiv & \langle \text{Definición de reflexividad} \rangle \\
& R \cup S \text{ es reflexiva}
\end{aligned}
$$

c) Si R y S son simétricas, $R \cap S$ es simétrica

$$
\begin{aligned}
& R \text{ y } S \text{ son simétricas} \\
\equiv & \langle \text{Definición de simetría} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: xRy \Rightarrow yRx) \wedge (\forall x, y \mid: xSy \Rightarrow ySx) \\
\equiv & \langle \text{Partir rango} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: (xRy \Rightarrow yRx) \wedge (xSy \Rightarrow ySx)) \\
\Rightarrow & \langle (a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \implies (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d) \rangle \\
& (\forall x, y \mid: xRy \wedge xSy \Rightarrow yRx \wedge ySx) \\
\equiv & \langle \text{Definición de intersección} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: x\,(R \cap S)\,y \Rightarrow y\,(R \cap S)\,x) \\
\equiv & \langle \text{Definición de simetría} \rangle \\
& R \cap S \text{ es simétrica}
\end{aligned}
$$

d) Si R y S son simétricas, $R \cup S$ es simétrica

A demostrar $(\forall x, y \mid: x\,(R \cup S)\,y \Rightarrow y\,(R \cup S)\,x)$

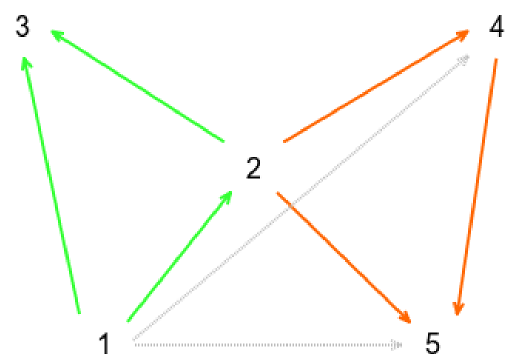
$$
\begin{aligned}
& R \cup S \text{ es simétrica} \\
& \langle \text{Definición de simetría} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: x\,(R \cup S)\,y \Rightarrow y\,(R \cup S)\,x) \\
\equiv & \langle \text{Definición de unión} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: xRy \vee xSy \Rightarrow yRx \vee ySx) \\
\equiv & \langle \text{Por hipótesis, } R \text{ es simétrica} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: yRx \vee xSy \Rightarrow yRx \vee ySx) \\
\equiv & \langle \text{Por hipótesis, } S \text{ es simétrica} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: yRx \vee ySx \Rightarrow yRx \vee ySx) \\
\equiv & \langle \text{Implica es reflexiva} \rangle \\
& \texttt{true}
\end{aligned}
$$

e) Si R y S son transitivas, $R \cap S$ es transitiva

$$
\begin{aligned}
& R \text{ y } S \text{ son transitivas} \\
\equiv & \langle \text{Definición de transitividad} \rangle \\
& (\forall x, y, z \mid: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \wedge \\
& (\forall x, y \mid: xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz) \\
\equiv & \langle \text{Partir rango} \rangle \\
& (\forall x, y, z \mid: (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz) \wedge (xSy \wedge ySz \Rightarrow xSz)) \\
\Rightarrow & \langle (a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow d) \implies (a \wedge c \Rightarrow b \wedge d) \rangle \\
& (\forall x, y, z \mid: xRy \wedge xSy \wedge yRz \wedge ySz \Rightarrow xRz \wedge xSz) \\
\equiv & \langle \text{Definición de intersección} \rangle \\
& (\forall x, y, z \mid: x\,(R \cap S)\,y \wedge y\,(R \cap S)\,z \Rightarrow x\,(R \cap S)\,z) \\
\equiv & \langle \text{Definición de transitividad} \rangle \\
& R \cap S \text{ es transitiva}
\end{aligned}
$$

f) Si R y S son transitivas, $R \cup S$ es transitiva **Falso**

Contraejemplo: $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$, $S = \{(2, 4), (4, 5), (2, 5)\}$ son transitivas pero $R \cup S = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 4), (4, 5), (2, 5)\}$ no lo es ya que, aunque $1\,(R \cup S)\,2 \wedge 2\,(R \cup S)\,4$ no se tiene que $1\,(R \cup S)\,4$



3. [1] Muestre que R es asimétrica sí y solo sí $R \cap R^T = \varnothing$

$$
\begin{aligned}
& R \cap R^T = \varnothing \\
\equiv & \langle \text{Def de } \varnothing \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: x\left(R \cap R^T\right) y \equiv \texttt{false}\right) \\
\equiv & \langle \text{Def de intersección} \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: xRy \wedge xR^Ty \equiv \texttt{false}\right) \\
\equiv & \langle p \equiv \texttt{false} \equiv \neg p \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: \neg\left(xRy \wedge xR^Ty\right)\right) \\
\equiv & \langle \text{DeMorgan} \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: \neg xRy \vee \neg xR^Ty\right) \\
\equiv & \langle \text{Def de transpuesta} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: \neg xRy \vee \neg yRx) \\
\equiv & \langle \text{Def de asimetría} \rangle \\
& R \text{ es asimétrica}
\end{aligned}
$$

4. [1] Muestre que R es antisimétrica sí y solo sí $R \cap R^T \subseteq I$

$$
\begin{aligned}
& R \cap R^T \subseteq I \\
\equiv & \langle \text{Def de contenencia} \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: x \left(R \cap R^T\right) y \implies xIy\right) \\
\equiv & \langle \text{Def de Identidad} \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: x \left(R \cap R^T\right) y \implies x = y\right) \\
\equiv & \langle \text{Def de intersección} \rangle \\
& \left(\forall x, y \mid: xRy \wedge xR^T y \implies x = y\right) \\
\equiv & \langle \text{Def de transpuesta} \rangle \\
& (\forall x, y \mid: xRy \wedge yRx \implies x = y) \\
\equiv & \langle \text{Def de antisimetría} \rangle \\
& R \text{ es antisimétrica}
\end{aligned}
$$